JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. RESAL

Note sur les petits mouvements d'un fluide incompressible dans un tuyau élastique

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 2 (1876), p. 342-344.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1876_3_2__342_0>

Note sur les petits mouvements d'un fluide incompressible dans un tuyau élastique;

Par M. H. RESAL.

M. Marey a publié, en 1875, un Mémoire des plus intéressants intitulé : *Mouvement des ondes liquides*, pour servir à la théorie du pouls. Dans son Mémoire, le savant professeur donne une relation des expériences qu'il a faites sur le mouvement d'un liquide dans un tuyau élastique, et il arrive à poser plusieurs règles relatives à la manière dont les ondes se propagent. Dans cette Note, je n'ai pas d'autre objet que de justifier par l'analyse une partie des résultats auxquels M. Marey est arrivé.

Soient

p_0 la pression extérieure censée constante qui s'exerce sur le tuyau;

ω_0 la section intérieure du tuyau à l'état naturel;

R_0 le rayon de cette section;

p, ω, v la pression, la section et la vitesse, au bout du temps t, correspondant à la longueur s de l'axe du tuyau, mesurée à partir d'une origine déterminée et au rayon intérieur R;

π le poids spécifique du liquide;

e l'épaisseur du tuyau;

E le coefficient d'élasticité de la matière dont il est formé;

$N e\,ds$ la tension normale développée dans la section faite dans le tuyau par un plan mené par son axe et limitée par les deux plans normaux au même axe correspondant aux arcs s et $s + ds$.

Je supposerai que les rapports $\frac{e}{R_0}$, $\frac{R - R_0}{R_0}$ sont assez petits pour qu'on puisse en négliger la valeur devant l'unité. En exprimant que la portion du tuyau déterminée par un plan méridien et les deux plans normaux ci-dessus, distants de ds, se trouve en équilibre sous l'action des pressions et des actions élastiques développées dans les sections méridiennes, on reconnaît facilement que l'on a

$$2\mathrm{N}e\,ds = 2\mathrm{R}(p - p_0),$$

d'où

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{R}(p - p_0)}{e};$$

mais, si λ désigne la dilatation qu'éprouve la matière du tuyau tangentiellement à sa ligne méridienne moyenne, on a

$$\mathrm{N} = \mathrm{E}\lambda,$$

d'où

$$\lambda = \frac{\mathrm{R}(p - p_0)}{\mathrm{E}e};$$

mais il est visible que λ n'est autre chose que $\frac{\mathrm{R} - \mathrm{R}_0}{\mathrm{R}_0}$, de sorte que l'on peut écrire

$$(1) \qquad \omega = \omega_0 + 2\pi\mathrm{R}_0.\mathrm{R}_0\lambda = \omega_0\left[1 + \frac{2\mathrm{R}_0}{\mathrm{E}e}(p - p_0)\right].$$

Dans ce qui suit nous négligerons la pesanteur, ce qui revient à supposer le tuyau horizontal ou sensiblement horizontal ; nous supposerons de plus que la vitesse du liquide est assez petite pour qu'on puisse négliger sa seconde puissance et son produit par la dilatation λ.

L'hypothèse des tranches donne la même équation aux différentielles partielles

$$(2) \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{\pi}\frac{dp}{ds},$$

que si le tuyau était indéformable.

Dans le temps dt, il passe par la section ω le volume liquide $\omega v\,dt$, et par la section qui est distante de ds le volume $\omega v\,dt + \frac{d\omega v}{ds}dt\,ds$; il est donc resté entre les plans de ces deux sections le volume $-\frac{d\omega v}{ds}dt\,ds$, qui a produit l'augmentation de volume $\frac{d\omega}{dt}\,dt\,ds$. Nous avons donc

$$\frac{d\omega v}{ds} = -\frac{d\omega}{dt};$$

d'où, en développant et ayant égard à la relation (1) ainsi qu'au degré d'approximation convenu,

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{2R_1}{Ee}\frac{dp}{dt}; \tag{3}$$

si l'on élimine p entre les équations (2) et (3), on trouve

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{Eeg}{2R_1\pi}\frac{d^2v}{ds^2}, \tag{4}$$

équation dont la forme est bien connue et d'où l'on déduit, pour la vitesse de propagation des ondes,

$$V = \sqrt{\frac{Eeg}{2R_1\pi}}.$$

Ainsi cette vitesse est égale à la racine carrée du produit des rapports de l'épaisseur au diamètre du tuyau et du coefficient d'élasticité de la matière dont le tuyau est formé à la densité de masse du liquide, ce qui paraît conforme aux résultats de l'expérience.