JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CAMILLE JORDAN

Mémoire sur les covariants des formes binaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 2 (1876), p. 177-232.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1876_3_2__177_0>

Mémoire sur les covariants des formes binaires;

Par M. Camille JORDAN.

Les travaux de MM. Cayley et Clebsch ont montré que les covariants des fonctions binaires ont pour propriété caractéristique de pouvoir s'exprimer par des produits symboliques de déterminants et de facteurs linéaires.

Mais une même expression symbolique peut revêtir un grand nombre de formes distinctes. On se trouve donc en face de la question suivante :

« Discerner, parmi les diverses formes dont une expression symbolique est susceptible, celle qu'il convient de regarder comme canonique, et indiquer un moyen régulier pour ramener les autres formes à celle-là. »

La solution générale de ce problème paraît présenter de sérieuses difficultés. M. P. Gordan a fait néanmoins dans cette voie un premier pas fort important, en établissant la proposition fondamentale suivante :

« Les covariants d'un système de fonctions binaires A, B,... peuvent s'exprimer en fonction entière d'un nombre limité de covariants indépendants. »

L'analyse par laquelle cet habile géomètre a démontré ce résultat montre bien qu'il existe une limite au nombre des covariants indépendants, mais n'en donne pas immédiatement la valeur. La détermination de cette valeur fait l'objet principal de ce Mémoire.

Il est divisé en huit Sections :

Dans la première Section, nous établissons les principes de la notation symbolique.

Dans la deuxième, nous rappelons la propriété caractéristique des covariants, et nous établissons les identités à l'aide desquelles on peut transformer les unes dans les autres les diverses expressions symboliques d'un même covariant.

Dans la troisième, nous montrons comment on peut introduire dans le calcul les symboles des covariants.

La quatrième Section est consacrée à l'étude de la composition (*Uberschiebung*) des covariants.

Ces quatre Sections ne renferment que des résultats déjà établis par divers géomètres, et principalement par M. Gordan. Mais il nous a paru d'autant plus nécessaire d'exposer ce point de départ de notre analyse, qu'il ne se trouve développé, à notre connaissance, dans aucun ouvrage français.

Dans la cinquième Section, nous abordons l'étude des covariants du troisième degré, et nous assignons leur forme canonique. De ce premier résultat découlent toutes les propositions établies dans la suite du Mémoire.

Nous montrons ensuite (Section VI) comment un covariant quelconque peut être décomposé en trois parties, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{R}$. L'idée de cette décomposition est encore empruntée à M. Gordan. Mais nous avons beaucoup précisé la forme des covariants $\mathfrak{R}$; ce qui nous a permis de les exprimer en fonction entière de certains covariants indépendants R, d'une forme très-simple, et dont nous avons resserré le degré dans des limites assez étroites (Section VII).

Revenant ensuite à un covariant quelconque (Section VIII), nous établissons, par des considérations nouvelles, ce théorème, d'où découle, comme corollaire, celui de M. Gordan : *Les covariants d'un système de formes* A, B,..., *en nombre limité ou illimité, mais dont le degré ne surpasse pas une certaine limite, peuvent s'exprimer en fonction entière de covariants indépendants, dont l'ordre et le poids restent inférieurs à une certaine limite.*

§ I. — Notation symbolique.

1. Soit

$$(1)\quad \begin{cases} A = A_0 x_1^m + m A_1 x_1^{m-1} x_2 + \dfrac{m(m-1)}{2} A_2 x_1^{m-2} x_2^2 + \ldots + A_m x_2^m, \\ B = B_0 x_1^n + n B_1 x_1^{n-1} x_2 + \dfrac{n(n-1)}{2} B_2 x_1^{n-2} x_2 + \ldots + B_n x_2^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

un système de formes algébriques binaires, ayant respectivement pour ordres $m, n, \ldots$, et soit

$$(2)\qquad F(A_0, \ldots, A_m, B_0, \ldots, B_n, \ldots, x_1, x_2)$$

une fonction entière et homogène du degré α par rapport à $A_0, \ldots, A_m$; entière et homogène du degré β par rapport à $B_0, \ldots, B_n$; etc.; et enfin entière et homogène d'ordre ξ par rapport aux variables x_1, x_2.

Supposons, pour fixer les idées, que α soit > 0; effectuons sur la fonction F l'opération

$$(3)\qquad \frac{1}{\alpha}\left(A'_0 \frac{\partial}{\partial A_0} + A'_1 \frac{\partial}{\partial A_1} + \ldots + A'_m \frac{\partial}{\partial A_m}\right).$$

Le résultat de cette opération sera une nouvelle fonction F', qu'on appelle la *polaire* ou l'*émanant* de F. Cet émanant est évidemment linéaire par rapport aux nouveaux paramètres $A'_0, \ldots, A'_m$, et son degré par rapport à $A_0, \ldots, A_m$ est réduit à $\alpha - 1$. D'ailleurs, il résulte du théorème des fonctions homogènes, que, si l'on posait dans F'

$$A'_0 = A_0, \ \ldots, \ A'_m = A_m,$$

F' deviendrait identique à F.

Si $\alpha - 1 > 0$, on exécutera sur F' l'opération

$$\frac{1}{\alpha - 1}\left(A''_0 \frac{\partial}{\partial A_0} + \ldots + A''_m \frac{\partial}{\partial A_m}\right),$$

et l'on obtiendra un nouvel émanant F'' linéaire par rapport à $A''_0, \ldots, A''_m$, ainsi que par rapport à $A'_0, \ldots, A'_m$, et du degré $\alpha - 2$ seulement par rapport à $A_0, \ldots, A_m$. D'ailleurs, en posant

$$A''_0 = A'_0 = A_0, \ \ldots, \ A''_m = A'_m = A_m,$$

F'' deviendrait identique à F.

Si $\alpha - 2 > 0$, on poursuivra de même, et l'on arrivera enfin à un dernier émanant F^α, qui ne contiendra plus les coefficients $A_0, \ldots, A_m$, mais sera linéaire par rapport à α séries de paramètres,

$$A'_0, \ldots, A'_m; \ldots; \ A_0^{(\alpha)}, \ldots, A_m^{(\alpha)}.$$

Cet émanant reproduira d'ailleurs F si l'on y pose

$$A'_0 = \ldots = A_0^{(\alpha)} = A_0, \ \ldots, \ A'_m = \ldots = A_m^{(\alpha)} = A_m.$$

Enfin, F étant homogène et du degré β par rapport à $B_0, \ldots, B_n$, il en est évidemment de même pour chacun des émanants successifs $F', \ldots, F^\alpha$.

Supposons $\beta > 0$. Par une suite d'opérations toutes semblables à celles qui nous ont amenés de F à F^α, on déduira de F^α un nouvel émanant $F^{\alpha+\beta}$, qui ne contiendra plus les coefficients $B_0, \ldots, B_n$, mais contiendra, en échange, β séries de nouveaux paramètres

$$B'_0, \ldots, B'_n; \ldots; \ B_0^{(\beta)}, \ldots, B_n^{(\beta)},$$

et sera linéaire par rapport à chacune d'elles.

Quel que soit le nombre des fonctions $A, B, \ldots$, on arrivera, en poursuivant ces opérations, à un dernier émanant $\mathfrak{F}$, indépendant des coefficients $A_0, \ldots, A_m; B_0, \ldots, B_n; \ldots$, et linéaire par rapport à $\alpha + \beta + \ldots$ séries de paramètres

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} A'_0, A'_1, \ldots, A'_m; \ldots; \ A_0^{(\alpha)}, A_1^{(\alpha)}, \ldots, A_m^{(\alpha)}, \\ B'_0, B'_1, \ldots, B'_n; \ldots; \ B_0^{(\beta)}, B_1^{(\beta)}, \ldots, B_n^{(\beta)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

2. Substituons maintenant dans $\mathfrak{F}$, à la place de ces paramètres, les expressions suivantes :

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1'^m, a_1'^{m-1} a'_2, \ldots, a_2'^m; \ \ldots; \ a_1^{(\alpha)m}, a_1^{(\alpha)m-1} a_2^{(\alpha)}, \ldots, a_2^{(\alpha)m}, \\ b_1'^n, b_1'^{n-1} b'_2, \ldots, b_2'^n; \ldots; \ b_1^{(\beta)n}, b_1^{(\beta)n-1} b_2^{(\beta)}, \ldots, b_2^{(\beta)n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Nous obtiendrons une fonction Φ, entière et homogène du degré m par rapport à chacun des α couples de paramètres $a'_1, a'_2; \ldots; a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}$; du degré n par rapport à chacun des β couples de paramètres $b'_1, b'_2; \ldots; b_1^{(\beta)}, b_2^{(\beta)}; \ldots$; et enfin d'ordre ξ par rapport aux variables x_1, x_2; car les opérations successives par lesquelles on a passé de F à Φ n'ont pu évidemment altérer l'ordre de la fonction par rapport à ces variables.

3. Réciproquement, la fonction Φ étant donnée, il sera aisé de remonter à la fonction F qui lui a donné naissance, et cela sans aucune ambiguïté. En effet, on revient de Φ à $\mathfrak{F}$ en remplaçant les produits (5) par leurs valeurs (4), puis de $\mathfrak{F}$ à F en posant

$$(6) \qquad \begin{cases} A'_0 = \ldots = A_0^{(\alpha)} = A_0; \ \ldots; \ A'_m = \ldots = A_m^{(\alpha)} = A_m, \\ B'_0 = \ldots = B_0^{(\beta)} = B_0; \ \ldots; \ B'_n = \ldots = B_n^{(\beta)} = B_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

La fonction Φ, liée à F comme il vient d'être exposé, se nomme l'*expression symbolique de* F.

4. Soient, comme précédemment, A, B,..., L,... des fonctions entières et homogènes de x_1, x_2, de degrés $m, n, \ldots, p, \ldots$; et soit

$$(7) \qquad F(A_0, A_1, \ldots; B_0, B_1, \ldots; \ldots; L_0, L_1, \ldots; \ldots; x_1, x_2)$$

une fonction entière et homogène par rapport à x_1, x_2 et par rapport aux coefficients de chacune de ces fonctions. Particularisons la fonction L et les suivantes, en admettant que leurs coefficients, au lieu d'être des quantités arbitraires, soient des fonctions entières et homogènes des coefficients de chacune des fonctions précédentes A, B,.... En remplaçant, dans la fonction F, les coefficients $L_0, L_1, \ldots; \ldots$ par leurs valeurs, on obtiendra une nouvelle fonction

$$(8) \qquad F'(A_0, A_1, \ldots; B_0, B_1, \ldots; \ldots; x_1, x_2).$$

5. Supposons que les fonctions F, L,... ne soient pas données

immédiatement, mais qu'on connaisse leurs expressions symboliques

$$(9)\quad \Phi(a'_1, a'_2;\ a''_1, a''_2;\ldots;\ b'_1, b'_2;\ldots;\ l'_1, l'_2;\ l''_1, l''_2;\ldots;\ x_1, x_2),$$

$$(10)\quad \mathrm{A}(a'_1, a'_2;\ldots;\ \ldots;\ b'_1, b'_2;\ldots;\ x_1, x_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et proposons-nous de déterminer directement l'expression symbolique φ de la fonction F'.

On y parviendra comme il suit :

Substituons, dans la fonction Φ, aux produits

$$l'^p_1,\ l'^{p-1}_1 l'_2, \ldots,$$

les coefficients de la fonction

$$(11)\qquad \mathrm{A}(\mathrm{a}'_1, \mathrm{a}'_2;\ldots;\ \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2;\ldots;\ x_1, x_2)\ [*].$$

Nous obtiendrons une nouvelle expression symbolique

$$(12)\qquad \begin{cases} \Phi_1(a'_1, a'_2;\ a''_1, a''_2;\ldots;\ \mathrm{a}'_1, \mathrm{a}'_2;\ldots;\ b'_1, b'_2;\ldots; \\ \qquad \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2;\ldots;\ l''_1, l''_2;\ldots;\ x_1, x_2), \end{cases}$$

et, si l'on remarque que la fonction (11) se transforme en L lorsqu'on y substitue, au lieu des expressions $\mathrm{a}'^m_1, \mathrm{a}'^{m-1}_1\mathrm{a}'_2,\ldots;\ldots;\ \mathrm{b}'^n_1, \mathrm{b}'^{n-1}_1\mathrm{b}'_2,\ldots;\ldots,$ les coefficients $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1,\ldots;\ \mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1,\ldots;\ \ldots,$ on voit que Φ_1 se transformera en F' si l'on y exécute cette substitution, et si, en outre, on remplace de même $a'^m_1,\ a'^{m-1}_1 a'_2,\ldots;\ a''^m_1,\ a''^{m-1}_1 a''_2,\ldots;\ldots$ par $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1,\ldots;$ $b'^n_1,\ b'^{n-1}_1 b'_2,\ldots,$ par $\mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1,\ldots;$ etc.

Remplaçons de même, dans Φ_1, les produits $l''^p_1,\ l''^{p-1}_1 l''_2,\ldots$ par les coefficients de la fonction

$$\mathrm{A}(\alpha'_1, \alpha'_2,\ldots;\ \beta'_1, \beta'_2,\ldots;\ x_1, x_2).$$

On obtiendra une nouvelle expression symbolique Φ_2, débarrassée du couple de paramètres l''_1, l''_2, et contenant, en échange, les couples

[*] On change les paramètres $a'_1, a'_2;\ldots;\ b'_1, b'_2;\ldots,$ qui entrent dans la fonction A, en $\mathrm{a}'_1, \mathrm{a}'_2;\ldots;\ \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2,\ldots,$ pour éviter de les confondre avec les paramètres analogues qui existent déjà dans la fonction Φ.

de paramètres $\alpha'_1, \alpha'_2; \ldots; \beta'_1, \beta'_2; \ldots$, représentant respectivement les coefficients des fonctions A, B,....

Éliminant ainsi successivement les couples de paramètres l'_1, l'_2; $l''_1, l''_2; \ldots$, qui correspondent aux coefficients des fonctions L,..., on arrivera enfin à une expression Φ', où tous les couples de paramètres représenteront les coefficients des fonctions A, B,.... Ce sera évidemment là l'expression symbolique cherchée.

§ II. — Forme symbolique des covariants.

6. Effectuons, sur les fonctions A, B,... considérées dans la Section précédente, une transformation linéaire

$$x_1 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \quad x_2 = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2, \tag{13}$$

dont le déterminant $r = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1$ soit différent de zéro; et soient

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{A} = \mathcal{A}_0 y_1^m + m\mathcal{A}_1 y_1^{m-1} y_2 + \ldots + \mathcal{A}_m y_2^m, \\ \mathcal{B} = \mathcal{B}_0 y_1^n + n\,\mathcal{B}_1 y_1^{n-1} y_2 + \ldots + \mathcal{B}_n y_2^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{14}$$

les fonctions transformées de A, B,....

On dit que la fonction entière et homogène

$$F(A_0, \ldots, A_m;\ B_0, \ldots, B_n; \ldots;\ x_1, x_2),$$

considérée dans la même Section, est un *covariant* des fonctions A, B,... si l'on a identiquement

$$\left\{\begin{array}{l} F(\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_m;\ \mathcal{B}_0, \ldots, \mathcal{B}_n; \ldots;\ y_1, y_2) \\ \quad = r^\rho F(A_0, \ldots, A_m;\ B_0, \ldots, B_n; \ldots;\ x_1, x_2), \end{array}\right. \tag{15}$$

ρ étant un entier.

On appelle *ordre* du covariant son degré par rapport aux variables x_1, x_2; *degré* du covariant, son degré total par rapport aux coefficients $A_0, \ldots, A_m;\ B_0, \ldots, B_n; \ldots$.

Les covariants d'ordre zéro se nomment *invariants*.

7. Nous avons vu que, quelle que soit la fonction F, elle a une expression symbolique de la forme

$$\Phi(a'_1, a'_2;\ a''_1, a''_2; \ldots;\ b'_1, b'_2; \ldots;\ x_1, x_2),$$

homogène et du degré m par rapport à chacun des α couples de paramètres a'_1, a'_2; a''_1, a''_2;...; homogène et du degré n par rapport à chacun des β couples b'_1, b'_2;...; et enfin homogène et d'ordre ξ par rapport aux variables x_1, x_2. Mais, si F est un covariant, son expression symbolique pourra être mise sous une forme remarquable, ainsi qu'il résulte du théorème suivant :

Théorème. — *Pour que la fonction* F *soit un covariant, il faut et il suffit que son expression symbolique puisse être mise sous la forme*

$$\Phi = k_1 \Pi_1 + k_2 \Pi_2 + \ldots + k_i \Pi_i + \ldots, \tag{16}$$

où k_1, k_2,... *sont des constantes, et* Π_1, Π_2,... *des produits de la forme*

$$\left\{\begin{aligned} \Pi_i = {} & (a'_1 a''_2 - a'_2 a''_1)^{\lambda_i} (a'_1 b'_2 - a'_2 b'_1)^{\mu_i} (a''_1 b'_2 - a''_2 b'_1)^{\nu_i} \ldots \\ & (a'_1 x_1 + a'_2 x_2)^{\pi_i} (a''_1 x_1 + a''_2 x_2)^{\rho_i} (b'_1 x_1 + b'_2 x_2)^{\sigma_i} \ldots \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Nous renverrons, pour la démonstration de ce théorème fondamental, à l'ouvrage classique de M. Clebsch (*Théorie des formes algébriques binaires*, Chap. Ier).

8. Nous nous bornerons à remarquer que les exposants λ_i, μ_i, ν_i,..., π_i, ρ_i, σ_i,... (lesquels sont des entiers non négatifs) ne sont pas complétement arbitraires.

En effet, Φ étant une fonction linéaire de Π_1, Π_2,..., Π_i,..., chacun de ces produits devra être, ainsi que la fonction Φ elle-même, homogène et du degré m par rapport à a'_1, a'_2; homogène et du degré m par rapport à a''_1, a''_2;...; homogène et du degré n par rapport à b'_1, b'_2;...; enfin, homogène et d'ordre ξ par rapport à x_1, x_2.

Mais le degré de Π_i par rapport à a'_1, a'_2 est évidemment égal à $\lambda_i + \mu_i + \ldots + \pi_i$, nombre des facteurs de Π_i qui contiennent ces lettres. On aura donc

$$\lambda_i + \mu_i + \ldots + \pi_i = m. \tag{18}$$

De même, le nombre $\lambda_i + \nu_i + \ldots + \rho_i$ des facteurs qui contiennent a''_1, a''_2 devra être égal à m, etc.; le nombre $\mu_i + \nu_i + \ldots + \sigma_i$ des facteurs qui contiennent b'_1, b'_2 devra être égal à n, etc.; enfin, le nombre $\pi_i + \rho_i + \sigma_i + \ldots$ des facteurs qui contiennent x_1, x_2 sera égal à ξ.

9. On pose ordinairement, pour abréger,

$$a'_1 a''_2 - a'_2 a''_1 = (a'a''), \quad (a'_1 b'_2 - a'_2 b'_1) = (a'b'), \quad \ldots; \tag{19}$$

$$a'_1 x_1 + a'_2 x_2 = a'_x, \quad a''_1 x_1 + a''_2 x_2 = a''_x, \quad \ldots. \tag{20}$$

Π_i prend alors la forme suivante :

$$\Pi_i = (a'a'')^{\lambda_i} (a'b')^{\mu_i} (a''b')^{\nu_i} \ldots a'^{\pi_i}_x a''^{\rho_i}_x b'^{\sigma_i}_x \ldots. \tag{21}$$

Dans cette notation abrégée, la lettre a' tient lieu, à elle seule, des deux paramètres a'_1, a'_2, dont les puissances a'^m_1, $a'^{m-1}_1 a'_2, \ldots$ doivent être remplacées par les coefficients de la fonction A pour passer de l'expression symbolique Φ au covariant F qu'elle représente. On exprime brièvement cette liaison entre la lettre a' et la fonction A en disant que a' est un *symbole de la fonction* A; a'' sera un autre symbole de cette même fonction; b' sera de même un symbole de la fonction B, etc....

Le nombre des facteurs du produit Π_i où figure le symbole a' est égal à $\lambda_i + \mu_i + \ldots + \pi_i = m$. De même pour les autres symboles $a'', \ldots$ de la fonction A. Ceux de la fonction B figureront chacun dans n facteurs, etc.

10. La théorie serait dès à présent achevée, si l'expression symbolique d'un covariant donné ne pouvait être mise que d'une seule manière sous la forme $k_1\Pi_1 + \ldots + k_i\Pi_i + \ldots$. Mais il est aisé de voir qu'il n'en est pas ainsi.

Soient, en effet, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 des quantités quelconques, et posons, suivant nos conventions,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = a_x, \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 = b_x, \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 = c_x. \tag{22}$$

Éliminant x_1, x_2 entre ces équations, il viendra

$$(ab)c_x + (bc)a_x + (ca)b_x = 0. \tag{23}$$

Si, dans cette identité, on remplace x_1, x_2 par d_2 et $-d_1$, d_1 et d_2 étant des quantités quelconques, on aura cette autre relation

$$(ab)(cd) + (bc)(ad) + (ca)(bd) = 0; \tag{24}$$

donc tout produit symbolique Π_t qui contiendra en facteur $(ab)c_x$ ou $(ab)(cd)$ pourra être transformé en une somme de deux produits analogues en remplaçant $(ab)c_x$ ou $(ab)(cd)$ par leurs valeurs tirées des équations (23) et (24).

11. Une autre source de transformation est la suivante. Soit donné un covariant, dans l'expression symbolique duquel figurent plusieurs symboles a', a'',... d'une même fonction A; on pourra permuter entre eux ces symboles sans altérer le covariant, car la permutation de a' avec a'', par exemple, n'aura d'autre effet que de changer les produits $a_1'^m$, $a_1'^{m-1}a_2'$,... en $a_1''^m$, $a_1''^{m-1}a_2''$,..., et réciproquement, dans l'expression symbolique développée. Mais, pour calculer le covariant, il faut remplacer ces deux sortes de produits par les mêmes quantités A_0, A_1,...; donc le résultat final sera le même.

12. Il importe d'ailleurs, dans l'analyse des diverses formes que l'on peut donner à l'expression symbolique d'un covariant, de ne pas user indifféremment des deux modes de transformation ci-dessus, mais de distinguer avec soin les effets de chacun d'eux, et de ne recourir au second procédé qu'après avoir tiré du premier toutes ses conséquences.

Nous agirons donc, dans ce qui va suivre, lorsque nous voudrons transformer des covariants, comme si les symboles a', a'',..., b',... qui figurent dans leur expression appartenaient tous à des fonctions distinctes A′, A″,..., B′,..., réservant pour une autre occasion l'examen des réductions qui se produisent lorsque plusieurs de ces fonctions, telles que A′, A″, .., deviennent identiques.

§ III. — Symboles des covariants.

13. Soient A, B,..., L,... des fonctions entières et homogènes de x_1, x_2, de degrés m, n,..., p,...; et soit

$$F(A_0, A_1, ..; B_0, B_1,...; L_0, L_1,.. ; ...; x_1, x_2)$$

un de leurs covariants.

Particularisons les fonctions L,..., de telle sorte qu'elles deviennent elles-mêmes des covariants des fonctions A, B,.... Si nous remplaçons, dans F, les coefficients L_0, L_1,...; ... par leurs valeurs, nous obtiendrons une nouvelle fonction

$$F'(A_0, A_1,...; B_0, B_1,...; ...; x_1, x_2).$$

Théorème. — F′ *sera un covariant des fonctions* A, B,....

14. *Démonstration.* — La fonction F étant un covariant de A, B,..., L,..., son expression symbolique Φ sera de la forme

$$\Phi = k_1 \Pi_1 + k_2 \Pi_2 + \dots,$$

k_1, k_2,... étant des constantes, et Π_1, Π_2,... des produits de déterminants et de facteurs linéaires, formés avec les symboles a', a'',...; b', b'',...; l', l'',...; ... des fonctions A, B,..., L,... (nº **7**).

De même, les fonctions L,... étant des covariants de A, B,..., leurs expressions symboliques Λ,... seront de la forme

$$\Lambda = c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2 + \dots, \dots,$$

Ψ_1, Ψ_2,... étant des produits de déterminants et de facteurs linéaires formés avec les symboles des fonctions A, B,....

Cela posé, en appliquant la méthode indiquée au nº **5**, nous pourrons éliminer successivement les symboles l', l'',... des fonctions L,... qui figurent dans Φ, et nous obtiendrons ainsi une suite d'expressions Φ_1, Φ_2,..., dont la dernière, Φ', ne contenant plus que les symboles de A, B,..., sera l'expression symbolique de F′.

Or, Φ étant, par hypothèse, une fonction linéaire de produits symboliques, nous verrons qu'il en sera de même de Φ_1. Le même raisonnement étant appliqué à Φ_1, on en tirera la même conséquence pour Φ_2, etc.; donc enfin Φ', étant une fonction linéaire de produits symboliques, sera un covariant (n° 7).

D'après la méthode du n° 5, il faudra, pour obtenir Φ_1, développer l'expression de Φ, puis y remplacer $l_1'^p, l_1'^{p-1}l_2', \ldots$ par les coefficients de l'expression symbolique Λ (en ayant soin d'employer, pour les symboles qui figurent dans Λ, des lettres a, a',...; b,...; ... différentes de $a', a'', \ldots; b', b'', \ldots; \ldots$). Nous désignerons par Ω cette opération.

On aura ainsi

$$\Phi_1 = k_1\Omega(\Pi_1) + k_2\Omega(\Pi_2) + \ldots. \tag{25}$$

Pour montrer que Φ_1 est une fonction linéaire de produits symboliques, il suffira de prouver que $\Omega(\Pi_1), \Omega(\Pi_2), \ldots$ le sont.

15. Or mettons en évidence, dans l'expression de Π_1, les facteurs qui contiennent le symbole l', et désignons par M le produit des autres facteurs; Π_1 prendra une forme telle que la suivante :

$$\Pi_1 = \mathrm{M}(l'a')^\alpha (l'a'')^\beta \ldots l_x'^{p-\alpha-\beta-\ldots}. \tag{26}$$

Cette fonction peut se déduire de la fonction

$$l_x'^p$$

en la soumettant à l'opération

$$\frac{1}{p(p-1)\ldots(p-\alpha-\beta-\ldots+1)}\left(a_2'\frac{\partial}{\partial x_1} - a_1'\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^\alpha \left(a_2''\frac{\partial}{\partial x_1} - a_1''\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^\beta \ldots \tag{27}$$

et multipliant d'autre part par M. Désignons par O cette double opération, il viendra

$$\Pi_1 = \mathrm{O}(l_x'^p), \quad \Omega(\Pi_1) = \Omega[\mathrm{O}(l_x'^p)] = \mathrm{O}[\Omega(l_x'^p)], \tag{28}$$

car les opérations O et Ω sont évidemment échangeables.

Mais $\Omega(l_x'^p)$ est le résultat obtenu en substituant, dans $l_x'^p$, au lieu de $l_1'^p, l_1'^{p-1}l_2', \ldots$, les coefficients de Λ; c'est évidemment la fonction Λ

elle-même. On aura donc

$$\Omega(\Pi_1) = O(\Lambda). \tag{29}$$

16. Cela posé, Λ est une fonction linéaire de produits symboliques, et, si nous montrons que l'opération

$$\omega = a'_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - a'_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \tag{30}$$

appliquée à une semblable fonction, reproduit une fonction de même nature, notre démonstration sera achevée; car l'opération O se composant d'une série d'opérations successives analogues à ω, suivies de multiplication par un produit symbolique M, la fonction $O(\Lambda) = \Omega(\Pi_1)$ sera une fonction linéaire de produits symboliques.

17. Or on a immédiatement, quels que soient les produits symboliques Ψ_1, Ψ_2,... et les constantes c_1, c_2,...,

$$\omega(c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 + \ldots) = c_1\omega(\Psi_1) + c_2\omega(\Psi_2) + \ldots. \tag{31}$$

D'ailleurs, Ψ_1 sera de la forme

$$\Psi_1 = \mathrm{P} r_x s_x \ldots = \mathrm{P}(r_1 x_1 + r_2 x_2)(s_1 x_1 + s_2 x_2)\ldots, \tag{32}$$

P étant un produit de déterminants, et r_x, s_x,... des facteurs linéaires (égaux ou inégaux); et l'on aura

$$\left\{\begin{aligned} \omega(\Psi_1) &= a'_2(r_1 \mathrm{P} s_x \ldots + \ldots + s_1 \mathrm{P} r_x \ldots + \ldots) \\ &\quad - a'_1(r_2 \mathrm{P} s_x \ldots + \ldots + s_2 \mathrm{P} r_x \ldots + \ldots) \\ &= (ra')\mathrm{P} s_x \ldots + \ldots + (sa')\mathrm{P} r_x \ldots + \ldots; \end{aligned}\right. \tag{33}$$

donc $\omega(\Psi_1)$ est une somme de produits symboliques. Il en sera de même de $\omega(\Psi_2)$,...; donc $\omega(c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 + \ldots)$ est bien une fonction linéaire de produits symboliques, comme nous nous proposions de l'établir.

§ IV. — Composition des covariants.

18. Soient A, B,... des formes algébriques quelconques, F et G deux de leurs covariants, ayant respectivement pour ordres p et q. L'expression symbolique

$$(fg)^\mu f_x^{p-\mu} g_x^{q-\mu} \tag{34}$$

(où f et g sont les symboles des fonctions F et G) représentera, d'après ce qu'on vient de voir, un nouveau covariant. Nous l'appellerons le $\mu^{\text{ième}}$ *composé de* F *avec* G ($\mu^{\text{ième}}$ *Uberschiebung* de M. Gordan), et nous le désignerons par la notation abrégée $[F, G]_\mu$.

Si $\mu = 0$, l'expression (34) se réduit au produit des deux fonctions f_x^p, g_x^q, qui sont respectivement les représentations symboliques de F et de G. On aura donc simplement

$$[F, G]_0 = F.G.$$

Soit, au contraire, $\mu > 0$, et proposons-nous de calculer $[F, G]_\mu$.

19. Les expressions symboliques de F et de G seront de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = k_1\Phi_1 + k_2\Phi_2 + \dots, \\ \Gamma = c_1\Gamma_1 + c_2\Gamma_2 + \dots, \end{array} \right. \tag{35}$$

$\Phi_1, \Phi_2, \dots$ et $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ étant des produits symboliques. On aura d'ailleurs évidemment

$$F = k_1 F_1 + k_2 F_2 + \dots,$$
$$G = c_1 G_1 + c_2 G_2 + \dots,$$

en désignant par $F_1, F_2, \dots, G_1, G_2, \dots$ les covariants qui ont pour expressions symboliques $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots$.

Or l'expression (34) ne contenant qu'un seul symbole de chacun des covariants F et G, $[F, G]_\mu$ est linéaire par rapport aux coefficients de chacun d'eux. Il en résulte immédiatement l'égalité

$$[\mathrm{F}, \mathrm{G}]_\mu = \sum_{i,j} k_i c_j [\mathrm{F}_i, \mathrm{G}_j]_\mu, \tag{36}$$

laquelle ramène le calcul des covariants composés au cas où les covariants dont ils dérivent ont pour expression symbolique de simples produits symboliques.

20. Admettons donc que F et G soient représentés par des produits symboliques tels que

$$\begin{cases} \Phi = \mathrm{L}\, r_x s_x t_x \ldots, \\ \Gamma = \Lambda \rho_x \sigma_x \tau_x \ldots, \end{cases} \tag{37}$$

L et Λ étant des produits de déterminants, $r_x s_x t_x \ldots$ et $\rho_x \sigma_x \tau_x \ldots$ des produits de facteurs linéaires (égaux ou inégaux); et proposons-nous de calculer l'expression symbolique de $[\mathrm{F}, \mathrm{G}]_\mu$ par la méthode du § III.

Nous éliminerons, en premier lieu, le symbole f, en exécutant sur la fonction Φ l'opération

$$\frac{1}{p(p-1)\ldots(p-\mu+1)}\left(g_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - g_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^\mu$$

et multipliant ensuite par $g_x^{q-\mu}$. Le résultat sera

$$\frac{1.2\ldots\mu}{p(p-1)\ldots(p-\mu+1)} g_x^{q-\mu} \mathrm{L}\ \Sigma \mathrm{T}, \tag{38}$$

T étant ce que devient le produit $r_x s_x t_x \ldots$ lorsqu'on y remplace μ facteurs arbitrairement choisis, tels que $r_x, s_x, \ldots$, par les déterminants (rg), $(sg), \ldots$, et le signe de sommation Σ s'étendant aux $\frac{p(p-1)\ldots(p-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}$ diverses manières de choisir les μ facteurs en question.

Il reste à éliminer le symbole g de la nouvelle expression (38) déjà débarrassée du symbole f. Pour cela, considérons en particulier un de ses termes, tel que

$$\frac{1.2\ldots\mu}{p(p-1)\ldots(p-\mu+1)} g_x^{q-\mu} \mathrm{L}.(rg)(sg)\ldots t_x \ldots. \tag{39}$$

On obtiendra sa nouvelle expression en effectuant sur la fonction

$$(40)\qquad \Gamma = \Lambda \rho_x \sigma_x \tau_x \ldots$$

l'opération

$$(41)\qquad \frac{1}{q(q-1)\ldots(q-\mu+1)}\left(r_1\frac{\partial}{\partial x_2} - r_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\left(s_1\frac{\partial}{\partial x_2} - s_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\ldots$$

et multipliant ensuite par $\frac{1.2\ldots\mu}{p(p-1)\ldots(p-\mu+1)} L t_x \ldots$.

Le résultat de cette opération sera

$$(42)\qquad \frac{1.2\ldots\mu}{p(p-1)\ldots(p-\mu+1)}\;\frac{1}{q(q-1)\ldots(q-\mu+1)} L t_x \ldots \Lambda \Sigma U,$$

U étant ce que devient le produit $\rho_x \sigma_x \tau_x$ .. lorsqu'on y remplace μ facteurs choisis arbitrairement, tels que ρ_x, σ_x,..., par $(r\rho)$, $(s\sigma)$,..., et la sommation Σ s'étendant aux $q(q-1)\ldots(q-\mu+1)$ manières de choisir les facteurs ainsi altérés et de les associer aux symboles r, s,... pour former des facteurs déterminants.

En traitant de la même manière tous les termes de (38) on obtiendra, pour $[F, G]_\mu$, l'expression symbolique suivante

$$(43)\qquad \frac{1.2\ldots\mu}{p(p-1)\ldots(p-\mu+1)}\;\frac{1}{q(q-1)\ldots(q-\mu+1)}\Sigma V,$$

V étant le résultat obtenu en remplaçant, dans le produit

$$(44)\qquad L r_x s_x t_x \ldots \Lambda \rho_x \sigma_x \tau_x \ldots,$$

μ couples de facteurs linéaires, tels que $r_x \rho_x$, $s_x \sigma_x$,..., par les déterminants $(r\rho)$, $(s\sigma)$,..., et la sommation s'étendant aux

$$\frac{1.2\ldots\mu}{p(p-1)\ldots(p-\mu+1)}\;\frac{1}{q(q-1)\ldots(q-\mu+1)}$$

manières de choisir les couples de facteurs ainsi transformés en déterminants.

21. Les divers termes V_1, V_2,..., dont la somme constitue ΣV, pourront s'appeler les *termes du composé* $[F, G]_\mu$. Ces expressions représentent autant de covariants, et leur moyenne donne l'expression symbolique de $[F, G]_\mu$.

Nous représenterons d'ailleurs cette expression symbolique par la même notation $[F, G]_\mu$ que le covariant auquel elle correspond. Aucune confusion ne sera plus à craindre, car, les principes du calcul symbolique étant maintenant suffisamment établis, nous n'aurons plus, dans la suite de ce Mémoire, à considérer les covariants en eux-mêmes, mais seulement leurs expressions symboliques.

Il devient donc inutile de conserver deux notations distinctes pour ces deux sortes de fonctions.

22. Les termes V_1, V_2,... se déduisent tous de l'un quelconque d'entre eux, tel que

$$V_1 = LA(r\rho)(s\sigma \ldots t_x \ldots \tau_x \ldots,$$

en permutant ensemble les lettres $r, s, t,\ldots$ d'une part, et $\rho, \sigma, \tau,\ldots$ d'autre part.

Deux termes seront dits *contigus* s'ils ne diffèrent que par l'inversion de deux lettres.

Une substitution quelconque pouvant s'obtenir par une suite d'inversions, on pourra passer de V_1 à un autre terme quelconque V_k par une série de termes intermédiaires $V_2, V_3,\ldots$, telle que chacun des termes de la suite $V_1, V_2, V_3 \ldots, V_k$ soit contigu à celui qui le précède.

23. Chacun des termes $V_1, V_2,\ldots$ est un produit symbolique divisible par LA, et contient en outre, parmi ses facteurs, μ déterminants dans lesquels les lettres $r, s, t,\ldots$ sont associées aux lettres $\rho, \sigma, \tau,\ldots$. Mais *la différence de deux de ces termes s'exprime par une somme de produits symboliques, divisibles par* LA *et dans chacun desquels le nombre de ces déterminants mixtes est* $< \mu$, *chacun de ces produits étant d'ailleurs du même ordre par rapport aux variables que les termes considérés.*

24. En effet, supposons d'abord que les deux termes dont on veut évaluer la différence soient deux termes contigus V_1 et V_2. Soit

$$V_1 = L\Lambda(r\rho)(s\sigma)\ldots t_x\ldots \tau_x\ldots. \tag{45}$$

V_2 pourra différer de V_1 de deux manières différentes : 1° par l'échange de deux lettres, telles que r et s, contenues toutes deux dans les déterminants mixtes $(r\rho)$, $(s\sigma)$,...; 2° par l'échange de deux lettres r et t, dont une seule soit contenue dans ces déterminants.

On aura, dans le premier cas,

$$V_1 - V_2 = L\Lambda\ldots t_x\ldots\tau_x\ldots[(r\rho)(s\sigma) - (r\sigma)(s\rho)]. \tag{46}$$

Mais l'identité (24) donne

$$(r\rho)(s\sigma) + (\rho s)(r\sigma) + (sr)(\rho\sigma) = 0, \tag{47}$$

d'où

$$(r\rho)(s\sigma) - (s\rho)(r\sigma) = (rs)(\rho\sigma) \tag{48}$$

et, par suite,

$$V_1 - V_2 = L\Lambda\ldots t_x\ldots\tau_x\ldots(rs)(\rho\sigma), \tag{49}$$

expression qui a bien la forme demandée.

On aura, dans le second cas,

$$V_1 - V_2 = L\Lambda(s\sigma)\ldots\tau_x\ldots[(r\rho)t_x - (t\rho)r_x]. \tag{50}$$

Mais l'identité (23) donne

$$(r\rho)t_x + (\rho t)r_x + (tr)\rho_x = 0; \tag{51}$$

d'où

$$(r\rho)t_x - (t\rho)r_x = (rt)\rho_x \tag{52}$$

et, par suite,

$$V_1 - V_2 = L\Lambda(s\sigma)\ldots\tau_x\rho_x\ldots(rt), \tag{53}$$

expression qui a encore la forme voulue.

25. Soient maintenant V_1 et V_k deux termes quelconques; on aura évidemment

$$(54) \qquad V_1 - V_k = (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + \ldots + (V_{k-1} - V_k),$$

et la proposition, étant démontrée pour $V_1 - V_2$, $V_2 - V_3$,... différences de termes contigus, sera vraie pour leur somme $V_1 - V_k$.

26. *La différence entre* $[F, G]_\mu$ *et l'un de ses termes* V_1 *s'exprime par une fonction linéaire de produits symboliques du même ordre que* $[F, G]_\mu$ *par rapport aux variables, divisibles par* $L\Lambda$, *et dans chacun desquels le nombre des déterminants mixtes est* $< \mu$.

En effet, $[F, G]_\mu$ étant la moyenne des termes V_1, V_2,..., on aura

$$(55) \quad \begin{cases} [F, G]_\mu - V_1 = \dfrac{1.2\ldots\mu}{p(p-1)\ldots(p-\mu+1)} \dfrac{1}{q(q-1)\ldots(q-\mu+1)} \\ \qquad\qquad \times [(V_2 - V_1) + (V_3 - V_1) + \ldots], \end{cases}$$

et $V_2 - V_1$, $V_3 - V_1$,... ayant la forme indiquée, il en sera de même de $[F, G]_\mu - V_1$.

27. On peut déduire des développements qui précèdent des conséquences importantes.

Considérons, en effet, un système quelconque de formes algébriques; soient Φ un produit symbolique, représentant un de leurs covariants; a, b, a, b,... les symboles qui figurent dans l'expression de Φ. Partageons, d'une manière arbitraire, les symboles en deux catégories, telles que a, b,... et a, b,.... On aura

$$(56) \qquad \Phi = \mathrm{LM}\mathcal{L}\mathfrak{M}\mathrm{R},$$

L désignant un produit de déterminants binaires, tels que (ab), formés avec les symboles a, b,... de la première catégorie; $\mathcal{L}$ un produit analogue de déterminants, tels que (ab), formés avec les symboles de la seconde catégorie; M un produit de facteurs linéaires a_x, b_x,...; $\mathfrak{M}$ un produit de facteurs linéaires a_x, b_x,...; enfin, R un produit de déterminants, tels que $(a\mathrm{a})$, où les symboles des deux catégories soient mélangés.

Soit μ le nombre de ces déterminants mixtes dont le produit forme R. Si l'on remplaçait chacun de ces facteurs, tel que $(a\mathfrak{a})$, par le produit de deux facteurs linéaires a_x, $\mathfrak{a}_x$, R prendrait la forme $S\mathfrak{S}$, où S est un produit de facteurs linéaires de première catégorie, et $\mathfrak{S}$ un produit de facteurs linéaires de seconde catégorie.

Cela posé, les expressions

$$(57) \qquad F = LMS, \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{S}$$

représentent deux covariants, respectivement formés avec les symboles $a, b, \ldots$ et $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$; Φ sera, d'après ce qui précède, l'un des termes de leur $\mu^{ième}$ composé $[F, \mathfrak{F}]_\mu$; et l'on aura le théorème suivant :

Théorème — *Le covariant Φ peut être mis sous la forme*

$$(58) \qquad \Phi = [F, \mathfrak{F}]_\mu + \sum_{\alpha,\beta,\gamma} k_{\alpha\beta\gamma}[F_\alpha, \mathfrak{F}_\beta]_\gamma,$$

où les quantités $k_{\alpha\beta\gamma}$ représentent des constantes, et où la sommation s'étend :

1° *Aux divers produits symboliques F_α divisibles par L qui peuvent être formés avec les symboles $a, b, \ldots$;*

2° *Aux divers produits symboliques $\mathfrak{F}_\beta$ divisibles par $\mathfrak{L}$ qui peuvent être formés avec les symboles $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$;*

3° *Aux valeurs $0, 1, \ldots, \mu - 1$ de γ. (La valeur de γ à assigner à chaque terme étant d'ailleurs déterminée par la condition que l'ordre de ce terme, par rapport aux variables, soit égal à l'ordre de Φ.)*

28. Ce théorème est évident si $\mu = 0$, auquel cas Φ se réduit à $LM\mathfrak{L}\mathfrak{M} = F\mathfrak{F} = [F, \mathfrak{F}]_0$.

Nous allons montrer qu'il est vrai pour une valeur quelconque de μ, s'il l'est pour les précédentes.

On a, en effet, d'après le n° **26**,

$$(59) \qquad [F, \mathfrak{F}]_\mu - \Phi = k_1\Phi_1 + k_2\Phi_2 + \ldots,$$

$k_1, k_2, \ldots$ étant des constantes, et $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ des produits symboliques, du même ordre que Φ par rapport aux variables, divisibles par $L\mathfrak{L}$, et contenant moins de μ déterminants mixtes.

Le théorème est applicable, par hypothèse, à ces produits Φ_1, $\Phi_2 \ldots$ Substituant les valeurs qu'il fournit dans l'équation (59), on en déduira l'expression cherchée de Φ.

29. Soit Φ' un autre terme quelconque du covariant $[F, G]_\mu$. La différence $\Phi' - \Phi$ étant de la forme $k'_1 \Phi_1 + k'_2 \Phi_2 + \ldots$ (25), on trouvera de même une relation de la forme

$$\Phi = \Phi' + \sum_{\alpha\beta\gamma} l_{\alpha\beta\gamma} [F_\alpha, \mathfrak{F}_\beta]_\gamma, \tag{60}$$

les quantités $l_{\alpha\beta\gamma}$ étant des constantes.

30. Le théorème qui précède permet d'exprimer un terme quelconque d'un covariant composé d'ordre μ en fonction de ce covariant lui-même et de composés d'ordre inférieur. On peut réciproquement exprimer un composé d'ordre μ, tel que $[F, \mathfrak{F}]_\mu$, en fonction de l'un quelconque de ses termes Φ, et de termes arbitrairement choisis dans les composés d'ordre inférieur $[F_\alpha, \mathfrak{F}_\beta]_\gamma, \ldots$ On a, en effet, ce théorème :

Théorème. — *Soit $[F_\alpha, \mathfrak{F}_\beta]'_\gamma$ un terme arbitrairement choisi parmi ceux du composé $[F_\alpha, \mathfrak{F}_\beta]_\gamma$; on aura une égalité de la forme*

$$[F, \mathfrak{F}]_\mu = \Phi + \sum_{\alpha\beta\gamma} m_{\alpha\beta\gamma} [F_\alpha, \mathfrak{F}_\beta]'_\gamma, \tag{61}$$

les quantités $m_{\alpha\beta\gamma}$ étant des constantes.

Si $\mu = 0$, on a $[F, \mathfrak{F}]_0 = \Phi$, et le théorème est évident.

Mais, s'il est vrai pour $0, 1, \ldots, \mu - 1$, il sera vrai pour μ. En effet, il sera vrai pour les fonctions $[F_\alpha, \mathfrak{F}_\beta]_\gamma$; en substituant les expressions de ces fonctions dans l'équation (58), on obtiendra, pour $[F, \mathfrak{F}]_\mu$, une expression de la forme voulue.

31. Enfin si, dans l'égalité (60), nous substituons, à chacun des composés $[F_\alpha, \mathfrak{F}_\beta]_\gamma$, son développement en fonction de l'un de ses termes, et de termes arbitraires pris dans les composés d'ordre moindre, nous obtiendrons évidemment une égalité de la forme

$$(62) \qquad \Phi = [F, \mathcal{F}]'_{\mu} + \sum_{\alpha\beta\gamma} n_{\alpha\beta\gamma} [F_{\alpha}, \mathcal{F}_{\beta}]'_{\gamma},$$

en écrivant $[F, \mathcal{F}]'_{\mu}$ au lieu de Φ', qui désigne la même chose.

32. Soit Φ un produit symbolique quelconque, dont nous répartirons arbitrairement les symboles en diverses catégories. On aura évidemment

$$\Phi = L_a L_b L_c \ldots \Lambda M,$$

L_a étant un produit de déterminants formés avec les symboles a, a',... de la première catégorie; L_b un produit de déterminants formés avec les symboles b, b',... de la seconde catégorie, etc.; Λ un produit de déterminants formés avec des symboles empruntés à deux catégories différentes; et M un produit de facteurs linéaires.

Nous désignerons respectivement par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ le nombre des déterminants qui forment les produits L_a, L_b, L_c,..., Λ.

33. Cela posé, on aura la proposition suivante :

Théorème. — *Φ pourra s'exprimer en fonction linéaire de covariants obtenus par la composition successive de produits symboliques respectivement formés avec les symboles de chaque catégorie, et respectivement divisibles par L_a, L_b,.... La somme des ordres des compositions successives à effectuer pour obtenir chacun de ces covariants ne pourra d'ailleurs surpasser λ.*

Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait trois catégories. On sait (**27**) que Φ peut s'exprimer en fonction linéaire des composés de produits symboliques F_a, formés avec a, a',..., et divisibles par L_a, avec des produits symboliques $\mathcal{F}$, formés avec $b, b', \ldots$; $c, c', \ldots$, et divisibles par $L_b L_c$; mais chacun de ces produits $\mathcal{F}$ pourra de même s'exprimer en fonction linéaire des composés de produits symboliques F_b, formés avec b, b',..., et divisibles par L_b, avec des produits symboliques F_c, formés avec c, c',..., et divisibles par L_c. Donc Φ se trouvera bien exprimé en fonction linéaire de covariants tels que

$$(63) \qquad [F_a, [F_b, F_c]_\mu]_\nu.$$

Reste à prouver que $\mu + \nu \overline{\overline{<}} \lambda$. Or, soient α', β', γ' le nombre des déterminants que F_a, F_b, F_c contiennent respectivement en facteurs. On aura évidemment $\alpha' \overline{\overline{>}} \alpha$, $\beta' \overline{\overline{>}} \beta$, $\gamma' \overline{\overline{>}} \gamma$, puisque F_a, F_b, F_c sont divisibles par L_a, L_b, L_c. Cela posé, le covariant (63), lorsqu'on y effectuera les compositions indiquées, se développera en une suite de termes, contenant chacun, en facteurs, $\alpha' + \beta' + \gamma' + \mu + \nu$ déterminants. Mais ces termes sont évidemment du même ordre, par rapport aux variables, que le covariant Φ, qui en est une fonction linéaire. Ils contiennent donc le même nombre de facteurs linéaires et le même nombre de facteurs déterminants. On aura donc

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \mu + \nu = \alpha + \beta + \gamma + \lambda, \quad \text{d'où} \quad \mu + \nu \overline{\overline{<}} \lambda.$$

§ V. — Covariants a trois symboles.

34. Nous nous occuperons, dans cette Section, des covariants tels que

$$(64) \qquad F = (ab)^\lambda (bc)^\mu (ca)^\nu a_x^{p-\lambda-\nu} b_x^{q-\lambda-\mu} c_x^{r-\mu-\nu},$$

formés avec les symboles de trois fonctions A, B, C, dont les ordres respectifs, p, q, r, seront supposés être au moins égaux à la somme $\lambda + \mu + \nu = n$.

L'identité

$$(65) \qquad (ab)c_x + (bc)a_x + (ca)b_x = 0$$

nous permettra d'éliminer immédiatement $(ca)^\nu$ de l'expression (64). En effet, $q - \lambda - \mu$ étant au moins égal à ν, F contiendra le facteur $[(ca)b_x]^\nu$, qu'on pourra remplacer par sa valeur

$$[-(ab)c_x - (bc)a_x]^\nu.$$

Développant ensuite cette puissance par la formule du binôme, on obtiendra l'expression de F en fonction linéaire des covariants plus simples représentés par la formule générale

$$(ab)^{\lambda+\nu-\pi}(bc)^{\mu+\pi} a_x^{p-\lambda-\nu+\pi} b_x^{q-\lambda-\mu-\nu} c_x^{r-\mu-\pi}. \quad (\pi = 0, 1, \ldots, \nu).$$

On voit, par là, que si, dans l'expression de F, on fait varier de toutes les manières possibles les exposants λ, μ, ν, de telle sorte que leur somme reste constante et égale à n, tous les covariants ainsi obtenus s'exprimeront linéairement en fonction des $n+1$ covariants que donne l'expression

$$(66) \qquad (ab)^{n-\rho}(bc)^{\rho} a_x^{p-n+\rho} b_x^{q-n} c_x^{r-\rho},$$

lorsque l'on y pose successivement $\rho = 0, 1, 2, \ldots, n$.

D'ailleurs, ces $n+1$ covariants sont évidemment irréductibles entre eux.

35. Pour simplifier l'écriture, nous conviendrons de sous-entendre partout les facteurs linéaires a_x, b_x, c_x; le covariant F prendra alors la forme plus simple

$$(67) \qquad F = (ab)^{\lambda}(bc)^{\mu}(ca)^{\nu};$$

l'identité (65) deviendra

$$(68) \qquad (ab) + (bc) + (ca) = 0;$$

enfin le covariant (66) deviendra

$$(69) \qquad (ab)^{n-\rho}(bc)^{\rho},$$

et, pour abréger encore davantage, nous le représenterons par

$$(70) \qquad C_{abc}^{\rho}.$$

Nous pourrons donc énoncer la proposition suivante :

Les divers covariants F, *fournis par l'expression* $(ab)^{\lambda}(bc)^{\mu}(ca)^{\nu}$, *où* $\lambda+\mu+\nu = n$, *s'expriment linéairement en fonction des* $n+1$ *covariants* C_{abc}^{ρ}, *où* $\rho = 0, 1, 2, \ldots, n$.

36. On voit, d'une manière analogue, que les covariants F pourront s'exprimer linéairement en fonction des $n+1$ covariants

$$C^{\rho}_{bca} = (bc)^{n-\rho}(ca)^{\rho}, \quad \text{où} \quad \rho = 0, 1, \ldots, n, \tag{71}$$

ou encore en fonction des $n+1$ covariants

$$C^{\rho}_{cab} = (ca)^{n-\rho}(ab)^{\rho}, \quad \text{où} \quad \rho = 0, 1, \ldots, n. \tag{72}$$

37. Cela posé, nous allons établir le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les divers covariants* F *pourront s'exprimer linéairement en fonction des covariants* C^{ρ}_{abc}, C^{ρ}_{bca}, C^{ρ}_{cab}, *où* ρ *est un entier qui ne dépasse pas* $\frac{n}{3}$.

Si n est de la forme $3k+2$, *ces derniers covariants seront indépendants les uns des autres.*

Si n est de la forme $3k+1$, *ils seront liés par une relation qui permettra d'exprimer la somme* $C^{k}_{abc} + C^{k}_{bca} + C^{k}_{cab}$ *en fonction linéaire de ceux des covariants* C, *où* $\rho < k$.

Si n est de la forme $3k$, *il existera deux relations, qui permettront d'exprimer deux des covariants* C^{k}_{abc}, C^{k}_{bca}, C^{k}_{cab} *en fonction du troisième, et de ceux des covariants* C, *où* $\rho < k$.

38. Pour démontrer ce théorème, nous allons établir, au moyen de l'identité (68), un système d'équations linéaires entre les $3k+3$ covariants C^{ρ}_{abc}, C^{ρ}_{bca}, C^{ρ}_{cab}.

Soit d'abord ρ un entier quelconque non supérieur à $\frac{n}{3}$. On aura identiquement

$$\left\{\begin{aligned}(-1)^{n-\rho}C^{\rho}_{cab} &= (-1)^{n-\rho}(ca)^{n-\rho}(ab)^{\rho} = [(ab)+(bc)]^{n-\rho}(ab)^{\rho}\\ &= (ab)^{n} + \frac{n-\rho}{1}(ab)^{n-1}(bc) + \ldots + (ab)^{\rho}(bc)^{n-\rho}\\ &= C^{0}_{abc} + \frac{n-\rho}{1}C^{1}_{abc} + \ldots + \frac{(n-\rho)\ldots(n-\rho-i+1)}{1.2\ldots i}C^{i}_{abc} + \ldots\end{aligned}\right. \tag{73}$$

En faisant varier ρ, on obtiendra $k+1$ équations, k étant le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{3}$. Elles permettront d'exprimer linéairement $k+1$ quelconques des covariants $C^0_{abc},\ldots, C^n_{abc}$, tels que C^i_{abc}, $C^{i'}_{abc}$, $C^{i''}_{abc},\ldots$, en fonction linéaire des autres et des quantités C^ρ_{cab} (où $\rho = 0, 1, 2,\ldots, k$), pourvu toutefois que le déterminant des coefficients qui multiplient ces $k+1$ covariants dans les équations (73) ne soit pas nul. Or il est aisé de voir qu'il ne l'est pas.

39. En effet, la $\rho+1^{ième}$ ligne de ce déterminant Δ est formée des termes

$$\frac{(n-\rho)\ldots(n-\rho-i+1)}{1.2\ldots i},\quad \frac{(n-\rho)\ldots(n-\rho-i'+1)}{1.2\ldots i'},\quad \frac{(n-\rho)\ldots(n-\rho-i''+1)}{1.2\,.\,i''},\quad \ldots,$$

lesquels contiennent le facteur commun $(n-\rho)\ldots(n-\rho-i+1)$, si nous supposons $i, i', i'',\ldots$ rangés par ordre de grandeurs croissantes. D'autre part, les diverses colonnes du déterminant Δ contiennent respectivement les facteurs communs $\frac{1}{1.2\ldots i}$, $\frac{1}{1.2\ldots i'}$, ... On aura donc

$$\Delta = \frac{\prod_{\rho=0}^{\rho=k}(n-\rho)\ldots(n-\rho-i+1)}{1.2\ldots i.1.2\ldots i'.1.2\ldots i''\ldots}\,\Delta', \tag{74}$$

Δ' étant un nouveau déterminant, dont la $\rho+1^{ième}$ ligne sera

$$1,\quad (n-\rho-i)\ldots(n-\rho-i'+1),\quad (n-\rho-i)\ldots(n-\rho-i''+1),\quad \ldots.$$

Cela posé, on ne changera pas Δ', en y retranchant chaque ligne de la précédente; ce changement laissera la dernière ligne seule invariable, et changera en général la $\rho+1^{ième}$ en

$$0,\ (i'-i)(n-\rho-i-1)\ldots(n-\rho-i'+1),\ (i''-i)(n-\rho-i-1)\ldots(n-\rho-i''+1),\ \ldots.$$

Le déterminant Δ' ainsi transformé, ayant tous ses termes de la première colonne égaux à zéro, sauf le dernier, qui est égal à 1, pourra se simplifier par la suppression de la dernière ligne et de la dernière colonne. On obtiendra ainsi le déterminant

$$\begin{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ (i'-i)(n-\rho-i-1)\ldots(n-\rho-i'+1) & (i''-i)(n-\rho-i-1)\ldots(n-\rho-i''+1) & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

où les diverses lignes s'obtiendront en posant $\rho = 0, 1, 2, \ldots, k-1$.

Mettant en évidence les facteurs, tels que

$$(n-\rho-i-1)\ldots(n-\rho-i'+1),$$

communs aux divers termes de chaque ligne, et les facteurs $i'-i$, $i''-i, \ldots$, communs aux termes de chaque colonne, il viendra

$$(75)\quad \Delta' = (i'-i)(i''-i)\ldots\prod_{\rho=0}^{\rho=k-1}(n-\rho-i-1)\ldots(n-\rho-i'+1).\Delta'',$$

Δ'' étant un nouveau déterminant, de la forme

$$\Delta'' = \left|\begin{array}{llll} \cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 1 & (n-\rho-i')\ldots(n-\rho-i''+1) & (n-\rho-i')\ldots(n-\rho-i'''+1) & \cdots \\ \cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \end{array}\right|,$$

et dont les diverses lignes s'obtiendront en posant successivement $\rho = 0, 1, 2, \ldots, k-1$.

Ce déterminant Δ'', ayant une forme analogue à celle de Δ', pourra être traité de même, et l'on trouvera

$$(76)\quad \Delta'' = (i''-i')(i'''-i')\ldots\prod_{\rho=0}^{\rho=k-2}(n-\rho-i'-1)\ldots(n-\rho-i''+1).\Delta''',$$

Δ''' étant un déterminant analogue aux précédents, mais contenant une ligne de moins. Continuant ainsi, on finira par obtenir l'expression de Δ comme produit de facteurs qui seront tous différents de zéro, car les $k+1$ entiers $i, i', i'', \ldots$ étant différents, et au plus égaux à n, ne pourront respectivement surpasser $n-k$, $n-k+1$, $n-k+2$, etc.

40. Cela posé, n est égal à $3k$, à $3k+1$ ou à $3k+2$. Soit d'abord $n = 3k+2$.

D'après ce qui précède, on pourra exprimer les $k+1$ covariants

$$C_{abc}^{k+1}, \ldots, C_{abc}^{n-k-1}$$

en fonction linéaire des autres covariants

$$C_{cab}^{0}, \ldots, C_{cab}^{k}, C_{abc}^{0}, \ldots, C_{abc}^{k}, C_{abc}^{n-k}, \ldots, C_{abc}^{n},$$

qui figurent dans les équations (73).

Mais, d'autre part, $C_{abc}^{n-k}, \ldots, C_{abc}^{n}$ peuvent s'exprimer en fonction linéaire de $C_{bca}^{0}, \ldots, C_{bca}^{k}$. On a, en effet, d'une manière générale,

$$(77)\quad \left\{ \begin{aligned} C_{abc}^{n-k+\rho} &= (ab)^{k-\rho}(bc)^{n-k+\rho} = (-1)^{k-\rho}[(bc)+(ca)]^{k-\rho}(bc)^{n-k+\rho} \\ &= (-1)^{k-\rho}[C_{bca}^{k-\rho} + (k-\rho)C_{bca}^{k-\rho-1} + \ldots + C_{bca}^{0}]. \end{aligned} \right.$$

Donc les covariants $C_{abc}^{k+1}, \ldots, C_{abc}^{n}$ s'exprimeront linéairement en fonction de $C_{cab}^{0}, \ldots, C_{cab}^{k}, C_{abc}^{0}, \ldots, C_{abc}^{k}, C_{bca}^{0}, \ldots, C_{bca}^{k}$; et les covariants F, pouvant s'exprimer linéairement en $C_{abc}^{0}, \ldots, C_{abc}^{n}$, pourront s'exprimer linéairement en fonction de

$$(78)\qquad C_{abc}^{0}, \ldots, C_{abc}^{k}, C_{cab}^{0}, \ldots, C_{cab}^{k}, C_{bca}^{0}, \ldots, C_{bca}^{k}.$$

Ces derniers covariants sont d'ailleurs distincts, puisqu'on a vu que le nombre des covariants indépendants est égal à $n+1 = 3k+3$.

Le théorème est donc démontré.

41. Soit, en second lieu, $n = 3k+1$.

On pourra exprimer $C_{abc}^{k}, \ldots, C_{abc}^{n-k-1}$ en fonction de $C_{cab}^{0}, \ldots, C_{cab}^{k}$, $C_{abc}^{0}, \ldots, C_{abc}^{k-1}, C_{abc}^{n-k}, \ldots, C_{abc}^{n}$, et, par suite, en fonction de $C_{cab}^{0}, \ldots, C_{cab}^{k}$, $C_{abc}^{0}, \ldots, C_{abc}^{k-1}, C_{bca}^{0}, \ldots, C_{bca}^{k}$; et les covariants F, étant des fonctions linéaires de $C_{abc}^{0}, \ldots, C_{abc}^{n}$, pourront s'exprimer en fonction de

$$(79)\qquad C_{abc}^{0}, \ldots, C_{abc}^{k-1}, C_{cab}^{0}, \ldots, C_{cab}^{k}, C_{bca}^{0}, \ldots, C_{bca}^{k}.$$

Ces derniers covariants, en nombre $3k+2 = n+1$, seront évidemment distincts.

Soit, d'ailleurs,

$$(80)\qquad C_{abc}^{k} = \alpha C_{cab}^{k} + \beta C_{bca}^{k} + \ldots$$

l'expression de C_{abc}^{k} en fonction des $n+1$ covariants (79). On obtiendrait de nouvelles relations entre les $n+2$ covariants qui figurent dans cette expression en permutant circulairement les lettres a, b, c. Mais il ne peut exister entre eux qu'une seule relation, puisque $n+1$ d'entre eux sont distincts. Donc les nouvelles équations obtenues doivent se confondre avec l'équation (80); ce qui donnera, entre autres conditions, les suivantes : $\alpha = \beta = -1$. La relation (80) exprimera donc la somme $C_{abc}^k + C_{cab}^k + C_{bca}^k$ en fonction des autres covariants, ce qui complète la démonstration du théorème.

42. Soit enfin $n = 3k$.

On pourra exprimer $C_{abc}^k, \ldots, C_{abc}^{n-k}$ en fonction de $C_{cab}^0, \ldots, C_{cab}^k$ et de $C_{abc}^{n-k+1}, \ldots, C_{abc}^n$. Ces derniers covariants s'expriment eux-mêmes en fonction de $C_{bca}^0, \ldots, C_{bca}^{k-1}$. Par suite, les covariants F pourront s'exprimer en fonction des $n+1$ covariants

$$C_{abc}^0, \ldots, C_{abc}^{k-1}, C_{cab}^0, \ldots, C_{cab}^k, C_{bca}^0, \ldots, C_{bca}^{k-1}, \tag{81}$$

ce qui démontre le théorème.

Soient, d'ailleurs,

$$C_{abc}^k = \alpha C_{cab}^k + \ldots,$$
$$C_{bca}^k = \beta C_{cab}^k + \ldots$$

les expressions de C_{abc}^k, C_{bca}^k en fonction des covariants (81). En permutant circulairement a, b, c, on obtiendra de nouvelles équations

$$C_{bca}^k = \alpha C_{abc}^k + \ldots,$$
$$C_{cab}^k = \beta C_{abc}^k + \ldots.$$

Mais ces relations ne peuvent être distinctes des précédentes. Elles seront donc identiquement satisfaites si l'on y substitue les valeurs de C_{abc}^k, C_{bca}^k, tirées de ces dernières; on obtiendra ainsi, entre autres conditions, les suivantes :

$$\beta = \alpha^2, \quad \beta\alpha = 1, \quad \text{d'où} \quad \alpha = \beta = 1,$$

les quantités α, β étant réelles de leur nature.

§ VI. — Décomposition des covariants en trois parties.

43. Théorème. — *Soit* A, B, C, D,... *un système de fonctions entières en nombre quelconque, mais dont les ordres respectifs* $p, q, r, s, \ldots$ *soient tous au moins égaux à* $2l$.

Un covariant quelconque Φ *de ce système pourra se réduire à la forme*

$$\Phi = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q} + \mathfrak{R}. \tag{82}$$

$\mathfrak{P}$ désignant une fonction linéaire de produits symboliques dont chacun contient en facteur un déterminant élevé à une puissance supérieure à l;

$\mathfrak{Q}$ une fonction linéaire de produits symboliques dont chacun contient en facteur un produit de déterminants de la forme $(ab)^l(bc)^l(ca)^\rho$, ρ étant > 0, et les symboles a, b, c correspondant à des fonctions A, B, C *d'ordre précisément égal à $2l$;*

Enfin $\mathfrak{R}$ une fonction entière de produits symboliques, dont chacun aura la forme suivante :

$$(83)\qquad R = (ab)^\mu (bc)^\nu (cd)^{\mu'} (de)^{\nu'} \ldots a_x^{p-\mu} b_x^{q-\mu-\nu} c_x^{r-\nu-\mu'} d_x^{s-\mu'-\nu'} \ldots,$$

les symboles a, b, c,... pouvant correspondre à des fonctions quelconques du système, et les exposants μ, ν, μ', ν',... étant différents de zéro et satisfaisant aux inégalités suivantes :

$$(84)\qquad \begin{cases} \nu \leqq \dfrac{\mu}{2}, & \nu' \leqq \dfrac{\mu'}{2}, & \nu'' \leqq \dfrac{\mu''}{2}, \ldots, \\ \mu \leqq l, & \mu' \leqq \mu - \nu - \varepsilon, & \mu'' \leqq \mu' - \nu' - \varepsilon', \ldots, \end{cases}$$

où $\varepsilon^{(i)}$ est égal à 0 ou à 1, suivant que $\mu^{(i)}$ est pair ou impair.

44. Le nombre des termes de la suite μ, ν, μ', ν',... peut être pair ou impair; il peut même être nul, auquel cas R se réduirait à a_x^p.

La réduction demandée est donc toute faite pour les covariants du premier degré, tels que a_x^p, b_x^q,.... Elle l'est également pour les covariants du second degré, tels que $(ab)^\rho a_x^{p-\rho} b_x^{q-\rho}$; car ils seront de la forme $\mathfrak{P}$, si $\rho > l$, de la forme $\mathfrak{R}$, si $\rho \leqq l$.

En général, un covariant quelconque étant une fonction linéaire de produits symboliques, il suffira de donner le moyen de réduire un produit symbolique.

45. Considérons d'abord un produit à trois symboles, tel que

$$(85)\qquad \Phi = (ab)^\mu (bc)^\nu (ca)^\pi a_x^t b_x^u c_x^v,$$

où nous posons, pour abréger, $t = p - \mu - \pi$, $u = q - \mu - \nu$, $v = r - \nu - \pi$.

Si la somme $\mu+\nu+\pi$ ne surpasse pas $2l$, elle ne pourra, *a fortiori*, dépasser p, q, r; et la réduction demandée résultera immédiatement du théorème du n° **37**.

Soit, au contraire, $\mu+\nu+\pi > 2l$; et supposons, pour fixer les idées, $q \overset{=}{>} p \overset{=}{>} r$. Désignons par ρ le plus petit des deux nombres π et u. Φ contiendra en facteur $(ca)^\rho b_x^\rho$, qu'on pourra remplacer par $[-(ab)c_x-(bc)a_x]^\rho$. Substituant et développant, Φ se trouvera exprimé linéairement par des covariants de la forme

$$\Phi' = (ab)^{\mu+\sigma}(bc)^{\nu+\rho-\sigma}(ca)^{\pi-\rho}a_x^{t+\rho-\sigma}b_x^{u-\rho}c_x^{\nu+\sigma}. \tag{86}$$

Mais ces termes sont tous réduits. En effet, si $\rho=\pi$, les deux exposants $\mu+\sigma$ et $\nu+\rho-\sigma$ auront pour somme $\mu+\nu+\pi > 2l$. Donc l'un au moins d'entre eux sera $> l$, et Φ' sera de la forme $\mathfrak{P}$.

Soit, au contraire, $\rho < \pi$, d'où $\rho = u$. La somme de ces deux exposants sera $\mu+\nu+u = q \overset{=}{>} 2l$. Si l'un d'eux est $> l$, Φ' sera de la forme $\mathfrak{P}$. Dans le cas contraire, tous deux seront égaux à l; et l'on aura nécessairement $q=2l$, et par suite $p=r=2l$. Comme on a d'ailleurs $\pi-\rho>0$, Φ' sera de la forme $\mathfrak{Q}$.

46. Nous allons maintenant montrer que le théorème est vrai pour un produit quelconque Φ contenant k symboles, s'il est vrai pour les covariants à $k-2$ symboles. Pour cela, nous admettrons que $(ab)^\mu$ soit le déterminant qui figure à la plus haute puissance dans Φ. Si $\mu > l$, Φ sera tout réduit, et de l'espèce $\mathfrak{P}$. Dans le cas contraire, nous verrons que Φ peut s'exprimer à l'aide de termes réduits $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ et de produits symboliques Ψ contenant un déterminant à une puissance supérieure à μ. Il est clair que cela suffira pour établir le théorème.

Pour plus de simplicité, nous traiterons d'abord deux cas particuliers.

47. *Premier cas particulier*. — Supposons que Φ contienne en facteur $(ab)^\mu(bc)^\nu(ca)^\pi$, $\nu+\pi$ étant $> \frac{\mu}{2}$. On sait (**27**) que Φ pourra s'exprimer au moyen des composés de covariants I formés avec les symboles d, e,..., autres que a, b, c, avec des covariants K formés avec a, b, c et divisibles par $(ab)^{\mu}(bc)^{\nu}(ca)^{\pi}$.

Soit

$$(87) \qquad \mathrm{K} = (ab)^{\mu_1}(bc)^{\nu_1}(ca)^{\pi_1} a_x^{p-\mu_1-\pi_1} b_x^{q-\mu_1-\nu_1} c_x^{r-\nu_1-\pi_1}$$

un de ces derniers covariants. On aura

$$(88) \qquad \mu_1 \geqq \mu, \quad \nu_1 \geqq \nu, \quad \pi_1 \geqq \pi.$$

On pourra d'ailleurs (**45**) réduire K à des termes des espèces $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{R}$. Les termes de cette dernière espèce seront d'ailleurs de l'espèce Ψ. En effet, soit, par exemple,

$$(89) \qquad \mathrm{T} = (ab)^{\mu_2}(bc)^{\nu_2} a_x^{p-\mu_2} b_x^{q-\mu_2-\nu_2} c_x^{r-\nu_2}$$

un de ces termes. On aura, par définition,

$$(90) \qquad \mu_2 \geqq 2\nu_2 \geqq \tfrac{2}{3}(\mu_2 + \nu_2).$$

Mais T étant évidemment du même ordre que K par rapport aux variables, on aura

$$(91) \qquad \mu_2 + \nu_2 = \mu_1 + \nu_1 + \pi_1 \geqq \mu + \nu + \pi > \tfrac{3}{2}\mu$$

et, par suite,

$$(92) \qquad \mu_2 > \mu,$$

ce qui montre que T est bien de l'espèce Ψ.

Donc K s'exprime par une somme de termes des espèces $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, Ψ. En les composant avec les covariants I, on obtiendra évidemment des termes de même espèce, les déterminants qui divisent un covariant se retrouvant dans chaque terme de ses composés.

Donc Φ se trouvera exprimé par des termes des espèces $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, Ψ, ce qu'il fallait démontrer.

48. *Deuxième cas particulier.* — Supposons que Φ contienne en facteur le produit

$$\Pi = (ab)^{\mu}(bc)^{\nu}(ac)^{\pi}(ad)^{\rho}(bd)^{\sigma}(cd)^{\tau},$$

la somme $\nu + \pi + \rho + \sigma + \tau$ étant supérieure à $\mu - \varepsilon$ (ε désignant zéro ou l'unité, suivant que μ est pair ou impair). Φ pourra (**27**) s'exprimer au moyen des composés de covariants I formés avec les symboles $e, \ldots$ avec des covariants K formés avec a, b, c, d et divisibles par Π.

Soit

$$(93) \qquad \mathrm{K} = (ab)^{\mu_1}(bc)^{\nu_1}(ac)^{\pi_1}(ad)^{\rho_1}(bd)^{\sigma_1}(cd)^{\tau_1}a_x^{p-\mu_1-\pi_1-\rho_1}\ldots$$

un de ces covariants. On aura

$$(94) \qquad \mu_1 \geqq \mu, \quad \nu_1 \geqq \nu, \ldots, \quad \tau_1 \geqq \tau.$$

On pourra d'ailleurs (**31**) exprimer K linéairement au moyen de termes arbitrairement choisis dans les composés de la forme

$$(95) \qquad \left[(ab)^{\mu_2}a_x^{p-\mu_2}b_x^{q-\mu_2},\ (cd)^{\tau_2}c_x^{r-\tau_2}d_x^{s-\tau_2}\right]_{\nu_2},$$

où $\mu_2 \geqq \mu_1$, $\tau_2 \geqq \tau_1$ et $\nu_2 = \mu_1 + \nu_1 + \pi_1 + \rho_1 + \sigma_1 + \tau_1 - \mu_2 - \tau_2$ (cette dernière condition étant nécessaire pour que l'ordre du terme considéré par rapport aux variables soit le même que celui de K).

Parmi ces termes, nous conviendrons de choisir celui T où le déterminant (bc) figure avec le plus fort exposant possible. Cet exposant λ sera évidemment égal au plus petit des trois nombres ν_2, $q - \mu_2$, $r - \tau_2$.

Si μ_2 ou τ_2 est $> \mu$, le terme T, contenant en facteur $(ab)^{\mu_2}$ ou $(cd)^{\tau_2}$, sera tout réduit, et de l'espèce Ψ.

Soit, au contraire, μ_2 et τ_2 au plus égaux à μ; on aura précisément $\mu_2 = \mu$; car $\mu_2 \geqq \mu_1 \geqq \mu$. D'ailleurs, μ étant $\leqq l$, et q et r au moins égaux à $2l$, $q - \mu_2$ et $r - \tau_2$ seront au moins égaux à l, et *a fortiori* à μ. Dans ces conditions, si $\nu_2 > \frac{\mu}{2}$, λ sera $> \frac{\mu}{2}$; et T, contenant en facteur $(ab)^{\mu}(bc)^{\lambda}$, sera réductible (**47**).

Supposons enfin ν_2 au plus égal à $\frac{1}{2}\mu$, et *a fortiori* inférieur à $q - \mu_2$ et à $r - \tau_2$; on aura $\lambda = \nu_2$ et, par suite,

$$(96) \qquad \mathrm{T} = (ab)^{\mu}(bc)^{\nu_2}(cd)^{\tau_2}a_x^{p-\mu}b_x^{q-\mu-\nu_2}c_x^{r-\nu_2-\tau_2}d_x^{s-\tau_2}.$$

D'ailleurs, on a $\tau_2 \overline{\gtrless} \mu$, $\mu \overline{\gtrless} l$, $p \overline{\gtrless} 2l$, d'où $\tau_2 \overline{\gtrless} p - \mu$. Donc T est divisible par $[(cd)a_x]^{\tau_2}$. Remplaçant ce facteur par la quantité équivalente $[(ca)d_x + (ad)c_x]^{\tau_2}$ et développant, on aura T linéairement exprimé par des covariants de la forme

$$U = (ab)^\mu (bc)^{\nu_2} (ca)^\rho (ad)^{\tau_2-\rho} a_x^{p-\mu-\tau_2} \dots \tag{97}$$

Cela posé, si $\nu_2 + \rho > \frac{\mu}{2}$, U sera réductible à des termes $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, Ψ (**47**); il en sera de même si $\tau_2 - \rho > \frac{\mu}{2}$, U contenant en facteur $(ab)^\mu (ad)^{\tau_2-\rho}$. Or l'une de ces deux hypothèses se présentera nécessairement, quel que soit ρ; car on a

$$\left\{\begin{aligned} \nu_2 + \rho + \tau_2 - \rho = \nu_2 + \tau_2 = \mu_1 + \nu_1 + \pi_1 + \rho_1 + \sigma_1 + \tau_1 - \mu_2 \\ \overline{\gtrless} \mu + \nu + \pi + \rho + \sigma + \tau - \mu > \mu - \varepsilon. \end{aligned}\right. \tag{98}$$

Donc l'un au moins des deux entiers $\nu_2 + \rho$, $\tau_2 - \rho$ est supérieur à $\frac{\mu - \varepsilon}{2}$, plus grand entier contenu dans $\frac{\mu}{2}$, et, par suite, supérieur à $\frac{\mu}{2}$.

Donc K se trouvera exprimé ici encore par des termes $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, Ψ. En les composant avec les covariants I, on obtiendra des termes de même espèce, par lesquels Φ se trouvera exprimé.

49. Passons maintenant au cas général où Φ peut être un produit symbolique quelconque contenant k symboles $a, b, c, d, e, f, \dots$ et divisible par $(ab)^\mu$. On sait (**27**) qu'il pourra s'exprimer linéairement au moyen de termes arbitrairement choisis dans les composés de covariants I formés avec les symboles $c, d, e, f, \dots$ avec des covariants K, de la forme

$$K = (ab)^{\mu_1} a_x^{p-\mu_1} b_x^{q-\mu_1}, \quad \text{où} \quad \mu_1 \overline{\gtrless} \mu. \tag{99}$$

Les covariants I, ne contenant que $k - 2$ symboles, seront réductibles, par hypothèse, à des termes des espèces $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{R}$. Les termes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$, composés avec K, donnant encore des termes de même espèce, il suffira d'étudier les termes résultant de la composition des covariants K avec des covariants I de la forme $\mathfrak{R}$. Par définition, ceux-ci s'exprimeront linéairement par des produits de la forme $R_1 R_2 \dots$, où

R_1, R_2,... sont des produits symboliques, tels que

$$(100)\qquad R_1 = (cd)^{\mu'}(de)^{\nu'}(ef)^{\mu''}\dots c_x^{r-\mu'} d_x^{s-\mu'-\nu'}\dots,$$

μ', ν', μ'',... satisfaisant aux relations

$$(101)\qquad \nu' \overline{\overline{<}} \frac{\mu'}{2},\quad \mu'' \overline{\overline{<}} \mu' - \nu' - \varepsilon',\quad \dots.$$

Parmi les termes contenus dans le $\nu^{ième}$ composé de K avec $R_1 R_2\dots$, nous sommes en droit d'en choisir un arbitrairement. Nous prendrons celui T où (bc) se présente avec l'exposant le plus élevé. Cet exposant λ sera le plus petit des nombres ν, $q - \mu_1$, $r - \mu'$.

Si $\mu_1 > \mu$ ou $\mu' > \mu$, T étant divisible par $(ab)^{\mu_1}(cd)^{\mu'}$ sera immédiatement de la forme Ψ.

Dans le cas contraire, on aura $\mu_1 = \mu$, $\mu' \overline{\overline{<}} \mu$. Donc μ étant $\overline{\overline{<}} l$ et q et r au moins égaux à $2l$, on aura

$$(102)\qquad q - \mu_1 = q - \mu \overline{\overline{>}} l \overline{\overline{>}} \mu,\quad r - \mu' \overline{\overline{>}} r - \mu \overline{\overline{>}} l \overline{\overline{>}} \mu.$$

Cela posé, si $\nu > \frac{\mu}{2}$, λ sera $> \frac{\mu}{2}$, et T étant divisible par $(ab)^{\mu}(bc)^{\lambda}$ sera réductible à des termes φ, $\mathfrak{Q}$, Ψ (**47**).

Dans le cas contraire, on aura $\lambda = \nu$, et T sera de la forme

$$(103)\qquad (ab)^{\mu}(bc)^{\nu}(cd)^{\mu'}(de)^{\nu'}(ef)^{\mu''}\dots a_x^{p-\mu} b_x^{q-\mu-\nu} c_x^{r-\nu-\mu'}\dots R_2\dots$$

Si $\nu + \mu' > \mu - \varepsilon$, T sera réductible à des termes φ, $\mathfrak{Q}$, Ψ (**48**). Dans le cas contraire, T sera de l'espèce $\mathfrak{R}$, toutes les conditions qui caractérisent cette espèce se trouvant remplies par nos hypothèses.

Le théorème est donc démontré.

§ VII — Limite du degré des covariants R.

50. On a vu, dans la Section précédente, qu'un covariant quelconque Φ peut s'exprimer par des termes des espèces φ et $\mathfrak{Q}$, et par une fonction entière de covariants R de l'espèce suivante :

$$R = (ab)^{\mu}(bc)^{\nu}(cd)^{\mu'}(de)^{\nu'}\ldots a_x^{p-\mu} b_x^{q-\mu-\nu}\ldots,$$

où $\mu, \nu, \mu', \nu', \ldots$ satisfont aux relations (84).

L'ordre de ces covariants R *est au moins égal à* $2l$. En effet, soit δ le degré de l'un d'eux. Il aura pour ordre

$$(104) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega &= p + q + \ldots - 2(\mu + \nu + \mu' + \nu' + \ldots) \\ &\overline{\overline{>}}\, \delta . 2l - 2(\mu + \nu + \mu' + \nu' + \ldots), \end{aligned} \right.$$

$p, q, \ldots$ étant au moins égaux à $2l$.

Mais, si la suite $\mu, \nu, \mu', \nu', \ldots$ se termine à un terme de l'espèce μ, tel que $\mu^{(i)}$, on aura

$$\delta = 2i + 2;$$

en outre, en vertu des relations (84),

$$(105) \qquad \mu \overline{\overline{<}} l, \quad \nu + \mu' \overline{\overline{<}} \mu \overline{\overline{<}} l, \quad \ldots, \quad \nu^{(i-1)} + \mu^{(i)} \overline{\overline{<}} \mu^{(i-1)} \overline{\overline{<}} l,$$

d'où

$$(106) \qquad \mu + \nu + \mu' + \ldots + \mu^{(i)} \overline{\overline{<}} (i+1) l$$

et, par suite,

$$(107) \qquad \omega \overline{\overline{>}} (i+1) 2l.$$

Si la suite $\mu, \nu, \mu', \nu', \ldots$ avait un terme de plus $\nu^{(i)}$, on aurait

$$\delta = 2i + 3, \quad \nu^{(i)} \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{2}\mu^{(i)} \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{2} l,$$

d'où

$$(108) \qquad \mu + \nu + \mu' + \ldots + \nu^{(i)} \overline{\overline{<}} \left(i + \tfrac{3}{2}\right) l, \quad \omega \overline{\overline{>}} \left(i + \tfrac{3}{2}\right) . 2l.$$

51. D'autre part, *le degré des covariants* R *ne pourra surpasser* $2l + 1$. En effet, les entiers $\mu, \mu', \ldots, \mu^{(i)}$ formant une série décroissante, leur nombre $i + 1$ ne pourra surpasser μ. Donc δ, qui est égal à $2i + 2$ ou à $2i + 3$, ne pourra surpasser $2\mu + 1$, ni *a fortiori* $2l + 1$.

Une étude plus approfondie de la question va nous permettre de resserrer considérablement cette limite.

52. Nous dirons que deux covariants sont *équivalents*, si leur différence peut s'exprimer par des termes des espèces $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$. L'équivalence sera représentée, suivant l'usage, par le signe $\equiv$.

Nous dirons qu'un covariant est *réductible*, s'il est équivalent à une fonction entière de covariants de degré moindre.

53. *Un covariant quelconque* Φ *est équivalent à une fonction entière de covariants irréductibles de l'espèce* R.

On a en effet, d'après ce qu'on a vu (**43**),

$$(109) \qquad \Phi \equiv f(R_1, R_2, R_3, \ldots),$$

f désignant une fonction entière, et $R_1, R_2, \ldots$ des covariants de l'espèce R.

Supposons que, parmi ces covariants $R_1, R_2, \ldots$, il y en ait de réductibles, et admettons, pour fixer les idées, que R_1 et R_2 soient ceux de ces covariants réductibles dont le degré ρ est maximum.

Il est clair qu'on ne troublera pas l'équivalence (109) en y substituant, pour R_1, R_2, les fonctions entières de covariants de degré $< \rho$, $C_1, C_2, \ldots$, qui leur sont équivalentes. D'ailleurs, chacun des covariants $C_1, C_2, \ldots$ est à son tour équivalent (**43**) à une fonction entière de covariants $r_1, r_2, \ldots$ de l'espèce R et dont le degré ne surpasse pas le sien. Substituant ces fonctions, dans l'équivalence, à la place de C_1, $C_2, \ldots$, on obtiendra une relation de la forme

$$(110) \qquad \Phi \equiv f_1(r_1, r_2, \ldots, R_3, \ldots),$$

expression dont le second membre ne contient plus aucun covariant réductible de degré supérieur à $\rho - 1$.

En renouvelant cette opération, de manière à chasser toujours de l'expression de Φ les covariants réductibles du degré le plus élevé, on finira par les faire disparaître complétement.

54. Cela posé, au lieu de chercher directement en fonction de t

une limite supérieure au degré δ des covariants irréductibles de l'espèce R, nous renverserons le problème, et, ce degré étant supposé donné, nous déterminerons une limite inférieure $f(\delta)$ pour l'exposant μ, ainsi qu'une limite inférieure $\varphi(\delta)$ de la somme

$$S = \mu + \nu + \mu' + \nu' + \ldots.$$

Ces limites une fois trouvées, on aura

$$(111) \qquad l \overline{\overline{>}} \mu \overline{\overline{>}} f(\delta), \quad \text{d'où} \quad \delta \overline{\overline{<}} \psi(l),$$

ψ désignant la fonction inverse de la fonction numérique f.

55. Soit d'abord $\delta = 1$. La suite $\mu, \nu, \mu', \ldots$ ne contenant aucun terme, on aura

$$\mu = 0, \quad S = 0,$$

d'où

$$f(1) = 0, \quad \varphi(1) = 0.$$

Soit $\delta = 2$. La suite contiendra un seul terme μ, au moins égal à 1; d'où

$$f(2) = 1, \quad \varphi(2) = 1.$$

Soit $\delta = 3$. La suite aura deux termes, μ, ν, et l'on aura

$$\nu \overline{\overline{>}} 1, \quad \mu \overline{\overline{>}} 2\nu \overline{\overline{>}} 2,$$

d'où

$$f(3) = 2, \quad \varphi(3) = 3.$$

Nous allons maintenant établir des formules pour déterminer généralement $f(\delta)$ et $\varphi(\delta)$ en fonction de $f(\delta - 1), f(\delta - 2), \ldots, \varphi(\delta - 1), \varphi(\delta - 2), \ldots$.

56. Théorème. — *Un produit symbolique quelconque Φ sera réductible, si l'on peut y répartir les symboles en k catégories $a, a', \ldots;\ b, b', \ldots;\ c, c', \ldots;\ \ldots$, telles que le nombre λ des déterminants qui figurent dans Φ et où sont associés des symboles de catégorie différente soit inférieur à $\varphi(k)$.*

Ce théorème est évident si $\lambda = 0$, Φ étant un produit de covariants respectivement formés avec a, a',...; avec b, b',.... Or nous allons montrer qu'il est vrai pour λ, s'il l'est pour $\lambda - 1$, $\lambda - 2$,....

57. On a vu (**33**) que Φ peut s'exprimer linéairement par les composés de produits symboliques F_a, F_b, F_c,..., respectivement formés avec a, a',..., avec b, b',..., avec c, c',...; la somme U des ordres des compositions successives à effectuer étant au plus égale à λ, et *a fortiori* inférieure à $\varphi(k)$.

Chacun des covariants F_a, F_b,... peut s'exprimer par une somme de produits symboliques des espèces $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$: et leur composé sera la somme des résultats obtenus en composant séparément ces divers termes (**19**).

Or un produit symbolique Π, de l'espèce $\mathfrak{P}$ ou de l'espèce $\mathfrak{Q}$, étant composé avec un autre, fournira un résultat dont chaque terme contient les déterminants qui divisent Π, et, par suite, sera lui-même de l'espèce $\mathfrak{P}$ ou de l'espèce $\mathfrak{Q}$.

Pour démontrer le théorème, nous n'aurons donc qu'à établir la réductibilité des covariants obtenus en composant ensemble des termes G_a, G_b,... respectivement pris dans F_a, F_b,... et appartenant tous à l'espèce $\mathfrak{R}$.

58. Soient a, b, c,... des symboles qui représentent respectivement les fonctions G_a, G_b,.... Le résultat de la composition de ces fonctions pourra s'exprimer linéairement par des termes de la forme

$$(112)\qquad (\mathrm{ab})^\alpha(\mathrm{bc})^\beta(\mathrm{ca})^\gamma\ldots \mathrm{a}_x^t \mathrm{b}_x^u \mathrm{c}_x^v\ldots,$$

où la somme des exposants $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ est évidemment égale à U.

Chacune des fonctions G_a, G_b,... étant d'ailleurs un produit de covariants de l'espèce R, dont l'ordre est au moins $2l$, son ordre sera au moins égal à $2l$. Donc le covariant (112) pourra s'exprimer (**43**) au moyen de trois sortes de termes :

1° Des termes $\mathfrak{P}'$, contenant en facteur une puissance de déterminant supérieure à l, telle que $(\mathrm{ab})^{l+\rho}$.

2° Des termes $\mathfrak{Q}'$, contenant en facteur un produit tel que $(\mathrm{ab})^l(\mathrm{bc})^l(\mathrm{ca})^\rho$.

3° Des termes $\mathfrak{R}'$, formés de produits de covariants de l'espèce

$$R' = (ab)^{\mu_1}(bc)^{\nu_1}(cd)^{\mu'_1}\ldots a_x^{\lambda'_1} b_x^{\mu''_1} c_x^{\nu''_1}\ldots, \tag{113}$$

où μ_1, ν_1, $\mu'_1,\ldots$ satisfont à des relations analogues aux relations (84).

59. Les termes $\mathfrak{R}'$, qui seraient des produits de plusieurs facteurs R′, sont tout réduits. Mais dans ceux qui ne contiendraient qu'un seul facteur R′, on aurait évidemment

$$\mu_1 + \nu_1 + \mu'_1 + \ldots = \alpha + \beta + \gamma + \ldots = U < \varphi(k). \tag{114}$$

D'ailleurs, le nombre des symboles a, b, c, d,... est k. Donc, d'après la définition de la fonction φ, R′ pourra s'exprimer par des termes $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$ et par une fonction entière de covariants de degré moindre. Cette dernière portion de l'expression étant évidemment réduite, tout revient à prouver que les termes des espèces $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{Q}'$ sont réductibles.

60. Considérons un terme de l'espèce $\mathfrak{P}'$, tel que

$$(ab)^\alpha(bc)^\beta(ca)^\gamma\ldots a_x^l b_x^u c_x^v\ldots, \quad (\alpha > l). \tag{115}$$

Il peut s'exprimer (**27**) au moyen des composés des covariants

$$H_\rho = (ab)^\rho a_x^{l+\alpha+\gamma+\ldots-\rho} b_x^{u+\alpha+\beta+\ldots-\rho}, \quad \text{où} \quad (\rho \overline{\gtrless} \alpha), \tag{116}$$

avec des covariants $\mathfrak{H}$ formés avec c....

Soient $[H_\rho, \mathfrak{H}]_\theta$ un de ces composés; σ le nombre des déterminants que $\mathfrak{H}$ contient en facteurs. Ce composé devant avoir le même ordre que le covariant (115), on aura

$$\rho + \sigma + \theta = \alpha + \beta + \gamma + \ldots = U. \tag{117}$$

61. D'ailleurs, H_ρ est le $\rho^{\text{ième}}$ composé des covariants G_a et G_b; et si nous exprimons de nouveau ces covariants par les symboles a, a',... et b, b',..., nous aurons, à des facteurs constants près,

$$G_a = R_0 R_1\ldots, \quad G_b = r_0 r_1\ldots, \tag{118}$$

où R_0, R_1,... et r_0, r_1,... sont des produits symboliques de l'espèce R, respectivement formés avec a, a',... et avec b, b',....

G_a et G_b étant ainsi exprimés, H_ρ sera (**20** et **27**) la moyenne d'une somme de termes tels, que, Ψ désignant l'un quelconque d'entre eux, on aura

$$(119)\qquad H_\rho = \Psi - \Sigma k_{\alpha\beta\gamma}[F_\alpha, \mathcal{F}_\beta]_\gamma,$$

où F_α et $\mathcal{F}_\beta$ sont respectivement formés avec a, a',... et avec b, b',..., et où l'ordre γ de la composition est $< \rho$.

On aura, par suite,

$$(120)\qquad [H_\rho, \mathfrak{H}]_\theta = [\Psi, \mathfrak{H}]_\theta + \Sigma k_{\alpha\beta\gamma}\{[F_\alpha, \mathcal{F}_\beta]_\gamma, \mathfrak{H}\}_\theta.$$

62. Or, si, dans l'expression $\{[F_\alpha, \mathcal{F}_\beta]_\gamma, \mathfrak{H}\}_\theta$, on remplace les symboles c, d,... par ceux des fonctions primitives c, c',...; d, d',...; ..., par la méthode de la Section III, on verra immédiatement que, dans chaque terme de l'expression obtenue, le nombre des déterminants formés avec des symboles de catégories différentes sera $\gamma + \sigma + \theta$, quantité moindre que $\rho + \sigma + \theta = U$, et *a fortiori* moindre que λ. Donc chacun de ces termes sera réductible, par hypothèse.

63. Il reste à prouver qu'en choisissant convenablement le terme Ψ on peut faire en sorte que $[\Psi, \mathfrak{H}]_\theta$ soit également réductible.

Or soit

$$(121)\qquad R_0 = (aa')^\mu (a'a'')^\nu \ldots a_x^{p-\mu} \ldots,$$

$$(122)\qquad r_0 = (bb')^{\mu_1} (b'b'')^{\nu_1} \ldots b_x^{q-\mu_1} \ldots.$$

Nous prendrons pour Ψ celui des termes de H_ρ où le déterminant (ab) figure avec l'exposant le plus élevé. Cet exposant ε sera évidemment égal au moindre des trois nombres ρ, $p-\mu$, $q-\mu_1$. D'ailleurs, p et q sont au moins égaux à $2l$, μ et μ_1 au plus égaux à l, et $\rho > l$. Donc $\varepsilon \geqq l$, et si μ et μ_1 sont $< l$, ε sera $> l$. Donc Ψ, et par suite $[\Psi, \mathfrak{H}]_\theta$, seront de l'espèce $\mathfrak{P}$.

Supposons, au contraire, l'une des quantités μ ou μ_1, par exemple μ, égale à l; ε étant au moins égal à l, Ψ sera divisible par $(aa')^l(ab)^l$

et résultera de la combinaison de covariants X formés avec a, a', b, et divisibles par $(aa')^l(ab)^l$ avec d'autres covariants. Ces covariants X peuvent être réduits à la forme $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} + \mathfrak{R}$. Mais le nombre des déterminants que peut contenir en facteurs un covariant d'espèce $\mathfrak{R}$ et du troisième degré est au plus égal à $l + \frac{l}{2}$, quantité $< 2l$. Donc X se réduit à des termes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ seulement. Les termes de Ψ et de $[\Psi, \mathfrak{H}]_\theta$, qui s'en déduisent par composition, seront de la même forme.

64. Considérons maintenant un terme de l'espèce $\mathfrak{Q}'$. L'existence d'un terme de cette sorte suppose que les covariants G_a, G_b, G_c, respectivement représentés par a, b, c, aient leur ordre précisément égal à $2l$ (**43**).

Cela posé, le terme $\mathfrak{Q}'$, que l'on considère, peut s'exprimer au moyen des composés de covariants

$$(123) \qquad H_{\rho_1} = (ab)^l(bc)^l(ca)^{\rho_1}a_x^{l-\rho_1}c_x^{l-\rho_1}, \quad \text{où} \quad \rho_1 \overline{\gtrless} \rho > 0,$$

avec d'autres covariants $\mathfrak{H}$.

Exprimons de nouveau ces covariants par les symboles a, a',..., b, b',... des fonctions primitives. Le covariant H_{ρ_1} pourra être ramené à la forme $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} + \mathfrak{R}$; mais son ordre est $< 2l$, et chaque terme de la forme $\mathfrak{R}$ est un produit de facteurs d'ordre au moins égal à $2l$. Donc il ne peut exister de termes $\mathfrak{R}$ dans l'expression de H_{ρ_1}, mais seulement des termes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ qui, composés avec ceux de $\mathfrak{H}$, donneront encore des termes de même forme.

Le théorème est donc complétement établi.

65. Corollaire. — *Si un covariant de l'espèce*

$$(124) \qquad R = (ab)^\mu(bc)^\nu(cd)^{\mu'}\ldots a_x^{p-\mu}\ldots$$

est irréductible, la somme λ *de* $k-1$ *termes quelconques* $t_1,\ldots, t_{k-1}$, *pris dans la suite* $\mu, \nu, \mu',\ldots$, *sera au moins égale à* $\varphi(k)$.

Marquons en effet, dans R, les déterminants affectés des exposants $t_1,\ldots, t_{k-1}$, puis réunissons dans une même catégorie les symboles qui se trouvent associés dans les déterminants restants; on aura évidemment k catégories, et R contiendra λ déterminants formés des symboles de deux catégories différentes. Donc $\lambda \overline{\gtrless} \varphi(k)$ (**56**).

Cela posé, soient δ le degré du covariant (124) supposé irréductible; S la somme $\mu + \nu + \mu' + \ldots$. On aura, d'après ce qui précède,

(125) $$S - \mu = \nu + \mu' + \ldots \overline{\gtrless} \varphi(\delta - 1),$$

d'où, en désignant par $f(\delta)$ la limite inférieure de μ,

$$S \overline{\gtrless} \varphi(\delta - 1) + f(\delta).$$

Donc S aura pour limite inférieure la quantité

(126) $$\varphi(\delta) = \varphi(\delta - 1) + f(\delta).$$

Cette valeur de $\varphi(\delta)$ sera un entier impair. En effet, $\varphi(2)$ et $\varphi(3)$ sont impairs; et nous allons montrer que, si $\varphi(2), \ldots, \varphi(\delta - 1)$ sont impairs, $f(\delta)$ sera pair, et par suite $\varphi(\delta)$ impair.

Deux cas seront à distinguer dans la recherche de $f(\delta)$.

66. *Premier cas.* — La suite $\mu, \nu, \mu', \ldots$ se termine par un terme $\mu^{(i)}$ de l'espèce μ. On aura, dans ce cas, $\delta = 2i + 2$.

On aura (**65**)

(127) $$\nu + \nu' + \ldots + \nu^{(i-1)} + \mu^{(i)} \overline{\gtrless} \varphi(i + 2).$$

Mais on a, d'autre part,

(128) $$\mu' \overline{\lessgtr} \mu - \nu - \varepsilon, \quad \mu'' \overline{\lessgtr} \mu' - \nu' - \varepsilon', \ldots, \quad \mu^{(i)} \overline{\lessgtr} \mu^{(i-1)} - \nu^{(i-1)} - \varepsilon^{(i-1)},$$

ou, en ajoutant et posant $\varepsilon + \varepsilon' + \ldots + \varepsilon^{(i-1)} = \eta$,

(129) $$\mu \overline{\gtrless} \nu + \nu' + \ldots + \nu^{(i-1)} + \mu^{(i)} + \eta \overline{\gtrless} \varphi(i + 2) + \eta.$$

Donc μ est au moins égal à $\varphi(i + 2)$. Mais, s'il lui était égal, il serait impair par hypothèse, $i + 2$ étant $< \delta$; on aurait donc $\varepsilon = 1$, d'où $\eta \overline{\gtrless} 1$, et l'inégalité (129) ne serait pas satisfaite. La valeur minimum de μ sera donc le nombre pair $f(2i + 2)$ donné par la formule

(130) $$f(2i + 2) = \varphi(i + 2) + 1.$$

67. *Deuxième cas.* — La suite $\mu, \nu, \mu', \ldots$ se termine par un terme $\nu^{(i)}$. On aura, dans ce cas, $\delta = 2i + 3$.

On aura (**65**), d'une part,

$$\nu + \nu' + \ldots + \nu^{(i)} \overset{=}{>} \varphi(i+2), \tag{131}$$

et, d'autre part,

$$\nu + \nu' + \ldots + \nu^{(i)} + \mu^{(i)} \overset{=}{>} \varphi(i+3). \tag{132}$$

On a d'ailleurs

$$\mu' \overset{=}{<} \mu - \nu - \varepsilon, \quad \ldots, \quad \mu^{(i)} \overset{=}{<} \mu^{(i-1)} - \nu^{(i-1)} - \varepsilon^{(i-1)}, \quad \nu^{(i)} \overset{=}{<} \tfrac{1}{2}\mu^{(i)}, \tag{133}$$

d'où, en posant $\varepsilon + \varepsilon' + \ldots + \varepsilon^{(i-1)} = \eta$,

$$\mu \overset{=}{>} \nu + \ldots + \nu^{(i)} + \frac{\mu^{(i)}}{2} + \eta \overset{=}{>} \frac{\varphi(i+2) + \varphi(i+3)}{2} + \eta. \tag{134}$$

Or $\varphi(i+2)$ et $\varphi(i+3)$ sont impairs, par hypothèse. Donc $\frac{\varphi(i+2)+\varphi(i+3)}{2}$ est un entier. S'il est pair, on pourra le prendre pour limite inférieure de μ. S'il est impair, la limite cherchée le surpassera d'une unité; car l'hypothèse $\mu = \frac{\varphi(i+2)+\varphi(i+3)}{2}$ donnerait $\varepsilon = 1$, $\eta \overset{=}{>} 1$, et, par suite, ne satisferait pas à l'inégalité (134).

On aura donc

$$f(2i+3) = \frac{\varphi(i+2) + \varphi(i+3)}{2} + \eta, \tag{135}$$

η étant égal à 0 ou à 1, et choisi de telle sorte que $f(2i+3)$ soit pair.

68. Récapitulant les résultats qui précèdent, on aura le théorème suivant :

Théorème. — *Soient φ et f deux fonctions numériques définies par* *les relations*

$$(136)\quad \varphi(1)=0,\ \varphi(2)=1,\ \varphi(3)=3,\ f(1)=0,\ f(2)=1,\ f(3)=2,$$

$$(137)\qquad \left\{\begin{aligned} f(2i+2) &= \varphi(i+2)+1,\\ f(2i+3) &= \frac{\varphi(i+2)+\varphi(i+3)}{2}+\eta,\\ \varphi(\delta) &= \varphi(\delta-1)+f(\delta),\end{aligned}\right.$$

[*où* η *est égal à* 0 *ou* 1, *et choisi de telle sorte que* $f(2i+3)$ *soit pair*]; *soit enfin* ψ *la fonction inverse de* f.

Soient, d'autre part, A, B, C,... *des formes quelconques, d'ordre au moins égal à* $2l$. *Tout covariant* Φ *de ce système pourra s'exprimer par des termes des espèces* $\mathfrak{P}$ *et* $\mathfrak{Q}$ (*voir* le n° **43**) *et par une fonction entière* $\mathfrak{R}$ *de covariants irréductibles de l'espèce* R. *Le degré* δ *de ces covariants irréductibles ne pourra surpasser* $\psi(l)$.

69. *Remarque*. — La limite $\psi(l)$ trouvée ci-dessus sera très-resserrée; car il est aisé de voir que la fonction φ inverse de ψ croît plus rapidement qu'une puissance quelconque de la variable.

Le calcul de proche en proche des fonctions f et φ, pour les diverses valeurs de δ, s'effectuera d'ailleurs avec une grande facilité par les formules (137). On formera ainsi le tableau suivant :

$$\begin{array}{rccccccccc} \delta = & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12,\ldots,\\ f(\delta) = & 4, & 6, & 8, & 10, & 14, & 18, & 22, & 26, & 32,\ldots,\\ \varphi(\delta) = & 7, & 13, & 21, & 31, & 45, & 63, & 85, & 111, & 143,\ldots. \end{array}$$

Il est d'ailleurs aisé de voir que $f(\delta)$ et $\varphi(\delta)$ sont les limites les plus précises que le théorème du n° **65** puisse fournir pour μ et pour S. En effet, δ étant égal à $2i+2$ ou $2i+3$, posons

$$\mu = f(\delta),\quad \mu' = f(\delta-1),\ldots,\quad \mu^{(i)} = f(\delta-i),$$

puis

$$\nu = \mu-\mu',\ldots,\quad \nu^{(i-1)} = \mu^{(i-1)}-\mu^{(i)},$$

et enfin, si $\delta = 2i+3$,

$$\nu^{(i)} = \tfrac{1}{2}\mu^{(i)}.$$

On vérifiera facilement : 1° que les exposants $\nu, \nu', \ldots, \nu^{(i-1)}$ forment une suite décroissante, dont le premier terme est au plus égal à $\frac{1}{2}\mu^{(i)}$; 2° que la somme $\mu + \nu + \mu' + \nu' + \ldots$ est égale à $\varphi(\delta)$ ou à $\varphi(\delta) + 1$. Si c'est ce dernier cas qui se présente, on diminuera d'une unité le plus grand des exposants $\nu, \nu', \ldots$. On obtiendra ainsi une suite d'exposants ayant pour somme $\varphi(\delta)$, et dont le plus grand est $f(\delta)$. D'ailleurs, $k-1$ quelconques de ces exposants auront une somme au moins égale à $\varphi(k)$; condition reconnue nécessaire pour que le covariant R, formé avec cette suite d'exposants, soit irréductible.

Nous supprimons la démonstration de ces propositions, qui se déduit sans peine des formules (137). Nous nous bornerons à faire observer que la fonction f peut être définie à elle seule, sans l'intervention de la fonction φ. Les formules (137) donnent en effet

$$f(2i+3) - f(2i+2) = \frac{\varphi(i+3) - \varphi(i+2)}{2} + \eta - 1 = \frac{f(i+3)}{2} + \eta - 1,$$
$$f(2i+2) - f(2i+1) = \frac{\varphi(i+2) - \varphi(i+1)}{2} + 1 - \eta' = \frac{f(i+2)}{2} + 1 - \eta',$$

η et η' étant égaux à 0 ou à 1 et devant être calculés de telle sorte que les seconds membres des égalités ci-dessus soient pairs comme les premiers.

Ces égalités pourront encore s'écrire comme il suit :

$$f(2i+3) - f(2i+2) = 2\mathrm{E}\left(\frac{f(i+3)}{4}\right),$$
$$f(2i+2) - f(2i+1) = 2\mathrm{E}\left(\frac{f(i+2)+2}{4}\right),$$

$\mathrm{E}(x)$ désignant le plus petit entier contenu dans x.

§ VIII. — Limites de l'ordre et du degré des covariants indépendants.

70. *Définitions.* — Soient A, B,... un système quelconque de formes en nombre quelconque, mais dont les ordres ne surpassent pas un nombre donné n; Φ un covariant quelconque de ce système.

Nous appellerons *poids* de ce covariant l'expression

$$(138) \qquad p_n d_n + p_{n-1} d_{n-1} + \ldots + p_1 d_1,$$

d_ρ désignant son degré total par rapport aux coefficients de celles des fonctions données qui sont d'ordre ρ; et $p_n, \ldots, p_1$ une suite de nombres convenablement choisis.

Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que ces nombres aient été déterminés de proche en proche, de manière à satisfaire aux inégalités suivantes :

$$(139) \qquad p_n = 1, \ldots, \quad p_{2\mu} \overset{=}{>} 2p_{2\mu+1}, \quad p_{2\mu-1} \overset{=}{>} \tfrac{3}{2} p_{2\mu}, \ldots,$$

et en outre à celle-ci

$$(140) \qquad p_l \overset{=}{>} T_l,$$

où nous posons, pour abréger,

$$(141) \qquad T_l = S_l \frac{p_{2l}}{l} + S_{l+1} \frac{p_{2l+2}}{l+1} + \ldots + S_m \frac{p_{2m}}{m},$$

$$(142) \quad S_l = (2l+1)\psi(l) + (2l+3)\psi(l+1) + \ldots + (2m+1)\psi(m),$$

m désignant le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{2}$, et ψ étant la fonction numérique définie au n° **68**.

Nous compléterons enfin la série des quantités S, T, p par l'introduction des deux quantités suivantes :

$$(143) \qquad S_0 = S_1, \quad p_0 = T_0 = T_1 + p_1 S_1.$$

71. Nous dirons que le covariant Φ est de la *classe* l, si parmi les symboles $a, b, \ldots$ qui figurent dans son expression il n'y en a aucun qui représente une fonction d'ordre inférieur à $2l$.

Nous dirons qu'un covariant de la classe l est de l'espèce X, s'il est de la forme MN, où M désigne un produit symbolique d'ordre au plus égal à S_l et de poids au plus égal à T_l, et N un autre covariant ou une simple constante.

Nous dirons enfin qu'un covariant Φ est de l'espèce Y, s'il peut s'exprimer linéairement au moyen de composés tels que $[F, \mathcal{J}]_\mu$, où F est un produit symbolique jouissant des propriétés suivantes :

1° Son ordre ω ne surpasse pas n;

2° Son poids π ne surpasse pas p_ω;

$\mathcal{J}$ pouvant d'ailleurs désigner un covariant quelconque.

72. Il résulte évidemment de cette dernière définition que *tout covariant* $[\Phi, \Phi']_\gamma$, *composé de deux autres, dont l'un,* Φ, *est de l'espèce* Y, *sera lui-même de l'espèce* Y. En effet, il s'exprimera linéairement au moyen de covariants tels que

$$\{[F, \mathcal{J}]_\mu, \Phi'\}_\gamma. \tag{144}$$

Or soient $a, b, \ldots$ les symboles qui figurent dans l'expression de F; a, b,... ceux qui figurent dans $\mathcal{J}$ et Φ'. Développons le covariant (144); son expression sera formée d'une somme de termes contenant chacun en facteur le produit L des déterminants que F contenait lui-même en facteurs. Chacun de ces termes pourra à son tour s'exprimer linéairement (**27**) au moyen de composés $[F_1, \Psi_1]_{\lambda_1}$, $[F_2, \Psi_2]_{\lambda_2}, \ldots$, où Ψ_1, $\Psi_2, \ldots$ sont des covariants formés avec les symboles a, b,... et F_1, $F_2, \ldots$ des produits symboliques formés avec $a, b, \ldots$ et contenant L en facteur.

Soit F_1 l'un de ces produits. Puisqu'il est divisible par L, son ordre ω_1 sera au plus égal à ω. D'autre part, il est formé des mêmes symboles que F; donc son poids est égal à π et ne surpasse pas p_ω; à plus forte raison il ne saurait dépasser p_{ω_1}, les nombres p allant en croissant, d'après les relations (139), à mesure que leur indice diminue.

Donc $[F_1, \Psi_1]_{\lambda_1}$ sera de la forme Y; et il en sera de même de chacun des autres termes $[F_2, \Psi_2]_{\lambda_2}, \ldots$.

73. Lemme. — *Un produit symbolique* Φ *sera de l'espèce* Y : 1° *s'il contient en facteur* $(ab)^{l+1}$, *les symboles* a, b *représentant des fonctions d'ordre* $2l$ *ou* $2l+1$; 2° *s'il contient un facteur* $(ab)^l(bc)^l(ca)^\rho$, ρ *étant* > 0, *et* a, b, c *représentant des fonctions d'ordre* $2l$.

En effet, soit d'abord $l = 0$. Φ contiendra en facteur l'invariant

(ab), dont l'ordre, étant nul, sera $< n$, et dont le poids sera $2p_l$, quantité inférieure à p_0, d'après les relations (142) et (143); et Φ sera un composé de cet invariant, où l'ordre de la composition est égal à zéro. Il sera donc de l'espèce Y.

Soit, d'autre part, $l > 0$. Φ pourra s'exprimer (**27**) en fonction linéaire de composés de produits symboliques F formés avec a, b et divisibles par $(ab)^{l+1}$, ou formés avec a, b, c et divisibles par $(ab)^l(bc)^l(ca)^\rho$, avec d'autres covariants, formés avec les autres symboles, et Φ sera de l'espèce Y si les covariants F en sont (**72**).

Supposons d'abord que F soit divisible par $(ab)^{l+1}$. Soient q, r les ordres des fonctions correspondantes à a et b, et soit $q \leqq r$. L'ordre ω de F sera au plus égal à $q + r - 2l - 2$, quantité égale à $q - 1$ ou à $q - 2$, suivant qu'on aura $r = 2l + 1$ ou $r = 2l$. On aura, dans tous les cas, $\omega < q$, et *a fortiori* $< n$, n étant le maximum de l'ordre des fonctions A, B, C,... que l'on considère.

D'autre part, le poids π de F sera égal à $p_q + p_r$. Si $r = q = 2l + 1$, il sera égal à $2p_{2l+1}$, et, d'après les relations (139), au plus égal à p_{2l}, qui lui-même est au plus égal à p_ω, ω étant au plus égal à $2l$.

Si $q = 2l$, $r = 2l + 1$, on aura, d'après les mêmes relations,

$$p_q + p_r \leqq \tfrac{3}{2} p_{2l} \leqq p_{2l-1} \leqq p_\omega,$$

ω étant au plus égal à $2l - 1$.

Enfin, si $q = r = 2l$, on aura

$$p_q + p_r = 2p_{2l} < p_{2l-2} < p_\omega,$$

ω étant au plus égal à $2l - 2$.

Supposons, en second lieu, F divisible par $(ab)^l(bc)^l(ca)^\rho$, a, b, c représentant des fonctions d'ordre $2l$. On aura

$$\omega = 6l - 4l - 2\rho = 2l - 2\rho \leqq 2l - 2 < n;$$

et l'on aura, d'autre part,

$$\pi = 3p_{2l} \leqq p_{2l-2} \leqq p_\omega.$$

Donc F sera bien, dans tous les cas, de l'espèce Y.

74. Théorème. — *Un covariant quelconque Φ peut s'exprimer en fonction linéaire de covariants des espèces* X *et* Y.

Supposons d'abord que les symboles a, b,... qui figurent dans Φ représentent tous des fonctions d'ordre $2l$ ou $2l+1$. On sait (**68**) que Φ sera formé de trois espèces de termes :

1° Des termes φ divisibles par un facteur tel que $(ab)^{l+1}$; ils seront de l'espèce Y (**73**).

2° Des termes $\mathfrak{Q}$ divisibles par un facteur tel que $(ab)^l (bc)^l (ca)^\rho$, où $\rho > 0$, a, b, c représentant des fonctions d'ordre $2l$. Ces termes seront également de l'espèce Y (**73**).

3° Une fonction entière $\mathfrak{R}$ de produits symboliques R, R_1,... , de degré au plus égal à $\psi(l)$ et de la forme

$$(145)\qquad (ab)^\mu (bc)^\nu (cd)^{\mu'} (de)^{\nu'}, \dots a_x^\sigma b_x^\tau, \dots$$

μ, ν,... satisfaisant aux conditions

$$(146)\qquad \mu \leqq l, \quad \nu \leqq \frac{\mu}{2}, \quad \mu' \leqq \mu - \nu - \varepsilon, \quad \nu' \leqq \frac{\mu'}{2}, \dots$$

. Soient R l'un de ces produits, δ son degré, ω son ordre, π son poids. Les δ symboles a, b, c,... qui y figurent représentant des fonctions d'ordre au plus égal à $2l+1$ et au moins égal à $2l$ et de poids au plus égal à p_{2l}, on aura (**68**)

$$(147)\qquad \pi \leqq p_{2l}\,\delta \leqq p_{2l}\,\psi(l),$$

$$(148)\qquad \omega \leqq (2l+1)\delta - 2(\mu+\nu+\mu'+\nu'+\dots) \leqq (2l+1)\delta \leqq (2l+1)\psi(l) \leqq S_l,$$

$$(149)\qquad \omega \geqq 2l\delta - 2(\mu+\nu+\mu'+\nu'+\dots);$$

mais on a

$$\mu \leqq l, \;\; \nu + \mu' \leqq \mu - \varepsilon \leqq l, \;\; \nu' + \mu'' \leqq l, \dots,$$

d'où

$$(150)\qquad \mu + \nu + \mu' + \nu' + \dots \leqq tl,$$

t désignant le nombre des exposants μ, μ', μ'',..., lequel est évidemment égal à $\frac{\delta}{2}$ ou à $\frac{\delta-1}{2}$, suivant que δ est pair ou impair. On aura donc

$$(151)\qquad \omega \geqq 2l\delta - l\delta \geqq l\delta.$$

d'où

$$(152) \qquad \pi \leqq p_{2l}\,\delta \leqq \frac{p_{2l}}{l}\,\omega \leqq S_l\,\frac{p_{2l}}{l} \leqq T_l.$$

Les produits symboliques tels que R ont donc leur ordre non supérieur à S_l et leur poids non supérieur à T_l. Chacun des termes de $\mathfrak{A}$, contenant en facteur un de ces produits, sera de l'espèce X; le théorème sera donc démontré.

On remarquera que le raisonnement qui précède suppose implicitement que $l > 0$; mais si l'on avait $l = 0$, R se réduirait à un facteur linéaire tel que a_x, ayant pour ordre 1 et pour poids p_1, quantités respectivement inférieures à S_0 et T_0.

75. Soit, comme plus haut, m le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{2}$; les covariants de classe m ne pourront évidemment contenir que des symboles de fonctions d'ordre $2m$ ou $2m+1$. Le théorème est donc établi par ce qui précède pour ces covariants.

Nous allons maintenant démontrer que, s'il est vrai pour les covariants de la classe $l+1$, il sera vrai pour la classe l.

Soit Φ un de ces derniers covariants; parmi les symboles qui y figurent, les uns, $a, b, \ldots$ représenteront des fonctions d'ordre supérieur à $2l+1$; les autres, a, b,... des fonctions d'ordre $2l$ ou $2l+1$.

Cela posé, Φ pourra s'exprimer linéairement (**27**) au moyen de composés tels que

$$[F, \mathfrak{F}]_\lambda,$$

où F et $\mathfrak{F}$ sont des covariants respectivement formés avec $a, b, \ldots$ et avec a, b,....

Il faut démontrer que chacun de ces composés s'exprime au moyen de termes des espèces X et Y.

76. Si $\lambda = 0$, ce sera évident. En effet, le composé se réduira dans ce cas à un simple produit. Or $\mathfrak{F}$ est formé d'une somme de termes dont les uns, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, sont de l'espèce Y et les autres, $\mathfrak{A}$, de l'espèce X. Ces termes, respectivement multipliés par F, donneront évidemment des termes de même espèce.

Mais nous allons démontrer que la chose sera vraie pour une valeur quelconque de λ, si elle est vraie pour les valeurs moindres.

77. Le covariant F, étant de la classe $l+1$, pourra, par hypothèse, s'exprimer par une somme de termes des espèces X et Y; d'autre part $\mathfrak{F}$ s'exprimera (**68**) par des termes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$, qui sont de l'espèce Y, et des termes $\mathfrak{R}$, qui sont de l'espèce X.

Le composé $[F, \mathfrak{F}]_\lambda$ s'obtient en composant les divers termes de F avec ceux de $\mathfrak{F}$, et ajoutant les résultats. D'ailleurs, si l'un des termes que l'on compose est de l'espèce Y, il en sera de même du résultat (**72**). Il ne reste donc qu'à examiner le résultat de la composition d'un terme de l'espèce X pris parmi ceux de F avec un terme de l'espèce $\mathfrak{R}$.

78. Soient MN et $k\mathrm{RR}_1\ldots$ les deux termes qu'il s'agit de composer (k désignant une constante et R, $\mathrm{R}_1,\ldots$ des produits symboliques de l'espèce R). Le résultat est la moyenne d'une série de termes obtenus en choisissant arbitrairement λ facteurs linéaires σ_x, $\tau_x,\ldots$ parmi ceux qui figurent dans MN, les associant à λ facteurs linéaires s_x, $t_x,\ldots$ arbitrairement choisis parmi ceux de $k\mathrm{RR}_1,\ldots$, et remplaçant dans le produit MN $k\mathrm{RR}_1,\ldots$ chaque couple de facteurs associés $\sigma_x s_x$ par le déterminant correspondant (σs) (**20**).

Soit Ψ celui de ces termes obtenus en choisissant pour les associer ensemble les λ premiers facteurs linéaires de chacun des deux produits symboliques MN, $k\mathrm{RR}_1,\ldots$. On aura (**27**)

$$[\mathrm{MN}, k\mathrm{RR}_1\ldots]_\lambda = \Psi - \Sigma k_{\alpha\beta\gamma}[\mathrm{F}_\alpha, \mathfrak{F}_\beta]_\gamma,$$

F_α et $\mathfrak{F}_\beta$ étant des covariants respectivement formés avec les symboles a, $b,\ldots$ et a, b,... et γ étant un entier $<\lambda$. Les covariants $[\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{F}_\beta]_\gamma$ pourront, par hypothèse, s'exprimer par des termes des espèces X et Y. Il ne restera donc à considérer que le terme Ψ.

Soient d'ailleurs Ω et Π l'ordre et le poids de M, ω et π, ω_1 et $\pi_1,\ldots$ l'ordre et le poids de R, $\mathrm{R}_1,\ldots$.

79. Supposons d'abord $l>0$.

Deux cas seront à distinguer, suivant que λ sera ou non inférieur à Ω.

Premier cas, $\lambda < \Omega$. — Les λ premiers facteurs de M devront être associés aux λ premiers facteurs de $k\mathrm{RR}_1, \ldots$ Supposons que, pour trouver ce nombre de facteurs, il ait fallu prendre tous ceux de R, $\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_{\alpha-1}$ et tout ou partie de ceux de R_α. On aura

$$\Psi = \mathrm{M}'\mathrm{N}k\mathrm{R}_{\alpha+1}, \ldots, \tag{153}$$

M′ étant un covariant formé avec les symboles de M, $\mathrm{R}, \ldots, \mathrm{R}_\alpha$.

Soient Ω' et Π' l'ordre et le poids de M′. On aura

$$\Omega' = \Omega + \omega + \ldots + \omega_\alpha - 2\lambda, \tag{154}$$

$$\Pi' = \Pi + \pi + \ldots + \pi_\alpha. \tag{155}$$

On a d'ailleurs par hypothèse

$$\Omega \overset{=}{<} \mathrm{S}_{l+1}, \quad \Pi \overset{=}{<} \mathrm{T}_{l+1}. \tag{156}$$

On a, d'autre part,

$$\omega + \ldots + \omega_{\alpha-1} < \lambda < \Omega, \tag{157}$$

et enfin, d'après les relations (148) et (152),

$$\omega \overset{=}{<} (2l+1)\,\psi(l), \ldots, \quad \omega_\alpha \overset{=}{<} (2l+1)\,\psi(l), \tag{158}$$

$$\pi \overset{=}{<} \frac{p_{2l}}{l}\,\omega, \ldots, \quad \pi_\alpha \overset{=}{<} \frac{p_{2l}}{l}\,\omega_\alpha. \tag{159}$$

On en conclut

$$\Omega' < \Omega + \omega_\alpha < \mathrm{S}_{l+1} + (2l+1)\,\psi(l) < \mathrm{S}_l, \tag{160}$$

$$\left\{\begin{aligned} \Pi' &\overset{=}{<} \Pi + \frac{p_{2l}}{l}(\omega + \ldots + \omega_\alpha) < \Pi + \frac{p_{2l}}{l}(\Omega + \omega_\alpha) \\ &< \mathrm{T}_{l+1} + \frac{p_{2l}}{l}\mathrm{S}_l < \mathrm{T}_l. \end{aligned}\right. \tag{161}$$

Ces deux inégalités montrent que Ψ est de l'espèce X.

80. *Deuxième cas*, $\lambda \overset{=}{>} \Omega$. — Les Ω facteurs linéaires de M se trouveront associés aux Ω premiers facteurs linéaires du produit $k\mathrm{RR}_1, \ldots$ Supposons que, pour trouver ces Ω facteurs il faille prendre tous les facteurs linéaires de $R, \ldots, R_{\alpha-1}$ et tout ou partie de ceux de R_α. Soit

$$R_\alpha = (ab)^\mu (bc)^\nu (cd)^{\mu'}, \ldots, a_x^\sigma b_x^\tau c_x^\nu, \ldots,$$

et supposons, pour fixer les idées, qu'on ait dû y prendre les $\sigma + \tau$ facteurs a_x, b_x et θ des facteurs c_x.

L'un des deux nombres $\mu' + \upsilon - \theta$, $\nu + \theta$ sera $\overline{\gtrless} l$. En effet, leur somme est égale à $\nu + \mu' + \upsilon$, ordre de la fonction représentée par le symbole c; cet ordre est égal à $2l$ ou à $2l + 1$.

1° Supposons $\mu' + \upsilon - \theta \overline{\gtrless} l$. Partageons les symboles en deux catégories dont la première sera formée des symboles contenus dans M, $R, \ldots, R_{\alpha-1}$, auxquels on joindra les symboles a, b, c. On pourra (**27**) exprimer Ψ en fonction linéaire de composés tels que $[G, \mathcal{G}]_\rho$, où G et $\mathcal{G}$ sont des covariants respectivement formés avec les symboles de première et de seconde catégorie, G étant d'ailleurs divisible par le produit L des déterminants formés par les symboles de la première catégorie dans l'expression de Ψ. Or L absorbe tous ces symboles, sauf $\mu' + \upsilon - \theta$ des symboles c. Donc G a son ordre Ω' au plus égal à $\mu' + \upsilon - \theta$, et par suite au plus égal à l. D'autre part, son poids Π' est au plus égal à $\Pi + \pi + \ldots + \pi_\alpha$ (il sera moindre si c n'est pas le dernier des symboles que contient R_α).

On a d'ailleurs, comme dans le cas précédent,

$$(162) \qquad \Pi' \overline{\gtrless} \Pi + \pi + \ldots + \pi_\alpha < T_l;$$

mais on a, en vertu de la relation (140),

$$(163) \qquad T_l \overline{\gtrless} p_l,$$

et *a fortiori*, Ω' étant $\overline{\gtrless} l$, $T_l \overline{\gtrless} p_{\alpha'}$; on aura donc

$$(164) \qquad \Pi' < p_{\alpha'}, \quad \text{avec} \quad \Omega' \overline{\gtrless} l < n.$$

Donc chacun des composés $[G, \mathcal{G}]_\rho$, à l'aide desquels Ψ est formé, est de l'espèce Y.

2° Supposons $\nu + \theta \overline{\gtrless} l$. On partagera de même les symboles en deux catégories, mais en mettant cette fois c dans la seconde catégorie. Le raisonnement restera le même, L absorbant tous les symboles de la première catégorie, sauf θ symboles de M et ν symboles b.

Le théorème est donc complétement établi.

81. Soit maintenant $l = 0$. Les covariants R, $R_1, \ldots$ se réduiront à des fonctions linéaires telles que a_x, $b_x, \ldots$ ayant pour poids p_1. Cela posé, si $\lambda < \Omega$, on aura

$$\Psi = M'.NkR_\lambda \ldots,$$

M′ étant un covariant formé avec les symboles de M, $R, \ldots, R_{\lambda-1}$, lequel aura évidemment pour ordre $\Omega - \lambda$, et pour poids $\Pi + \lambda p_1$; et comme on a, par hypothèse,

$$\Omega \overline{\gtrless} S_1, \quad \Pi \overline{\gtrless} T_1,$$

on aura, *a fortiori*,

$$\Omega - \lambda \overline{\gtrless} S_1 \overline{\gtrless} S_0. \quad \Pi + \lambda p_1 < \Pi + \Omega p_1 < T_1 + p_1 S_1 < T_0,$$

inégalités qui montrent que Ψ est de l'espèce X.

Soit enfin $\lambda \overline{>} \Omega$. On aura évidemment

$$\Psi = M'.N',$$

M′ étant le $\Omega^{ième}$ composé de M avec $RR_1 \ldots R_{\Omega-1}$, et N′ un terme d'un des composés de N avec $kR_\Omega R_{\Omega+1} \ldots$. D'ailleurs, l'ordre de M′ sera nul, et *a fortiori* $< S_0$; et son poids sera

$$\Pi + \Omega p_1 \overline{\gtrless} T_1 + S_1 p_1 \overline{\gtrless} T_0,$$

d'où il résulte encore que Ψ est de l'espèce X.

82. Théorème. — *Un covariant quelconque Φ peut s'exprimer en fonction entière de covariants dont l'ordre ne surpasse pas S_0, et dont le poids ne surpasse pas T_0*

Le théorème est évident pour les covariants du premier degré, qui ne sont autres que les fonctions A, B,... elles-mêmes.

Nous établirons que, s'il est vrai pour les covariants de degré inférieur à δ, il le sera encore pour les covariants de degré δ.

Ces covariants s'expriment linéairement par des covariants des espèces X et Y, qu'il suffira d'examiner séparément.

83. Or un covariant MN, de l'espèce X, est le produit d'un covariant M, dont l'ordre ne surpasse pas S_0, et dont le poids ne surpasse pas T_0, par un covariant N de degré moindre auquel on pourra appliquer le théorème.

84. Considérons, d'autre part, un covariant $[F, \mathfrak{f}]_\mu$ de l'espèce Y; soient ω l'ordre de F, π son poids, qui sera, par hypothèse, au plus égal à p_ω.

Faisons abstraction, pour un instant, des relations qui existent entre la fonction F et les fonctions primitives A, B,..., et traitons-la comme si c'était une fonction indépendante, d'ordre ω; assignons-lui, en outre, au lieu du poids π, le poids p_ω, qui convient à son ordre. Dans ces nouvelles conditions, $[F, \mathfrak{f}]_\mu$ deviendra un covariant des fonctions A, B,..., F. Son degré sera inférieur à δ; car elle ne contient qu'un seul symbole f, représentant la fonction F, au lieu des symboles a, b,... des fonctions primitives que contenait le covariant F.

On pourra donc, par hypothèse, exprimer $[F, \mathfrak{f}]_\mu$ en fonction entière de covariants K, K',..., dont l'ordre et le poids ne surpasseront pas S_0 et T_0.

Revenons maintenant aux conditions primitives, où F n'est plus une fonction indépendante, mais un covariant de A, B,.... L'expression de $[F, \mathfrak{f}]_\mu$ se déduira de celle qui vient d'être obtenue en éliminant de l'expression des covariants K, K',... le symbole f du covariant F, comme il est indiqué dans la Section III. Il est clair que cette opération n'altérera pas l'ordre de ces covariants. D'autre part, leur poids ne pourra être augmenté, le symbole f, auquel on avait assigné le poids p_ω, se trouvant remplacé par les symboles a, b,..., dont le poids total est π. Donc l'ordre et le poids des covariants K, K',... continueront à ne pas surpasser S_0 et T_0.

85. Corollaire. — *Si le nombre des fonctions* A, B,.. *est limité, leurs covariants s'exprimeront en fonction entière d'un nombre limité de covariants indépendants.*

Il est clair, en effet, qu'on ne pourra former qu'un nombre limité de covariants, dont le poids soit inférieur à T_0.