JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE MATHIEU

Mémoire sur le problème des trois corps

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 2 (1876), p. 345-370.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1876_3_2__345_0>

Mémoire sur le problème des trois corps;

PAR M. EMILE MATHIEU.

On imagine un système de trois corps réduits à des points qui s'attirent suivant une fonction donnée de la distance, et il s'agit d'en étudier le mouvement. On peut cependant supposer que l'un des trois corps soit un point rendu fixe, tandis que les deux autres corps seulement sont mobiles. En effet, ainsi que l'a fait remarquer Jacobi (*Journal de Crelle*, t. XXVI, p. 115), en s'appuyant sur le théorème de la conservation du mouvement du centre de gravité, on peut ramener le problème général à ce cas particulier, ou plutôt à une question semblable qui n'en diffère que par la fonction de forces, mais qui se prête aux mêmes réductions. C'est en faisant cette simplification que nous avons traité cette question.

Citons quelques Mémoires où le problème des trois corps a été traité. Nous remarquerons d'abord le Mémoire de Lagrange, dans lequel le problème est ramené à la résolution d'un système d'équations différentielles du septième ordre et dont M. Serret a simplifié l'analyse en introduisant plus de symétrie dans les formules (*OEuvres de Lagrange*, t. VI, p. 324). Nous citerons ensuite le Mémoire de Jacobi (*Journal de Crelle*, t. XXVI, p. 115), le Mémoire de M. Bertrand (*Journal de Liouville*, t. XVII, p. 429, 1852), enfin le Mémoire de Bour (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXI, p. 37), qui a pour point de départ le travail de M. Bertrand.

Bour a obtenu une expression fort remarquable de la force vive du système des corps, qui l'a conduit à un système de huit équations différentielles canoniques; mais, n'ayant point fait de part dans ce travail aux considérations géométriques, il y a commis plusieurs erreurs. La plus saillante consiste, pour compléter le système des équations du problème, à joindre au système des huit équations canoniques et à la somme des carrés des trois intégrales des aires relatives à trois plans coordonnés rectangulaires deux de ces trois intégrales [*]; or il arrive que deux combinaisons de ces trois équations sont renfermées dans le système des équations canoniques [**]. On a cité le travail de Bour dans plusieurs Mémoires de Mécanique, mais, dans aucun que je sache, on n'y a relevé les erreurs qui s'y trouvent.

Dans le Mémoire qui suit, j'emploie l'expression de la force vive trouvée par Bour et à laquelle j'ai été conduit par des considérations géométriques. J'établis le système des huit équations canoniques, puis je montre comment, après l'intégration de ces équations, on achèverait très-aisément la solution. Les solutions théoriques, qu'on a données ordinairement de ce problème, reposent sur des formules tellement compliquées qu'il est impossible de songer à en faire l'application à l'Astronomie; on verra qu'il n'en est pas de même de la suivante, car les formules y sont simples et le choix des variables très-approprié à l'Astronomie.

Sur l'expression de la force vive dans le problème des trois corps.

1. On peut ramener le problème du mouvement de trois corps à celui du mouvement de corps fictifs, au nombre de deux seulement, et

---

[*] En supposant même que ces deux intégrales soient deux nouvelles équations, il lui manquerait encore une équation pour déterminer complétement la position du système. A la fin de son Mémoire, il suppose très-petite l'inclinaison des orbites des deux corps, et il propose l'emploi d'une fonction perturbatrice qui n'est pas admissible; car, pour qu'une fonction puisse être prise pour fonction perturbatrice, il faut non-seulement qu'elle soit très-petite, mais encore qu'il en soit de même de ses dérivées qui entrent dans les formules de perturbation, ce qui n'a pas lieu dans le cas actuel.

[**] J'ai déjà fait cette remarque dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. LXXVIII, p. 408, 1874).

soumis à une fonction de forces qui ne dépend que des distances r et r_1 de ces deux corps à un point fixe O pris pour origine des coordonnées et de l'angle formé par ces deux distances. Alors le principe des forces vives et les trois intégrales des aires sont applicables aux deux nouveaux corps aussi bien qu'aux trois premiers. Désignons par m, m_1 les masses des deux corps et par P le plan qui passe par les points O, m et m_1. La position du système et son déplacement infiniment petit sont déterminés : 1° par les rayons vecteurs r, r_1 menés de l'origine O aux deux points m et m_1; 2° par les dérivées de r, r_1 par rapport au temps t; 3° par les angles β, β_1 des rayons r, r_1 avec l'intersection L du plan P avec la position infiniment voisine qu'il occupe au bout de l'instant dt; 4° par les dérivées de β, β_1 par rapport à t; 5° par le déplacement infiniment petit $d\gamma$ de l'axe de rotation L du plan P dans ce plan; 6° enfin par la rotation infiniment petite ωdt du plan P autour de la droite L.

Représentons-nous le mouvement du plan P. La droite L tourne dans ce plan autour de l'origine O et vient au bout de l'instant dt en L_1; puis ce plan tourne autour de L_1 de l'angle infiniment petit ωdt et occupe la position P_1. La droite L tournera ensuite autour du point O dans le plan P_1 d'un angle infiniment petit et ira de la position L_1 à la position L_2; puis le plan P_1 tournera d'un angle infiniment petit autour de L_2, et ainsi de suite. La droite L se meut sur un cône, mais L, par définition, n'est que l'axe de rotation du plan P; par le déplacement de la droite L, il faut donc entendre seulement un changement de l'axe de rotation de ce plan qui varie à chaque instant. L'élément plan renfermé entre les deux droites L et L_1 peut être considéré comme appartenant à la fois au cône et au plan P, et l'on en conclut facilement que ce plan roule sans glisser sur le cône formé par les positions successives de la droite L.

Nous montrerons plus loin quelles modifications on devra faire au système de variables que nous adoptons d'abord, afin de fixer plus commodément la position des deux corps m et m_1.

2. Désignons par A et A_1 les vitesses angulaires de r et de r_1 dans le plan P, estimées à partir d'une droite fixe située dans ce plan et comptons A, A_1, $d\beta$, $d\beta_1$ et $d\gamma$ positivement dans le même sens, nous aurons

$$(1)\qquad A = \frac{d\beta}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}, \quad A_1 = \frac{d\beta_1}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}.$$

La vitesse du point m se décompose suivant ces trois directions rectangulaires : 1° suivant r; 2° dans le plan P, perpendiculairement à r; 3° normalement au plan P, en ces trois vitesses :

$$\frac{dr}{dt}, \quad rA, \quad \omega r \sin\beta.$$

On a donc, pour la demi-force vive du point m,

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{m}{2} r^2 A^2 + \frac{m}{2} \omega^2 r^2 \sin^2\beta,$$

et, pour la demi-force vive du système,

$$T = \frac{1}{2}\left[m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + m_1\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2\right] + \frac{1}{2}(mr^2A^2 + m_1 r^2 A_1^2)$$
$$+ \frac{1}{2}\omega^2(mr^2\sin^2\beta + m_1 r_1^2 \sin^2\beta_1),$$

formule dans laquelle A et A_1 ont les valeurs (1).

Rotation instantanée du plan P *autour de la droite* L.

3. Nous avons dit que les trois équations des aires ont lieu pour le système des deux corps m et m_1 ; il existe donc, pour ce système, un plan invariable, c'est-à-dire un plan du maximum des aires dont la direction est fixe. Formons l'équation des aires relative au plan invariable.

Nous avons trois déplacements infiniment petits du point m, suivant trois directions rectangulaires : 1° un déplacement suivant r, auquel ne correspond aucune aire; 2° un déplacement dans le plan P, perpendiculaire à r, qui a pour valeur $rA\,dt$ et auquel correspond l'aire $\frac{1}{2}mr^2A$, que nous désignerons par $\frac{1}{2}G$; 3° un déplacement normal au plan P, égal à $\omega r \sin\beta\, dt$, auquel correspond l'aire $\frac{1}{2}mr^2\omega\sin\beta$, que nous désignerons par $\frac{1}{2}$K. Menons les axes de ces aires, c'est-à-dire des droites passant par l'origine, perpendiculaires aux plans de ces aires et dont la grandeur soit représentée par le double du nombre qui représente ces aires. L'axe de l'aire $\frac{1}{2}$G est perpendiculaire au plan P; il en est de même de l'axe de l'aire $\frac{1}{2}m_1 r_1^2 A_1$ ou $\frac{1}{2}G_1$, relative au corps m_1; leur résultante est donc égale à leur somme

$$G + G_1. \tag{2}$$

L'aire $\frac{1}{2}$K a son axe situé dans le plan P et perpendiculaire à r; de même l'aire $\frac{1}{2}m_1 r_1^2\omega\sin\beta_1$ ou $\frac{1}{2}K_1$ a son axe situé dans le plan P et perpendiculaire à r_1. L'axe résultant, qui est la diagonale du parallélogramme dont les côtés sont ces deux axes, a pour valeur

$$\sqrt{K^2 + K_1^2 + 2KK_1\cos(\beta - \beta_1)}. \tag{3}$$

Enfin, en composant les deux axes perpendiculaires entre eux qui ont les valeurs (2) et (3), on obtient une droite de grandeur constante et perpendiculaire au plan invariable; on a donc l'équation

$$(G + G_1)^2 + K^2 + K_1^2 + 2KK_1\cos(\beta_1 - \beta) = k^2,$$

en désignant par k une constante, que nous appellerons la *grandeur de l'axe* du plan invariable.

L'équation précédente peut s'écrire

$$(G + G_1)^2 + \omega^2[m^2 r^4\sin^2\beta + m_1^2 r_1^4 \sin^2\beta_1 + 2mm_1 r^2 r_1^2 \sin\beta\sin\beta_1\cos(\beta_1 - \beta)] = k^2,$$

ou

$$\omega^2 = \frac{k^2 - (G + G_1)^2}{m^2 r^4\sin^2\beta + m_1^2 r_1^4\sin^2\beta_1 + 2mm_1 r^2 r_1^2\sin\beta\sin\beta_1\cos(\beta_1 - \beta)};$$

elle donne, par conséquent, la rotation instantanée $\omega\, dt$ du plan P autour de la droite L.

Formule qui donne le mouvement de la trace du plan P
sur le plan invariable.

4. Désignons par σ l'angle que fait la trace S du plan P sur le plan invariable avec une droite fixe située dans ce dernier plan; représentons par U l'angle des deux plans, et par φ l'angle de la droite L avec la droite S.

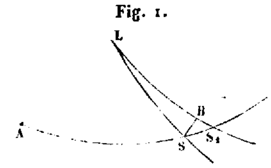
Imaginons une sphère qui ait son centre à l'origine O et soient (*fig.* 1) AS, LS les grands cercles qui représentent sur cette sphère le plan invariable et le plan P; les points S et L indiquent sur la figure les traces des droites S et L sur la sphère. Au bout d'un instant dt le plan P tournant autour de L de l'angle ωdt est représenté par LS_1. Soit A le point à partir duquel on compte l'angle σ, on aura $AS = \sigma$, $SS_1 = d\sigma$, $SLS_1 = \omega dt$, $LSA = U$.

Abaissons l'arc SB perpendiculaire sur LS_1, nous aurons

$$SB = SS_1 \sin SS_1B = d\sigma \sin U.$$

Du point S abaissons une droite perpendiculaire sur la droite L,

Fig. 1.



qui est un diamètre de la sphère, l'arc SB est égal à cette perpendiculaire, multipliée par ωdt; donc

$$SB = \omega dt \sin\varphi.$$

Égalant ces deux valeurs de SB, on a

$$d\sigma \sin U = \omega dt \sin\varphi.$$

Si nous projetons l'axe k du plan invariable sur une normale au plan P, nous obtenons $k\cos U$ pour la projection ; mais cette quantité est égale à l'axe de la somme des aires relatives au plan P; on a donc

$$k\cos U = G + G_1;$$

il en résulte

$$\sin^2 U = \frac{1}{k^2}[k^2 - (G + G_1)^2],$$

et la formule précédente devient

$$d\sigma = \frac{\omega k \sin U \sin\varphi}{k^2 - (G + G_1)^2} k\,dt.$$

Projetons ensuite l'axe k sur la droite L; pour cela, nous le projetterons d'abord sur le plan P, ce qui donnera $k\sin U$, puis nous projetterons cette projection sur L, ce qui donnera finalement $k\sin U\sin\varphi$. D'autre part, cette quantité doit être égale à la somme des aires relatives au plan perpendiculaire à L; elle est, par conséquent, égale à

$$mlw + m_1 l_1 w_1,$$

en désignant par l, l_1 les distances de m, m_1 à la droite L, et par w, w_1 les composantes des vitesses de m et m_1, perpendiculaires au plan P; on a

$$l = r\sin\beta, \qquad l_1 = r_1 \sin\beta_1,$$
$$w = \omega r \sin\beta, \quad w_1 = \omega r_1 \sin\beta_1;$$

on a donc

$$k\sin U\sin\varphi = \omega(mr^2\sin^2\beta + m_1 r_1^2 \sin^2\beta_1),$$

et l'expression de $d\sigma$ devient

$$d\sigma = \frac{\omega^2(mr^2\sin^2\beta + m_1 r_1^2\sin^2\beta_1)}{k^2 - (G + G_1)^2} k\,dt;$$

elle donne le mouvement de la trace du plan P sur le plan invariable.

Emploi de deux nouveaux angles ξ et ξ_1.

5. Désignons par ξ, ξ_1 les angles de r, r_1 avec la droite S d'intersection du plan P avec le plan invariable; β et β_1 sont les angles de r et r_1 avec la droite L; donc, en supposant tous ces angles comptés dans le même sens, on a

$$(a) \qquad \beta_1 - \beta = \xi_1 - \xi.$$

Les axes des aires désignées au n° 3 par $\frac{1}{2}$K et $\frac{1}{2}$K$_1$ sont situés dans le plan P et perpendiculaires à r et r_1; les axes des aires $\frac{1}{2}$G, $\frac{1}{2}$G$_1$, décrites dans le plan P, sont perpendiculaires à ce plan; donc, la projection de l'axe k du plan invariable sur la droite S étant nulle, on aura

$$\mathrm{K}\sin\xi + \mathrm{K}_1\sin\xi_1 = 0$$

ou

$$(b) \qquad mr^2\sin\beta\sin\xi + m_1 r_1^2\sin\beta_1\sin\xi_1 = 0.$$

Remarquons que les équations (a) et (b) sont symétriques par rapport aux deux couples de variables β, β_1 et ξ, ξ_1.

On tire des équations (a) et (b), en éliminant β_1,

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{-m_1 r_1^2\sin\xi_1\sin(\xi_1-\xi)}{mr^2\sin\xi + m_1 r_1^2\sin\xi_1\cos(\xi_1-\xi)};$$

on a de même

$$\operatorname{tang}\beta_1 = \frac{mr^2\sin\xi\sin(\xi_1-\xi)}{m_1 r_1^2\sin\xi_1 + mr^2\sin\xi\cos(\xi_1-\xi)};$$

on a aussi

$$(c) \qquad \sin^2\beta = \frac{m_1^2 r_1^4\sin^2\xi_1\sin^2(\xi_1-\xi)}{\mathrm{D}},$$

en faisant

$$\mathrm{D} = m^2 r^4\sin^2\xi + m_1^2 r_1^4\sin^2\xi_1 + 2mm_1 r^2 r_1^2\sin\xi\sin\xi_1\cos(\xi-\xi_1),$$

et une formule semblable pour $\sin^2\beta_1$.

D'après cela, on a

$$m^2 r^4 \sin^2\beta + m_1^2 r_1^4 \sin^2\beta_1 + 2mm_1 r^2 r_1^2 \sin\beta \sin\beta_1 \cos(\beta_1 - \beta) = \frac{m^2 m_1^2 r^4 r_1^4 \sin^4(\xi_1 - \xi)}{D},$$

et l'on déduit de la formule du n° 3

$$(d) \qquad \omega^2 = \frac{[k^2 - (G + G_1)^2] D}{m^2 m_1^2 r^4 r_1^4 \sin^4(\xi_1 - \xi)}.$$

En permutant ξ et ξ_1 avec β et β_1 dans la formule (c), on obtient

$$(e) \qquad \sin^2\xi = \frac{m_1^2 r_1^4 \sin^2\beta_1 \sin^2(\beta_1 - \beta)}{m^2 r^4 \sin^2\beta + m_1^2 r_1^4 \sin^2\beta_1 + 2mm_1 r^2 r_1^2 \sin\beta \sin\beta_1 \cos(\beta_1 - \beta)}.$$

Démonstration géométrique de deux équations.

6. Le déplacement angulaire du point m pendant l'instant dt dans le plan P, par rapport à la droite L supposée fixe, est égal à $A\,dt$, et il peut se décomposer en deux déplacements : 1° le déplacement de m par rapport à la droite S d'intersection de P avec le plan invariable; 2° le déplacement de la droite S par rapport à la droite L.

ξ étant l'angle de r avec S, le premier de ces deux déplacements a pour valeur $d\xi$. Pour calculer le second déplacement, reprenons la figure considérée au n° 4, où les grands cercles AS et LS représentent le plan invariable et le plan P. Le déplacement de la droite S par rapport à la droite L est égal à S_1B et l'on a

$$S_1 B = d\sigma \cos U;$$

on aura donc

$$A\,dt = d\xi + d\sigma \cos U.$$

Nous avons trouvé, au n° 4, l'équation

$$k \cos U = G + G_1;$$

donc l'équation précédente devient

$$(f)\qquad A = \frac{d\xi}{dt} + \frac{G + G_1}{k}\frac{d\sigma}{dt};$$

on a de même

$$(g)\qquad A_1 = \frac{d\xi_1}{dt} + \frac{G + G_1}{k}\frac{d\sigma}{dt}.$$

Nouvelles expressions de $d\sigma$ et de T.

7. En nous reportant à l'expression de ω^2, trouvée au n° **3**, nous déduisons de la formule (e)

$$\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} = \frac{\omega^2 m_1 r_1^2 \sin^2\beta_1 \sin^2(\beta_1 - \beta)}{k^2 - (G + G_1)^2};$$

nous avons de même

$$\frac{\sin^2\xi_1}{mr^2} = \frac{\omega^2 mr^2 \sin^2\beta \sin^2(\beta_1 - \beta)}{k^2 - (G + G_1)^2}.$$

Ajoutons ces deux équations, en remarquant que $\beta_1 - \beta$ est égal à $\xi_1 - \xi$, et nous aurons

$$(h)\quad \omega^2(mr^2\sin^2\beta + m_1 r_1^2 \sin^2\beta_1) = \frac{k^2 - (G + G_1)^2}{\sin^2(\xi_1 - \xi)}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right).$$

En remplaçant cette expression dans la dernière formule du n° **4**, nous avons la formule

$$(i)\qquad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{k}{\sin^2(\xi_1 - \xi)}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right),$$

où les angles ξ, ξ_1 entrent au lieu des angles β, β_1.

D'après la formule (h), l'expression de 2T, trouvée au n° **2**, peut s'écrire

$$2T = m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + m_1\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 + \frac{G^2}{mr^2} + \frac{G_1^2}{m_1 r_1^2} + R,$$

en posant

$$R = \frac{k^2 - (G + G_1)^2}{\sin^2(\xi_1 - \xi)}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right);$$

on a une autre expression de $2T$ en éliminant k au moyen de l'équation (i); ce qui donne

$$R = -\frac{(G+G_1)^2}{\sin^2(\xi_1-\xi)}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2}+\frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right)+\frac{mm_1 r^2 r_1^2 \sin^2(\xi_1-\xi)}{mr^2\sin^2\xi + m_1 r_1^2 \sin^2\xi_1}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2.$$

Système de variables conjuguées.

8. Posons

$$\frac{dr}{dt}=r', \quad \frac{dr_1}{dt}=r'_1, \quad \frac{d\xi}{dt}=\xi', \quad \frac{d\xi_1}{dt}=\xi'_1, \quad \frac{d\sigma}{dt}=\sigma';$$

nous aurons, d'après les deux dernières formules du n° **6**,

$$\xi' = A - \frac{G+G_1}{\sin^2(\xi_1-\xi)}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2}+\frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right),$$

$$\xi'_1 = A_1 - \frac{G+G_1}{\sin^2(\xi_1-\xi)}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2}+\frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right),$$

ou

$$(j) \qquad mr^2\xi' = G - \frac{mr^2(G+G_1)}{\sin^2(\xi_1-\xi)}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2}+\frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right),$$

$$(k) \qquad m_1 r_1^2\xi'_1 = G_1 - \frac{m_1 r_1^2(G+G_1)}{\sin^2(\xi_1-\xi)}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2}+\frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right).$$

Supposons que l'on tire G et G_1 de ces deux équations pour les porter dans la dernière expression obtenue pour $2T$, alors $2T$ ne renfermera plus que les variables

$$r, \ r_1, \ \xi, \ \xi_1$$

et les dérivées

$$r', \ r'_1, \ \xi', \ \xi'_1, \ \sigma';$$

par suite, les quantités

$$p=\frac{dT}{dr'}, \quad p_1=\frac{dT}{dr'_1}, \quad p_2=\frac{dT}{d\xi'}, \quad p_3=\frac{dT}{d\xi'_1}, \quad p_4=\frac{dT}{d\sigma'}$$

seront respectivement conjuguées de $r, r_1, \xi, \xi_1, \sigma$.

Calculons p_2 et p_3; nous avons

$$\frac{dT}{d\xi'} = \frac{1}{mr^2} G \frac{dG}{d\xi'} + \frac{1}{m_1 r_1^2} G_1 \frac{dG_1}{d\xi'} - \frac{G + G_1}{\sin^2(\xi_1 - \xi)} \left(\frac{dG}{d\xi'} + \frac{dG_1}{d\xi'}\right) \left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right).$$

La différentiation des équations (j) et (k), par rapport à ξ', donne

$$mr^2 = \frac{dG}{d\xi'} - \frac{mr^2}{\sin^2(\xi_1 - \xi)} \left(\frac{dG}{d\xi'} + \frac{dG_1}{d\xi'}\right) \left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right),$$

$$0 = \frac{dG_1}{d\xi'} - \frac{mr^2}{\sin^2(\xi_1 - \xi)} \left(\frac{dG}{d\xi'} + \frac{dG_1}{d\xi'}\right) \left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right).$$

Multiplions ces deux équations respectivement par $\frac{G}{mr^2}$, $\frac{G_1}{m_1 r_1^2}$, et ajoutons, nous aurons

$$G = \frac{dT}{d\xi'};$$

on a de même $G_1 = \frac{dT}{d\xi'_1}$; les variables G, G_1 sont donc conjuguées à ξ, ξ_1.

Équations différentielles canoniques.

9. En introduisant, dans l'expression de $2T$, les variables p, p_1, G, G_1, p_4, qui sont conjuguées à r, r_1, ξ, ξ_1, σ, on a

$$2T = \frac{p^2}{m} + \frac{p_1^2}{m_1} + \frac{G^2}{mr^2} + \frac{G_1^2}{m_1 r_1^2} + \left[\frac{p_4^2 - (G + G_1)^2}{\sin^2(\xi_1 - \xi)}\right] \left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right),$$

et, en faisant $H = T - V$, où V désigne la fonction de forces, on a les dix équations différentielles canoniques renfermées dans les deux suivantes :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dH}{dp_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dH}{dq_i},$$

où l'indice i est susceptible des valeurs 0, 1, 2, 3, 4 et où l'on suppose $q = r$, $q_1 = r_1$, $q_2 = \xi$, $q_3 = \xi_1$, $q_4 = \sigma$.

En faisant $i = 4$, on a les deux équations

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dH}{dp_4}, \quad \frac{dp_4}{dt} = -\frac{dH}{d\sigma} = 0;$$

la seconde prouve que p_4 est constant, et l'on déduit de la première

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{p_4}{\sin^2(\xi_1-\xi)}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1r_1^2}+\frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right),$$

équation déjà obtenue au n° **7** et qui prouve que p_4 est égal à k. Remplaçons, dans l'expression de T et dans celle de H, la quantité p_4 par k, et nous aurons les huit équations canoniques

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt}&=\frac{dH}{dp}, & \frac{dp}{dt}&=-\frac{dH}{dr},\\
\frac{dr_1}{dt}&=\frac{dH}{dp_1}, & \frac{dp_1}{dt}&=-\frac{dH}{dr_1},\\
\frac{d\xi}{dt}&=\frac{dH}{dG}, & \frac{dG}{dt}&=-\frac{dH}{d\xi},\\
\frac{d\xi_1}{dt}&=\frac{dH}{dG_1}, & \frac{dG_1}{dt}&=-\frac{dH}{d\xi_1}.
\end{aligned}$$

Les deux équations

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{dH}{dG},\quad \frac{d\xi_1}{dt}=\frac{dH}{dG_1}$$

ont été déjà trouvées ci-dessus (n° **8**); la première, par exemple, peut en effet s'écrire

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{G}{mr^2}-\frac{G+G_1}{\sin^2(\xi_1-\xi)}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1r_1^2}+\frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right).$$

Résumé de la solution.

10. En intégrant le système des huit équations différentielles canoniques données au numéro précédent, et dont une des intégrales est l'équation des forces vives

$$H=\text{const.},$$

nous obtiendrons les variables r, r_1, ξ, ξ_1, qui déterminent les distances de m et m_1 à l'origine, et leurs distances angulaires à la droite S, intersection du plan P avec le plan invariable; ces coordonnées déterminent complétement la position de m et m_1 dans le plan P. Reste à déterminer la position de ce plan; elle sera fixée : 1° par l'angle U que le plan P fait avec le plan invariable et fourni par la formule

$$\cos \mathrm{U} = \frac{\mathrm{G} + \mathrm{G}_1}{k},$$

2° par le mouvement de la ligne S sur le plan invariable, exprimé par la formule

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{k}{\sin^2(\xi_1 - \xi)} \left(\frac{\sin^2 \xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2 \xi_1}{m r^2}\right).$$

Quoiqu'il n'y ait pas besoin d'autres variables pour fixer la position du système, on peut remarquer que, les quantités précédentes étant obtenues, on pourra calculer les angles β, β_1 par les formules du n° **5**, l'angle instantané de rotation ωdt dont tourne le plan P par la formule (d) du même numéro, et l'angle $d\gamma$ formé par les deux génératrices du cône défini au n° **1**, suivant lesquelles les deux positions du plan P au commencement et à la fin de l'instant dt touchent ce cône, au moyen de la formule (n° **2**)

$$\frac{\mathrm{G}}{mr^2} = \frac{d\beta}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}$$

ou

$$d\gamma = \frac{\mathrm{G}}{mr^2} dt - d\beta.$$

Sur le rôle des équations des aires dans la théorie précédente.

11. Bour croyait que, pour obtenir toutes les équations du problème, il fallait ajouter aux huit équations canoniques et à l'équation des aires relative au plan invariable deux des intégrales des aires relatives à trois plans fixes de coordonnées rectangulaires. D'après la théorie qui précède, il est évident qu'il n'y a pas lieu d'employer ces deux intégrales; mais je vais démontrer de plus que deux combinaisons des équations des aires sont renfermées dans les équations canoniques.

Pour arriver à cette démonstration, commençons par donner une forme géométrique à la question. Nous avons exprimé au n° **3** que l'axe du plan invariable est de grandeur constante; il reste encore à exprimer que la direction de cet axe est fixe.

Représentons-nous le plan P qui passe par l'origine O (*fig.* 2) et les deux points m, m_1. Au bout de l'instant dt, l'axe de rotation L de ce plan vient en L' dans ce plan, et le plan P tournant de l'angle ωdt autour de L' occupe une seconde position. Dans la première position du plan, menons Og perpendiculaire à L', puis élevons par le point O une droite OZ perpendiculaire à ce plan.

Nous allons projeter l'axe du plan invariable sur les trois droites rectangulaires L', Og, OZ au commencement de l'instant dt; nous les projetterons ensuite sur les mêmes axes à la fin de cet instant, et nous exprimerons que ces projections n'ont pas changé de grandeur.

Nous supposerons que les axes des aires soient menés normalement à leur plan et d'un côté de ce plan, de manière qu'un observateur, placé suivant cet axe, voie la rotation du rayon vecteur qui décrit l'aire s'effectuer de droite à gauche.

L'axe des aires G et G_1 est situé suivant OZ; les axes des aires K et K_1 (n° 3) sont situés dans la première position du plan P et sont perpendiculaires à Om, Om_1. A la fin de l'instant dt, les rayons Om, Om_1 sont venus en Om', Om'_1 dans la seconde position du plan P, et les axes des aires K, K_1 sont venus en K', K'_1 perpendiculaires à Om', Om'_1.

1° Projetons l'axe du plan invariable sur L' au commencement de dt, et, pour cela, projetons ces composantes G, G_1, K, K_1 sur cette droite. La projection de G et G_1 sur L' est nulle; on a ensuite, d'après les notations du n° 2,

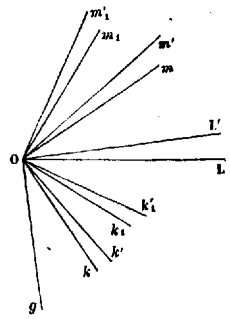
$$\text{Angle}\,(K, L) = \frac{\pi}{2} - \beta, \qquad (K_1, L) = \frac{\pi}{2} - \beta_1, \quad (L, L') = d\gamma,$$
$$(K, L') = \frac{\pi}{2} - \beta + d\gamma, \quad (K_1, L') = \frac{\pi}{2} - \beta_1 + d\gamma;$$

on a donc, pour la projection de l'axe du plan invariable,

$$(a) \qquad \left\{ \begin{aligned} & K\cos(K, L') + K_1 \cos(K_1, L') \\ & \quad = K \sin(\beta - d\gamma) + K_1 \sin(\beta_1 - d\gamma) \\ & \quad = K \sin\beta - K\cos\beta\, d\gamma + K_1 \sin\beta_1 - K\cos\beta_1\, d\gamma. \end{aligned} \right.$$

Cherchons la même projection au bout de l'instant dt. L'axe de G et G_1, après cet instant, est perpendiculaire à la seconde position du

Fig. 2.



plan P et, par suite, perpendiculaire à la droite L' qui s'y trouve; donc sa projection sur L' est nulle.

On a ensuite

$$(\mathrm{K}', \mathrm{L}') = \frac{\pi}{2} - \beta - d\beta, \quad (\mathrm{K}'_1, \mathrm{L}') = \frac{\pi}{2} - \beta_1 - d\beta_1;$$

on a donc, pour la projection cherchée,

$$(\mathrm{A}) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{K}'\cos(\mathrm{K}', \mathrm{L}') + \mathrm{K}'_1 \cos(\mathrm{K}'_1, \mathrm{L}') \\ & \quad = (\mathrm{K} + d\mathrm{K}) \sin(\beta + d\beta) + (\mathrm{K}_1 + d\mathrm{K}_1) \sin(\beta_1 + d\beta_1) \\ & \quad = \mathrm{K}\sin\beta + \sin\beta\, d\mathrm{K} + \mathrm{K}\cos\beta\, d\beta + \mathrm{K}_1 \sin\beta_1 \\ & \qquad + \sin\beta_1\, d\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_1 \cos\beta_1\, d\beta_1. \end{aligned} \right.$$

En égalant (a) et (A), on a

$$(\alpha) \quad d\mathrm{K}\sin\beta + \mathrm{K}\cos\beta(d\beta + d\gamma) + d\mathrm{K}_1 \sin\beta_1 + \mathrm{K}_1 \cos\beta_1 (d\beta_1 + d\gamma) = 0.$$

2° Projetons sur $\mathrm{O}g$. Au commencement de dt, les projections de G et G_1 sont nulles, et celles de K et K_1 sont

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{K}\cos(\mathrm{K}, g) + \mathrm{K}_1 \cos(\mathrm{K}_1, g) \\ & \quad = \mathrm{K}\sin(\mathrm{K}, \mathrm{L}') + \mathrm{K}_1 \sin(\mathrm{K}_1, \mathrm{L}') \\ & \quad = \mathrm{K}\cos\beta + \mathrm{K}\sin\beta\, d\gamma + \mathrm{K}_1 \cos\beta_1 + \mathrm{K}_1 \sin\beta_1\, d\gamma. \end{aligned} \right.$$

K′ n'est pas situé dans le plan gOL'; mais on peut l'y supposer en négligeant les infiniment petits du second ordre, et l'on a pour sa projection

$$(K + dK)\cos K'Og = (K + dK)\cos(\beta + d\beta)$$
$$= K\cos\beta + dK\cos\beta - K\sin\beta d\beta.$$

On a de même, pour la projection de K'_1,

$$K_1\cos\beta_1 + dK_1\cos\beta_1 - K_1\sin\beta_1 d\beta_1.$$

G et G_1 s'étant changés en $G + dG$, $G_1 + dG_1$, on a, pour la projection de leur résultante,

$$(G + dG + G_1 + dG_1)\sin(\omega dt).$$

On a donc, pour la projection de l'axe du plan invariable à la fin de dt,

$$(\mathrm{B})\quad \left\{\begin{aligned} &K\cos\beta + dK\cos\beta - K\sin\beta d\beta + K_1\cos\beta_1\\ &\qquad + dK_1\cos\beta_1 - K_1\sin\beta_1 d\beta_1 + (G + G_1)\omega dt;\end{aligned}\right.$$

et, en égalant (b) et (B), on a

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned} &dK\cos\beta - K\sin\beta(d\beta + d\gamma)\\ &\qquad + dK_1\cos\beta_1 - K_1\sin\beta_1(d\beta_1 + d\gamma) + (G + G_1)\omega dt = 0.\end{aligned}\right.$$

3° Projetons sur la normale OZ au plan gOL'. Au commencement de dt on a, pour la projection totale,

$$(c)\qquad G + G_1;$$

à la fin de dt on aura, pour cette projection,

$$(G + dG + G_1 + dG_1)\cos(\omega dt) - K'\sin j - K'_1\sin j_1,$$

en désignant par j et j_1 les angles de K' et K'_1 avec le plan gOL'. La dernière expression peut s'écrire

$$(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{aligned} &G + dG + G_1 + dG_1 - (K + dK)\omega dt\cos(\beta + d\beta)\\ &\qquad - (K_1 + dK_1)\omega dt\cos(\beta_1 + d\beta_1).\end{aligned}\right.$$

En égalant (c) et (C), on obtient

$$(\gamma) \qquad dG + dG_1 - (K\cos\beta + K_1\cos\beta_1)\omega\, dt = 0.$$

Les trois équations (α), (β), (γ) équivalent aux trois intégrales des aires relatives à trois plans de coordonnées rectangulaires; on peut les écrire plus simplement ainsi qu'il suit :

$$\text{(I)} \qquad d(K\sin\beta + K_1\sin\beta_1) + (K\cos\beta + K_1\cos\beta_1)\,d\gamma = 0,$$

$$\text{(II)} \qquad d(K\cos\beta + K_1\cos\beta_1) - (K\sin\beta + K_1\sin\beta_1)\,d\gamma + (G + G_1)\omega\, dt = 0,$$

$$\text{(III)} \qquad dG + dG_1 - (K\cos\beta + K_1\cos\beta_1)\omega\, dt = 0.$$

Multiplions ces trois équations respectivement par

$$K\sin\beta + K_1\sin\beta_1, \quad K\cos\beta + K_1\cos\beta_1, \quad G + G_1,$$

et ajoutons; nous aurons, après plusieurs réductions,

$$d[(G + G_1)^2 + K^2 + K_1^2 + 2KK_1\cos(\beta_1 - \beta)] = 0;$$

en intégrant et désignant par k une constante, on retrouve l'équation du n° 3

$$\text{(IV)} \qquad (G + G_1)^2 + K^2 + K_1^2 + 2KK_1\cos(\beta_1 - \beta) = k^2.$$

12. Les équations (I), (II), (III) peuvent être remplacées par deux d'entre elles, par exemple les équations (I) et (III), et par l'équation (IV). Nous allons transformer ces équations en y introduisant les variables r, r_1, ξ, ξ_1, G, G_1.

Si l'on fait cette transformation pour l'équation (IV), on obtient une identité; donc, par cette transformation, les équations (I), (II), (III) se réduisent à deux.

Opérons d'abord sur l'équation (III), qui est la plus simple. D'après le n° **3**, on a

$$K = mr^2\omega\sin\beta, \quad K_1 = m_1 r_1^2\omega\sin\beta_1,$$

et l'équation (III) devient

$$\frac{dG}{dt} + \frac{dG_1}{dt} - \omega^2(mr^2\sin\beta\cos\beta + m_1 r_1^2\sin\beta_1\cos\beta_1) = 0.$$

Posons, pour abréger,

$$\beta_1 - \beta = \xi_1 - \xi = g,$$

nous aurons, d'après le n° 5,

$$\sin\beta\cos\beta = -\frac{1}{D} m_1 r_1^2 \sin\xi_1 \sin g (mr^2 \sin\xi + m_1 r_1^2 \sin\xi_1 \cos g),$$
$$\sin\beta_1 \cos\beta_1 = \frac{1}{D} mr^2 \sin\xi \sin g (m_1 r_1^2 \sin\xi_1 + mr^2 \sin\xi \cos g),$$

et ensuite, à cause de la valeur de ω^2 du même numéro,

$$\begin{aligned} &\omega^2(mr^2 \sin\beta\cos\beta + m_1 r_1^2 \sin\beta_1 \cos\beta_1) \\ &\quad = \frac{k^2 - (G+G_1)^2}{mm_1 r^2 r_1^2 \sin^2 g}\left[(-mr^2 + m_1 r_1^2)\sin\xi\sin\xi_1 \right. \\ &\qquad\qquad \left. + (mr^2\sin^2\xi - m_1 r_1^2 \sin^2\xi_1)\cos g\right]. \end{aligned}$$

Donc l'équation (III) devient

$$(e)\quad \left\{ \begin{aligned} &0 = \frac{dG}{dt} + \frac{dG_1}{dt} \\ &\quad - \frac{k^2 - (G+G_1)^2}{\sin^3 g}\left[\sin\xi\sin\xi_1\left(\frac{1}{mr^2} - \frac{1}{m_1 r_1^2}\right) + \left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} - \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right)\cos g\right], \end{aligned} \right.$$

ou plus simplement

$$0 = \frac{dG}{dt} + \frac{dG_1}{dt} + \frac{k^2 - (G+G_1)^2}{\sin^2 g}\left(\frac{\sin\xi\cos\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin\xi_1\cos\xi_1}{mr^2}\right).$$

C'est l'équation que l'on obtient en ajoutant les deux équations canoniques

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{dH}{d\xi} = -\frac{dT}{d\xi} + \frac{dV}{d\xi},$$
$$\frac{dG_1}{dt} = -\frac{dH}{d\xi_1} = -\frac{dT}{d\xi_1} + \frac{dV}{d\xi_1};$$

ce qui donne, parce que V ne renferme ξ et ξ_1 que par g,

$$\frac{dG}{dt} + \frac{dG_1}{dt} + \frac{dT}{d\xi} + \frac{dT}{d\xi_1} = 0.$$

13. Faisons la même transformation pour l'équation (I). Le premier membre de cette équation peut se décomposer dans les deux parties semblables

$$(f)\qquad d(\mathrm{K}\sin\beta)+\mathrm{K}\cos\beta\, d\gamma,\quad d(\mathrm{K}_1\sin\beta_1)+\mathrm{K}_1\cos\beta_1\, d\gamma;$$

transformons la première partie; elle peut s'écrire, d'après la valeur de $d\gamma$ (n° **10**),

$$(g)\qquad \begin{cases} d\mathrm{K}\sin\beta+\mathrm{K}\cos\beta\, d\beta+\mathrm{K}\cos\beta\left(\dfrac{\mathrm{G}}{mr^2}dt-d\beta\right), \\ d\mathrm{K}\sin\beta+\mathrm{K}\cos\beta\,\dfrac{\mathrm{G}}{mr^2}dt. \end{cases}$$

Remplaçons, dans la formule

$$\mathrm{K}=mr^2\omega\sin\beta,$$

ω, $\sin\beta$ par leurs valeurs obtenues au n° **5**,

$$\omega=\frac{\sqrt{\mathrm{D}}\sqrt{k^2-(\mathrm{G}+\mathrm{G}_1)^2}}{mm_1r^2r_1^2\sin^2 g},\quad \sin\beta=\frac{m_1r_1^2\sin\xi_1\sin g}{\sqrt{\mathrm{D}}},$$

et nous aurons

$$\mathrm{K}=\frac{\sin\xi_1\sqrt{k^2-(\mathrm{G}+\mathrm{G}_1)^2}}{\sin g};$$

nous avons de même

$$\mathrm{K}_1=\frac{-\sin\xi\sqrt{k^2-(\mathrm{G}+\mathrm{G}_1)^2}}{\sin g}.$$

L'expression (g) peut s'écrire

$$\frac{\mathrm{K}\,d\mathrm{K}}{mr^2\omega}+\mathrm{G}\omega\sin\beta\cos\beta\, dt=\frac{1}{\omega}\mathrm{L},$$

en faisant

$$\mathrm{L}=\frac{\mathrm{K}\,d\mathrm{K}}{mr^2}+\mathrm{G}\omega^2\sin\beta\cos\beta\, dt.$$

En différentiant K^2, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{K}\,d\mathrm{K}=&-(\mathrm{G}+\mathrm{G}_1)\frac{\sin^2\xi_1}{\sin^2 g}(d\mathrm{G}+d\mathrm{G}_1)\\ &+\frac{k^2-(\mathrm{G}+\mathrm{G}_1)^2}{\sin^2 g}(-\sin\xi\sin\xi_1\, d\xi_1+\sin^2\xi_1\cos g\, d\xi),\end{aligned}$$

et par suite, en remplaçant dans L,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L} = & -\frac{\sin^2\xi_1}{mr^2\sin^2 g}(\mathrm{G}+\mathrm{G}_1)(d\mathrm{G}+d\mathrm{G}_1) \\
& + \frac{k^2-(\mathrm{G}+\mathrm{G}_1)^2}{mr^2\sin^3 g}(-\sin\xi\sin\xi_1\, d\xi_1 + \sin^2\xi_1\cos g\, d\xi) \\
& - \frac{k^2-(\mathrm{G}+\mathrm{G}_1)^2}{mr^2\sin^3 g}\mathrm{G}\sin\xi_1\left(\frac{\sin\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin\xi_1\cos g}{mr^2}\right) dt.
\end{aligned}
$$

Divisons L par dt et portons, dans les deux premières lignes de L, les valeurs de

$$
\frac{d\mathrm{G}}{dt} + \frac{d\mathrm{G}_1}{dt}, \quad \frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d\xi_1}{dt},
$$

tirées des équations canoniques. Pour la première valeur, nous adopterons la forme (e)

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{G}}{dt} + \frac{d\mathrm{G}_1}{dt} = \frac{k^2-(\mathrm{G}+\mathrm{G}_1)^2}{\sin^3 g} & \left[\sin\xi\sin\xi_1\left(\frac{1}{mr^2} - \frac{1}{m_1 r_1^2}\right)\right. \\
& \left. + \left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} - \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right)\cos g\right];
\end{aligned}
$$

nous avons ensuite

$$
\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= \frac{\mathrm{G}}{mr^2} - \frac{\mathrm{G}+\mathrm{G}_1}{\sin^2 g}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right), \\
\frac{d\xi_1}{dt} &= \frac{\mathrm{G}_1}{m_1 r_1^2} - \frac{\mathrm{G}+\mathrm{G}_1}{\sin^2 g}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right).
\end{aligned}
$$

On obtient ainsi, pour les deux premières lignes de L divisé par dt, après quelques réductions,

$$
\begin{aligned}
\frac{k^2-(\mathrm{G}+\mathrm{G}_1)^2}{mr^2} \Big\{ & \mathrm{G}\left[\frac{\sin\xi\sin\xi_1}{m_1 r_1^2\sin^5 g}(\sin^2\xi + \sin^2\xi_1 - 2\sin\xi\sin\xi_1\cos g) + \frac{\sin^2\xi_1\cos g}{mr^2\sin^3 g}\right] \\
& + \mathrm{G}_1\frac{\sin\xi\sin\xi_1}{m_1 r_1^2\sin^5 g}(\sin^2\xi + \sin^2\xi_1 - 2\sin\xi\sin\xi_1\cos g - \sin^2 g)\Big\},
\end{aligned}
$$

ou, à cause de $g = \xi_1 - \xi$,

$$
\frac{k^2-(\mathrm{G}+\mathrm{G}_1)^2}{mr^2\sin^3 g}\mathrm{G}\sin\xi_1\left(\frac{\sin\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1\cos g}{mr^2\sin^3 g}\right),
$$

ce qui est la troisième ligne de L, divisée par dt et prise avec un signe contraire.

L ou l'expression (g) est donc nulle; ainsi la première partie (f) de l'équation (I) est nulle d'après les équations canoniques; il en est de même de la seconde. Il est donc bien vrai que les quatre dernières équations du système canonique renferment deux combinaisons des équations des aires.

14. La démonstration précédente conduit à un résultat curieux. En effet, nous avons prouvé non-seulement que l'équation (I) résulte des équations canoniques, mais encore que l'on a séparément, en vertu de ces équations,

$$d(\mathrm{K}\sin\beta) + \mathrm{K}\cos\beta\, d\gamma = 0,$$
$$d(\mathrm{K}\sin\beta_1) + \mathrm{K}_1\cos\beta_1\, d\gamma = 0;$$

or ces deux formules expriment que le principe des aires a lieu pour chacun des deux corps m, m_1 par rapport à l'axe instantané du plan P. On pourrait démontrer de même que, non-seulement l'équation (II) a lieu, mais qu'on a encore séparément

$$d(\mathrm{K}\cos\beta) - \mathrm{K}\sin\beta\, d\gamma + \mathrm{G}\,\omega\, dt = 0,$$
$$d(\mathrm{K}\cos\beta_1) - \mathrm{K}_1\sin\beta_1\, d\gamma + \mathrm{G}_1\,\omega\, dt = 0,$$

et l'on en conclut que le principe des aires a lieu aussi, pour chacun des deux corps m, m_1 pris séparément, par rapport à la droite Og menée dans le plan du triangle perpendiculairement à l'axe de rotation. Donc le principe des aires a également lieu pour chaque corps par rapport à une droite quelconque située dans le plan P. On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Si deux corps m et m_1 sont soumis à une fonction de forces qui ne dépend que de leurs distances à l'origine et de l'angle formé par ces deux distances, le théorème des aires a lieu à chaque instant par rapport à toute droite menée par l'origine dans le plan* P *qui passe par m, m_1 et cette origine, non-seulement pour l'ensemble des deux corps m et m_1, mais encore pour chacun de ces deux corps pris séparément.*

Si l'on compose comme des forces les axes des aires K et G, on obtient l'axe des aires résultant pour la masse m, et l'on voit que la projection de cet axe sur une droite quelconque du plan P est la même au commencement et à la fin de l'instant dt. On peut donc encore énoncer le théorème précédent de la manière suivante :

La projection, sur une position du plan P, *de l'axe des aires résultant pour l'une quelconque des masses* m *et* m_1, *reste la même au commencement et à la fin de l'instant* dt *qui suit immédiatement cette position du plan* P.

Car la projection de cet axe sur une droite du plan P s'obtient en projetant cet axe sur le plan P, puis cette projection sur la droite.

Orbites décrites par les deux corps m *et* m_1.

15. En Astronomie, on imagine que les orbites des corps célestes sont des ellipses dont la forme et la position varient à chaque instant; cette conception n'a d'ailleurs, dans cette Science, une véritable importance qu'à cause de la petitesse des variations des éléments de ces orbites. Nous allons montrer comment on peut déterminer ces orbites et la position des deux corps m et m_1 sur ces orbites au moyen du système de variables que nous avons employé.

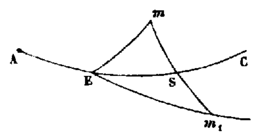
Considérons l'aire décrite pendant le temps dt, par le rayon vecteur r mené au corps m, multipliée par la masse m, quantité qu'on peut regarder comme une aire décrite par un rayon vecteur égal à $r\sqrt{m}$ et de même direction que le premier; concevons de même l'aire décrite par le rayon vecteur $r_1\sqrt{m_1}$ dans le même instant. Prenons les axes de ces aires et menons la diagonale du parallélogramme qui a pour côtés ces deux axes : cette diagonale représente, en grandeur et en direction, l'axe du plan invariable. Par le point O, origine de ces trois axes, menons-leur des plans perpendiculaires, nous obtiendrons les plans des deux orbites et le plan invariable qui se couperont suivant une seule droite.

Ainsi les plans des deux orbites coupent le plan invariable suivant une même droite passant par le point O et qui se meut dans ce plan.

Imaginons une sphère dont le centre soit au point O; les quatre plans suivants qui passent par ce point, savoir le plan P, les orbites de m et m_1 (*fig.* 3) et le plan invariable, couperont la sphère suivant des grands cercles représentés respectivement par mm_1, Em, Em_1, ES.

Désignons par u et u_1 les inclinaisons des orbites de m et m_1 sur le

Fig. 3.



plan P des trois corps; la tangente de l'angle u est égale au déplacement de m normal à P divisé par le déplacement de m dans P et perpendiculaire au rayon vecteur; on en conclut, en remplaçant ces déplacements par les aires K et G qui leur sont proportionnelles,

$$\operatorname{tang} u = \frac{K}{G}, \quad \operatorname{tang} u_1 = \frac{K_1}{G_1}.$$

Désignons par I l'angle mEm_1 des deux orbites; l'arc mm_1 est égal à g (n° **12**) et le triangle sphérique mEm_1 donne

$$\cos I = \cos u \cos u_1 + \sin u \sin u_1 \cos g,$$

$$\cos I = \frac{G}{\sqrt{K^2+G^2}} \frac{G_1}{\sqrt{K_1^2+G_1^2}} + \frac{K}{\sqrt{K^2+G^2}} \frac{K_1}{\sqrt{K_1^2+G_1^2}} \cos g.$$

Dans le cas où les masses m et m_1 n'exercent pas entre elles d'actions mutuelles et sont seulement sollicitées par un centre d'attraction situé au point O, le principe des aires pouvant être appliqué à chacun des deux corps dans leurs orbites respectives, on aura

$$(\alpha) \qquad K^2 + G^2 = b^2, \quad K_1^2 + G_1^2 = b_1^2,$$

b et b_1 étant deux constantes et, d'après la formule du n° **3**,

$$(G + G_1)^2 + K^2 + K_1^2 + 2KK_1 \cos g = k^2,$$

on a donc

$$\cos I = \frac{GG_1 + KK_1 \cos g}{bb_1} = \frac{k^2 - b^2 - b_1^2}{2bb_1}.$$

Dans le cas général où les orbites sont variables, on peut encore appliquer cette dernière formule, en considérant b et b_1 comme des quantités variables fournies par les formules (α) ou

$$\frac{[k^2-(G+G_1)^2]\sin^2\xi_1}{\sin^2 g}+G^2=b^2,\quad \frac{[k^2-(G+G_1)^2]\sin^2\xi}{\sin^2 g}+G_1^2=b_1^2.$$

Cherchons les inclinaisons i et i_1 des plans des deux orbites sur le plan invariable. Si l'on regarde la variable ξ de la figure comme positive, on aura

$$mS=\xi;$$

ξ_1 étant porté en sens contraire, on a

$$m_1S=-\xi_1\quad\text{et}\quad mm_1=-\xi_1+\xi=-g.$$

On aura aussi

$$mES=i,\quad m_1ES=-i_1,\quad I=i-i_1,\quad mSA=U.$$

Le triangle mES donne

$$\sin Em=\frac{\sin\xi\sin U}{\sin i}=\frac{\sqrt{k^2-(G+G_1)^2}\sin\xi}{k\sin i};$$

d'autre part, le triangle mEm_1 donne

$$\sin Em=-\frac{\sin u_1\sin g}{\sin I}=-\frac{\sin g K_1}{\sin I\sqrt{K_1^2+G_1^2}},$$

et, puisque l'on a (n° **13**)

$$K_1=\frac{-\sin\xi\sqrt{k^2-(G+G_1)^2}}{\sin g},$$

il en résulte

$$(\beta)\qquad \sin Em=\frac{\sqrt{k^2-(G+G_1)^2}\sin\xi}{b_1\sin I};$$

égalant les deux valeurs de $\sin Em$, on a

$$\sin i=\frac{b_1\sin I}{k},$$

on a de même

$$\sin i_1=-\frac{b\sin I}{k}.$$

Remarquons que la figure formée par les deux triangles EmS, Em_1S est entièrement déterminée quand on a calculé ξ, ξ_1, i, i_1; on pourra achever de fixer la position de la figure sur le plan invariable, lorsqu'on connaîtra l'arc σ représenté par AS, A désignant un point fixe du grand cercle ES.

L'angle σ s'obtient par une quadrature d'après une formule donnée au n° **10**.

Em ou la distance angulaire du corps m au nœud E est donnée par la formule (β) ci-dessus; on a, pour la même quantité relative au corps m_1,

$$\sin \mathrm{E}m_1 = \frac{-\sqrt{k^2 - (\mathrm{G}+\mathrm{G}_1)^2}\sin\xi_1}{b\sin \mathrm{I}},$$

Les planètes Jupiter et Saturne ayant des masses beaucoup plus considérables que les autres planètes, leur mouvement elliptique est surtout troublé par leurs actions mutuelles, et cette circonstance, que cinq fois le moyen mouvement de Saturne moins deux fois celui de Jupiter est une très-petite quantité, achève de donner une grande prédominance à ces actions mutuelles. Or, si l'on néglige les actions des autres planètes, on pourra étudier le mouvement de ces deux corps, en y appliquant le problème des trois corps pour lesquels on prendra le Soleil, Jupiter et Saturne : c'est ce que je ferai dans un autre Mémoire, en appliquant la théorie précédente.