JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE LEMMI

Sur les cas d'exception au théorème des forces vives. Résumé et conséquences d'un Mémoire de M. Betti

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 2 (1876), p. 233-239.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1876_3_2__233_0>

Sur les cas d'exception au théorème des forces vives. Résumé et conséquences d'un Mémoire de M. Betti;

PAR M. LE Dr ÉMILE LEMMI.

Le professeur H. Betti a donné, dans son Mémoire *Sur les espaces d'un nombre quelconque de dimensions* [*], un théorème pour le cas de n variables dont on déduit, dans le cas de trois seules variables, des conséquences d'une haute importance dans quelques problèmes de Mécanique et de Physique mathématique.

Je poserai quelques définitions absolument indispensables :

M. Betti appelle *espace à n dimensions* et désigne par S_n *l'ensemble de tous les systèmes de valeurs réelles qu'on peut donner à n variables de* $-\infty$ *à* $+\infty$; c'est, comme on voit, la *variété à n* dimensions de Riemann [**]. Chaque système de valeurs $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ détermine un point de S_n dont $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont les *coordonnées*. Si, entre tous ces systèmes, on considère les systèmes qui satisfont à l'équation

$$(a) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

où F est une fonction *continue* et *monodrome* pour toutes les valeurs réelles des variables, l'espace à $(n-1)$ dimensions, défini par l'équation (a), séparera S_n en deux régions : dans l'une on aura $F < 0$, dans l'autre $F > 0$. S'il est possible de passer d'une manière continue d'un système pour lequel $F < 0$ à un autre système pour lequel $F < 0$ sans passer par un système pour lequel $F = 0$, la région $F < 0$ est un *espace connexe*. On peut en dire autant pour la région $F > 0$.

[*] ENRICO BETTI, *Sopra gli spazii d'un numero qualunque di dimensioni.* (*Annali di Matematica pura ed applicata,* serie IIa, tomo IVo, fascicolo IIo, p. 140-158.)

[**] B. RIEMANN, *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* (*Mémoires de Göttingue*, t. XIII.)

Un espace S_{n-m} à $n-m$ dimensions a la *connexion linéaire* lorsqu'on peut réunir deux quelconques de ses points par une ligne continue entièrement située dans S_{n-m}. Un espace S_{n-1} est *fermé*, s'il divise S_n en deux régions à connexion linéaire, de manière qu'on ne puisse passer de l'une à l'autre sans traverser S_{n-1}. Un espace est *fini* si toutes les coordonnées de ses points ont des valeurs finies. Un certain nombre d'inégalités

$$F_1 < 0, \ F_2 < 0, \ldots, \ F_m < 0$$

déterminent une partie R_t d'un espace S_t qui peut être à *connexion linéaire*. La totalité des espaces à $(t-1)$ dimensions

$$F_1 = 0, \ F_2 = 0, \ldots, \ F_m = 0,$$

qui limitent R_t, de manière qu'il soit impossible de passer d'un point de R_t à un point hors de R_t par une ligne continue sans traverser aucun de ces espaces, constitue le *contour* de R_t.

Un espace *fini* et à connexion linéaire est *fermé* ou il a un *contour*.

Si, dans un espace R_n à n dimensions, limité par un seul ou par plusieurs espaces à $(n-1)$ dimensions, chaque espace fermé à m dimensions $(m < n)$ constitue le contour d'un espace à $(m+1)$ dimensions et à *connexion* linéaire entièrement contenu dans R_n, l'espace R_n a une *connexion simple de $m^{ième}$ espèce*. Un espace dont les connexions de toutes les espèces sont simples est *simplement connexe*. Si l'on peut imaginer dans R_n un nombre p_m d'espaces fermés à m dimensions, qui ne puissent pas constituer le contour d'une partie à connexion linéaire d'un espace à $(m+1)$ dimensions toutes situées dans R_n, mais tels que tout autre espace fermé à m dimensions puisse constituer ou *seul*, ou *avec une partie d'entre eux*, ou *avec tous*, le contour d'une partie à connexion linéaire d'un espace à $(m+1)$ dimensions toutes situées dans R_n, on dit que la *connexion* de $m^{ième}$ *espèce* de R_n est d'ordre $(p+1)^{ième}$.

L'ordre de connexion d'un espace à n dimensions ne dépend point de la grandeur ni de la forme de ses éléments. Par conséquent, deux espaces qui se déduisent l'un de l'autre par transformation continue ont leurs ordres de connexion de toutes les espèces égaux. Un point étant simplement connexe, tout espace qui, par transformation continue, se réduit à un point, est simplement connexe. L'espace à n dimensions

$$(x_1 - \alpha_1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2 + \ldots + (x_n - \alpha_n)^2 < R^2,$$

qui a pour contour l'espace à $(n-1)$ dimensions,

$$(x_1 - \alpha_1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2 + \ldots + (x_n - \alpha_n)^2 = R^2,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et R étant des constantes, est simplement connexe. On peut, en effet, faire tendre d'une manière continue $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, et réduire cet espace au point $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2, \ldots$, $x_n = \alpha_n$.

Pour éclaircir quelque peu ces notions, je vais les appliquer très-brièvement aux surfaces (espace à deux dimensions), et à l'espace ordinaire (à trois dimensions) [*].

Les surfaces ont un seul ordre de connexion : *Une surface* S_2 *a pour ordre de connexion* $(p+1)$ *si l'on peut y décrire p lignes fermées qui ne constituent pas le contour d'une de ses parties, mais telles que toute autre ligne fermée, ou seule, ou avec une partie des premières, ou avec toutes, constitue le contour d'une partie de* S_2. La partie du plan comprise dans un *cercle* et la surface de la sphère sont simplement connexes; la surface plane comprise entre deux cercles et la surface du tore ont respectivement leurs ordres de connexion égaux à 2 et à 3.

L'espace ordinaire S_3 (espace à trois dimensions) a deux espèces de connexions, *une connexion de deuxième* et une *de première espèce*. Un espace *ordinaire* R_3 *a sa connexion de deuxième espèce de l'ordre* $(p_2 + 1)$, *si l'on peut imaginer dans* R_3 p_2 *surfaces fermées qui ne puissent pas former seules le contour d'une partie de* R_3, *mais telles que toute autre surface fermée, imaginée dans* R_3, *ou seule, ou avec une partie des premières, ou avec toutes, forme le contour d'une partie de* R_3. *Un espace ordinaire* R_3 *a sa connexion de première espèce de l'ordre* $(p_1 + 1)$, *si l'on peut imaginer dans* R_3 p_1 *lignes fermées* $s, s_1, \ldots, s_{p_1}$, *qui*

[*] B. Riemann s'est occupé pour la première fois de la connexion des surfaces dans ses *Bases* d'une *Théorie générale des fonctions d'une variable complexe*. (Göttingue, 1851.) La définition de l'ordre de connexion d'une surface donnée par lui se déduit aisément de celle de Betti.

ne constituent pas le contour d'une partie de surface, mais telles que toute autre ligne fermée, ou seule, ou avec une partie des s, ou avec tous les s, constitue le contour d'une partie de surface contenue en R_2.

Un espace ordinaire R_3 est *simplement connexe* lorsqu'il a ses *deux connexions du premier ordre* ou *simples;* l'espace compris dans une sphère (réductible par *transformation continue* à un point) est simplement connexe. L'espace compris entre deux sphères concentriques, l'espace compris dans un tore, l'espace compris entre une sphère et un tore et l'espace compris entre deux tores ont respectivement pour ordres de connexion de deuxième espèce 2, 1, 2 et 2, et pour ordres de connexion de première espèce 1, 2, 2 et 3.

Une section transverse à m dimensions $(m < n)$ dans un espace limité R_n à n dimensions : c'est un espace à m dimensions, le long duquel la connexion de R_n est interrompue et qui a son contour sur le contour de R_n.

M. Betti démontre que, *pour rendre simplement connexe et réduire, par conséquent, par transformation continue à un point, un espace fini* R_n *à n dimensions par des sections transverses simplement connexes, il faut et il suffit d'y faire* p_{n-1} *sections linéaires,* p_{n-2} *sections à deux dimensions,* p_{n-3} *à trois dimensions,...,* p_1 *à* $(n-1)$ *dimensions, si* p_1+1, $p_2+1, \ldots, p_{n-1}+1$ *sont les ordres de ses connexions de première, deuxième,...,* $(n-1)^{\text{ième}}$ *espèce.* M. Betti démontre encore que :

Lorsqu'un espace fini R_n *est réduit simplement connexe par des sections transverses simplement connexes, chaque espace fermé de m dimensions imaginé en* R_n *forme, avec un nombre d'espaces fermés à m dimensions égal au nombre de sections transverses* $n-m$ *qu'il rencontre, le contour d'un espace à* $(m+1)$ *dimensions contenu dans* R_n.

L'espace ordinaire compris entre deux sphères concentriques se réduit à devenir simplement connexe par une seule *section transverse linéaire* qui va d'un point de la sphère extérieure à un point de la sphère intérieure. Sa connexion, de première espèce, est donc simple et celle de deuxième espèce du deuxième ordre.

Ces notions posées, voici le théorème que j'ai annoncé :

Soit R_n *un espace fermé à* n *dimensions dont l'ordre de connexion de première espèce est* $p_1 + 1$; *soient* $s_1, s_2, \ldots, s_{p_1}$ *les* p_1 *sections transverses simplement connexes à* $(n-1)$ *dimensions, qui réduisent à être simple sa connexion de première espèce; soient* $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_{p_1}$ p_1 *lignes fermées qui traversent respectivement les sections* $s_1, s_2, \ldots, s_{p_1}$, *et telles que chaque ligne fermée* l, *jointe à celles des lignes* L *qui rencontrent les mêmes sections qu'elle, forme le contour d'un espace* C_2 *à deux dimensions entièrement contenu en* R_n; *soient encore* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n *fonctions des points* $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *de l'espace* R_n *finies et continues dans tout* R_n, *qui satisfassent aux* $\frac{n(n-1)}{2}$ *équations*

$$\frac{dX_r}{dz_t} - \frac{dX_t}{dz_r} = 0,$$

l'intégrale

$$\int \Sigma X_r dz_r, \quad (r = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

étendue à toutes les lignes $l, L_1, L_2, \ldots, L_{p_1}$ *qui forment le contour de* C_2, *est toujours nulle, quelle que soit la ligne fermée* l [*].

On en déduit :

1° Si l'espace R_n à n dimensions a une connexion simple de première espèce (comme l'espace ordinaire, l'espace compris entre deux sphères concentriques), l'intégrale

$$\int \Sigma X_r dz,$$

étendue à deux lignes qui aboutissent au même point z_1 et partent du même point z_0, a la même valeur. Ces deux lignes, en effet, prises ensemble, forment une ligne fermée, contour d'un espace à deux dimensions contenu dans R_n. L'intégrale est donc, dans ce cas, indépendante de la ligne selon laquelle elle va de z_0 à z_1; et, si l'on tient fixe le point z_0, elle peut être regardée comme *fonction monodrome* de $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

2° Si R_n a sa connexion de première espèce de l'ordre $(p_1 + 1)$, si $L_1, L_2, \ldots, L_{p_1}$ sont p_1 lignes fermées qui ne forment pas seules le contour d'un espace à deux dimensions contenues dans R_n, et si $s_1, s_2, \ldots,$

[*] La démonstration de ce théorème est dans le Mémoire cité de M. Betti.

s_p sont p_1 sections transverses à $(n-1)$ dimensions, qui réduisent à devenir simple la connexion de première espèce de R_n, une ligne fermée l formera un contour avec celles des lignes L qui rencontrent les mêmes sections qu'elle. On aura donc, en posant

$$H_t = \int_{L_t} \Sigma X_r dz_r, \quad (r = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

$$\int_l \Sigma X_r dz_r + \Sigma \dot{H}_t = 0,$$

où la deuxième somme doit être étendue à toutes les valeurs de t, qui sont *indices* des sections transverses de $(n-1)$ dimensions rencontrées par la ligne l. Par conséquent l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} \Sigma X_r dz_r,$$

étendue entre deux points z_0 et z_1 de R_n sur une ligne qui traverse s sections transverses, différera de l'intégrale étendue sur une ligne qui ne rencontre aucune section des quantités H relatives aux sections rencontrées.

Le théorème précédent, limité à trois variables, est d'une haute importance dans quelques problèmes de Mécanique et de Physique mathématique. M. Betti l'à bien fait ressortir dans ses Leçons de Physique mathématique données aux élèves de l'Université de Pise en 1872.

On sait que, si un point se meut dans l'espace sous l'action d'une force dont l'intensité dépend seulement de la position du point, en désignant par v_0 la vitesse du point dans la position (x_0, y_0, z_0), et par v sa vitesse dans la position (x, y, z), par m sa masse et par x, y, z les composantes de la force selon les axes, on a

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} (X dx + Y dy + Z dz).$$

Si la valeur de l'intégrale ne dépend pas de la ligne suivie par le point mobile, mais seulement des points initial et final du mouvement, le *principe de la conservation de la force* est vérifié, et il en résulte que, quel que soit le chemin parcouru par le point de la position initiale à la finale, le travail effectué par la force reste toujours le même. On pose, en général, comme condition suffisante la condition que $(Xdx + Ydy + Zdz)$ soit une *différentielle exacte*, c'est-à-dire que les fonctions X, Y, Z satisfassent aux trois équations de condition

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}, \quad \frac{dZ}{dx} = \frac{dX}{dz};$$

mais les considérations exposées et le théorème énoncé nous démontrent que cette condition n'est point suffisante, et que le trinôme $Xdx + Ydy + Zdz$ peut être une différentielle exacte sans que pourtant le principe de la conservation de la force soit vérifié. Les fonctions X, Y, Z, que représentent les composantes de forces émanant soit de points, soit de lignes, soit de surfaces, soit de solides, deviennent bien souvent (si elles agissent selon la loi de Newton), ou elles-mêmes, ou leurs dérivées, infinies ou discontinues dans ces points, lignes, surfaces ou solides. Donc elles et leurs dérivées ne se conservent finies et continues que dans l'espace qu'on obtient en excluant ces points, lignes, surfaces ou solides. Si cet espace a une connexion simple de première espèce, l'intégrale $\int(Xdx + Ydy + Zdz)$ aura une valeur *indépendante du chemin parcouru par le point et fonction seulement des coordonnées extrêmes*. Si, au contraire, cet espace a pour ordre de connexion de première espèce $(p_1 + 1)$ les valeurs de l'intégrale, *bien que* $Xdx + Ydy + Zdz$ *soit une différentielle exacte dans tout cet espace,* prise entre les mêmes limites, *pourront être différentes les unes des autres des multiples de* p_1 *quantités constantes, selon le chemin suivi.* Dans ce cas donc, quoique les équations de condition soient vérifiées dans le nouvel espace, le principe de la conservation de la force ne l'est pas, et si deux points sont donnés comme points initial et final, et que l'on imagine différentes courbes entre ces deux points, sur lesquelles le point doive se mouvoir, pour chacun de ces chemins on obtiendra une valeur déterminée du travail, mais les valeurs correspondant aux différents chemins pourront être très-différentes entre elles; le point mobile pourra, partant d'une même position initiale, arriver à une autre position avec une force vive différente, selon le chemin parcouru.