JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HALPHEN

Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique, et sur les questions analogues dans l'espace (suite)

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 2 (1876), p. 371-408.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1876_3_2__371_0>

Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique, et sur les questions analogues dans l'espace (suite);

PAR M. HALPHEN.

§ II.

25. Ce paragraphe sera consacré à des applications de quelques-uns des théorèmes obtenus dans le précédent. Je donnerai d'abord une application du théorème III. Celle que je choisis nous conduira à une démonstration nouvelle d'une formule qui attira, il y a quelques années, l'attention des géomètres. Au point de vue du problème posé au début de ce Mémoire, cette application présente aussi cette particularité remarquable, que non-seulement il paraît presque impossible de réussir à former l'équation de la courbe Φ, dont nous allons chercher le degré, mais qu'il semble même bien difficile de mettre sous une forme entièrement explicite l'équation différentielle que je vais considérer.

Une courbe plane de degré μ est, comme on sait, déterminée par un nombre P de points,

$$P = \frac{\mu(\mu+3)}{2}.$$

Je considère l'équation différentielle des courbes de degré μ, qui, dans un plan, passent par $P - n = k$ points donnés. Les points d'une courbe S, qui satisfont à la condition exprimée par cette équation différentielle, sont ceux en lesquels il existe un contact d'ordre n entre S et une courbe de degré μ, passant par les k points donnés.

L'équation différentielle s'obtient en égalant à zéro un déterminant Δ composé : 1° de k lignes telles que

$$\text{(A)} \qquad 1, \quad x_j, \quad y_j, \quad x_j^2, \quad \ldots, \quad x_j y_j^{\mu-1}, \quad y_j^{\mu}, \quad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

où x_j, y_j sont les coordonnées de l'un des k points donnés; 2° de la ligne

$$\text{(B)} \qquad 1, \quad x, \quad y, \quad x^2, \quad \ldots, \quad xy^{\mu-1}, \quad y^{\mu};$$

3° des n lignes (C) formées avec les dérivées 1ières, 2ièmes, ..., $n$ièmes des termes de (B).

Sans développer ce déterminant, sans lui faire subir presque aucune transformation, on va voir qu'il est facile de calculer immédiatement α et β. J'aurai, pour ce calcul, besoin de faire appel à la proposition suivante, que je laisse au lecteur le soin facile de démontrer :

Soit D *un déterminant composé de la ligne*

$$z^{q_0}, \quad z^{q_1}, \quad z^{q_2}, \quad \ldots, \quad z^{q_n},$$

et des n lignes obtenues en prenant successivement les dérivées 1ières, 2ièmes, ..., $n$ièmes *des termes de la première. Soit* Q *le produit des différences des exposants* q, *savoir :*

$$\begin{aligned} Q = (q_n - q_0)(q_{n-1} - q_0)\ldots(q_1 - q_0)(q_n - q_1)(q_{n-1} - q_1)\ldots \\ \times (q_2 - q_1)\ldots(q_n - q_{n-1}), \end{aligned}$$

on a

$$D = Q z^{\Sigma q - \frac{n(n+1)}{2}}.$$

26. Pour calculer α, conformément au théorème III, je substitue à y, dans Δ, un développement procédant suivant les puissances entières et ascendantes de $(x - \xi)^{\frac{1}{2}}$ et commençant par une constante, et je cherche la partie principale du résultat. Je pose $x - \xi = z$. Dans la ligne (B), chaque terme de la forme x^q, étant développé, contient toutes les puissances entières de z, depuis la puissance zéro jusqu'à la puissance q. Chaque terme de la forme $x^q y^p$ devient un développement procédant suivant les puissances ascendantes et entières de $z^{\frac{1}{2}}$ et commençant par une constante. Par des combinaisons linéaires convenables, on amènera la ligne (B) à se composer de termes dont les parties principales sont les suivantes :

$$(\mathrm{B}') \qquad 1, \quad z^{\frac{1}{2}}, \quad z, \quad z^{\frac{3}{2}}, \quad z^{2}, \quad \ldots, \quad z^{\frac{p-1}{2}}, \quad z^{\frac{p}{2}}.$$

Par ces combinaisons, les lignes (A) restent composées de constantes. Quant aux lignes (C'), transformées des lignes (C), elles se composent des dérivées des termes de la ligne (B'), prises par rapport à z; car les dérivées, prises par rapport à x ou à z, sont les mêmes. Par suite, les parties principales des termes des lignes (C') sont les dérivées, par rapport à z, des parties principales des termes de (B'). Donc, après la substitution, la partie principale de Δ est, à un facteur constant près, celle d'un déterminant formé : 1° d'une ligne dont les termes sont $(n+1)$ termes de (B'); 2° de n lignes composées des dérivées successives des termes de la précédente. Les $(n+1)$ termes doivent être choisis dans (B'), de manière que l'ordre de la partie principale du déterminant ainsi formé soit le plus petit possible.

Or un déterminant ainsi composé est un cas particulier du déterminant D considéré au numéro précédent.

On voit immédiatement que l'ordre le plus petit possible, pour un pareil déterminant, s'obtient en prenant les $(n+1)$ termes de gauche de (B'). Cet ordre minimum ne peut s'obtenir que par cette seule combinaison, ainsi que cela résulte de la proposition ci-dessus; donc c'est bien le degré de la partie principale de Δ; par suite, le degré de la partie principale de Δ est

$$0+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{n}{2}-\frac{n(n+1)}{2}=-\frac{n(n+1)}{4}.$$

Mais, d'après le théorème III, ce degré est égal à $-\frac{\alpha}{2}$. Donc

$$\alpha=\frac{n(n+1)}{2}.$$

27. Pour calculer β, je substitue à y, dans Δ, un développement procédant suivant les puissances descendantes et entières de x, commençant par un terme du premier degré, et, conformément au théorème III, je cherche le degré de la partie principale dans le résultat. Le calcul est ici analogue au précédent. Par des combinaisons linéaires, je change la ligne (B) en une ligne (B″), composée de termes qui, ordonnés suivant les puissances descendantes de x, ont les parties principales suivantes :

$$(\mathrm{B}'') \qquad x^{\mu-p}, \quad x^{\mu-p+1}, \quad \ldots, \quad x^{\mu-1}, \quad x^{\mu}.$$

Les lignes (C″), transformées des lignes (C), sont composées des dérivées des termes de (B″). En répétant les raisonnements ci-dessus, on voit que le degré de Δ est celui du déterminant formé avec les $(n+1)$ derniers termes écrits dans (B″) et les dérivées de ces termes. Ce degré est donc

$$\mu+(\mu-1)+(\mu-2)+\ldots+(\mu-n)-\frac{n(n+1)}{2}=(n+1)(\mu-n).$$

D'après le théorème III, ce degré est aussi égal à β; donc

$$\beta=(n+1)(\mu-n).$$

J'ai donc la proposition suivante :

Théorème XI. — *Les points d'une courbe plane* S, *de degré* m, *en chacun desquels il existe un contact d'ordre* n *entre cette courbe et une courbe de degré* μ *passant par* $\frac{\mu(\mu+3)}{2}-n$ *points donnés dans le plan de* S, *sont les intersections de* S *avec une autre courbe dont le degré est*

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{M} &= \frac{n(n+1)}{2}(m-1)+(n+1)(\mu-n)\\ &= \frac{n(n+1)}{2}(m-3)+(n+1)\mu. \end{aligned}\right.$$

Si la courbe S n'a aucune singularité, le nombre des points considérés est mM. C'est en quoi consiste la formule remarquable à laquelle j'ai fait allusion au début de ce paragraphe (n° 25), et qui est due à M. de Jonquières [*].

[*] *Comptes rendus*, t. LXIII, p. 423. *Voyez* aussi une Note de M. Cayley, *ibid.*, p. 666.

28. Les résultats fournis par la formule (35) présentent, dans quelques cas, avec l'énoncé du théorème XI lui-même, des désaccords apparents, dont il ne sera peut-être pas inutile de dire quelques mots.

Je suppose, par exemple, $\mu = 2$, $n = 5$. La formule (35) donne alors

$$M = 15m - 33.$$

Les points de la courbe S, dont il s'agit ici, sont ce qu'on appelle, d'après M. Cayley, les points *sextactiques*. Or on sait qu'ils sont les intersections de S et d'une courbe de degré

$$M' = 12m - 27 \text{ [*]}.$$

Il y a donc là un désaccord qu'il s'agit d'expliquer. La différence $(M - M')$ est égale à $3(m - 2)$. C'est le degré de la courbe *hessienne*, dont les intersections avec S sont les points d'inflexion de S. Cette circonstance suggère l'idée que, dans ce cas, la courbe de degré M se décompose peut-être en la hessienne et la courbe de degré M'. C'est, en effet, ce qui a lieu. *A priori*, on s'en rend compte en remarquant qu'une tangente d'inflexion, comptée deux fois, peut être considérée comme une conique ayant, avec la courbe, six points d'intersection réunis au point d'inflexion. Au point de vue algébrique, voici comment cette circonstance est mise en évidence. Si, dans le cas actuel, on effectue le calcul du déterminant Δ, on y trouve le facteur $\frac{d^2y}{dx^2}$. Voici le résultat, où j'emploie des accents pour désigner les dérivées :

$$\Delta = y'' \begin{vmatrix} \frac{y'''}{6} & \frac{y''}{2} & 0 \\ \frac{y^{\text{iv}}}{24} & \frac{y'''}{6} & \frac{y''}{2} \\ \frac{y^{\text{v}}}{120} & \frac{y^{\text{iv}}}{24} & 2\frac{y'''}{6} \end{vmatrix} = y''f. \tag{36}$$

Ainsi l'équation différentielle se décompose en deux autres : $y'' = 0$,

[*] Ce résultat est dû à M. Cayley (*Comptes rendus*, t. LXII, p. 590).

$f = 0$; par suite aussi, la courbe de degré M se décompose en la hessienne et en une seconde courbe.

29. Je suppose, en second lieu, $\mu = 3$, $n = 8$, $m = 3$. Il s'agit ici, non plus d'une courbe S, de degré quelconque, mais d'une courbe du troisième degré. En un quelconque ω des points considérés, une autre courbe Σ, du troisième degré, a un contact du huitième ordre avec S, tout en passant par un point donné a. Or toutes les courbes du faisceau, déterminé par S et Σ, ont en ω, avec S, des contacts du huitième ordre. On voit par là que chaque point, tel que ω, ne dépend pas du point a. Les points dont il s'agit sont ceux en lesquels *neuf points consécutifs de la courbe* S *sont les intersections de deux courbes du troisième degré*. Mais les points d'inflexion de S satisfont à cette condition; car, si $T = 0$ est l'équation d'une tangente d'inflexion, toutes les courbes du faisceau $S + \lambda T^3 = 0$ ont, avec S, au point d'inflexion, un contact du huitième ordre. Pour cette raison, il se présente ici, dans le calcul, une décomposition de l'équation différentielle analogue à celle du numéro précédent.

Je n'entrerai pas ici dans d'autres détails à ce sujet. Je me contente d'observer que la formule (35) donne, pour le cas actuel, $M = 27$. Si l'on en retranche le degré de la hessienne qui est égal à 3, on trouve que les points ci-dessus sont les intersections de la cubique avec une courbe du vingt-quatrième degré. Dans le cas d'une cubique de sixième classe, ils sont donc au nombre de $3 \times 24 = 72$.

30. J'applique maintenant le théorème V à l'équation différentielle du n° **25**, et je conclus que :

Théorème XII. — *Sur une courbe plane, qui ne contient que des branches simples, et dont la classe et le degré sont c et m, le nombre des points en chacun desquels il existe un contact d'ordre n entre cette courbe et une autre courbe de degré μ, qui passe en $\frac{\mu(\mu+3)}{2} - n$ points donnés, est*

$$N = \frac{n(n+1)}{2}(c - 2m) + (n+1)\mu m. \tag{37}$$

A cause des remarques du n° **28**, pour le cas des points sextactiques, on devra retrancher $3(c-m)$, et la formule se réduit à $12c-15m$.

A cause des remarques du n° **29**, pour avoir le nombre des points ω d'une cubique de la quatrième classe, on devra retrancher celui des points d'inflexion qui est égal à 3. On trouve alors que le nombre des points ω est égal à 6 pour une cubique de quatrième classe.

31. Pour compléter la formule (37), il faudrait tenir compte des singularités quelconques des courbes S, suivant les principes exposés au n° **13**. Je n'entreprendrai pas de résoudre un problème aussi difficile, et je me bornerai à tenir compte des rebroussements ordinaires, de manière à pouvoir faire l'application du théorème IX.

Un rebroussement ordinaire est représenté par

$$x-\xi=t^2,\quad y-\eta=At^2+Bt^3+Ct^4+\ldots,$$

ou, si l'on veut, par un développement de y suivant les puissances ascendantes et entières de $(x-\xi)^{\frac{1}{2}}$, commençant par une constante, mais où manque le terme en $(x-\xi)^{\frac{1}{2}}$. En employant ce développement, on voit, d'après le n° **17**, que si on le substitue à y, dans Δ, la partie principale du résultat sera de l'ordre $-\frac{7}{2}$. Par suite, le calcul de γ ne diffère de celui de α (n° **26**) qu'en ce que, dans la ligne (B'), le terme dont la partie principale est $z^{\frac{1}{2}}$ manque ici. L'ordre de la partie principale du résultat est, par suite, augmenté de $\frac{n}{2}$; par suite, on a

$$\gamma=\alpha-n=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Donc le théorème IX donne ici le suivant :

THÉORÈME XIII. — *Sur une courbe, de degré m, de classe c, ne contenant que des branches simples et des branches à rebroussement ordinaire, ces dernières au nombre de $\varkappa$, le nombre des points en chacun desquels il existe un contact d'ordre n entre cette courbe et une autre* *courbe de degré* μ, *qui passe par* $\frac{\mu(\mu+3)}{2} - n$ *points donnés, est*

$$(38)\qquad N = \frac{n(n+1)}{2}(c-2m) + (n+1)\mu m + \frac{n(n-1)}{2}\iota.$$

Pour les points sextactiques, en tenant compte de la remarque faite précédemment (n° **28**), la formule (38) devra être réduite à $12c - 15m + 9\iota$ [*].

Pour les points ω (n° **29**), on trouvera que, sur une cubique de troisième classe, leur nombre se réduit à zéro Ce résultat, comme on le verra plus loin, pouvait être prévu et sert de vérification (*voir* n° **32**).

Connaissant les trois coefficients α, β, γ relatifs à l'équation différentielle envisagée, je puis, conformément au n° **17**, trouver par les formules (23) les coefficients α', β', γ' relatifs à l'équation différentielle qui se déduit de la proposée par une transformation corrélative. J'obtiens ainsi la proposition suivante :

Théorème XIV. — *Les points d'une courbe plane* S, *de degré m, en chacun desquels cette courbe a un contact d'ordre n avec une courbe de classe* μ, *qui touche* $\frac{\mu(\mu+3)}{2} - n$ *droites données, sont les intersections de* S *avec une autre courbe dont le degré est*

$$(39)\qquad M = \left[(n+1)\mu + \frac{n(n-5)}{2}\right](m-1) - (n-2)n.$$

Si la courbe S *ne contient que des branches simples et des rebroussements ordinaires, ces derniers au nombre de* ι, *et que sa classe soit c, le nombre des points est*

$$(40)\qquad N = \left[(n+1)\mu + \frac{n(n-5)}{2}\right]c - n(n-2)m + \frac{n(n-1)}{2}\iota.$$

La formule (39) ne paraît pas donner lieu à des observations analogues à celles que j'ai faites plus haut (n^{os} **28** et **29**), à propos de la

[*] Cette formule coïncide avec une de celles qu'a données M. Cayley (*Comptes rendus*, t. LXIII, p. 10). M. Zeuthen a également donné cette formule.

formule (35). Par exemple, pour $\mu = 2$, $n = 5$, elle donne bien $M = 12m - 27$, comme cela doit être.

Mais, pour ce cas particulier, la formule (40) donne à son tour un résultat en apparence inexact. A la décomposition Δ en deux facteurs, dont l'un est y'' (nº **28**), correspond ici une diminution d'une unité dans le degré de l'équation différentielle par rapport à y''. Par suite, dans le cas envisagé, le coefficient γ n'est pas égal à 10, comme l'indique la formule (40), mais il s'abaisse à 9, comme plus haut.

32. Nous avons trouvé, dans le numéro précédent, que, sur une cubique de troisième classe, le nombre des points ω en lesquels neuf points consécutifs de la courbe sont les pivots d'un faisceau de courbes du troisième degré, se réduit à zéro. De même aussi on trouverait, d'après un autre résultat du même numéro, que, sur la même courbe, le nombre des points sextactiques est également zéro. Ces deux propriétés pouvaient être prévues. On sait, en effet, qu'une cubique de troisième classe peut être, par une infinité de transformations homographiques, changée en elle-même. On peut notamment faire en sorte qu'un point arbitraire m de la courbe (sauf le point d'inflexion et le point de rebroussement) ait pour transformé un autre point arbitraire m' de la même courbe. Si donc un point m de la cubique de troisième classe jouissait de la propriété attribuée aux points ω, ou bien encore était un point sextactique, il en serait de même de tous les points de la courbe, car ces propriétés se conservent dans toute transformation homographique. Il est donc prouvé qu'aucun point de la courbe ne peut jouir de ces propriétés. Pour la même raison, le nombre des points d'une cubique de troisième classe, jouissant d'une propriété que n'altère aucune transformation homographique, se réduit toujours à zéro.

La même remarque s'applique à toutes les courbes susceptibles de se transformer en elles-mêmes par des transformations homographiques qui permettent de faire correspondre entre eux deux points arbitraires de la courbe. L'étude des lignes qui jouissent de cette propriété a fait l'objet de plusieurs travaux dus à MM. Klein et Lie [*]. Parmi

[*] *Math. Ann.*, *Comptes rendus*, année 1870.

ces lignes se trouvent les courbes planes dont l'équation homogène est

$$(41)\qquad x^p y^q = A z^{p+q},$$

A étant une constante. Ces courbes ont été aussi considérées par M. Fouret [*]. Quelques mots suffiront à établir la propriété dont il s'agit, à l'égard des courbes représentées par (41).

Considérons la substitution

$$(42)\qquad x = ax',\quad y = by',\quad z = cz'.$$

La transformée de (41) est

$$x'^p y'^q = \frac{c^{p+q}}{a^p b^q} A z'^{p+q}.$$

Il suffit donc que l'on ait $c^{p+q} = a^p b^q$ pour que la transformée coïncide avec la courbe première. Dans cette transformation, le triangle de référence ne change pas, et les sommets de ce triangle sont les seuls points qui coïncident respectivement avec leurs transformés. Si dans (42) on suppose que x, y, z et x', y', z' soient les coordonnées de deux points arbitraires m, m' de la courbe (41), ces équations déterminent a, b, c, et, par suite, la transformation homographique; mais alors la condition $c^{p+q} = a^p b^q$ se trouve satisfaite. Donc on peut, par une transformation homographique, changer la courbe (41) en elle-même, de manière qu'un point arbitraire m de la courbe ait pour transformée un point arbitraire m' de la même courbe. Il y a toutefois exception pour les sommets du triangle de référence. Je n'aurai à considérer ici que les cas où la courbe (41) est algébrique. Il faut et il suffit pour cela que les nombres p et q soient commensurables. On peut alors, sans restreindre la généralité, les supposer *entiers, positifs* et *premiers entre eux*. Alors la courbe (41) passe aux deux sommets ($x = 0$, $z = 0$) et ($y = 0$, $z = 0$) du triangle de référence et non au troisième. Ces deux sommets sont des points singuliers. En ($x = 0$, $z = 0$), la courbe se compose d'un système circulaire

---

[*] *Comptes rendus*, année 1874.

de branches où l'on a $r = p$, $\rho = q$. En ($y = 0$, $z = 0$), on a un système circulaire $r = q$, $\rho = p$. Il est manifeste que la courbe ne possède en dehors de ces deux points ni inflexion, ni singularité, car les singularités se conservent dans toute transformation homographique.

Toutes les fois qu'on considérera une condition que n'altèrent pas les transformations homographiques, les courbes (41) pourront servir d'utile vérification; car on devra trouver que les points satisfaisant à la condition y sont tous réunis aux deux points singuliers. Pour cette vérification, on aura besoin de connaître la classe de la courbe (41). Or cette courbe jouit encore de la propriété de se reproduire elle-même par des transformations corrélatives qui n'altèrent pas le triangle de référence. Cette propriété, qui a été signalée par les auteurs précités, se démontre aisément. Je ne m'y arrête pas. Je me borne à faire remarquer que les deux points singuliers, dans ces transformations, se permutent entre eux. Je ferai à la courbe (41) l'application des théorèmes VIII et X.

33. Pour appliquer le théorème VIII, il nous faut connaître le nombre i' relatif à la courbe (41). D'après la définition de i', ce sera $(p - q)$ ou $(q - p)$, suivant que le premier ou le second de ces nombres sera positif. Soit $q < p$, on aura

$$N = (\alpha + \beta)(p + q) + \gamma(p - q).$$

Or $(\alpha + \beta)$ est essentiellement positif, ainsi qu'on l'a vu au n° **17**. Quant à γ, c'est le degré de l'équation différentielle relativement à $\frac{d^2y}{dx^2}$. Donc γ est aussi positif et ne peut être nul; donc N ne peut jamais être nul. Rapprochant ce résultat de celui du numéro précédent, je conclus que :

A l'exception de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ (à laquelle le théorème VIII ne s'applique pas), *il n'existe aucune différentielle algébrique du second ordre, qui se reproduise elle-même par toute transformation homographique.*

34. J'applique maintenant à la courbe (41) le théorème X, relatif à une équation différentielle du troisième ordre. Soient λ, μ et λ', μ' les coefficients qui correspondent à $\frac{\rho}{r} = \frac{q}{p}$ et à $\frac{\rho}{r} = \frac{p}{q}$. On aura, théorème **X**,

$$(43)\qquad \begin{cases} N = (\alpha+\beta)(p+q) + \lambda(p-q) + \mu(2p-q) \\ \qquad + \lambda'(q-p) + \mu'(2q-p). \end{cases}$$

Je vais chercher s'il est possible que l'équation différentielle considérée se reproduise elle-même par les transformations homographiques. Si cela est on devra, d'après le n° **32**, avoir $N = 0$, quels que soient p et q, entiers, positifs et premiers entre eux. On aura donc nécessairement

$$\alpha+\beta+\lambda+2\mu-\lambda'-\mu'=0,$$
$$\alpha+\beta-\lambda-\mu+\lambda'+2\mu'=0;$$

d'où je conclus

$$2\lambda+3\mu = 2\lambda'+3\mu'.$$

Soient m, m' les sommets du contour (C) (n° **21**), dont les coordonnées sont, pour m, $u=\lambda+\mu$, $v=\lambda+2\mu$, et, pour m', $u'=\lambda'+\mu'$, $v'=\lambda'+2\mu'$. La dernière relation donne $u+v=u'+v'$. Les points m, m' doivent donc être situés sur une même parallèle à la droite $u+v=0$, ce qui ne se peut, à cause des limites de la partie utile du contour, sans que m et m' coïncident. Mais les points m, m', qui correspondent à deux valeurs réciproques de $\frac{\rho}{r}$, aussi écartées que l'on veut, puisque p et q sont arbitraires, ne peuvent coïncider que si la partie utile de (C) se réduit à un seul sommet; mais alors λ se réduit à zéro. Cette supposition, jointe à $\mu'=\mu$, réduit (43) à la forme

$$N = (\alpha+\beta+\mu)(p-q).$$

Or $(\alpha+\beta)$ ne peut être négatif (n° **17**); quant à μ, c'est un nombre essentiellement positif, qui ne peut être nul. C'est, en effet, le degré de l'équation par rapport à $\frac{d^3y}{dx^3}$. Donc N ne peut être nul; donc :

Il n'existe aucune équation différentielle du troisième ordre algé-

brique, qui se reproduise elle-même par toute transformation homographique.

Le théorème X ne s'applique pas à l'équation $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$. Mais, comme cette équation ne se reproduit pas par les transformations homographiques, le dernier énoncé ne subit aucune restriction.

35. Dans les recherches déjà citées plus haut, MM. Klein et Lie ont eu l'occasion de s'occuper d'équations différentielles qu'une série de transformations homographiques changent en elles-mêmes. Celles dont il s'agit ici, et dont la non-existence vient d'être démontrée pour le troisième ordre, doivent se reproduire par toute transformation homographique, ainsi que cela se présente pour l'équation du second ordre des lignes droites, l'équation du cinquième ordre des coniques, etc. De même que dans la théorie des formes, la Géométrie fournit *a priori* la conception d'un nombre indéfini de telles équations. Mais la recherche directe de ces équations, dont les premiers membres, mis sous forme entière, pourraient être appelés des *invariants différentiels,* offre un sujet d'études qui ne me semble pas avoir encore été abordé, et qui naturellement ne se restreint pas au cas d'une seule variable indépendante. J'espère pouvoir, dans une autre occasion, m'occuper de ce sujet. Je montrerai alors que cette théorie se rattache directement à celle des invariants des formes. Sans entrer dans des détails qui seraient ici déplacés, j'ai cru devoir solliciter l'attention sur une théorie dont, par une voie bien indirecte, les résultats des n^{os} **33** et **34** fournissent deux propositions. J'aurai d'ailleurs encore à en parler dans la suite de ce Mémoire.

§ III.

36. Lemme. — *Soient $x_1, x_2, \ldots, x_k$ des variables indépendantes, et y une fonction définie par l'équation $S(x_1, x_2, \ldots, x_k, y) = 0$. Le produit d'une quelconque des dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de y par $\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{2n-1}$ est égal à une fonction entière des dérivées partielles de* S.

Le lecteur démontrera aisément cette proposition. En répétant les raisonnements employés aux nos **2** et **3**, on obtiendra la proposition suivante, qui est l'extension des théorèmes I et II :

Théorème XV. — *Si* $S(x_1, x_2, \ldots, x_k, y)$ *est un polynôme entier, et que l'on distingue par le signe* $\equiv$ *les égalités qui ont lieu en vertu de* $S = 0$, *il existe des exposants* α *et des polynomes entiers* ψ, *propres à vérifier la relation*

$$\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{\alpha} f \equiv \psi(x_1, x_2, \ldots x_k, y), \tag{44}$$

f étant une fonction entière de $x_1, x_2, \ldots, x_k, y$ et des dérivées de y. La valeur minima de α est celle qui fait acquérir au premier membre de cette relation une valeur finie et différente de zéro, pour tout système de valeurs des variables faisant évanouir $\dfrac{\partial S}{\partial y}$.

Soit donnée, dans (44), à l'exposant α sa valeur minima, et supposons choisi, pour le polynôme ψ du second membre, un de ceux, du plus petit degré possible, qui satisfont à la relation indiquée. Soit M le degré de ψ. De même qu'au n° **5**, on voit que tout polynôme entier, qui, égalé à zéro, définit avec $S = 0$ les systèmes de valeurs de $x_1, \ldots, y$ satisfaisant à l'équation $f = 0$, les dérivées étant prises dans l'équation $S = 0$, est de la forme $(LS + P\psi)$, L et P étant des polynômes entiers. Par suite, le degré minimum d'un tel polynôme distinct de S est M; et sa forme, pour le degré M, est $LS + \psi$, le degré de L étant égal à la différence de ceux de ψ et de S.

Par suite, si β est le degré qu'acquiert f quand on y suppose pour les variables un système de valeurs infinies, et si m est le degré de S, on aura

$$M = \alpha(m - 1) + \beta.$$

Les nombres α et β ne dépendent que de l'équation $f = 0$. On obtient donc ici le même résultat que dans le cas d'une seule variable indépendante.

Il nous faut maintenant chercher le moyen de calculer α et β. Il ne serait pas impossible d'étendre au cas actuel le théorème III; mais, en premier lieu, pour faire cette extension, il me faudrait établir diverses propositions préparatoires dont le développement serait assez long:

en outre, je n'obtiendrais pas ainsi, pour le calcul des nombres α et β, un procédé simple et facile comme celui qui résulte du théorème III. Je bornerai donc à étendre au cas actuel le théorème IV, qui ne subira, comme on va le voir, pour ainsi dire aucune altération.

Cette proposition ne donne pas, il est vrai, un moyen expéditif de calculer α et β, en général; mais il est un cas particulier, encore fort étendu, où elle donnera le résultat sous une forme immédiatement explicite.

On pourrait imiter ici le mode d'analyse employé pour la démonstration du théorème IV, et l'on n'y rencontrerait aucune difficulté nouvelle. Je préfère donner une démonstration différente, qui, bien entendu, s'applique également au théorème IV lui-même. Cette proposition se trouvera ainsi démontrée de deux manières.

37. Je substitue d'abord à l'équation $S = 0$ une équation homogène, par l'introduction d'une variable nouvelle z. Soit m le degré de S, je pose

$$(45) \qquad z^m S\left(\frac{x_1}{z}, \frac{x_2}{z}, \ldots, \frac{x_k}{z}, \frac{y}{z}\right) = T(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z).$$

Soit M le degré de ψ, je pose aussi

$$z^M \psi\left(\frac{x_1}{z}, \frac{x_2}{z}, \ldots, \frac{x_k}{z}, \frac{y}{z}\right) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z).$$

Les polynômes T et φ, des degrés m et M, sont homogènes par rapport aux $(k+2)$ variables. J'emploierai maintenant pour les dérivées partielles la notation usitée dans la théorie des formes

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = T_i, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = T_{k+1}, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = T_{k+2}.$$

De (45) je déduis

$$(46) \qquad z^{m-1}\frac{\partial S}{\partial y} = T_{k+1}.$$

Je suppose que l'on ait remplacé également dans f les lettres $x_1, \ldots, y$

par $\frac{x_1}{z}, \ldots, \frac{y}{z}$. A cause de (46), la relation (44) devient

$$z^{M-\alpha(m-1)} T_{k+1}^{\alpha} f \equiv \varphi, \tag{47}$$

cette égalité ayant lieu en vertu de $T = 0$.

Je fais maintenant une transformation homographique, c'est-à-dire, à cause de la variable complémentaire, une substitution linéaire homogène. Je distingue par des accents les nouvelles variables. Le résultat de la substitution dans f ne dépend que des rapports de $(k+1)$ variables à la $(k+2)^{\text{ième}}$. J'y prends pour variables indépendantes $\frac{x'_1}{z'}, \frac{x'_2}{z'}, \ldots, \frac{x'_k}{z'}$, et pour fonction $\frac{y'}{z'}$. J'égale à zéro le résultat, je chasse les dénominateurs, je supprime les facteurs étrangers, et j'obtiens finalement une nouvelle équation $f' = 0$, mise sous forme entière, et qui est la transformée de $f = 0$.

Soit T' le transformé de T. Le polynôme entier T' et la fonction différentielle f' donnent lieu à une relation analogue à (47), savoir

$$z'^{M-\alpha(m-1)} T'^{\alpha}_{k+1} f' \equiv \varphi', \tag{48}$$

cette égalité ayant lieu en vertu de $T' = 0$. Dans (48), j'ai admis les mêmes valeurs que dans (47) pour M et α. On pourrait craindre que cette supposition ne fût pas légitime. Pour lever cette objection, il suffit d'admettre que T et f, au lieu d'être les fonctions proposées tout d'abord, en soient des transformées par une substitution homographique quelconque; alors T' et f', qui sont des transformées de ces dernières par une substitution homographique quelconque, le sont aussi des fonctions primitives, exactement comme T et f. Je ferai donc cette supposition, qui sera facilement écartée dans le résultat; par suite, la relation (48) est entièrement établie.

Soit $(x_1, x_2, \ldots, y, z)$ un système de valeurs des premières variables, qui satisfasse à $T = 0$ et à $\varphi = 0$. D'après (47), pour ce système de valeurs et les dérivées partielles correspondantes, prises dans $T = 0$, l'équation $f = 0$ est satisfaite. Cette propriété se conserve dans la transformation, c'est-à-dire que pour le système de valeurs des secondes variables, qui correspond au proposé, et les dérivées partielles correspondantes, prises dans $T' = 0$, l'équation $f' = 0$ est satisfaite.

Si donc, dans φ, qui est une fonction à la fois de $x_1, \ldots, y, z$ et des coefficients de T et de f, je regarde les variables $x_1, \ldots, y, z$ comme exprimées en fonction de $x'_1, \ldots, y', z'$, et en même temps les coefficients de T et de f comme exprimés en fonction de ceux de T' et de f', l'équation $\varphi = 0$, envisagée de ce point de vue, fournit les solutions de $T' = 0$ et $f' = 0$, exactement comme l'équation $\varphi' = 0$. Mais le polynôme φ, ainsi envisagé, est du degré M par rapport à $x'_1 \ldots y'_1 z'$, comme φ'; donc, suivant une remarque du numéro précédent, φ est de la forme $K\varphi + LT'$, K étant une constante, c'est-à-dire que, φ étant entendu comme je viens de le dire, on a (en vertu de $T' = 0$)

$$K\varphi' \equiv \varphi.$$

Si les substitutions qui viennent d'être faites dans φ sont faites aussi dans le premier membre de (47), cette relation a maintenant lieu en vertu de $T' = 0$. En y remplaçant alors φ par $K\varphi'$ et comparant à (48), j'obtiens

$$(49) \qquad f \equiv K\left(\frac{z'}{z}\right)^{M-\alpha(m-1)}\left(\frac{T'_{k+1}}{T_{k+1}}\right)^{\alpha} f',$$

dans laquelle les premières variables sont exprimées en fonction des secondes, et en même temps les coefficients de T et de f en fonction de ceux de T' et de f'. L'égalité a lieu d'ailleurs en vertu de $T' = 0$.

En vertu de la substitution employée, on aura pour T_{k+1} une expression de la forme

$$(50) \qquad T_{k+1} = a_1 T'_1 + a_2 T'_2 + \ldots + a_k T'_k + A T'_{k+1} + \mathcal{A} T'_{k+2},$$

dans laquelle $a_1, \ldots, A, \mathcal{A}$ sont des constantes, à savoir les coefficients de y dans les expressions de $x'_1, \ldots, y', z'$ en fonction des premières variables. Mais on a

$$\frac{\partial y'}{\partial x'_i} = -\frac{T_i}{T'_{k+1}}, \qquad -z' T'_{k+2} \equiv x'_1 T'_1 + x'_2 T'_2 + \ldots + x'_k T'_k + y' T'_{k+1}.$$

Par suite, on déduit de (50), en faisant $z' = 1$,

$$\frac{T_{k+1}}{T'_{k+1}} \equiv -\left(a_1 \frac{\partial y'}{\partial x'_1} + a_2 \frac{\partial y'}{\partial x'_2} + \ldots + a_k \frac{\partial y'}{\partial x'_k}\right) + A + \mathcal{A}\left(x'_1 \frac{\partial y'}{\partial x'_1} + x'_2 \frac{\partial y'}{\partial x'_2} + \ldots + x'_k \frac{\partial y'}{\partial x'_k} - y'\right) = R,$$

et, en même temps, la relation (49) devient, par cette supposition,

$$f = \frac{K}{R^{\alpha} z^{M - \alpha(m-1)}} f',$$

l'égalité ayant lieu en vertu de $T' = 0$. De cette relation, le polynôme T' a disparu d'une manière explicite; cependant la constante K et le nombre $[M - \alpha(m-1)]$ paraissent encore en dépendre. Quant à α, on sait déjà qu'il en est indépendant; mais, comme la relation a lieu, quel que soit le polynôme T', on en déduira aisément que K et $M - \alpha(m-1)$ en sont indépendants, et que cette relation est une identité. En désignant $[M - \alpha(m-1)]$ par la lettre β, on a donc l'identité

$$f = \frac{K}{R^{\alpha} z^{\beta}} f'; \tag{51}$$

d'où résulte

$$M = \alpha(m-1) + \beta.$$

38. Voici donc l'extension du théorème IV :

Lemme. — *Soient $x_1, x_2, \ldots, x_k, y$ et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_k, y'$ deux systèmes de variables, liés par une transformation homographique*

$$x'_1 = \frac{a_1 y + b_1 x_1 + \ldots}{\mathcal{A} y + \mathcal{B} x_1 + \ldots}, \quad x'_2 = \frac{a_2 y + b_2 x_1 + \ldots}{\mathcal{A} y + \mathcal{B} x_1 + \ldots}, \quad \ldots,$$
$$x'_k = \frac{a_k y + b_k x_1 + \ldots}{\mathcal{A} y + \mathcal{B} x_1 + \ldots}, \quad y' = \frac{A y + B x_1 + \ldots}{\mathcal{A} y + \mathcal{B} x_1 + \ldots},$$

et z le dénominateur commun des expressions de $x_1, \ldots, y$ en fonction de $x'_1, \ldots, y'$.

Soit $f = 0$ une équation entière aux dérivées partielles entre les variables indépendantes $x_1, \ldots, x_k$ et la fonction y; soit aussi $f' = 0$ l'équation entière aux dérivées partielles entre les nouvelles variables indépendantes $x'_1, \ldots, x'_k$ et la fonction y', cette équation étant la transformée de la première. Si l'on désigne par K *une constante et par* R *la quantité*

$$R = -\left(a_1 \frac{\partial y'}{\partial x'_1} + a_2 \frac{\partial y'}{\partial x'_2} + \ldots + a_k \frac{\partial y'}{\partial x'_k}\right)$$
$$+ A + \mathcal{A}\left(x'_1 \frac{\partial y'}{\partial x'_1} + x'_2 \frac{\partial y'}{\partial x'_2} + \ldots + x'_k \frac{\partial y'}{\partial x'_k} - y'\right),$$

on a, entre f et f', l'identité

$$f = \frac{K}{R^\alpha z^\beta} f',$$

dans laquelle α et β sont des entiers, dont le premier est toujours positif.

Théorème XVI. — *Soit $S = 0$ une équation algébrique de degré m entre $x_1, \ldots, x_k, y$. Les systèmes de valeurs de ces variables, qui, avec les dérivées partielles, prises dans $S = 0$, satisfont en même temps à l'équation aux dérivées partielles $f = 0$, sont ceux qui vérifient, avec $S = 0$, une autre équation algébrique dont le degré est $\alpha(m-1)+\beta$.*

Si l'on veut emprunter le langage géométrique pour l'espace à $(k+1)$ dimensions et appeler *surface* l'être défini par *une* équation, on peut donner au théorème XVI la forme suivante :

Les points d'une surface algébrique de degré m qui satisfont à une condition exprimée par l'équation $f = 0$ sont les intersections de cette surface avec une autre, dont le degré est $\alpha(m-1)+\beta$.

39. Pour calculer α et β d'après le théorème XVI et le lemme qui le précède, il faudra, dans chaque cas, effectuer la transformation homographique. On serait ainsi entraîné dans des calculs généralement impraticables, à cause de leur longueur. On remarquera toutefois qu'il n'est pas nécessaire d'employer une transformation homographique de forme générale. Ainsi, pour calculer α, il suffira d'employer une simple substitution linéaire (changement de coordonnées). De la sorte, z se réduira à l'unité. Pour calculer β, on pourra employer une transformation qui réduise R à une constante. C'est en procédant de la sorte que je vais faire voir comment les valeurs de α et de β peuvent être immédiatement trouvées dans un cas particulier qui offre un intérêt spécial : c'est celui où l'équation $f = 0$ se reproduit elle-même par toute substitution homographique. Je me trouve ainsi conduit à parler encore de ces *invariants différentiels* dont j'ai déjà dit quelques mots plus haut (n° **35**). Je vais d'abord démontrer, au sujet d'une classe d'équations un peu plus étendue, une proposition des plus simples, que j'ai déjà eu l'occasion d'employer ailleurs (*) :

Si une équation aux dérivées partielles reste inaltérée par toute substitution linéaire, elle ne contient ni les variables, ni les dérivées du premier ordre.

1° Soit x une des variables indépendantes. Si l'on change x en $(x+\lambda)$, ce qui constitue une substitution linéaire, aucune dérivée n'est altérée : donc le seul changement que subisse l'équation est celui de x en $(x+\lambda)$; mais, par hypothèse, l'équation reste inaltérée : donc elle ne contient pas x. Le même raisonnement s'applique à y : donc l'équation ne contient ni les variables indépendantes, ni la fonction.

2° Si l'on change y en $y+\lambda x_i$, ce qui constitue une substitution linéaire, la seule dérivée $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ est altérée : donc, par le même raisonnement, et comme on sait déjà que y n'entre pas dans l'équation, on voit que $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ n'y entre pas non plus : donc la proposition est démontrée.

40. Pour le calcul de β, il est commode d'employer la transformation suivante :

$$(52)\qquad\left\{\begin{aligned}
x'_1 &= \frac{x_1}{1+B_1x_1+B_2x_2+\ldots+B_kx_k},\\
x'_2 &= \frac{x_2}{1+B_1x_1+B_2x_2+\ldots+B_kx_k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x'_k &= \frac{x_k}{1+B_1x_1+B_2x_2+\ldots+B_kx_k},\\
y' &= \frac{y}{1+B_1x_1+B_2x_2+\ldots+B_kx_k}.
\end{aligned}\right.$$

D'après le lemme du n° **38**, on voit que, avec cette substitution, R se réduit à l'unité. Je poserai

$$(53)\qquad\left\{\begin{aligned}
z' &= 1+B_1x_1+B_2x_2+\ldots+B_kx_k,\\
z &= 1-(B_1x'_1+B_2x'_2+\ldots+B_kx'_k).
\end{aligned}\right.$$

(*) *Bulletin de la Société mathématique*, t. III, p. 31.

La transformation réciproque de (52) est

$$x_1 = \frac{x'_1}{z}, \quad x_2 = \frac{x'_2}{z}, \quad \ldots, \quad x_k = \frac{x'_k}{z}, \quad y = \frac{y'}{z},$$

en sorte que z désigne, comme au n° **39**, le dénominateur de cette transformation. Entre z et z', on trouve aisément la relation $zz' = 1$.

Je vais chercher les expressions des dérivées relatives aux variables $x_1, \ldots$ en fonction des dérivées relatives aux variables $x'_1, \ldots$. A cet effet, j'emploie la formule de Taylor. Soient $(x'_1, \ldots, y')$ un système de valeurs des variables, et $\xi'_1, \ldots, \eta'$ leurs accroissements. En posant

$$1.2.3\ldots i.u_i = \left(\frac{\partial}{\partial x'_1}\xi'_1 + \frac{\partial}{\partial x'_2}\xi'_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x'_k}\xi'_k\right)^{(i)} y',$$

j'ai, par la formule de Taylor,

$$(54) \qquad y' + \eta' = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.$$

Soient maintenant $(x_1, \ldots, y)$ et $(\xi_1, \ldots, \eta)$ les valeurs et les accroissements des autres variables, qui correspondent aux valeurs et aux accroissements des premières, que je viens de considérer. Par (52), j'exprime $x'_1, \ldots, y'$ et $\xi'_1, \ldots, \eta'$ en fonction de $x_1, \ldots, y$ et $\xi_1, \ldots, \eta$. Je substitue dans (54). Cela fait, je mettrai le résultat sous la forme

$$(55) \qquad y + \eta = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots,$$

où U_i désignera une forme de degré i en $\xi_1, \ldots, \xi_k$, dont les coefficients seront des fonctions de ceux des formes u_i. De (55) je déduirai

$$1.2\ldots i.U_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_k}\xi_k\right)^{(i)} y.$$

Cette dernière relation me donnera les expressions des dérivées d'ordre i de y par rapport aux variables $x_1, \ldots$ en fonction des coefficients des formes u_i ou des dérivées de y' par rapport aux variables $x'_1, \ldots$.

Je désigne par ζ' l'accroissement de la variable z' (53)

$$\zeta' = B_1\xi_1 + B_2\xi_2 + \ldots + B_k\xi_k.$$

De la dernière équation (52), je conclus

$$y' + \eta' = \frac{y+\eta}{z'+\zeta'} = z\frac{y+\eta}{1+z\zeta'},$$

$$(56)\qquad y+\eta = \frac{1+z\zeta'}{z}(u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots).$$

Dans la parenthèse du second membre de (56), il faut maintenant introduire les quantités ξ_1, ... au lieu de ξ'_1, ... Des équations (52), je déduis

$$(57)\qquad \xi'_i = \frac{x_i+\xi_i}{z'+\zeta'} - \frac{x_i}{z'} = \frac{z'\xi_i - x_i\zeta'}{z'(z'+\zeta')} = z\frac{\xi_i - x'_i\zeta'}{1+z\zeta'}.$$

Je considère la substitution

$$(58)\qquad \left\{\begin{array}{l} \xi'_1 = \xi_1 - x'_1\zeta' = \xi_1 - x'_1(B_1\xi_1 + \ldots + B_k\xi_k),\\ \xi'_2 = \xi_2 - x'_2\zeta' = \xi_2 - x'_2(B_1\xi_1 + \ldots + B_k\xi_k),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \xi'_k = \xi_k - x'_k\zeta' = \xi_k - x'_k(B_1\xi_1 + \ldots + B_k\xi_k). \end{array}\right.$$

Pour effectuer dans le second membre de (56) la substitution (57), il n'y aura qu'à effectuer dans chaque forme u_i la substitution (58) et à multiplier ensuite par $\left(\frac{z}{1+z\zeta'}\right)^i$. Soit donc v_i la forme u_i transformée par la substitution (58). On aura

$$(59)\qquad y+\eta = \frac{1+z\zeta'}{z}\left(u_0 + \frac{v_1 z}{1+z\zeta'} + \frac{v_2 z^2}{(1+z\zeta')^2} + \frac{v_3 z^3}{(1+z\zeta')^3} + \cdots\right).$$

Si l'on développe chaque terme de la parenthèse suivant les puissances ascendantes de ζ' et qu'on prenne l'ensemble des termes du degré i en $\xi_1, \ldots, \xi_k, \zeta'$, on aura U_i. J'ai donc

$$(60)\qquad U_i = z^{i-1}\left(v_i - \frac{i-2}{1}v_{i-1}\zeta' + \frac{(i-2)(i-3)}{1.2}v_{i-2}\zeta'^2 + \cdots\right),$$

ce qui peut symboliquement s'écrire

$$U_i = z^{i-1}[v_2(v-\zeta')^{i-2}].$$

Je vais maintenant examiner quelles conséquences on en peut tirer dans le cas où l'on considère une équation algébrique aux différences partielles qui se reproduit elle-même par toute transformation homographique.

41. Soit $f = 0$ une telle équation, mise sous forme entière. D'après le n° **39**, nous savons qu'elle ne contient ni les variables, ni les dérivées du premier ordre. Si donc, comme précédemment, on désigne par U_i la forme

$$1.2\ldots i.U_i = \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{(i)} y,$$

on voit que f est une fonction entière des coefficients des formes U_2, U_3,.... Considérons, pour un instant, une substitution linéaire homogène qui ne modifie que les variables indépendantes

$$(61)\qquad \begin{cases} x'_1 = b_1 x_1 + c_1 x_2 + \ldots + l_1 x_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x'_k = b_k x_1 + c_k x_2 + \ldots + l_k x_k. \end{cases}$$

Je donne à u_i le même sens que précédemment, et appliquant dans cette forme la substitution (61) par rapport aux variables $\xi'_1, \ldots, \xi'_k$, je la change en une autre w_i. Il est manifeste que l'on a $U_i = w_i$. Ainsi, quand la transformation homographique envisagée est simplement la substitution (61), on n'a, pour passer de f à f', qu'à effectuer, dans les formes U, une substitution linéaire. Mais, par hypothèse, f' reproduit f, sauf un facteur qui (n° **38**) ne dépend ici que des coefficients de la substitution (61). Donc f est une fonction des coefficients des formes U, jouissant de la propriété *d'invariance*, c'est-à-dire sur laquelle une substitution linéaire, faite dans les formes, a pour effet de la multiplier simplement par un facteur qui ne dépend que des coefficients de la substitution. Actuellement, nous ne savons pas encore si ce facteur est une puissance du déterminant de la substitution : c'est pourquoi je ne dis pas que f soit un *invariant* [*].

[*] On sait, par la théorie des formes, qu'il ne peut en être autrement. J'ai cru cependant intéressant de dispenser ici le lecteur de la connaissance de cette proposition.

Pour abréger le langage, au lieu de dire : faire, dans les formes U, la substitution (61), je dirai simplement : *faire la substitution* $U_i = w_i$, c'est-à-dire déduire de cette équation et des analogues les expressions des coefficients des formes U en fonction de ceux des formes u, et les substituer dans la fonction f considérée. La propriété d'invariance consiste en ce que, à un facteur λ près, le résultat est la même fonction portant sur les coefficients des formes u. Si l'on fait la substitution $U_i = A^i w_i$, A étant une constante, c'est multiplier, dans (61), les coefficients par A ; par suite, c'est encore faire une substitution linéaire, dont l'effet est de multiplier λ par une certaine puissance de A.

La substitution $U_i = A^{i-1} w_i$ revient à faire la substitution $U_i = A^i w_i$, et à diviser ensuite chaque coefficient des formes par A. Donc, si f est homogène, la substitution $U_i = A^{i-1} w_i$ a pour effet de multiplier f par un facteur. Il n'en est rien si f n'est pas homogène. En effet, soit

$$f = \varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots,$$

où je suppose $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ homogènes et respectivement des degrés $\delta, \delta', \delta'', \ldots$. Il est manifeste que $\varphi, \varphi', \ldots$ doivent jouir séparément de la propriété d'invariance pour que f en jouisse elle-même. Par suite, si f jouit de cette propriété, il faut que la substitution $U_i = A^i w_i$ ait pour effet de multiplier $\varphi, \varphi', \ldots$ par le même facteur μ. Alors la substitution $U_i = A^{i-1} w_i$ a pour effet de multiplier $\varphi, \varphi', \ldots$ par $\mu A^{-\delta}$, $\mu A^{-\delta'}, \ldots$; donc, *pour que la substitution* $U_i = A^{i-1} w_i$ *reproduise* f, *à un facteur près, il faut et il suffit que* f *soit homogène.*

Je reviens maintenant à la considération de la transformation homographique (52). D'après nos conventions de langage et d'après la formule (60), nous obtenons le résultat de cette transformation homographique en faisant la substitution

$$(62) \qquad U_i = z^{i-1}\left[v_i - \frac{i-2}{1} v_{i-1}\zeta' + \frac{(i-2)(i-3)}{1.2} v_{i-2}\zeta'^2 - \ldots\right].$$

Par hypothèse, cette substitution a pour effet de multiplier f par un facteur θ, qui ne dépend pas des coefficients des formes $U_2, \ldots$. On remarquera que le second membre de (62) est homogène par rapport aux coefficients des formes u; donc, si f n'est pas homogène, l'effet de la substitution (62) est de multiplier par θ chacune des fonctions partielles $\varphi, \varphi', \ldots$

Ainsi une quelconque φ de ces fonctions se multiplie par θ, quand on fait la substitution (62). Si l'on fait la substitution plus simple $U_i = z^{i-1} v_i$, nous savons que φ se multiplie aussi par un facteur ν qui ne dépend pas non plus des coefficients des formes. Or il est manifeste que cette dernière substitution et la substitution (62) donnent lieu à certains termes qui sont entièrement les mêmes de part et d'autre : ce sont ceux qui contiennent les coefficients de la forme u d'indice le plus élevé. Donc les facteurs θ et ν sont égaux. Ainsi les fonctions $\varphi, \varphi', \ldots$ se reproduisent respectivement, multipliées par le même facteur θ, quand on fait la substitution $U_i = z^{i-1} v_i$; donc, d'après un résultat précédent, leurs degrés sont les mêmes. Donc *f est homogène.*

J'ajoute cette conclusion, qui permettra bientôt de calculer β. *Soit λ le facteur par lequel se multiplie f quand on fait la substitution $U_i = v_i$. Soient $\partial_2, \partial_3, \ldots, \partial_i, \ldots$ les degrés auxquels entrent respectivement, dans un terme de f, les coefficients des formes $U_2, U_3, \ldots, U_i, \ldots$ Quand on fait la transformation homographique (52), f se reproduit, multipliée par λ et par z, à la puissance $\partial_2 + 2\partial_3 + \ldots + (i-1)\partial_i + \ldots$, nombre qui est le même, quel que soit le terme considéré dans f.*

Je vais maintenant employer une nouvelle transformation homographique, propre au calcul de α; c'est de ce calcul combiné avec les précédents résultats que je pourrai, en dernière analyse, tirer des conclusions définitives.

42. Pour le calcul de α, je considère la substitution suivante :

$$
(63)\qquad \left\{
\begin{aligned}
x'_1 &= a_1 y + b_1 x_1 + c_1 x_2 + \ldots + l_1 x_k,\\
x'_2 &= a_2 y + b_2 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + l_2 x_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x'_k &= a_k y + b_k x_1 + c_k x_2 + \ldots + l_k x_k,\\
y' &= y.
\end{aligned}
\right.
$$

Je vais chercher les expressions des dérivées partielles relatives aux variables $x_1, \ldots$ en fonction des dérivées relatives aux variables $x'_1, \ldots$

Par un raisonnement analogue à celui qui a été employé pour la première partie de la proposition du n° **39**, on voit que ces expressions ne contiennent pas les variables. On peut donc, sans modifier les expressions demandées, les chercher pour un système de valeurs particulières des variables, par exemple

$$x'_1 = x'_2 = \ldots = x'_k = y' = 0,$$
$$x_1 = x_2 = \ldots = x_k = y = 0.$$

Grâce à cette hypothèse, les accroissements des variables, que je désigne par les mêmes notations que précédemment, sont liés par les formules (63), où les lettres $x, \ldots$ sont remplacées par les lettres $\xi, \ldots$.

J'ai maintenant à traiter le même problème qu'au n° **40**, à savoir : du développement

$$\eta' = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots, \tag{64}$$

donné par la formule de Maclaurin, déduire le développement

$$\eta = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots.$$

A cet effet, je substitue dans (64) à $\xi'_1, \ldots, \eta'$ les expressions en $\xi_1, \ldots, \eta$ données par (63), je remplace ensuite η par $U_1 + U_2 + \ldots$, et j'égale, dans les deux membres, les termes du premier, du second ordre.... Ces égalités déterminent successivement les formes $U_1, U_2, \ldots$.

Je pose, pour abréger,

$$\frac{\partial y'}{\partial x'_i} = p'_i, \quad (i = 1, 2, \ldots k),$$

$$1 - (a_1 p'_1 + a_2 p'_2 + \ldots + a_k p'_k) = R, \tag{65}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 p'_1 + b_2 p'_2 + \ldots + b_k p'_k = BR, \\ c_1 p'_1 + c_2 p'_2 + \ldots + c_k p'_k = CR, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_1 p'_1 + l_2 p'_2 + \ldots + l_k p'_k = LR. \end{array} \right. \tag{66}$$

Je cherche d'abord les termes du premier ordre dans les deux membres. Dans le premier, j'ai U_1, et dans le second

$$(1 - R)\, U_1 + BR\,\xi_1 + CR\,\xi_2 + \ldots + LR\,\xi_k.$$

Les égalant à U_1 j'en conclus

$$U_1 = B\xi_1 + C\xi_2 + \ldots + L\xi_k. \tag{67}$$

Je cherche les termes du second ordre. Dans le premier membre, j'ai U_2. Dans le second membre, j'ai des termes de deux sortes : 1° $(1-R)U_2$; 2° la forme u_2, transformée par la substitution que l'on obtient en remplaçant dans les k premières équations (63) $x_1, \ldots, x'_1, \ldots$ par $\xi_1, \ldots, \xi'_1, \ldots$ et y par U_1 ; c'est-à-dire par la substitution

$$(68)\quad \left\{\begin{aligned} \xi'_1 &= (b_1 + a_1 B)\xi_1 + (c_1 + a_1 C)\xi_2 + \ldots + (l_1 + a_1 L)\xi_k,\\ \xi'_2 &= (b_2 + a_2 B)\xi_1 + (c_2 + a_2 C)\xi_2 + \ldots + (l_2 + a_2 L)\xi_k,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \xi'_k &= (b_k + a_k B)\xi_1 + (c_k + a_k C)\xi_2 + \ldots + (l_k + a_k L)\xi_k. \end{aligned}\right.$$

Je désigne par V_2 la forme u_2 transformée par cette substitution (68). J'ai par suite

$$U_2 = (1 - R)U_2 + V_2,$$

$$U_2 = \frac{1}{R}V_2.$$

Je passe maintenant aux termes du troisième ordre. Dans le premier membre, j'ai U_3. Dans le second membre, j'ai trois sortes de termes : 1° $(1-R)U_3$; 2° les termes qui proviennent de u_2. Soit $u_2 = \varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$. Désignons par $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ les dérivées partielles $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$, transformées par la substitution (68). Les termes du troisième ordre fournis par u_2 sont

$$(a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_k\psi_k)U_2 = \frac{a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_k\psi_k}{R}V_2 = \rho V_2,$$

où ρ est une fonction des dérivées du deuxième ordre, mais non pas de celles du troisième ordre; 3° la forme u_3 transformée par la substitution (68). Je la désigne par V_3. J'ai donc

$$U_3 = (1 - R)U_3 + \rho V_2 + V_3,$$

$$U_3 = \frac{1}{R}(V_3 + \rho V_2). \tag{69}$$

La loi est maintenant manifeste. On obtiendra, en général,

$$(70)\qquad U_i = \frac{1}{R}(V_i + \rho_1 V_{i-1} + \rho_2 V_{i-2} + \ldots + \rho_{i-2} V_2),$$

formule dans laquelle V_j désigne, en général, la forme u_j transformée par la substitution (68), et ρ_j une forme d'ordre j, dont les coefficients sont des fonctions entières de ceux des formes u dont les indices sont moindres que i, la forme u_1 exceptée.

43. La formule (70) n'est pas homogène par rapport aux coefficients des formes u_2, u_3, ..., car le premier terme y est linéaire et homogène, les autres y sont de degré supérieur à l'unité. Or, par hypothèse, f, par la substitution (70), se reproduit, multipliée par un facteur ne dépendant pas des coefficients des formes u_2, u_3,.... J'en ai déjà conclu que f est homogène : donc aussi je vois que la propriété de f exige que, par la substitution (70), tous les termes contenant les formes ρ disparaissent d'eux-mêmes. Donc la substitution (70) produit le même effet que la simple substitution $U_i = \frac{V_i}{R}$.

De là je tire cette première conclusion : *Soit* μ *le facteur par lequel se multiplie f, considérée comme fonction des coefficients des formes* U_2, U_3,..., *quand on fait la substitution* (68) (*qui se représente par* $U_i = V_i$), *et* δ *le degré de* f. *Considérée comme fonction de dérivées partielles*, f *se multiplie par* $\mu R^{-\delta}$, *quand on fait la transformation* (63).

Le lemme du n° **38** nous fait connaître déjà, sous une autre forme, ce même facteur. Ici on a $z = 1$, et la quantité désignée par R est la même. Donc $\mu R^{-\delta} = KR^{-\alpha}$, ou

$$(71)\qquad \mu = \frac{K}{R^{\alpha-\delta}}.$$

Nous ne connaissons pas l'expression de K, mais nous savons (n° **38**) que cette quantité est une fonction seulement des coefficients de la transformation employée, qui est ici représentée par les formules (63). Ainsi K dépend seulement des quantités $(a_1, b_1, c_1, \ldots, l_1)$, $(a_2, b_2, c_2, \ldots, l_2)$, ..., $(a_k, b_k, c_k, \ldots, l_k)$. Quant à μ, c'est une fonction également inconnue des coefficients de la substitution (68). Dans ces coefficients entrent les quantités nouvelles B, C, ..., L. Cette circonstance va permettre de conclure de (71) la forme de la fonction μ.

La fonction μ dépend de k^2 quantités $(\beta_1, \gamma_1, \ldots, \lambda_1)$, $(\beta_2, \gamma_2, \ldots, \lambda_2)\ldots$ et satisfait à (71) quand on y fait

$$(72)\quad \left\{\begin{array}{llll} \beta_1 = b_1 + a_1 B, & \gamma_1 = c_1 + a_1 C, & \ldots, & \lambda_1 = l_1 + a_1 L, \\ \beta_2 = b_2 + a_2 B, & \gamma_2 = c_2 + a_2 C, & \ldots, & \lambda_2 = l_2 + a_2 L, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots & \ldots, & \ldots\ldots, \\ \beta_k = b_k + a_k B, & \gamma_k = c_k + a_k C, & \ldots, & \lambda_k = l_k + a_k L. \end{array}\right.$$

Je forme le déterminant de ces k^2 quantités, et je le désigne par Δ. Soit aussi Δ_0 sa valeur quand on fait évanouir les lettres a. On reconnaîtra sans peine, à cause des équations (65) et (66), que l'on a

$$\Delta = \frac{\Delta_0}{R}.$$

Par suite, $\Delta^{\alpha-\delta}$ est une fonction qui jouit, comme μ, de la propriété représentée par l'équation (71), c'est-à-dire que $\Delta^{\alpha-\delta}$ est égal à une fonction ne dépendant pas de B, C, ..., L, divisée par la puissance $(\alpha - \delta)$ de R. Je dis qu'il en résulte $\mu = \Delta^{\alpha-\delta}$.

Je désigne par F le quotient de μ par $\Delta^{\alpha-\delta}$.

Il résulte de ce qui vient d'être dit que F, pour les valeurs (72) de ses arguments, est indépendante de B, C, ..., L. Je prends sa dérivée par rapport à B, après substitution des valeurs (72). Cette dérivée doit être identiquement nulle. J'ai donc

$$(73)\qquad a_1 \frac{\partial F}{\partial \beta_1} + a_2 \frac{\partial F}{\partial \beta_2} + \ldots + a_k \frac{\partial F}{\partial \beta_k} = 0.$$

Je fais maintenant $B = C = \ldots = L = 0$. Alors les lettres a n'entrent plus dans F, et l'identité (73) exige que chaque dérivée partielle soit identiquement nulle. On obtient des résultats analogues en prenant les dérivées par rapport à C, ..., L. Donc toutes les dérivées du premier ordre de F sont identiquement nulles; donc F est une constante. Il suffit de considérer la substitution *unité* pour voir que cette constante est l'unité. Donc f *est un invariant de formes simultanées* U_2, $U_3, \ldots$, *et le poids de cet invariant est* $(\alpha - \delta)$.

44. Je reviens maintenant à la conclusion du n° **41**. Le déterminant de la substitution (58) est, comme on le vérifie aisément, égal à

$$z = 1 - (B_1 x'_1 + B_2 x'_2 + \ldots + B_k x'_k).$$

Donc le facteur λ, dont il s'agit dans l'énoncé qui termine le n° **41**, est $z^{\alpha-\delta}$, ou, en désignant par p le poids de l'invariant, $\lambda = z^p$. Or on a

$$kp = 2\partial_2 + 3\partial_3 + \ldots + i\partial_i + \ldots;$$

par suite,

$$\partial_2 + 2\partial_3 + \ldots + (i-1)\partial_i = kp - (\partial_2 + \partial + \ldots + \partial_i) = kp - \delta.$$

Donc, quand on fait la transformation homographique du n° **40** (52), f se multiplie par $z^{(k+1)p-\delta}$. Rapprochant ce résultat du théorème XVI, j'en conclus

$$\beta = -(k+1)p + \delta,$$

auquel il faut joindre

$$\alpha = p + \delta.$$

Donc, enfin, le degré $M = \alpha(m-1) + \beta$ de l'équation mentionnée au théorème XVI se met sous la forme

$$M = (p + \delta)m - (k+2)p.$$

D'où cette proposition :

Théorème XVII. — *Soit* $f = 0$ *une équation algébrique aux dérivées partielles entre la fonction* y *et les* k *variables indépendantes* x_1, $x_2, \ldots, x_k$, *qui jouisse de la propriété de rester inaltérée par toute transformation homographique. Cette équation étant mise sous forme entière,* f *est un invariant homogène des formes simultanées* $U_2, U_3, \ldots$, *définies par la relation*

$$1.2.3\ldots iU_i = \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{(i)} y,$$

où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ *sont les variables de ces formes.*

Soit p le poids de cet invariant et δ son degré.

Les points d'une surface algébrique de degré m (dans l'espace à $(k+1)$ dimensions) *qui satisfont à la condition exprimée par l'équation* $f=0$ *sont les intersections de cette surface avec une autre dont le degré est*

$$M = (p+\delta)m - (k+2)p.$$

45. Je ferai, au sujet de l'analyse précédente, une remarque. Dès qu'une fonction f des dérivées partielles ne contient ni les variables, ni les dérivées du premier ordre, il est manifeste qu'elle ne change pas quand on change x_i en $(x_i+\lambda)$ ou y en $(y+\mu)$, ou encore y en $y+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_k x_k+\lambda_{k+1}$. Par suite, si l'équation $f=0$ reste inaltérée par la substitution du n° **63**, elle reste inaltérée par toute substitution linéaire. En outre, la substitution composée successivement de la transformation homographique (52) et d'une substitution linéaire revient à une transformation homographique quelconque. On a donc dans ce qui précède les éléments pour reconnaître les conditions nécessaires et suffisantes à l'invariance d'une équation telle que $f=0$. On peut les résumer comme il suit :

1° Les conditions mentionnées au théorème XVII : f est un invariant homogène des formes simultanées U_2, U_3, ...;

2° La substitution (60)

$$U_i = z^{i-1}\left(v_i - \frac{i-2}{1} v_{i-1}\zeta' + \ldots\right)$$

y produit le même effet que la substitution $U_i = z^{i-1} v_i$;

3° La substitution (70)

$$U_i = \frac{1}{R}(V_i + \rho_1 V_{i-1} + \rho_2 V_{i-2} + \ldots)$$

y produit le même effet que la substitution $U_i = \frac{1}{R} V_i$.

Mais, pour tirer de là des conclusions explicites, il faudrait connaître la composition des formes ρ qui entrent dans cette dernière relation. C'est en ce point que réside, je pense, toute la difficulté de la question. Je ne chercherai pas ici à lever cette difficulté, mais je ferai observer que, d'après cet aperçu, nous reconnaissons que :

Théorème XVIII. — *Si l'invariant homogène f des formes simultanées* U_2, U_3, ..., *ne change pas quand on y remplace* U_i *par*

$$U_i + \rho_1 U_{i-1} + \rho_2 U_{i-2} + \ldots + \rho_{i-2} U_2,$$

où ρ_j *désigne une forme arbitraire de degré j, l'équation aux dérivées partielles* $f = 0$ *reste inaltérée par toute transformation homographique.*

Je répète que ce théorème nous donne des conditions suffisantes, mais non pas nécessaires, pour l'invariance d'une équation aux dérivées partielles.

46. Une partie de l'énoncé XVII n'a plus de sens dans le cas d'une seule variable indépendante. Il n'y a plus, en effet, de forme U, chacune d'elles se réduisant à un seul terme. La proposition se modifie comme il suit :

Théorème XIX. — *Soit* $f = 0$ *une équation différentielle algébrique entre la variable indépendante x et la fonction y, qui jouisse de la propriété de rester inaltérée par toute transformation homographique. Cette équation étant mise sous forme entière, f est homogène par rapport aux dérivées de y. Soit* δ *son degré par rapport à ces dérivées ; soit, en outre, p la puissance de la constante b par laquelle f se multiplie quand on change x en* $\frac{x}{b}$.

Les points d'une courbe plane de degré m qui satisfont à la condition exprimée par $f = 0$ *sont les intersections de cette courbe avec une autre dont le degré est*

$$M = (p + \delta) m - 3p.$$

Ainsi, soit $f = y''$, on a

$$\delta = 1, \quad p = 2, \quad M = 3m - 6.$$

Soit pour f le déterminant (36) du n° **28**, on a

$$\delta = 3, \quad p = 9, \quad M = 12m - 27.$$

47. Je vais maintenant faire quelques applications du théorème XVII. Je prendrai, à cet effet, des équations dont la propriété d'invariance découle du théorème XVIII.

En premier lieu, ce théorème nous montre qu'on obtient une équation invariable par les transformations homographiques, en égalant à zéro le discriminant de la forme quadratique U_2. Le degré est égal à k, le poids à 2. Donc

$$M = (k+2)(m-2). \tag{74}$$

Dans le cas de deux variables indépendantes, on a ainsi $4(m-2)$ pour le degré de la surface qui coupe une surface de degré m suivant le lieu des *points paraboliques*. C'est bien, en effet, le degré de la surface hessienne qui, comme on sait, passe par ce lieu. Il est naturel, d'après (74), de penser que l'équation de degré M, que l'on trouvera dans le cas général, a pour premier membre le hessien de la fonction envisagée. Il en est ainsi effectivement; mais ce n'est pas ici le lieu de le démontrer.

Voici une seconde application. Le *résultant* des formes $U_2, U_3, \ldots, U_{k+1}$ satisfait aux conditions du théorème XVIII. Son degré, par rapport aux coefficients de U_i, est

$$\partial_i = \frac{2.3\ldots(k+1)}{i};$$

par suite, son poids est $2.3\ldots(k+1)$.

Je pose

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{k+1} = S_{k+1}.$$

Le degré est $2.3\ldots(k+1)(S_{k+1}-1)$; par suite

$$M = 2.3\ldots(k+1)[S_{k+1}m - (k+2)].$$

Ici l'interprétation géométrique est très-simple. Dans l'espace à $(k+1)$ dimensions, j'appelle *ligne droite* l'être défini par k équations linéaires. Une surface étant rapportée à des coordonnées telles qu'on ait à la fois

$$y = x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial y}{\partial x_k} = 0, \tag{75}$$

c'est-à-dire l'origine étant sur la surface et le *plan* $y = 0$ étant tangent en ce point à la surface, les équations simultanées

$$y = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0, \quad \ldots, \quad U_k = 0$$

déterminent 2, 3, ..., k droites L. On a, aux environs de l'origine,

$$y = U_2 + U_3 + \ldots + U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \ldots;$$

par suite, chacune des droites L a, à l'origine, un contact d'ordre k avec la surface. C'est une généralisation des asymptotes de l'indicatrice :

Dans l'espace à $(k+1)$ *dimensions, en tout point d'une surface, il existe des droites ayant en ce point avec la surface un contact d'ordre* k, *et leur nombre est* 2, 3, ..., k. Je les appelle *droites osculatrices*.

Si, en même temps, U_{k+1} s'évanouit quand on y met les coordonnées d'une de ces droites, cette dernière a alors avec la surface un contact d'ordre $(k+1)$. Elle est *surosculatrice;* donc les points en lesquels une droite devient surosculatrice sont ceux en lesquels le résultant de U_2, U_3, ..., U_{k+1} s'évanouit, les coordonnées de ce point satisfaisant d'ailleurs aux relations (75). Mais cette dernière restriction disparaît, attendu qu'il est évident que la condition n'est pas altérée par les transformations homographiques. Ainsi des considérations géométriques pouvaient faire prévoir que l'équation obtenue en égalant à zéro le résultant ci-dessus restait inaltérée par les transformations homographiques.

J'ai, pour l'application envisagée, l'énoncé suivant :

Le lieu des points d'une surface de degré m [dans l'espace à $(k+1)$ dimensions], *en lesquels une droite osculatrice de la surface lui devient surosculatrice, est l'intersection de cette surface avec une autre dont le degré est*

$$(76) \qquad M = 2.3\ldots(k+1)\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k+1}\right)m - (k+2)\right].$$

Pour le cas de trois dimensions, la formule (76) donne $M = 11m - 24$, résultat donné depuis longtemps par M. Salmon. J'ajoute que le procédé de démonstration employé par cet auteur s'étendrait sans aucune difficulté au cas de $(k+1)$ dimensions (*).

48. Je ferai enfin une troisième application.

Je prends les $(k-1)$ formes $U_2, U_3, \ldots, U_k$. Si on les égale à zéro et qu'on élimine $(k-2)$ variables, le premier membre de la résultante est une forme binaire. En égalant le discriminant de cette dernière à zéro, on aura l'équation dont il s'agit $f=0$. L'invariant f coïncide avec celui que M. Cayley nomme le *tact-invariant* des formes envisagées. Il est manifeste que cet invariant satisfait à l'énoncé XVIII.

Le tact-invariant de $(k-1)$ formes des degrés $q_1, q_2, \ldots, q_{k-1}$ et à k variables est, par rapport aux coefficients de la forme de degré q_i, du degré

$$\partial_i = \frac{q_1 q_2 \ldots q_{k-1}}{q_i}(\Sigma q + q_i - k).$$

En appliquant cette formule, aisée à démontrer, au cas actuel, on trouve

$$p = 2.3\ldots k\frac{k(k-1)}{2}.$$

$$p + \delta = 2.3\ldots k\left[\frac{(k+1)(k-2)}{2}S_k + k\right],$$

S_k ayant la même signification qu'au numéro précédent. Dans le cas où l'on a $k=2$, le tact-invariant se réduit au discriminant de la forme binaire U_2, et les formules ci-dessus s'appliquent encore. On a donc ici une nouvelle généralisation du lieu des points paraboliques. C'est, en effet, ce qui résulte clairement de l'interprétation géométrique de l'équation aux dérivées partielles. Sans m'y arrêter plus longuement, je la rapporte dans cet énoncé :

Le lieu des points d'une surface de degré m [dans l'espace à $(k+1)$ dimensions], *en lesquels deux droites osculatrices se confondent, est l'intersection de cette surface avec une autre, dont le degré est*

$$M = 2.3\ldots k\left\{\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}\right)\frac{(k+1)(k-2)}{2}+k\right]m - \frac{k(k-1)(k+2)}{2}\right\},$$

formule qui, pour $k=2$, donne bien $M = 4(m-2)$.

(*) SALMON FIEDLER, t. II, p. 474.

49. Dans beaucoup de questions géométriques, avec l'emploi des coordonnées homogènes, on a à considérer des équations différentielles, ou aux différences partielles, où les variables indépendantes sont indéterminées. Par exemple, ξ, η, ζ étant des coordonnées ponctuelles dans le plan, l'équation différentielle des lignes droites est

$$f = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix} = 0,$$

où ξ', ξ'', ... sont les dérivées du premier et du second ordre. Si l'on y fait $\zeta = 1$, et qu'on prenne ξ pour variable indépendante, f se réduit à η''. L'équation est ainsi ramenée à la forme habituelle $\eta'' = 0$. Mais on peut aussi revenir à cette forme en prenant pour variable indépendante et pour fonction $\frac{\xi}{\zeta}$ et $\frac{\eta}{\zeta}$. Soit $\frac{\xi}{\zeta} = x$, $\frac{\eta}{\zeta} = y$. On a, par un calcul facile,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\zeta^3}{(\zeta\xi' - \xi\zeta')^3} f.$$

En donnant au théorème IV une forme nouvelle, on peut, de cette dernière relation, déduire immédiatement $\alpha = 3$, $\beta = -3$. Voici, en effet, quelle forme on peut donner aux théorèmes IV et XVI. Je me borne à un seul énoncé comprenant le cas d'une seule variable indépendante aussi bien que celui où il y en a plusieurs.

Théorème XX. — *Soit $f = 0$ une équation entière aux dérivées partielles entre les variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_i$ et la fonction y. On prend de nouvelles variables indépendantes $t_1, t_2, \ldots, t_i$, et l'on remplace $x_1, \ldots, x_i$, y par $\frac{\xi_1}{\zeta}, \ldots, \frac{\xi_i}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}$. Soit $F = 0$ l'équation transformée, mise également sous forme entière. On a identiquement*

$$f = \frac{1}{\Delta^\alpha \zeta^\beta} F, \tag{77}$$

relation dans laquelle Δ est le déterminant $\sum \pm \zeta \frac{\partial \xi_1}{\partial t_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial t_2} \cdots \frac{\partial \xi_i}{\partial t_i}$, et où α et β sont les mêmes nombres qu'au théorème XVI.

Pour démontrer ce théorème, j'observe d'abord que chaque dérivée partielle de y par rapport aux premières variables indépendantes s'exprime par le quotient de deux fonctions entières des dérivées partielles relatives aux nouvelles variables. On démontrera aisément que le dénominateur est une puissance du déterminant

$$D = \sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial t_1} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \cdots \frac{\partial x_k}{\partial t_k}.$$

Par suite, si $\mathcal{F} = 0$ est la transformée, sous forme entière, que l'on obtient par le simple changement des variables indépendantes, on a $f = \frac{1}{D^a} \mathcal{F}$, a étant un entier positif. Je fais maintenant le second changement, qui consiste à remplacer $x_1, \ldots, x_k, y$ par $\frac{\xi_1}{\zeta}, \ldots, \frac{\xi_k}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}$. Soit $F = 0$ la transformée de $\mathcal{F} = 0$, mise sous forme entière; on a manifestement, en désignant par c un entier positif, $\mathcal{F} = \frac{1}{\zeta^c} F$. On a d'ailleurs aussi $D = \frac{\Delta}{\zeta^{2k}}$; donc enfin

$$f = \frac{1}{\Delta^a \zeta^{c-2ka}} F. \tag{78}$$

Ainsi la liaison entre f et F est bien de la forme (77) annoncée. Il reste à faire voir que les nombres a et $(c - 2ka)$ coïncident avec les nombres α, β du théorème XVI, ou plutôt définis dans le lemme qui précède ce théorème (n° **38**).

J'opère sur les quantités $\xi_1, \ldots, \xi_k, \eta, \zeta$ une substitution linéaire homogène qui les remplace par les quantités $\xi'_1, \ldots, \xi'_k, \eta', \zeta'$. Soit F' ce que devient F, exprimée avec ces nouvelles quantités, sans modification des variables indépendantes. On a alors, au lieu de (78),

$$f = \frac{1}{\Delta^a \zeta^{c-2ka}} F', \tag{79}$$

où je suppose aussi que dans Δ et ζ les substitutions soient faites. Dans cette opération aucun facteur variable ne s'introduit, attendu que toutes les dérivées de $\xi_1, \ldots, \eta, \zeta$ sont, comme les variables mêmes, transformées par la même substitution linéaire.

Les variables indépendantes $t_1, \ldots, t_k$ sont jusqu'à présent indéterminées. Je suppose maintenant qu'elles coïncident avec $\xi'_1, \ldots, \xi'_k$, et je fais en même temps $\zeta' = 1$. Alors F' n'est autre chose que le premier membre, sous forme entière, de la transformée de f au moyen d'une substitution homographique. La variable ζ coïncide avec le dénominateur commun des expressions de $x_1, \ldots, x_k, y$ en fonction de $\xi'_1, \ldots, \xi'_k, \eta$. En outre, on reconnaîtra sans peine que Δ coïncide avec l'expression désignée dans le lemme (**38**) par R; par suite, la relation (79) coïncide avec celle qui fait l'objet de ce lemme. Par suite, le théorème XX est démontré.

50. Je ne donnerai ici aucune application du théorème XX, me réservant de le faire dans une autre occasion. En terminant ce Mémoire, je ferai observer que, dans le cas où il existe plus d'une variable indépendante, je n'ai pas abordé le second des deux problèmes posés au début. Il ne me semble guère possible de le faire dans l'état actuel de nos connaissances à l'égard des singularités des surfaces.

Dans le même ordre d'idées, d'autres problèmes plus difficiles peuvent être posés. On peut chercher le nombre des points d'une courbe *gauche* algébrique qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle; le nombre des points d'une surface qui satisfont à deux conditions exprimées par deux équations aux dérivées partielles, etc. Comme on le voit, le sujet abordé dans ce Mémoire est loin d'être épuisé.