JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HATON DE LA GOUPILLIÈRE

Méthodes de transformation fondées sur la conservation d'une relation invariable entre les dérivées de même ordre

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 2 (1876), p. 241-256.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1876_3_2__241_0>

Méthodes de transformation fondées sur la conservation d'une relation invariable entre les dérivées de même ordre;

PAR M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

§ I.

1. Désignons par x une variable indépendante et par y une fonction de cette variable qui devra rester ici absolument quelconque. Soient, de même, X une nouvelle variable indépendante destinée à remplacer la première et Y la fonction correspondante. Les quantités x et y sont, bien entendu, reliées, d'une manière déterminée, à X et Y, quelle que soit la fonction y, et l'on demande s'il est possible d'établir cette liaison de telle sorte que la dérivée y' de y, par rapport à x, s'exprime uniquement en fonction de Y', dérivée de Y relative à X, sans qu'il y paraisse aucune des deux quantités X et Y; et cela, quelle que soit la relation sous-entendue de y à x.

Nous verrons bientôt quel intérêt se rattache à ce problème au point de vue des transformations géométriques. Nous étendrons également la même recherche aux dérivées d'un ordre quelconque $y^{(k)}$ et $Y^{(k)}$. Mais il est essentiel de traiter d'abord le premier ordre, attendu qu'il constitue une exception qui ne rentrera pas dans la règle générale.

2. On a identiquement, en changeant de variable indépendante,

$$(1) \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial X} + \dfrac{\partial y}{\partial Y}Y'}{\dfrac{\partial x}{\partial X} + \dfrac{\partial x}{\partial Y}Y'}.$$

Puisqu'on veut que cette expression soit indépendante de X et de Y, quel que soit Y', ce caractère doit s'observer en particulier pour $Y' = 0$, c'est-à-dire lorsque l'équation sous-entendue qui relie Y à X représente, en coordonnées rectangulaires, une droite horizontale. Il vient par là

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial X}}{\frac{\partial x}{\partial X}} = \text{const.},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial x}{\partial X} = A u, \quad \frac{\partial y}{\partial X} = B u,$$

en désignant par A et B des constantes et par u une fonction inconnue de X et de Y. On aurait également, en envisageant une droite verticale,

$$\frac{\partial x}{\partial Y} = A_1 u_1, \quad \frac{\partial y}{\partial Y} = B_1 u_1.$$

Le caractère d'intégrabilité des fonctions x et y exige d'ailleurs que l'on ait

$$A \frac{\partial u}{\partial Y} = A_1 \frac{\partial u_1}{\partial X},$$

$$B \frac{\partial u}{\partial Y} = B_1 \frac{\partial u_1}{\partial X}.$$

Si nous supposons, en premier lieu, que $\frac{\partial u}{\partial Y}$ et $\frac{\partial u_1}{\partial X}$ ne soient pas nuls, on déduira de là

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1},$$

c'est-à-dire

$$A = BC, \quad A_1 = B_1 C,$$

et

$$\frac{\partial x}{\partial X} = C \frac{\partial y}{\partial X}, \quad \frac{\partial x}{\partial Y} = C \frac{\partial y}{\partial Y},$$

ou enfin

$$x = C y + D.$$

On obtiendrait donc par là une relation déterminée entre x et y, ce qui est contraire à l'énoncé de la question.

Dès lors, nous sommes réduits à supposer

$$\frac{\partial u}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial X} = 0,$$

d'où

$$u = \varphi(X), \quad u_1 = \psi(Y),$$

et, par suite,

$$y' = \frac{B\varphi(X) + B_1\psi(Y)Y'}{A\varphi(X) + A_1\psi(Y)Y'}.$$

Nous pouvons maintenant résoudre inversement cette équation sous la forme

$$Y' = -\frac{Ay' - B}{A_1 y' - B_1}\,\frac{\varphi(X)}{\psi(Y)}.$$

Or, si véritablement y' peut s'exprimer en Y' seul, il en doit être évidemment de même de Y' en fonction de y'. Il faut donc que la fraction

$$\frac{\varphi(X)}{\psi(Y)}$$

soit indépendante de X et de Y et, pour cela, que φ le soit de X et ψ de Y. On aura, par conséquent, en appelant H et K deux constantes,

$$u = H, \quad u_1 = K,$$

ou, avec de nouvelles arbitraires m, n, M, N,

$$\frac{\partial x}{\partial X} = AH = M, \quad \frac{\partial x}{\partial Y} = A_1 K = N,$$

$$\frac{\partial y}{\partial X} = BH = m, \quad \frac{\partial y}{\partial Y} = B_1 K = n,$$

et, en intégrant,

$$(2) \qquad \begin{cases} x = MX + NY + P, \\ y = mX + nY + p. \end{cases}$$

Ces formules renferment donc la solution *nécessaire* de la question. Il est du reste facile de constater qu'elle est en même temps *suffisante* sans nouvelles restrictions entre ses six constantes. Elle donne, en effet,

$$y' = \frac{m + nY'}{M + NY'}, \tag{3}$$

quelle que soit la relation qui unit y à x, et celle qui en découle entre Y et X.

3. On peut reconnaître, par quelques applications, l'intérêt qui s'attache à la recherche précédente.

Si la variable x représente l'angle de contingence d'une courbe, ordinairement désigné par ω, et y la longueur s de l'arc, $\frac{dy}{dx}$ sera le rayon de courbure r. Une ligne quelconque peut toujours être représentée par une relation déterminée entre s et ω, et l'on sait même que ce mode de représentation, dû à Euler, est l'un des plus utiles pour l'étude des courbes planes.

Le problème précédent revient alors à déterminer le type le plus général des méthodes de transformation fondées sur l'emploi de ces variables qui permettront d'établir une relation fixe entre les courbures de la proposée et de sa transformée aux points correspondants, quelle que soit la ligne à laquelle on applique ce procédé de déformation.

Nous venons, d'une part, de reconnaître que l'on ne doit pas songer à imposer ainsi aucune autre relation que celles qui rentreront dans le type (3)

$$r = \frac{m + nR}{M + NR},$$

et que la transformation la plus générale qui amènera ce résultat est la suivante (2) :

$$s = m\Omega + nS + p,$$
$$\omega = M\Omega + NS + P.$$

La présence de ces six constantes arbitraires, ou au moins des quatre premières, m, n, M, N, permet d'ailleurs de comprendre dans ce problème un grand nombre de questions particulières, parmi lesquelles je me borne à citer comme exemples les suivantes :

1° Transformation telle, que les deux courbures soient proportionnelles :

$$s = n\mathrm{S} + p,$$
$$\omega = \mathrm{M}\Omega + \mathrm{P},$$

d'où

$$\frac{1}{r} = \frac{\mathrm{M}}{n}\frac{1}{\mathrm{R}}.$$

2° Transformation telle, que la courbure augmente par cette opération d'une même quantité pour tous les points de toutes les courbes :

$$s = n\mathrm{S} + p,$$
$$\omega = n\Omega + \mathrm{NS} + \mathrm{P},$$

d'où

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{N}}{n}.$$

3° Transformation telle, que le rayon de courbure augmente d'une quantité constante :

$$s = m\Omega + n\mathrm{S} + p,$$
$$\omega = n\Omega + \mathrm{P},$$

d'où

$$r = \mathrm{R} + \frac{m}{n}.$$

4° Transformation telle, que les deux rayons de courbure varient en raison inverse :

$$s = m\Omega + p,$$
$$\omega = \mathrm{NS} + \mathrm{P},$$

d'où

$$r\mathrm{R} = \frac{m}{\mathrm{N}},$$

et ainsi de suite.

4. On peut également trouver des applications dans les systèmes

ordinaires de coordonnées. Je me bornerai à l'exemple des coordonnées polaires r et θ. On sait que $\frac{dr}{d\theta}$ y représente la sous-normale λ. Le type général de la relation que l'on peut établir entre les deux sous-normales λ et Λ, ainsi que celui de la transformation qui y conduit, continuent à se trouver dans les formules (3) et (2).

Si, par exemple, on demande qu'il y ait, entre les deux sous-normales, une relation linéaire, il suffira de prendre

$$r = m\Theta + n\mathrm{R} + p,$$
$$\theta = \mathrm{M}\Theta + \mathrm{P},$$

d'où

$$\lambda = \frac{n}{\mathrm{M}}\Lambda + \frac{m}{\mathrm{M}}.$$

Si, en particulier, on fait $\mathrm{M} = n$, la sous-normale augmente d'une quantité constante.

Pour $m = 0$, les deux sous-normales restent proportionnelles. En ajoutant à cette hypothèse la suivante, $n = \mathrm{M}$, la sous-normale ne change pas. Entre autres cas particuliers de cette solution, pour $n = 1$, $\mathrm{M} = 1$, $m = 0$, on obtient la transformation *conchoïdale*, qui, comme on le sait, jouit en effet de cette propriété. On voit, d'ailleurs, que le type le plus étendu des transformations qui conservent la sous-normale revient à la combinaison des suivantes : 1° l'*homothétie* avec un rapport de similitude M; 2° la *dilatation* de tous les azimuts dans le même rapport M (opération connue pour la transformation des engrenages de roulement); 3° une *rotation* égale à P; 4° la transformation *conchoïdale* avec le paramètre p.

5. Cherchons de même, en Cinématique, s'il est possible d'établir, entre les positions de deux mobiles sur leurs trajectoires et les instants correspondants, des relations invariables telles que, quelle que soit la loi des mouvements, il existe une condition fixe entre leurs deux vitesses. Il suffira que x représente le temps t et y l'arc s de la trajectoire.

Nous reconnaissons d'abord qu'il ne peut exister, entre les vitesses, de relation plus générale que la suivante (3) :

$$v = \frac{m + nV}{M + NV},$$

et qu'on l'obtiendra au moyen des formules (2)

$$s = mT + nS + p,$$
$$t = MT + NS + P.$$

Si, par exemple, on demande que la vitesse de tous les mouvements possibles se trouve augmentée d'une même quantité, on prendra

$$s = mT + nS + p,$$
$$t = nT + P,$$

ce qui donne

$$v = V + \frac{m}{n}.$$

Je ne m'arrêterai pas à multiplier davantage les applications.

§ II.

6. Avant d'aborder le cas général, il est encore à peu près nécessaire d'envisager directement le second ordre. Nous chercherons donc à faire en sorte qu'il existe, entre $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ et $Y'' = \frac{d^2Y}{dX^2}$, une relation fixe, indépendante de celles qui unissent y à x et Y à X.

La formule du changement de variables, relative à ce cas, s'obtient en différentiant la relation (1) par rapport à X. Il vient ainsi, dans le premier membre, $y'' \frac{dx}{dX}$. Dans le second, le dénominateur se trouve porté au carré. Comme d'ailleurs il ne diffère pas de $\frac{dx}{dX}$, nous pouvons écrire

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & y''\left(\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial Y}Y'\right)^3 \\ & \quad = \left(\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial Y}Y'\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial X \partial Y}Y' + \frac{\partial^2 y}{\partial Y^2}Y'^2 + \frac{\partial y}{\partial Y}Y''\right) \\ & \quad - \left(\frac{\partial y}{\partial X} + \frac{\partial y}{\partial Y}Y'\right)\left(\frac{\partial^2 x}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 x}{\partial X \partial Y}Y' + \frac{\partial^2 x}{\partial Y^2}Y'^2 + \frac{\partial x}{\partial Y}Y''\right). \end{aligned}\right.$$

On voit clairement que, Y'' ne figurant pas dans le coefficient de y'', la relation entre ces deux dérivées ne peut être que linéaire. Comme du reste on exige que les coefficients ne renferment aucune des quantités X, Y, Y′, la forme cherchée sera nécessairement

$$y'' = AY'' + B, \tag{5}$$

en désignant par A et B deux constantes.

7. Lorsqu'on effectue les réductions, on reconnaît facilement que Y′ disparaît du coefficient de Y″ dans le second membre. Il doit donc également s'évanouir dans celui de y'', qui passe en dénominateur; d'où la condition

$$\frac{\partial x}{\partial Y} = 0,$$

exigeant que x ne dépende que de X, à l'inverse de ce que nous avions trouvé pour le premier ordre (2).

Le coefficient de Y″ se réduit alors à

$$\frac{\dfrac{\partial y}{\partial Y}}{\left(\dfrac{\partial x}{\partial X}\right)^2},$$

et, puisqu'il doit être égal à A, il s'ensuit

$$\frac{\partial y}{\partial Y} = A\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^2. \tag{6}$$

Le coefficient de Y′ devient, de son côté,

$$2\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial^2 y}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial^2 x}{\partial X^2},$$

et, comme il doit disparaître de lui-même, nous devons poser

$$\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial X^2}}{\dfrac{\partial x}{\partial X}} = 2\frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial X \partial Y}}{\dfrac{\partial y}{\partial Y}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\log\frac{\partial x}{\partial X}\right) = 2\frac{\partial}{\partial X}\left(\log\frac{\partial y}{\partial Y}\right),$$

et en intégrant

$$\log\frac{\partial x}{\partial X} = 2\log\frac{\partial y}{\partial Y} + \log f(Y),$$

expression dans laquelle f désigne une fonction arbitraire de Y seul. Il vient par là

$$\frac{\partial x}{\partial X} = f(Y)\left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)^2,$$

ou, d'après (6),

$$1 = A^2 f(Y)\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^3.$$

Mais d'ailleurs on a reconnu que $\frac{\partial x}{\partial X}$ ne doit pas contenir Y. Il faut donc que $f(Y)$ se réduise à une constante, et il en sera par suite de même pour $\frac{\partial x}{\partial X}$. Il vient ainsi, pour l'expression définitive de x,

$$x = MX + P. \tag{7}$$

En substituant cette expression dans la relation (6), on obtient

$$\frac{\partial y}{\partial Y} = AM^2,$$

valeur arbitraire que nous pouvons représenter plus simplement par n, ce qui donne

$$y = nY + F(X). \tag{8}$$

En troisième lieu, le terme indépendant de Y′ et Y″, dans la formule (4), est le suivant :

$$\frac{\frac{dx}{dX}\frac{\partial^2 y}{\partial X^2} - \frac{\partial y}{\partial X}\frac{d^2 x}{dX^2}}{\left(\frac{dx}{dX}\right)^3},$$

c'est-à-dire

$$\frac{F''(X)}{M^2}.$$

Or il doit être constant et égal à B, par suite

$$F(X) = \tfrac{1}{2}M^2BX^2 + mX + p.$$

Mais B reste arbitraire, et il sera plus simple d'écrire (8)

$$y = lX^2 + mX + nY + p. \tag{9}$$

Les formules (7) et (9) résolvent la question. En effet, bien que nous n'ayons pas encore épuisé l'identification, nous pouvons constater que ces expressions satisfont à l'énoncé de la question sans nouvelle restriction entre leurs six arbitraires. Elles donnent, en effet,

$$\begin{aligned}
dy &= (2lX + m)\,dX + n\,dY,\\
dx &= M\,dX,\\
y' &= \frac{n}{M}Y' + \frac{2l}{M}X + \frac{m}{M},\\
y''\frac{dx}{dX} &= \frac{n}{M}Y'' + \frac{2l}{M},\\
y'' &= \frac{n}{M^2}Y'' + \frac{2l}{M^2}.
\end{aligned}$$

8. Cherchons, par exemple, à établir entre les positions de deux mobiles sur leurs trajectoires et les instants correspondants de telles relations fixes que, quelle que soit la loi des deux mouvements, il y ait, entre leurs accélérations tangentielles, une condition invariable.

Nous reconnaissons d'abord qu'il ne peut exister entre ces accélérations j et J qu'une relation linéaire, à l'inverse de ce que nous avions trouvé pour le problème analogue concernant la vitesse (5). Les relations qui la procureront seront en outre les suivantes :

$$\begin{aligned}
t &= MT + P,\\
s &= lT^2 + mT + nS + p,
\end{aligned}$$

d'où

$$j = \frac{n}{M^2}J + \frac{2l}{M^2}.$$

§ III.

9. Nous pouvons maintenant généraliser la recherche précédente et nous proposer de créer, entre les dérivées $y^{(k)}$ et $Y^{(k)}$ d'un ordre quelconque, mais déterminé k, une relation fixe, indépendante de celles qui unissent y et Y à leurs variables respectives x et X.

Pour obtenir les dérivées successives y''', y^{IV},.., $y^{(k)}$, il suffira de différentier un certain nombre de fois, par rapport à X, la valeur de y'', en ayant soin de chasser du premier membre le coefficient $\frac{\partial x}{\partial X}$, qui s'y réintroduit à chaque différentiation. Le dénominateur sera donc exclusivement formé de puissances de la quantité

$$\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial Y} Y',$$

et l'on reconnaîtra, comme ci-dessus (6), que la relation cherchée ne peut être que linéaire sous la forme

$$y^{(k)} = AY^{(k)} + B. \tag{10}$$

Si le premier ordre a fait exception à cette règle générale, en admettant un type fractionnaire (3), il est facile de voir que cela tient à ce que le raisonnement employé se trouve alors en défaut, parce que $Y^{(k)}$ se confond avec Y'.

10. Si nous chassons le dénominateur après la fin des différentiations, le premier membre de l'égalité (10) deviendra

$$\left[AY^{(k)} + B\right]\left(\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial Y} Y'\right)^{h},$$

et devra se trouver identiquement égal au numérateur. Développons cette identification.

Le coefficient de $Y^{(k)}$ contient, dans le premier membre,

$$A\left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right)^{h} Y'^{h}.$$

Au contraire, dans le second, il sera toujours, par rapport à Y′, d'un degré inférieur, comme nous allons le reconnaître. En effet, si nous représentons en abrégé par Z la quantité $\frac{dx}{dX}$, $y^{(k)}$ aura la forme

$$y^{(k)} = \frac{U + VY^{(k)}}{Z^k},$$

U et V étant des fonctions de X, Y, Y′, Y″,..., $Y^{(k-1)}$. On en tire, en différentiant par rapport à X,

$$y^{(k+1)}Z = \frac{Z^k[U_1 + VY^{(k+1)}] - [U + VY^{(k)}]hZ^{k-1}\frac{dZ}{dX}}{Z^{2k}};$$

d'où, en réduisant,

$$y^{(k+1)} = \frac{U_2 + VZY^{(k+1)}}{Z^{k+2}}.$$

Le coefficient de la dérivée d'ordre le plus élevé et le dénominateur forment donc deux progressions géométriques dont les raisons sont respectivement Z et Z^2. Donc l'exposant de Y′ qui entre à la première puissance dans Z croît plus rapidement au dénominateur que dans le coefficient en question. Il est d'ailleurs déjà supérieur dès le second ordre (4), et par suite l'inégalité se conservera toujours dans le même sens.

D'après cela, le terme en Y'^h doit disparaître de lui-même, et, comme A ne peut s'annuler, nous sommes forcés de poser

$$(11) \qquad \frac{\partial x}{\partial Y} = 0, \quad x = f(X).$$

Le coefficient de $Y^{(k)}$, dans le premier membre, se réduit par là de la manière suivante :

$$A[f'(X)]^{2k-1}.$$

En effet, la valeur de h devient en effet $2k - 1$ pour $k = 2$ (4), et nous venons de voir qu'elle s'accroît de deux unités pour chaque unité d'augmentation de k. De même le coefficient de $Y^{(k)}$, dans le second membre, a pour valeur

$$\frac{\partial y}{\partial Y}[f'(X)]^{k-1}.$$

En effet, pour $k=2$, il se réduit (4) à $f'(X)\frac{\partial y}{\partial Y}$, et nous venons de voir qu'il se multiplie par $f'(X)$ pour chaque unité d'augmentation de k. Dès lors, l'identification de ces deux coefficients exige que l'on pose

$$\frac{\partial y}{\partial Y} = A[f'(X)]^k,$$

en n'oubliant pas que k a, dans la question, une valeur bien déterminée. On en déduit

$$(12) \qquad y = AY[f'(X)]^k + F(X).$$

11. Pour déterminer la fonction inconnue f, effectuons sur cette dernière formule des différentiations successives, en mettant en évidence les deux dérivées de Y d'ordre le plus élevé

$$\frac{1}{A}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dX} = [f'(X)]^k \frac{dY}{dX} + k[f'(X)]^{k-1}f''(X)Y + \ldots,$$

$$\frac{y'}{A} = [f'(X)]^{k-1}Y' + k[f'(X)]^{k-2}f''(X)Y + \ldots,$$

$$\frac{1}{A}\frac{dy'}{dx}\frac{dx}{dX} = [f'(X)]^{k-1}\frac{dY'}{dX} + [(k-1)+k][f'(X)]^{k-2}f''(X)\frac{dY}{dX} + \ldots,$$

$$\frac{y''}{A} = [f'(X)]^{k-2}Y'' + (2k-1)[f'(X)]^{k-3}f''(X)Y' + \ldots,$$

$$\frac{1}{A}\frac{dy''}{dx}\frac{dx}{dX} = [f'(X)]^{k-2}\frac{dY''}{dX} + [(k-2)+(2k-1)][f'(X)^{k-3}f''(X)\frac{dY'}{dX} + \ldots,$$

$$\frac{y'''}{A} = [f'(X)]^{k-3}Y''' + [3k-(1+2)][f'(X)]^{k-4}f''(X)Y'' + \ldots,$$

et généralement

$$\begin{aligned}\frac{y^{(i)}}{A} &= [f'(X)]^{k-i}Y^{(i)} \\ &\quad + \{ik - [1+2+\ldots+(i-1)]\}[f'(X)^{k-i-1}f''(X)Y^{(i-1)} + \ldots \\ &= [f'(X)]^{k-i}Y^{(i)} + \left[ik - \frac{i(i-1)}{2}\right][f'(X)]^{k-i-1}f''(X)Y^{(i-1)} + \ldots.\end{aligned}$$

On a donc en particulier, pour $i=k$,

$$\frac{y^{(k)}}{A} = Y^{(k)} + \frac{k(k+1)}{2}Y^{(k-1)}\frac{f''(X)}{f'(X)} + \ldots.$$

Or il faut que cette expression soit identique à (10). Le terme en $Y^{(k-1)}$ en doit donc disparaître de lui-même, ce qui exige que l'on pose

$$f''(X) = 0,$$
$$f(X) = MX + P.$$

Les relations (11) et (12) deviennent, d'après cela,

$$x = MX + P, \tag{13}$$
$$y = AM^k Y + F(X), \tag{14}$$

et il ne reste qu'à déterminer F(X).

12. Considérons, à cet effet, dans $y^{(k)}$, le terme indépendant de Y. Pour l'obtenir dans cette dernière formule (14), il faut différentier k fois par rapport à X, ce qui se fera en différentiant autant de fois le premier membre relativement à x et le multipliant chaque fois par M, qui représente $\frac{dx}{dX}$ (13). Il vient ainsi

$$y^{(k)} = \frac{F^{(k)}(X)}{M^k} + \ldots.$$

D'ailleurs cette partie doit être constante et égale à B (10). Il s'ensuit donc

$$F^{(k)}(X) = M^k B,$$

et, en intégrant k fois,

$$F(X) = \frac{M^k B}{1.2.3\ldots k} X^k + m_{k-1} X^{k-1} + m_{k-2} X^{k-2} + \ldots + m_1 X + m_0.$$

Mais, comme B est arbitraire, nous pouvons plus simplement remplacer le premier coefficient par m, et en reportant cette valeur dans celle (14) de y, écrire ainsi cette dernière

$$y = nY + m_0 + m_1 X + m_2 X^2 + \ldots + m_{k-1} X^{k-1} + m_k X^k. \tag{15}$$

13. Les formules (13) et (15) représentent la forme nécessaire de la solution. Il est bien vrai que nous sommes encore loin d'avoir épuisé l'identification, mais nous pouvons, dès à présent, constater que les conditions exprimées sont suffisantes en même temps que nécessaires.

On a en effet (13)

$$\frac{dx}{dX} = M,$$

et, par suite, en différentiant k fois par rapport à X (15),

$$y^{(k)} = \frac{n}{M^k} Y^{(k)} + k(k-1)(k-2)\ldots 3.2.1.\frac{m_k}{M^k}, \tag{16}$$

expression qui rentre effectivement dans le type voulu (10).

De là ce théorème :

Pour établir une relation fixe entre l'ancienne et la nouvelle dérivée d'ordre k, il faut et il suffit que l'ancienne variable indépendante soit fonction linéaire de la nouvelle, et que l'ancienne variable-fonction soit la somme d'une fonction linéaire de la nouvelle et d'un polynôme de degré k formé avec la nouvelle variable indépendante.

La relation fixe est alors nécessairement linéaire entre les deux dérivées d'ordre k. En outre, elle entraîne, comme conséquence, que les dérivées d'ordre supérieur resteront proportionnelles et que les coefficients de proportionnalité formeront une progression géométrique.

L'équation (16) donne en effet, en la différentiant j fois par rapport à X,

$$y^{(k+j)} = \frac{n}{M^{k+j}} Y^{(k+j)}.$$

14. Proposons-nous, comme application, de déterminer la transformation par suite de laquelle la développée d'ordre k d'une courbe quelconque, et celle de sa transformée, auront des courbures égales en deux points corespondants, quels qu'ils soient.

Il suffira pour cela, en recourant aux variables d'Euler, de poser

$$\omega = M\Omega + P,$$
$$s = M^k S + m_0 + m_1\Omega + m_2\Omega^2 + \ldots + m_{k-1}\Omega^{k-1};$$

on en déduit en effet

$$\frac{d^k s}{d\omega^k} = \frac{d^k S}{d\Omega^k},$$

c'est-à-dire l'égalité des rayons de courbure des $k^{\text{ièmes}}$ développées.

Si, par exemple, on réduit en particulier cette transformation à la forme plus simple

$$\omega = M\Omega, \quad s = M^k S,$$

et qu'on l'applique à la cycloïde

$$s = a \sin \omega,$$

on obtient l'épicycloïde

$$S = \frac{a}{M^k} \sin M\Omega, \tag{17}$$

dont les sommets et les rebroussements se correspondent avec ceux de la cycloïde proposée. Celle-ci, qui est identique à toutes ses développées, et l'épicycloïde fournie par la $k^{\text{ième}}$ développée de sa transformée (17), auront la même courbure dans tous les points dont la correspondance est marquée par la relation

$$\omega = M\Omega.$$