JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HALPHEN

Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique, et sur les questions analogues dans l'espace

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 2 (1876), p. 257-290.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1876_3_2__257_0>

Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique, et sur les questions analogues dans l'espace;

Par M. HALPHEN.

---

1. Dans un grand nombre de questions géométriques, s'offrent des cas particuliers du problème suivant :

Étudier, sur une courbe algébrique plane, les points qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique donnée.

Il est immédiatement visible que ces points sont les intersections de la courbe considérée $S = 0$ avec une autre courbe algébrique $\Phi = 0$. L'équation de cette dernière s'obtient, en effet, en substituant, dans l'équation différentielle, aux dérivées, leurs expressions déduites de l'équation $S = 0$. La formation de l'équation $\Phi = 0$, si simple en théorie, présente, dans la plupart des applications, une complication très-grande. Si elle est nécessaire pour une étude approfondie, elle peut, du moins, être évitée pour certains cas de la question générale. C'est ce que je me propose de montrer ici pour les deux problèmes suivants :

1° *Trouver le degré de la courbe* Φ;

2° *Trouver le nombre des points, en tenant compte des singularités de la courbe* S.

La solution de ces deux problèmes fera l'objet du § I. Le § II sera consacré à des applications. Dans le § III, j'étendrai la solution du premier problème à l'espace. On verra, dans ce paragraphe, le problème résolu immédiatement et, pour ainsi dire, à vue dans un cas particulièrement intéressant, celui où l'équation différentielle ou aux dérivées partielles envisagée jouit de la propriété de *rester inaltérée par toute transformation homographique*. L'étude directe de telles équations, considérées en elles-mêmes, offre un sujet de recherches dont quelques points sont abordés dans le présent Mémoire. On rencontrera notamment, au § II, les deux propositions suivantes :

A l'exception de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, *il n'existe aucune équation différentielle algébrique du second ordre qui reste inaltérée par toute transformation homographique.*

Il n'existe aucune équation différentielle algébrique du troisième ordre qui reste inaltérée par toute transformation homographique.

§ I.

2. Si, de l'équation $S(x,y)=0$, on tire les expressions des dérivées successives de y par rapport à x, on démontre aisément que chacune d'elles a pour numérateur une fonction entière des dérivées partielles de S, et pour dénominateur une puissance de $\frac{\partial S}{\partial y}$. Pour la dérivée d'ordre n, l'exposant de cette puissance est $(2n-1)$; c'est ce qu'on peut exprimer en disant que :

Les variables x, y étant liées par l'équation $S(x,y)=0$, *la quantité* $\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{2n-1}\frac{d^ny}{dx^n}$ *est égale à une fonction entière des dérivées partielles de* S.

Soit $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$ une équation différentielle, *entière* par rapport à tous les arguments de f. J'y considère x et y comme du degré zéro, $\frac{dy}{dx}$ comme du premier degré, ..., $\frac{d^ny}{dx^n}$ comme du degré $(2n-1)$. Soit, à ce point de vue, k le degré de f. D'après le lemme, pour les valeurs de x et y qui satisfont à $S(x, y) = 0$, la quantité $\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^k f$ est égale à une fonction entière des dérivées partielles de S.

Pour éviter toute confusion, j'indique par le symbole des congruences les égalités qui ont lieu ainsi en vertu de $S = 0$. D'après cette convention, je puis dire que :

Théorème I. — *Si $S(x, y)$ est un polynôme entier, il existe des exposants k et des fonctions entières $\psi(x, y)$ qui vérifient la relation*

$$\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^k f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) \equiv \psi(x, y), \tag{1}$$

f étant une fonction entière.

Nous sommes en possession d'un procédé pour calculer une valeur de k; mais il nous faut obtenir une règle pour calculer sa valeur *minima*.

3. Par $S(x,y)$, il faut actuellement entendre un polynôme entier, de forme générale dans son degré, et à coefficients indéterminés. Cela étant, soit ω un point satisfaisant à $S = 0$, $\frac{\partial S}{\partial y} = 0$. Si la courbe $\psi = 0$ passe en ω, on a identiquement

$$\psi(x, y) = LS + P\frac{\partial S}{\partial y}, \tag{2}$$

L et P étant des polynômes entiers en x et y. Car, en vertu de l'indétermination des coefficients du polynôme S, si la courbe ψ passe en ω, elle passe aussi en tous les points analogues, la résultante en x des équations $S = 0$, $\frac{\partial S}{\partial y} = 0$ étant irréductible. Et, en outre, tous ces points étant des points simples d'intersection des courbes représentées par ces équations, l'équation (2) a lieu. D'après la convention ci-dessus, elle peut s'écrire

$$\psi(x, y) \equiv P\frac{\partial S}{\partial y}.$$

Il peut arriver que la courbe $P = 0$ passe encore en ω. On répétera le même raisonnement, et l'on parviendra à une relation telle que

$$\psi(x, y) = \theta \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^q,$$

où θ est un polynôme entier en x et y, tel que la courbe $\theta = 0$ ne passe pas en ω. Alors la relation (1) devient

$$(3) \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{k-q} f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = \theta(x, y).$$

Ainsi, dès que la courbe ψ passe en un point tel que ω, c'est-à-dire en un point où la tangente de S est parallèle à l'axe des y, l'exposant k peut être abaissé, et cela de telle sorte que la courbe θ, qui remplace ψ, ne passe pas en ω. L'exposant k ne peut être abaissé davantage. Soit pris, en effet, sur S, un point infiniment voisin de ω, et dont x, y soient les coordonnées. Le polynôme θ a une limite finie, et, par suite, aussi le premier membre de (3). Mais $\frac{\partial S}{\partial y}$ est infiniment petit. Donc le produit du premier membre de (3) par une puissance négative de $\frac{\partial S}{\partial y}$ est infini. Donc ce produit ne peut être égal à la valeur acquise au point ω par un polynôme entier. Donc :

Théorème II. — *La valeur minima de l'exposant k* (mentionné au théorème I) *est celle qui fait acquérir au premier membre de la relation* (1) *une valeur finie pour les points où la tangente de la courbe* $S = 0$ *est parallèle à l'axe des y.*

4. Je désignerai par la lettre α la valeur minima de k. Le théorème II conduit à un procédé simple pour calculer α. Soient ξ, η les coordonnées de ω. Aux environs de ω, le binôme $(y - \eta)$ est développable en série suivant les puissances entières et positives de $(x - \xi)^{\frac{1}{2}}$, de la manière suivante :

$$(4) \qquad y = \eta + A(x - \xi)^{\frac{1}{2}} + A'(x - \xi) + A''(x - \xi)^{\frac{3}{2}} + \dots.$$

On aura, pour la dérivée, le développement

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}A(x-\xi)^{-\frac{1}{2}} + \dots$$

Ainsi, $(x-\xi)$ étant supposé infiniment petit du premier ordre, $\frac{dy}{dx}$ est d'ordre $-\frac{1}{2}$. Mais $\frac{\partial S}{\partial y}\frac{dy}{dx}$ a une limite finie, différente de zéro. Donc $\frac{\partial S}{\partial y}$ est infiniment petit d'ordre $\frac{1}{2}$. Donc $\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{\alpha}$ est infiniment petit d'ordre $\frac{\alpha}{2}$. Soit maintenant σ l'ordre de la partie principale de $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)$, quand on y substitue à y et à ses dérivées le développement (4) et ses dérivées. Il en résulte, pour α, la valeur $\alpha = -2\sigma$.

On doit, bien entendu, pour être d'accord avec l'hypothèse faite sur S, supposer que, dans (4), ξ, η, A, A', A'',... sont des indéterminées. Cela étant, on verra aisément qu'il en résulte pour σ une valeur négative, et dont le double est un entier. On trouvera donc, pour α, un entier positif, comme cela doit être.

5. Le nombre α, ainsi calculé, vérifie la relation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{\alpha} f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = \theta(x, y), \tag{5}$$

où θ est un polynôme entier. Si la courbe $\theta = 0$ passe en un point de S à l'infini, on voit, en raisonnant comme au n° 3, que θ est de la forme $\Phi + LS$, L et Φ étant des polynômes entiers, et la courbe $\Phi = 0$, de degré moindre que θ, n'ayant plus aucun point commun avec S à l'infini. Par suite, au lieu de (5), on peut écrire

$$\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{\alpha} f = \Phi. \tag{6}$$

Il est manifeste que tous les points d'intersection des courbes S et Φ satisfont, sur S, à la condition exprimée par l'équation différentielle $f = 0$, et réciproquement. Par suite, toute courbe plane algébrique qui passe en tous les points de S satisfaisant à cette condition a une équation de la forme $LS + P\Phi = 0$, L et P étant des polynômes entiers. Par suite, si cette courbe est distincte de S et de degré non supérieur à Φ, son équation se réduit à la forme $LS + \Phi = 0$, où le degré de L est égal à la différence de ceux de Φ et de S. On voit donc que le premier des problèmes proposés plus haut (n° **1**) consiste à déterminer le degré de la courbe Φ que nous venons de trouver par la relation (6).

Pour trouver ce degré, je cherche celui de la résultante en x des équations $\Phi = 0$, $S = 0$. J'emploie, à cet effet, un procédé d'élimination bien connu. De $S = 0$, je tire les divers développements de y suivant les puissances descendantes de x. Soit m le degré de S. J'aurai m développements procédant suivant les puissances entières de x, commençant chacun par un terme du premier degré. Soit

$$y = Bx + C + \frac{D}{x} + \frac{E}{x^2} + \cdots \tag{7}$$

un de ces développements, dont on doit supposer les coefficients indéterminés, suivant l'hypothèse faite sur S. Pour obtenir la résultante, il faut substituer à y, dans $\Phi(x, y)$, successivement les m développements analogues, et faire le produit des résultats. Le degré de la résultante est la somme des degrés de chacune des valeurs de Φ, c'est-à-dire ici m fois le degré de l'une d'elles.

Ce procédé d'élimination fait disparaître les solutions infinies, s'il y en a. Mais comme, par hypothèse, il n'en existe pas, le degré de la résultante est le produit des degrés de S et de Φ. Donc le degré de Φ est précisément égal au degré de la valeur obtenue pour Φ quand on y substitue à y le développement (7).

Or, par hypothèse, ce développement est tiré de l'équation $S(x, y) = 0$. Donc la valeur (7) de y fait identiquement évanouir S. Donc, au lieu de substituer cette valeur dans Φ, on peut la substituer dans le premier membre de (6) : le résultat sera le même. Soit donc β le degré qu'acquiert f par cette substitution; le degré du premier membre de (6), et par suite le degré de Φ, est

$$M = \alpha(m - 1) + \beta.$$

6. Les résultats des nos 4 et 5 se résument dans l'énoncé suivant :

THÉORÈME III. — *Les points d'une courbe algébrique plane* S, *de degré m, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle entière* $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$, *sont les intersections de* S *avec une autre courbe algébrique, dont le degré est de la forme* $\alpha(m-1)+\beta$, *les coefficients* α *et* β *ne dépendant que de l'équation différentielle. On peut calculer ces coefficients comme il suit :*

1° *Substituez, dans f, à y un développement suivant les puissances entières et ascendantes de* $(x-\xi)^{\frac{1}{2}}$, *commençant par une constante, et dans lequel les coefficients et la constante* ξ *soient indéterminés; et ordonnez le résultat de la substitution suivant les mêmes puissances. L'exposant de* $(x-\xi)^{\frac{1}{2}}$, *dans le premier terme, est égal et de signe contraire à* α.

2° *Substituez, dans f, à y un développement suivant les puissances entières et descendantes de x, commençant par un terme du premier degré, et à coefficients indéterminés; et ordonnez le résultat suivant les mêmes puissances. L'exposant de x, dans le premier terme, est égal à* β.

7. On peut donner au théorème III une autre forme, moins commode, il est vrai, pour le calcul des coefficients α et β, mais utile cependant dans quelques cas. Cette forme nouvelle se prête d'ailleurs très-bien à une généralisation, comme on le verra dans la dernière partie de ce Mémoire.

Je fais une substitution homographique

$$(8) \qquad x = \frac{ax'+by'+c}{Ax'+By'+C}, \quad y = \frac{a'x'+b'y'+c'}{Ax'+By'+C}.$$

Pour abréger l'écriture, je poserai

$$(9) \quad (Ab-Ba)\left(x'\frac{dy'}{dx'}-y'\right)-(Bc-Cb)\frac{dy'}{dx'}+Ca-Ac=R,$$

$$(10) \qquad Ax'+By'+C=z.$$

On déduit aisément de (8), par les procédés habituels pour le changement des variables, et en désignant par R′ ce que devient R quand on y accentue les lettres a, b, c,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{R'}{R}; \tag{11}$$

puis, pour $p \geqq 2$,

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \frac{z^{p+1}}{R^{2p-1}} V, \tag{12}$$

V étant une fonction entière de x', y' et des dérivées de y', jusqu'à l'ordre n, par rapport à la nouvelle variable indépendante x', et qui n'est divisible ni par z ni par R. Je laisse au lecteur le soin de démontrer l'équation (12).

Soit maintenant $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$ une équation différentielle *entière*. J'y fais le changement de variables (8). Soit $f'\left(x', y', \frac{dy'}{dx'}, \ldots, \frac{d^n y'}{dx'^n}\right) = 0$ sa transformée, également sous forme entière. D'après les équations (8), (10), (11) et (12), il est manifeste que, pour former f', il n'y a qu'à substituer, dans f, les valeurs de x, y, …, fournies par ces équations, et à supprimer un facteur de la forme $\frac{1}{R^\alpha z^\beta}$, α et β étant des entiers dont le premier est positif, et le second positif ou négatif. Or ces nombres α et β sont précisément les mêmes que précédemment, comme je vais le démontrer : c'est en cela que consiste la nouvelle forme du théorème III.

8. En désignant par K une constante, on a, en vertu des équations (8), ainsi que je viens de l'expliquer, une identité de la forme

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = \frac{K}{R^\alpha z^\beta} f'\left(x', y', \frac{dy'}{dx'}, \ldots, \frac{d^n y'}{dx'^n}\right). \tag{13}$$

J'ai considéré précédemment une courbe S. Soit S′ sa transformée par la substitution (8). Sur S′, je prends un point ω' dans lequel R s'évanouisse. En ce point, f' et z ont des valeurs finies, différentes de zéro. Pour un point m', pris sur S' à distance infiniment petite d'ordre ε du point ω', R est un infiniment petit de ce même ordre. Donc, en m', la partie principale du second membre de (13), et par suite celle de f, est de l'ordre $-\alpha\varepsilon$.

Au point ω' correspond, sur S, un point ω dans lequel la tangente de S est parallèle à l'axe des y; et, au point m', un point m, dont la distance à ω est infiniment petite d'ordre ε. Mais, aux environs de ω, la variation de l'ordonnée des points de S est proportionnelle à la racine carrée de la variation de leur abscisse. Donc, pour m, la variation de l'abscisse est d'ordre 2ε. Elle sera du premier ordre, si l'on suppose $\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot$ Ceci étant supposé, la partie principale de f est, au point m, de l'ordre $-\frac{\alpha}{2}\cdot$ Donc ce nombre α est le même qu'au théorème III.

De même, soit Ω' un point de S', dans lequel z s'évanouisse; et soit M' un point, pris sur S' à distance infiniment petite du premier ordre de Ω'. En M', le second membre de (13), et par suite f, est infiniment grand d'ordre β. Mais à Ω' correspond, sur S, un point à l'infini. Donc, aux environs d'un point à l'infini de S, f est du degré β. Donc ce nombre β est le même qu'au théorème III. J'ai donc cette proposition :

Théorème IV. — *Si l'on effectue, sur l'équation différentielle entière $f = 0$, la substitution homographique* (8), *et que $f' = 0$ soit la transformée sous forme entière, on a identiquement, en désignant par* K *une constante, et par* R *et par* z *les expressions* (9) *et* (10),

$$f = \frac{K}{R^\alpha z^\beta} f'.$$

Les exposants α et β sont des entiers dont le premier est positif, le second positif ou négatif.

Les points d'une courbe algébrique plane S, *de degré m, qui satisfont à la condition exprimée par l'équation $f = 0$, sont les intersections de* S *et d'une autre courbe algébrique, dont le degré est $\alpha(m-1)+\beta$.*

9. Le premier des deux problèmes posés plus haut (n° **1**) est résolu par le théorème III ou par le théorème IV. Avant de passer au second problème, je veux déduire de l'analyse précédente une conséquence qui sera bientôt utile.

On vient de voir (n° **8**) que, si ω est un point de S, dans lequel la tangente soit parallèle à l'axe des y, et m un point de S dont la distance à ω soit infiniment petite du premier ordre (je fais ici $\varepsilon = 1$), la partie principale de f est, au point m, de l'ordre $-\alpha$. Si, au lieu de supposer, comme jusqu'à présent, que S soit un polynôme de forme générale dans son degré, et à coefficients indéterminés, nous le supposons maintenant particularisé, cette assertion peut devenir inexacte. On le voit sur la relation (13); car si, au point ω' qui, sur S', correspond à ω, f' s'évanouit, l'ordre de f, au point m, surpasse $-\alpha$. S'il en est ainsi, la courbe Φ passe en ω. Je vais montrer que cette circonstance particulière peut être écartée au moyen d'une transformation homographique.

Soient, en effet, ω'_1 un point de S' dans lequel la tangente de S' soit parallèle à l'axe des y', et ω_1 le point correspondant sur S. On peut manifestement choisir les constantes de la substitution de telle sorte que tous les points tels que ω_1 soient des points dans lesquels f ait des valeurs finies, différentes de zéro, sauf le cas, que j'écarte naturellement, où l'équation $S = 0$ serait une intégrale de $f = 0$. Les constantes étant ainsi choisies, l'ordre de f', aux environs de ω'_1, est égal à $-\alpha$. Ainsi la circonstance particulière dont il vient d'être question est écartée, si, au lieu de la courbe S et de l'équation $f = 0$, j'envisage la courbe S' et l'équation $f' = 0$.

On verra de même que, par cette transformation, on peut aussi faire en sorte que, pour tous les points à l'infini de la courbe S', le degré de f' soit toujours β, exactement comme dans le cas où S est un polynôme indéterminé. Donc, en résumé, on peut, sans restreindre la généralité, supposer toujours que la courbe Φ ne passe en aucun des points de S à l'infini, ni en aucun de ceux où la tangente de S est parallèle à l'axe des y, sous la condition d'entendre, par la courbe S et par l'équation $f = 0$, des transformées de la courbe et de l'équation proposée au moyen d'une substitution homographique.

10 Les points d'une courbe S qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle $f = 0$ sont, d'après les théorèmes III et IV, les intersections de S et d'une autre courbe algébrique Φ, dont ces propositions nous enseignent à calculer le degré. Le nombre de ces points est donc, en général, égal au produit des degrés des deux courbes. Mais, dans des cas particuliers, quelques-unes des intersections de S et de Φ peuvent se réunir, notamment aux points singuliers de S. C'est dans l'étude de ces circonstances que consiste le second de nos problèmes. La question à résoudre est donc celle-ci : *Trouver le nombre des intersections des courbes* S *et* Φ, *qui sont confondues en un point donné de* S.

Je rappelle d'abord comment ce nombre peut être déterminé pour deux courbes quelconques. Soit O un point (singulier ou non) d'une courbe plane algébrique S. Les branches de la courbe S se répartissent, au point O, en différents systèmes circulaires (S), (S'), (S''),.... Je considère l'un d'eux (S). En désignant par ξ, η les coordonnées de O, je puis représenter (S) par deux équations telles que

$$x - \xi = t^r, \quad y - \eta = \varphi(t). \tag{14}$$

Dans ces équations, r est un entier positif, et $\varphi(t)$ une fonction synectique pour les petites valeurs de t, s'évanouissant avec cette variable, et qui, en outre, acquiert r valeurs distinctes quand on donne à t successivement les r valeurs qui répondent à une valeur donnée de $(x - \xi)$.

Soit maintenant $\Phi(x, y) = 0$ l'équation *entière* d'une courbe algébrique passant en O. Dans le polynôme entier Φ, je substitue à x et à y les valeurs tirées de (14), et j'ordonne le résultat suivant les puissances ascendantes de t. Soit n le degré de t au premier terme.

Je considère de même les autres systèmes circulaires (S'), (S''),..., et soient n', n'',.... les nombres analogues à n, et qui leur sont relatifs.

Le nombre des intersections de S *et de* Φ, *confondues en* O, *est*

$$n + n' + n'' + \ldots.$$

Pour appliquer ce procédé de calcul au cas actuel, j'observe que, par hypothèse, les valeurs de x et de y, déduites de (14), font évanouir S. Or on a (n° **5**)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{\alpha} f \equiv \Phi(x, y). \tag{15}$$

Donc, pour calculer les nombres $n, n', n'', \ldots$, on peut opérer sur le premier membre de (15), au lieu d'opérer sur Φ. Soit n_1 le nombre analogue à n, obtenu en opérant sur $\frac{\partial S}{\partial y}$ comme je viens de l'indiquer sur Φ; soit ν le nombre obtenu en opérant sur f. En opérant sur le premier nombre de (15), on obtiendrait le nombre $(\alpha n_1 + \nu)$. Soient de même $n'_1, n''_1, \ldots; \nu', \nu'', \ldots$ les nombres analogues obtenus en opérant avec les systèmes circulaires (S'), (S''),.... On aura

$$n + n' + n'' + \ldots = \alpha(n_1 + n'_1 + n''_1 + \ldots) + \nu + \nu' + \nu'' + \ldots.$$

Je poserai

$$n_1 + n'_1 + n''_1 + \ldots = \mathrm{G}, \quad \nu + \nu' + \nu'' + \ldots = \mathrm{L}.$$

Le nombre des points de S, satisfaisant à la condition $f = 0$, et qui se réunissent en O, est $(\alpha \mathrm{G} + \mathrm{L})$. Le nombre G se calcule, comme on le voit, indépendamment de l'équation différentielle, et le nombre L sur cette équation même. On peut donc considérer par là notre problème comme résolu. Tout ce qui va suivre constitue la discussion de notre solution. On pourrait toutefois compléter cette solution en examinant le cas où le point considéré est à l'infini. Il n'y a pas là de difficulté nouvelle, et la méthode précédente s'applique, avec une faible modification, à ce cas. Je n'en ferai pas le développement, puisqu'il a été prouvé précédemment (n° **9**) que, sans nuire à la généralité, ce cas peut toujours être écarté.

11. Comme le nombre G ne dépend que de la courbe S, on est naturellement conduit à considérer successivement tous les points de S, dans lesquels G n'est pas nul. On doit penser que, dans le nombre total $\Sigma(\alpha \mathrm{G} + \mathrm{L})$, la somme des nombres G sera remplacée par un élément simple de la courbe.

Pour donner au résultat sa forme la plus simple, je suppose qu'aucune asymptote, ni aucune tangente singulière de S ne soit parallèle à l'axe des y, et qu'en outre S n'ait aucune branche tangente à la droite de l'infini. Ces hypothèses ne diminuent pas la généralité, puisque, comme il a déjà été dit, nous entendons par S une transformée homographique quelconque de la courbe proposée. De ces suppositions il résulte que le nombre des tangentes de S, parallèles à l'axe des y, est égal à la *classe* de cette courbe.

Nous considérons tous les points de S dans lesquels G n'est pas nul, c'est-à-dire seulement ceux dans lesquels $\frac{\partial S}{\partial y}$ s'évanouit; car ceux dans lesquels $\frac{\partial S}{\partial y}$ est infini sont les points à l'infini de S, et ces points ne sont pas à considérer.

Or $\frac{\partial S}{\partial y}$ s'évanouit d'abord en tous les points singuliers de S. La somme $\sum G$, pour ces divers points, est égale (n° **10**) au nombre total des intersections des courbes $S = 0$, $\frac{\partial S}{\partial y} = 0$, qui sont confondues en ces divers points.

Les autres points où $\frac{\partial S}{\partial y}$ s'évanouit sont ceux où la tangente de S est parallèle à l'axe des y. Leur nombre est la classe c de la courbe S. Soit m le degré de S; celui de $\frac{\partial S}{\partial y}$ est $(m-1)$. On a donc

$$c + \sum G = m(m-1).$$

Or, pour chacun des derniers points, nous savons (n° **9**) que $(\alpha G + L)$ est nul, puisque la courbe Φ n'y passe pas. Donc nous pouvons nous borner à considérer les points singuliers de S. Soit donc $\mathcal{L}$ la somme des nombres L pour tous les points singuliers de S. Le nombre total des solutions réunies en ces points est :

$$\alpha \sum G + \mathcal{L} = \alpha[m(m-1) - c] + \mathcal{L}.$$

Mais le nombre total des solutions, c'est-à-dire des intersections de S et Φ, est $\alpha m(m-1) + \beta m$; donc le nombre N des solutions qui subsistent, après suppression de celles qui sont réunies aux points singuliers de S, est

$$\mathrm{N} = \alpha c + \beta m - \mathcal{L}. \tag{16}$$

Ainsi le calcul se réduit à celui du nombre $\mathcal{L}$, que l'on trouvera en opérant sur l'équation différentielle elle-même exactement comme on ferait sur l'équation d'une courbe, pour trouver le nombre de ses intersections avec S, confondues aux divers points singuliers de S.

12. Le nombre $\mathcal{L}$ dépend à la fois de la courbe et de l'équation; on peut se demander suivant quelle loi. Il est manifeste qu'on ne saurait répondre à cette question sans supposer, entre la courbe et l'équation, une certaine indépendance. Cette réserve est analogue à celles que l'on est conduit à faire dans la théorie des *caractéristiques* des systèmes de coniques. Ce n'est pas sans dessein que je cite ici la théorie des caractéristiques : on va voir que les recherches actuelles ont avec cette théorie plus d'un rapport. En ce qui touche l'indépendance que je supposerai entre la courbe et l'équation différentielle, je la préciserai entièrement comme je vais l'expliquer.

Soit, comme au n° **10**, un système circulaire

$$x - \xi = t^r, \quad y - \eta = \varphi(t). \tag{17}$$

Je suppose d'abord que l'entier positif r et les exposants successifs de t, dans le développement de $\varphi(t)$ suivant les puissances entières et positives de t, soient des nombres donnés; mais que ξ, η et les coefficients du développement soient indéterminés. En opérant sur f comme il a été expliqué au n° **10**, on trouve un nombre ν, qui est un élément du nombre $\mathcal{L}$.

Soit maintenant donnée une courbe S, qui comprenne un système circulaire de branches représenté par les équations (17), dans lesquelles alors les constantes ne sont plus indéterminées, mais ont, au contraire, des valeurs données. En opérant de même sur f, on pourra trouver soit le nombre ν, soit un nombre supérieur. Si effectivement on trouve ν, et que la même chose ait lieu pour tous les systèmes circulaires de la courbe S en ses points singuliers, je dirai que la courbe S et l'équation différentielle sont *indépendantes*, ou que la condition exprimée par l'équation différentielle est *indépendante* de la courbe :

D'après cette définition même, et comme cas particulier, *l'élément du nombre* $\mathfrak{L}$, *relatif à un système circulaire de branches d'une courbe, et pour une condition indépendante de cette courbe, ne dépend pas de l'origine de ce système circulaire.* [L'origine du système circulaire (17) est le point ξ, η.]

Par exemple, il est manifeste que l'élément ν du nombre $\mathfrak{L}$, relatif à une branche ordinaire

$$x - \xi = t, \quad y - \eta = At + Bt^2 + Ct^3 + \ldots,$$

est nul. Donc :

THÉORÈME V. — *Sur une courbe qui ne possède que des branches simples* (ou, suivant M. Cayley, branches *linéaires*), *le nombre des points qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique, et indépendante de la courbe, est* $\alpha c + \beta m$. *Les nombres* c *et* m *sont la classe et le degré de la courbe, les nombres* α *et* β *ne dépendent que de l'équation différentielle.* (Ce sont les mêmes qu'aux théorèmes III et IV.)

13. Considérons maintenant une courbe S qui comprenne des systèmes circulaires d'une famille déterminée, et qui, en dehors de ces systèmes circulaires, ne comprenne que des branches simples. J'entends par famille l'ensemble des systèmes circulaires (17) dans lequel les exposants sont donnés et les coefficients indéterminés. Soit ν l'élément du nombre $\mathfrak{L}$, relatif à un système circulaire de cette famille. Si l'on suppose l'indépendance entre la courbe et l'équation différentielle, le nombre $\mathfrak{L}$ sera le produit de ν par le nombre des systèmes circulaires de la famille considérée, qui se trouvent dans S. Soit k ce nombre; on a donc, pour le nombre des points de S qui satisfont à la condition considérée,

$$N = \alpha c + \beta m - \nu k.$$

Si, de même, je considère une courbe S comprenant deux familles déterminées de systèmes circulaires, on aura

$$N = \alpha c + \beta m - \nu k - \nu' k'.$$

Et enfin, si l'on considère une courbe comprenant q familles déterminées de systèmes circulaires, on aura

$$(18) \qquad N = \alpha c + \beta m - \nu k - \nu' k' - \nu'' k'' \ldots - \nu^{(q-1)} k^{q-1}.$$

Tous les termes de cette formule sont, comme les deux premiers, le produit d'un nombre dépendant de la condition par un nombre dépendant de la courbe. Ainsi :

Théorème VI. — *Le nombre des points d'une courbe algébrique plane qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique et indépendante de la courbe s'exprime par une somme de termes dont chacun est le produit d'un nombre ne dépendant que de la condition par un nombre ne dépendant que de la courbe. Le nombre de ces termes est au plus égal* (on verra qu'il peut être moindre) *à celui des familles de systèmes circulaires que comprend la courbe* (en comptant les branches simples ordinaires pour une famille, et les branches simples à inflexion pour une seconde famille).

Si la courbe n'est en aucune façon précisée, le nombre des termes est-il effectivement illimité, comme semble l'indiquer ce dernier théorème? Ou plutôt dans quelle mesure faut-il préciser l'équation différentielle pour que, de ce fait, le nombre des termes se trouve limité? Telle est la question dont je vais actuellement m'occuper.

14. Je considère, en premier lieu, une équation différentielle du premier ordre $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$. Pour un système circulaire quelconque, à coefficients indéterminés, x, y, $\frac{dy}{dx}$ ont, à l'origine de ce système circulaire, des valeurs finies et indéterminées. Il en est de même de f. Donc, quel que soit le système circulaire, le nombre ν est nul; donc $\mathfrak{e}$ l'est aussi. Ainsi :

Théorème VII. — *Le nombre des points d'une courbe algébrique* *plane quelconque, de classe c et de degré m, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle du premier ordre algébrique, et indépendante de la courbe, est* $(\alpha c + \beta m)$, *les nombres* α *et* β *ne dépendant que de l'équation différentielle.*

Si l'on applique à la fois à la courbe et à l'équation une transformation corrélative, le nombre $(\alpha c + \beta m)$ ne change pas, tandis que les nombres c et m se permutent entre eux. Donc les nombres α et β se permutent aussi entre eux. Par suite, la signification géométrique de α se trouvera en transformant celle de β, laquelle est évidente.

Je suppose que l'intégrale générale de l'équation proposée se représente par un système de courbes planes (généralement transcendantes), que, pour abréger, je désigne par *courbes intégrales*. En supposant $m = 1$, $c = 0$, je vois que β *est le nombre de courbes intégrales qui touchent une droite*. Par suite, α *est le nombre de courbes intégrales qui passent par un point*. Suivant les conventions usitées pour les systèmes de courbes algébriques, et étendues par M. Fouret aux systèmes de courbes transcendantes [*], les nombres α et β sont les *caractéristiques* du système formé par les courbes intégrales. Le théorème VII peut alors être énoncé comme il suit :

Dans un système dont les caractéristiques sont α *et* β, *le nombre des courbes qui touchent une courbe de classe c et de degré m est* $(\alpha c + \beta m)$ [**].

Il faut avoir soin d'ajouter, comme au théorème VII, que *la courbe doit être indépendante du système.*

15. Je considère, en second lieu, les équations différentielles du second ordre; mais je m'occupe d'abord de la plus simple, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, qui est celle des lignes droites, et qui, sur une courbe, en caractérise les points d'inflexion.

---

[*] *Bulletin de la Société mathématique*, t. II, p. 72.

[**] Cette proposition, connue depuis longtemps pour les systèmes de courbes algébriques, a été étendue par M. Fouret au cas actuel.

J'applique d'abord à cette équation le théorème III. En supposant

$$y = \eta + A(x-\xi)^{\frac{3}{2}} + \ldots,$$

je trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4}A(x-\xi)^{-\frac{1}{2}} + \ldots;$$

donc (théorème III) $\alpha = 3$. Je suppose ensuite

$$y = Bx + C + \frac{D}{x} + \ldots,$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{D}{x^3} + \ldots;$$

donc $\beta = -3$. La courbe Φ, qui coupe la courbe S de degré m en ses points d'inflexion, est donc de degré $3(m-1) - 3 = 3(m-2)$, ce qui est bien connu. J'arrive maintenant à l'étude du nombre $\mathfrak{L}$. Soit un système circulaire

$$(19) \qquad x - \xi = t^r, \quad y - \eta = \varphi(t) = At^r + Bt^{r+\rho} + \ldots.$$

Dans le développement de $\varphi(t)$, j'ai supposé le premier terme du degré r. C'est en effet la condition pour que la tangente ne soit parallèle à aucun des axes des coordonnées. Pour calculer le nombre ν, élément de $\mathfrak{L}$, relatif au système circulaire (19), exprimons $\frac{d^2y}{dx^2}$ en fonction de t, développons suivant les puissances ascendantes de t, et prenons le premier terme. Ce premier terme est

$$(20) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{r}\left(1+\frac{\rho}{r}\right)Bt^{\rho-r} + \ldots;$$

donc $\nu = \rho - r$. Donc le nombre des points d'inflexion d'une courbe de degré m et de classe c est $3(c-m) - \Sigma(\rho - r)$, la sommation s'appliquant à tous les systèmes circulaires formés par les branches de la courbe en ses points singuliers.

Je donne habituellement à ce résultat une autre forme. Pour une branche simple ($r = 1$) et ordinaire ($\rho = 1$), le nombre $(\rho - r)$ est nul. Pour une branche simple et à inflexion ($\rho = 2$), le nombre ($\rho - r$) est égal à l'unité. Enfin, pour une branche simple où ρ est supérieur à 2, on voit que l'origine de cette branche compte pour ($\rho - 1$) ou ($\rho - r$) inflexions. Par analogie, pour un système circulaire quelconque où le nombre ρ est supérieur à r, j'ai donné au nombre ($\rho - r$) le nom de *nombre des inflexions effectives* contenues dans les branches de ce système circulaire. Cette dénomination se justifie par diverses considérations qui ne sauraient trouver place ici. Au contraire, quand le nombre ρ est égal ou inférieur à r, je conviens de dire que le système circulaire ne contient pas d'inflexion effective. Pour donner à la formule du nombre des points d'inflexion la forme que j'ai en vue, je conserve les lettres r et ρ seulement pour les systèmes circulaires où l'on a $\rho > r$. En outre, dans la sommation $\Sigma(\rho - r)$, je fais entrer les branches simples à inflexion. Je désigne cette somme par la lettre i. Le nombre i est celui des inflexions effectives de la courbe. En second lieu, j'emploie les lettres r' et ρ' pour les systèmes circulaires où l'on a $\rho' < r'$, et je désigne par i' la somme $\Sigma(r' - \rho')$. Les systèmes circulaires, où l'on a $\rho = r$, disparaissent d'eux-mêmes, et la formule des points d'inflexion devient

$$(21) \qquad i - i' = 3(c - m).$$

Mais, par une transformation corrélative, un système circulaire tel que (19) se change en un autre où les deux nombres r et ρ sont permutés entre eux. Donc le nombre i' a, pour une courbe corrélative de la proposée, le même sens que le nombre i pour la courbe proposée elle-même. La formule (20) peut donc être ainsi énoncée :

La différence des nombres des inflexions effectives de deux courbes corrélatives est égale au triple de la différence de leurs degrés pris en ordre inverse.

Il était nécessaire de rappeler ici la formule (20), afin de pouvoir interpréter le résultat que je vais maintenant obtenir pour les équations quelconques du second ordre.

16. Il s'agit d'étudier la composition du nombre $\mathfrak{L}$ pour une équation du second ordre

$$(22) \qquad 0 = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = \sum \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^s.$$

L'équation proposée étant mise sous forme entière, ψ est un polynôme entier et s un entier positif. De plus, parmi les diverses valeurs de l'entier s, correspondant aux divers termes de l'équation, il s'en trouve une qui est zéro, sans quoi l'équation serait divisible par $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Je considère encore le système circulaire (19). Les parties principales de $x, y, \frac{dy}{dx}$ sont ξ, η, A, qui sont des indéterminées. Donc, après substitution des valeurs qui répondent au système circulaire (19), le polynôme ψ a pour partie principale une constante qui n'est pas nulle. En second lieu, la partie principale de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est, comme on l'a vu (**20**), de l'ordre $(\rho - r)$. J'ai ici à distinguer trois cas, suivant le signe de $(\rho - r)$.

1° $\rho > r$. Tous les termes dans lesquels s n'est pas nul ont des parties principales de degrés positifs. Seul, le terme où s est nul a pour partie principale une constante. Donc la partie principale de f est une constante. Donc le nombre ν est nul. Donc les systèmes circulaires où l'on a $\rho > r$ n'interviennent pas dans la composition du nombre $\mathfrak{L}$.

2° $\rho = r$. Tous les termes de (22) ont pour parties principales des constantes. Il faut se demander si, entre ces divers termes, peut exister une réduction qui fasse disparaître la somme de leurs parties principales. Or, d'après l'équation (20), la partie principale du terme $\psi\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^s$ est

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)^s\left(1 + \frac{\rho}{r}\right)^s \psi(\xi, \eta, A)\, B^s.$$

Elle ne peut se réduire avec la partie principale d'un autre terme : ces deux expressions contiennent, en effet, l'indéterminée B avec des exposants différents. Donc la partie principale de f est encore une constante. Donc les systèmes circulaires où l'on a $\rho = r$ n'interviennent pas non plus dans la composition du nombre $\mathfrak{L}$.

3° $\rho < r$. La partie principale de chaque terme est d'ordre négatif $-s(r-\rho)$. Soit γ la plus grande valeur de s, c'est-à-dire le degré de l'équation par rapport à $\frac{d^2 r}{dx^2}$. La partie principale de f est de l'ordre $-\gamma(r-\rho)$. Tel est donc l'élément du nombre $\mathfrak{L}$ pour un système circulaire où l'on a $\rho < r$. Le nombre $\mathfrak{L}$ est donc égal à $-\gamma i'$, le nombre i' étant, comme précédemment, la somme des nombres positifs $(r-\rho)$. Donc :

THÉORÈME VIII. — *Le nombre des points d'une courbe algébrique plane, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle du second ordre, et indépendante de la courbe, est $\alpha c + \beta m + \gamma i'$; les nombres c, m, i' dépendent de la courbe seule, et les nombres α, β, γ de l'équation différentielle seule.*

Les nombres c et m sont la classe et le degré de la courbe. Le nombre i' est celui des inflexions effectives des courbes corrélatives de la proposée.

Il est manifeste qu'on peut, en appliquant à la courbe et à l'équation une transformation corrélative, exprimer le même nombre par la formule $\alpha' m + \beta' c + \gamma' i$, où α', β', γ' sont les nombres analogues à α, β, γ pour l'équation différentielle transformée, et où le nombre i est, comme ci-dessus, le nombre des inflexions effectives de la courbe elle-même. Mais on peut obtenir immédiatement la nouvelle formule en partant de la précédente et en faisant usage de la formule (21). Je tire de cette dernière l'expression de i', et je conclus :

$$N = \alpha c + \beta m + \gamma i' = (\beta + 3\gamma)m + (\alpha - 3\gamma)c + \gamma i.$$

Ainsi les coefficients α', β', γ' sont exprimés par α, β, γ comme il suit :

$$(23) \qquad \gamma' = \gamma, \quad \alpha' = \beta + 3\gamma, \quad \beta' = \alpha - 3\gamma.$$

La troisième équation se déduit de la seconde en permutant l'accent, en sorte que ces relations sont bien, comme cela doit être, symétriques par rapport aux deux systèmes de nombres.

Quelles sont, maintenant, les significations géométriques des nombres α, β, γ, en supposant, comme au n° **14**, que l'intégrale générale de l'équation différentielle se puisse représenter par une série, ici doublement infinie, de courbes que j'appelle, pour abréger, *courbes intégrales?* En premier lieu, γ *est*, comme on l'a vu, *le degré de l'équation par rapport à* $\frac{d^2y}{dx^2}$. Donc c'est le nombre des valeurs de cette dérivée qui répondent à un système de valeurs données pour x, y, $\frac{dy}{dx}$. Donc γ *est le nombre des courbes intégrales qui passent par un point donné et y touchent une droite donnée.* Sous cette forme, il est évident que le nombre γ se conserve dans les transformations corrélatives, ainsi que le montre aussi la première des équations (23).

En second lieu, si je fais $m = 1$, $c = 0$, $i' = 0$, N se réduit à β. Donc β *est le nombre des points d'une droite qui satisfont à la condition exprimée par l'équation différentielle,* ou *le nombre des courbes intégrales qui ont une droite donnée pour tangente d'inflexion.*

Le nombre β' a la signification corrélative de celle de β. Donc, d'après (23), *le nombre* $(\alpha - 3\gamma)$ *est le nombre des courbes intégrales qui ont, pour point de rebroussement, un point donné.* Au point de vue algébrique, on verra sans peine que *le même nombre* $(\alpha - 3\gamma)$ *est égal au degré, par rapport à* $\frac{dy}{dx}$, *du coefficient de la plus haute puissance de* $\frac{d^2y}{dx^2}$, *dans l'équation différentielle.*

17. Revenons, pour un instant, à la considération d'une équation différentielle d'ordre quelconque, et supposons une courbe S qui ne possède, en outre de branches simples, que des systèmes circulaires d'une seule famille : le rebroussement ordinaire, lequel est caractérisé par les équations

$$x - \xi = t^2, \quad y - \eta = At^2 + Bt^3 + Ct^4 + \ldots.$$

Reportons-nous aux résultats du n° **15**, et appelons $(-\gamma)$ le nombre ν relatif à cette famille de systèmes circulaires, pour l'équation proposée. La courbe S ne possède, en fait d'inflexions effectives, que des inflexions ordinaires. Ainsi, pour cette courbe, le nombre i

est (n° **15**) celui de ses inflexions ordinaires. Une courbe S', corrélative de S, ne possède également, en fait d'inflexions effectives, que des inflexions ordinaires, corrélatives des rebroussements de S. Donc le nombre i' est ici celui des rebroussements de S. Cela posé, la formule (18) du n° **13** donne, pour le nombre des points de la courbe S qui satisfont à la condition exprimée par l'équation différentielle,

$$(24) \qquad \mathrm{N} = \alpha c + \beta m + \gamma i'.$$

Cette formule est entièrement semblable à celle qui est relative à une équation du second ordre et à une courbe ayant des singularités *quelconques*. Mais il ne faut pas perdre de vue que, dans le cas actuel, la courbe S ne doit posséder que des singularités spéciales. Toutefois, comme les courbes corrélatives de S ne contiennent, elles aussi, que ces mêmes singularités, on peut aussi, de la formule (24), déduire, de même que précédemment, la formule corrélative. Donc les équations (23) ont encore lieu entre α, β, γ et les coefficients analogues α', β', γ' relatifs à l'équation différentielle, transformée de la proposée par corrélation. La signification du coefficient γ ne peut plus ici être donnée d'une manière aussi simple; quant aux autres coefficients, leur signification se modifie à peine, ainsi qu'on le verra dans cet énoncé :

THÉORÈME IX. — *Soit une courbe ne contenant que des branches simples et des branches à rebroussement ordinaire : le nombre de ses points qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique d'ordre n, et indépendante de la courbe, est $\alpha c + \beta m + \gamma r$. Les nombres c, m, r sont : la classe, le degré, le nombre des branches à rebroussement de la courbe. Les nombres α, β, γ ne dépendent que de l'équation différentielle, et ont les significations suivantes :*

β est le nombre des points d'une droite qui satisfont à la condition exprimée par l'équation différentielle, ou le nombre des courbes intégrales qui ont une droite donnée pour tangente de $(n-1)^{\text{uple}}$ inflexion.

$(\alpha - 3\gamma)$ est le nombre des courbes intégrales qui, en un point donné,

se composent de n branches ayant, avec une même tangente, des contacts de l'ordre $\frac{1}{n}$.

$3(\alpha+\beta)+\gamma$ *est le nombre des courbes intégrales qui ont un contact d'ordre n avec une courbe donnée du troisième ordre et de la troisième classe.*

On peut aussi remarquer que $2(\alpha+\beta)$ est *le nombre des courbes intégrales qui ont, avec une conique donnée, un contact d'ordre n.* Ceci rend évident que le nombre $(\alpha+\beta)$ se conserve dans les transformations corrélatives, ainsi que le montrent aussi les équations (23). Cela étant, la signification du nombre $3(\alpha+\beta)+\gamma$ rend également évident que le nombre γ se conserve dans les transformations corrélatives.

Sous une forme géométrique, on peut énoncer le théorème IX (et la même remarque s'applique au théorème VIII) en disant que *le nombre des courbes d'une série* ∞^n *dans un plan, qui ont, avec une courbe donnée, un contact d'ordre n, est* $\alpha c+\beta m+\gamma r$, *pourvu que cette dernière ne contienne que des singularités ordinaires.*

Les interprétations précédentes des coefficients donnent, dans certains cas, des résultats d'apparence paradoxale, dont il est nécessaire de dire quelques mots. On ne doit pas perdre de vue que, dans tout le cours de cette analyse, il a été supposé (n° **9**) que la courbe S ne fournit pas une intégrale de l'équation différentielle considérée. Il n'est donc pas permis d'appliquer les résultats acquis aux cas où cette supposition n'est pas vérifiée. Par exemple, si β est négatif, l'interprétation de ce nombre n'a plus aucun sens. On en peut conclure que les lignes droites fournissent des intégrales de l'équation. Si $(\alpha+\beta)$ est négatif, c'est que les coniques sont dans le même cas, etc. Je tire de là cette conséquence, qui me sera utile plus loin : *le nombre* $(\alpha+\beta)$ *ne peut être négatif que si l'équation différentielle est au moins du cinquième ordre.*

18. Dans l'énoncé du théorème VIII, que l'on peut rapprocher du théorème IX, une circonstance doit attirer l'attention : si, au lieu de considérer une courbe S, de degré m, de classe c et possédant des singularités quelconques, on avait envisagé une courbe de degré m, possédant i' rebroussements ordinaires et, en outre, des points doubles ordinaires en nombre tel que, joints aux i' rebroussements, ils produisent l'abaissement $m(m-1)-c$ de la classe de la courbe, la formule $\alpha c + \beta m + \gamma i'$ n'aurait pas été changée. Ainsi, au point de vue de cette formule, toutes les singularités de la courbe produisent le même effet que i' rebroussements, et $\delta = \frac{1}{2}[m(m-1) - c - 3i']$ points doubles. Si, en outre, on envisage, en même temps, la formule corrélative $(\beta + 3\gamma)m + (\alpha - 3\gamma)c + \gamma i$, on voit que les mêmes singularités produisent le même effet que i tangentes d'inflexion et $\delta' = \frac{1}{2}[c(c-1) - m - 3i]$ tangentes doubles. Nous sommes ainsi conduits à nous placer à un point de vue que les équations de *Plücker* et un Mémoire bien connu de M. *Cayley* ont rendu familier aux géomètres : nous nous trouvons en présence d'une catégorie de questions dans lesquelles toutes les singularités d'une courbe plane algébrique quelconque sont entièrement représentées par des nombres déterminés de points doubles, de points de rebroussement, de tangentes doubles et de tangentes d'inflexion.

Mais il faut se garder de donner à cette conception une extension qu'elle ne comporte pas. Ce serait, par exemple, une erreur de croire que les éléments dont je viens de parler, ou même d'autres, en nombre fini et déterminé, pourraient suffire à représenter, dans toutes les questions géométriques, les singularités d'une courbe algébrique quelconque. On s'en convaincra aisément par l'examen des circonstances qui s'offrent à l'égard des équations différentielles d'ordre supérieur au second. C'est de ce sujet que je vais maintenant m'occuper, en me bornant toutefois aux équations du troisième ordre, qui donnent une idée suffisante des résultats relatifs aux équations d'ordre plus élevé.

19. Soit une équation différentielle algébrique du troisième ordre

$$(25)\quad 0 = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}\right) = \sum \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^\lambda \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^\mu,$$

où ψ est un polynôme entier; λ et μ sont des entiers positifs : une au moins des valeurs de λ est nulle; de même à l'égard de μ.

J'ai, comme précédemment, à étudier la composition du nombre $\mathcal{L}$.

Soit, à cet effet, un système circulaire

$$(26)\quad x - \xi = t^r,\quad y - \eta = \varphi(t) = A t^r + B t^{r+\rho} + C t^{r+\rho+\sigma} + \ldots.$$

Je distinguerai deux cas, suivant que ρ est égal à r, ou en est différent. Le premier de ces cas est très-simple et entièrement analogue à celui du n° **16**. En supposant $\rho = r$, on trouve, pour les parties principales des dérivées de y,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2B + \ldots,\quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\sigma}{r}\left(1 + \frac{\sigma}{r}\right)\left(2 + \frac{\sigma}{r}\right) C.t^{\sigma - r} + \ldots.$$

Répétant ici l'analyse du n° **16**, on trouvera que le nombre ν est nul si σ est supérieur ou égal à r. Si, au contraire, σ est inférieur à r, et que δ soit le degré de f par rapport à $\frac{d^3y}{dx^3}$, le nombre ν est égal à $-\delta(r - \sigma)$. Par suite, pour l'ensemble des systèmes circulaires d'une courbe S, dans lesquels on a $\rho = r$, $\sigma < r$, l'élément du nombre $\mathcal{L}$ est $-\delta\Sigma(r - \sigma)$.

J'arrive maintenant au cas où ρ est différent de r. D'après l'hypothèse $\rho \gtrless r$, on a, pour les parties principales, déduites de (26),

$$(27)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{r}\left(1 + \frac{\rho}{r}\right) B t^{\rho - r} + \ldots,\quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\rho}{r}\left(\frac{\rho^2}{r^2} - 1\right) B t^{\rho - 2r} + \ldots.$$

Après substitution des valeurs tirées de (26), pour $x, y, \ldots$, la partie principale du terme mis en évidence, dans (25), a pour degré

$$(28)\qquad \partial = \lambda(\rho - r) + \mu(\rho - 2r) = (\lambda + \mu)\rho - (\lambda + 2\mu)r.$$

Pour obtenir le degré de la partie principale de f, j'ai à chercher la plus petite des valeurs que puisse acquérir ∂ par la substitution aux lettres λ, μ de tous les systèmes de valeurs dont elles sont susceptibles dans (25). On voit immédiatement que le système (λ, μ), propre à fournir ce minimum, dépend généralement du rapport des nombres ρ et r. De là résulte une différence notable entre le cas actuel et ceux qui ont été précédemment envisagés.

La forme de l'expression (28) suggère naturellement l'idée d'employer, pour étudier le minimum de δ, l'artifice imaginé par *Newton* pour une question analogue. Le procédé que je vais développer est donc une imitation de la règle connue sous le nom de *parallélogramme de Newton*.

20. Le principe de cette règle se réduit à une proposition des plus simples : *Soient, dans un plan, et relativement à deux axes de coordonnées,* U, V *les coordonnées d'un point donné* M; *et u, v les coordonnées d'un point variable m, astreint à être situé dans l'intérieur d'un contour fermé et convexe* (C). *L'expression* $(uV - vU)$ *a un maximum et un minimum : on les obtient en plaçant m en l'un ou l'autre des deux points du contour, dans lesquels la tangente de ce contour est parallèle à la droite qui joint l'origine au point* M.

Pour distinguer le maximum et le minimum entre eux, on peut faire usage de la règle suivante : *Que l'on circonscrive au contour* C *un parallélogramme dont les côtés soient respectivement parallèles aux axes. Soient p, q les points de contact, avec* C, *de deux côtés consécutifs, et Ω le sommet du parallélogramme, point de concours de ces deux côtés, dont l'un Ωp est parallèle à l'axe des u, l'autre Ωq est parallèle à l'axe des v. La partie du contour* C, *inscrite dans l'angle $p\Omega q$ et tournant sa convexité vers Ω, sera distinguée par les signes des deux directions Ωp, Ωq.*

Cela posé, le point m, qui rend $(uV - vU)$ *minimum, est situé dans la partie distinguée par les signes :*

$+$ *pour* Ωp *et* $-$ *pour* Ωq, *si* M *est dans l'angle* $(+u, +v)$;
$+$ . . . . . . $+$ . . . . $(-u, +v)$;
$-$ . . . . . . $+$ . . . . $(-u, -v)$;
$-$ . . . . . . $-$ . . . . $(+u, -v)$.

Je laisse au lecteur le soin de démontrer ces règles, et je me borne à faire observer qu'elles s'appliquent aussi bien à un contour brisé qu'à un contour formé par une ligne continue. Il suffit que le contour soit toujours fermé et convexe. Quand le contour présente un angle, on doit entendre par *tangente* une droite qui, sans traverser le contour, passe par le sommet de l'angle.

21. Pour appliquer à l'étude du minimum de ∂ les règles précédentes, je pose

$$\lambda + \mu = u, \quad \lambda + 2\mu = v. \tag{29}$$

A chaque terme de l'équation (25) correspond ainsi un point m_j dont les coordonnées sont u, v. On peut unir par des lignes droites un certain nombre de ces points, de manière à tracer un polygone fermé et convexe, satisfaisant aux deux conditions suivantes : 1° tous ses sommets sont des points correspondant à des termes de (25); 2° tous les autres points qui correspondent à des termes de (25) sont à l'intérieur de ce polygone. C'est ce polygone qui sera notre contour (C). Les coordonnées U et V du point M seront les nombres r et ρ, en sorte que (28) ∂ sera l'expression $(uV - vU)$. Comme r et ρ sont essentiellement positifs, M est dans l'angle $(+u, +v)$, en sorte que la partie *utile* du contour (C) sera uniquement celle qui est distinguée par la combinaison de signes $(+, -)$.

Soit m_j un sommet de (C), compris dans la partie utile. Ce sont les coordonnées de ce sommet qui rendent ∂ minimum si la droite menée par m_j avec le coefficient angulaire $\frac{\rho}{r}$ ne traverse pas le polygone; c'est-à-dire si $\frac{\rho}{r}$ est compris entre les coefficients angulaires des deux côtés dont l'intersection est m_j.

Soient donc $m_1, m_2, \ldots, m_k$ les sommets consécutifs de la partie utile de (c), rangés dans leur ordre naturel, et de telle sorte que les coefficients angulaires $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$ des côtés m_1m_2, $m_2m_3, \ldots$ aillent en décroissant. Désignons, en général, par λ_j, m_j les valeurs de λ et μ qui correspondent à m_j. Le minimum de ∂ est

$$
\begin{array}{lll}
(\lambda_1 + \mu_1)\rho - (\lambda_1 + 2\mu_1)r, & \text{si} & \frac{\rho}{r} > c_1, \\
(\lambda_2 + \mu_2)\rho - (\lambda_2 + 2\mu_2)r, & \text{si} & c_1 \geqq \frac{\rho}{r} > c_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & & \\
(\lambda_{k-1} + \mu_{k-1})\rho - (\lambda_{k-1} + 2\mu_{k-1})r, & \text{si} & c_{k-2} \geqq \frac{\rho}{r} > c_{k-1}, \\
(\lambda_k + \mu_k)\rho - (\lambda_k + 2\mu_k)r, & \text{si} & c_{k-1} \geqq \frac{\rho}{r}.
\end{array}
$$

22. Connaissant le minimum de ∂, il nous reste à établir que ce minimum est l'ordre même de la partie principale de f. Il ne peut y avoir de doute à cet égard que si le même minimum est fourni par deux termes au moins : on pourrait, dans ce cas, craindre une réduction entre les parties principales de ces termes. Supposons donc qu'on ait, pour deux termes différents,

$$\partial = (\lambda + \mu)\rho - (\lambda + 2\mu)r = (\lambda' + \mu')\rho - (\lambda' + 2\mu')r.$$

En vertu de (27), les parties principales correspondantes contiennent, en facteur, la lettre B, respectivement avec les exposants $(\lambda + \mu)$ et $(\lambda' + \mu')$. Pour que la réduction fût possible, il faudrait donc que l'on eût $\lambda + \mu = \lambda' + \mu'$. Il en résulterait donc soit $r = 0$, soit $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$, ce qui est impossible.

Donc le degré de la partie principale de f est égal au minimum de ∂.

Soit maintenant une courbe S, indépendante de l'équation différentielle. Je pose

$$\Sigma(\rho - r) = g_j, \quad \Sigma(\rho - 2r) = h_j,$$

les sommations s'appliquant à tous les systèmes circulaires de S, où ρ et r sont différents, et où l'on a

$$c_{j-1} \geqq \frac{\rho}{r} > c_j.$$

Ces conditions s'appliquent aux valeurs $1, 2, \ldots, k$ du nombre j, à condition de supposer

$$c_0 = +\infty, \quad c_k = 0.$$

Il résulte, de l'analyse précédente, que la partie du nombre $\mathfrak{L}$, relative à tous les systèmes circulaires de S, où ρ et r sont différents, est ainsi

$$(30) \qquad \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_k g_k + \mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 + \ldots + \mu_k h_k.$$

Cette expression contient $2k$ termes; mais un des coefficients, au moins, est toujours nul. En effet, d'après (29), on a $2u - v = \lambda$.

Comme λ est toujours positif et qu'au moins une de ses valeurs est nulle, on voit qu'un, au moins, des sommets utiles du polygone (c) correspond à une valeur nulle de λ. Donc un des coefficients λ, dans l'expression (30), s'évanouit. D'autre part, par un raisonnement analogue, on verra qu'aucune des valeurs nulles de μ ne correspond à un sommet utile du polygone. Par suite, l'expression (30) se réduit, en général, à $(2k-1)$ ou $(2k-2)$ termes. Il peut y avoir encore une autre réduction dans le nombre des termes. Car la même valeur de λ peut appartenir à deux sommets différents de la partie utile du polygone; et de même pour les nombres μ. On voit ainsi que *le nombre des termes distincts de l'expression* (30) *a pour limite inférieure le nombre des sommets utiles du polygone, diminué d'une unité.*

D'après (29), on a $u-v=-\mu$. Donc $(u-v)$ est minimum quand μ est maximum. Donc, parmi les sommets utiles de (c), se trouve un sommet répondant à une valeur de μ égale au degré de l'équation par rapport à $\frac{d^3y}{dx^3}$. C'est ce degré que j'ai précédemment désigné par δ (n° **19**). Or on a vu que l'ensemble des systèmes circulaires de S, où les nombres ρ et r sont égaux, fournit au nombre $\mathfrak{L}$ l'élément $-\delta\Sigma(r-\sigma)$. Le coefficient δ de cet élément étant un des nombres μ de (30), il en résulte que $\mathfrak{L}$ se réduit lui-même, en tenant compte de toutes les réductions, à une somme de termes des deux formes λg et μh, où λ et μ sont des exposants de (25) correspondant à des sommets utiles de (c), et g et h des nombres dépendant de la courbe S.

23. Je résume ces résultats dans l'énoncé suivant :

Théorème X. — *Le nombre des points d'une courbe algébrique plane qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique du troisième ordre, et indépendante de la courbe, s'exprime par une somme de termes dont chacun est le produit d'un coefficient ne dépendant que de la condition par un nombre ne dépendant que de la courbe.*

Deux de ces termes sont αc, βm, les mêmes qu'au théorème IX.

Soit

$$o = \sum \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\lambda}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{\mu}$$

l'équation différentielle proposée, sous forme entière. Dans les autres termes, les coefficients qui ne dépendent que de la condition sont, quelques-uns, des exposants λ, μ, *définis comme il suit :*

A chaque terme de l'équation, faites correspondre, dans un plan, un point m dont les coordonnées rectilignes soient $u = \lambda + \mu$, $v = \lambda + 2\mu$. *Tracez le polygone fermé et convexe, dont les sommets soient choisis parmi ces points, et qui enveloppe tous les autres. Considérez, parmi les sommets, ceux auxquels aboutissent des côtés dont les coefficients angulaires sont positifs, et qui, en outre, appartiennent à la partie du polygone dont la convexité est tournée vers l'axe des v.*

Les exposants λ *et* μ *qui correspondent à ces derniers sommets sont les coefficients dont il s'agit.*

On voit, par cette dernière proposition, que, contrairement à ce qui se passe pour les équations du premier et du second ordre, il ne suffit pas de savoir que la condition considérée est exprimée par une équation différentielle algébrique du troisième ordre pour en pouvoir conclure le nombre des termes auxquels se réduit la formule (18) du n° **13**. Pour connaître une limite supérieure du nombre de ces termes, la courbe S restant indéterminée, il sera nécessaire de savoir d'avance que les exposants λ, μ sont renfermés dans de certaines limites. Par exemple, si l'on connaît le degré de l'équation différentielle par rapport à $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\frac{d^3y}{dx^3}$, on pourra manifestement assigner une limite supérieure au nombre des termes considérés. En effet, le polygone auxiliaire se trouvera renfermé dans un parallélogramme donné, et l'on connaîtra une limite supérieure du nombre de ses sommets. Mais il est également visible qu'on peut toujours choisir une équation différentielle du troisième ordre, de manière que le nombre des termes soit plus grand que tout nombre donné.

On a vu, au n° **13**, que si la courbe que l'on considère est astreinte à ne posséder que des singularités appartenant à des familles déterminées, en nombre fini, le nombre de ces mêmes termes est, par là, déterminé, quel que soit l'ordre de l'équation différentielle. On voit donc, par ce rapprochement, qu'il est impossible de trouver un nombre limité de familles de singularités qui, dans les problèmes dépendant des éléments infinitésimaux du troisième ordre, représentent les singularités d'une courbe quelconque. C'est, comme nous l'avons vu précédemment, le contraire qui a lieu dans les problèmes dépendant des éléments infinitésimaux du premier et du second ordre.

Je n'examinerai pas ici les questions analogues pour les équations différentielles d'ordre supérieur au troisième. La méthode suivie précédemment s'y applique cependant, mais avec quelques complications nouvelles. Laissant donc, quant à présent, ces questions à l'écart, je terminerai ce paragraphe en montrant comment, des coefficients λ, μ qui entrent dans l'expression de $\mathfrak{L}$ pour une équation différentielle du troisième ordre donnée, on peut déduire les analogues pour l'équation transformée par corrélation.

24. Je remarque, en premier lieu, que pour une branche simple, à inflexion simple ($r = 1$, $\rho = 2$), l'élément du nombre $\mathfrak{L}$, savoir, le minimum de

$$\partial = \lambda(\rho - r) + \mu(\rho - 2r),$$

est nul. Car ∂ se réduit à λ, dont le minimum est zéro. Il en est autrement pour un rebroussement ordinaire ($r = 2$, $\rho = 1$). D'après le n° **21**, soit

$$c_{s-1} \geqq \frac{1}{2} > c_s;$$

l'élément de $\mathfrak{L}$, pour un rebroussement ordinaire, sera $-(\lambda_s + 3\mu_s)$. En employant la même notation qu'au n° **17**, je poserai

$$\lambda_s + 3\mu_s = \gamma.$$

Entre α, β, γ et les coefficients correspondants pour la transformée de l'équation proposée par corrélation, ont lieu les équations (23) du n° **16**, ainsi que je l'ai prouvé au n° **17**. Ces équations sont

$$(31) \qquad \gamma' = \gamma, \quad \alpha' = \beta + 3\gamma, \quad \alpha = \beta' + 3\gamma.$$

Soit maintenant une courbe S comprenant ι rebroussements ordinaires, ι' inflexions ordinaires, enfin un système circulaire $(r, \rho, \rho \gtrless r)$. On a (n° **15**)

$$(32) \qquad \iota' - \iota - (r - \rho) = 3(c - m).$$

Soient λ, μ les nombres qui correspondent au sommet du polygone (C), dont les côtés comprennent la direction $\frac{\rho}{r}$; j'ai (n° **22**), pour le nombre des points de S qui satisfont à la condition exprimée par l'équation considérée,

$$N = \alpha c + \beta m + \gamma\iota + \lambda(r - \rho) + \mu(2r - \rho).$$

En remplaçant, dans cette dernière équation, ι par son expression déduite de (32), j'obtiens

$$(33) \quad N = (\alpha - 3\gamma)c + (\beta + 3\gamma)m + \gamma\iota' + (\gamma - 3\mu - \lambda)(\rho - r) + \mu(2\rho - r).$$

D'ailleurs, pour une courbe S', corrélative de S, les nombres m, c, ι, r, ρ se changent en c, m, ι', ρ, r. Les coefficients α', β', γ', analogues à α, β, γ, se déduisent des trois premiers termes de (33). On a ainsi les équations (31). Soient maintenant λ', μ' les nombres qui correspondent, dans l'équation transformée, aux systèmes circulaires (ρ, r). On a, d'après les derniers termes de (33),

$$(34) \qquad \lambda' + \lambda + 3\mu = \gamma, \quad \mu' = \mu.$$

Ce sont les relations cherchées. Elles permettent, étant donné le polygone (C), de construire le polygone (C'), relatif à l'équation transformée, ou, du moins, la partie utile de ce polygone. Cette construction est des plus simples. Soient, en effet, u, v (29) les coordonnées d'un sommet utile m de (C), et u', v' les coordonnées du sommet correspondant de (C'). Les relations (34) deviennent

$$v - u = v' - u', \quad u + v + u' = v' = 2\gamma.$$

Par suite, la droite mm' est parallèle à la droite $v - u = 0$, et par-

19

tagée en deux parties égales par la droite $u + v = \gamma$. Si l'on suppose les axes rectangulaires, les points m, m' sont symétriques par rapport à la droite $u + v = 2\gamma$. Par suite, *les axes étant rectangulaires, les parties utiles des polygones* (C) *et* (C') *sont égales.*

Je ferai enfin observer, en dernier lieu, que l'on peut imaginer des équations différentielles pour lesquelles le nombre des sommets utiles de (C) soit aussi petit que l'on voudra. Si, par exemple, on prend une équation homogène et de degré θ par rapport à $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\frac{d^3y}{dx^3}$, on n'aura qu'un seul sommet, lequel répond à $\lambda = 0$, $\mu = \theta$. On a alors, pour toute courbe S,

$$N = \alpha c + \beta m + \theta[\Sigma(2r - \rho) + \Sigma(r - \sigma)],$$

la première sommation s'appliquant à tous les systèmes circulaires de S où r et ρ sont différents, et la seconde à tous ceux où $\rho = r$ et où σ est inférieur à r.

(*A suivre.*)