JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. RESAL

Note sur le mouvement du système de deux pendules simples, dont l'un est attaché à un point fixe et l'autre à la masse qui termine le premier

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 2 (1876), p. 165-168.

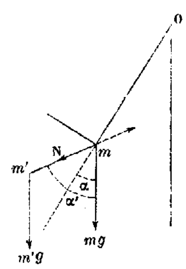
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1876_3_2__165_0>

Note sur le mouvement du système de deux pendules simples, dont l'un est attaché à un point fixe et l'autre à la masse qui termine le premier;

Par M. H. RESAL.

Soient O le point fixe du premier pendule; l, m sa longueur et sa masse; α son inclinaison sur la verticale.

Nous affecterons d'un accent les quantités qui se rapportent au second pendule mm', en désignant par N l'action qu'il exerce sur la masse m.



Nous aurons d'abord

$$(1) \qquad ml\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mg\sin\alpha + \mathrm{N}\sin(\alpha' - \alpha);$$

puis, d'après la théorie du mouvement relatif,

$$(2) \qquad m'l'\frac{d^2\alpha'}{dt^2} = -m'g\sin\alpha' - m'\cos(\alpha' - \alpha)\,l\frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

$$(3) \qquad \mathrm{N} = m'g\cos\alpha' + m'l'\frac{d\alpha^2}{dt^2} - m'\sin(\alpha' - \alpha)\,l\frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Si, comme nous le supposerons dorénavant, les angles α et α' sont suffisamment petits, nous pourrons prendre $\mathrm{N} = m'g$, et, en posant

$$\frac{m'}{m} = \mu, \quad \frac{l'}{l} = \lambda,$$

les équations (1) et (2) deviendront

$$(1') \qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\alpha + \mu\frac{g}{l}(\alpha' - \alpha) = -\frac{g}{l}(1+\mu) + \frac{\mu g}{l}\alpha',$$

$$(2') \qquad \lambda\frac{d^2\alpha'}{dt^2} = -\frac{g}{l}\alpha' - \frac{d^2\alpha}{dt^2};$$

elles seront satisfaites par des valeurs de la forme

$$\alpha = \mathrm{M}\cos k(t+\varepsilon), \quad \alpha' = \mathrm{M}'\cos k(t+\varepsilon),$$

M, M′, k, ε étant des constantes.

En substituant, on trouve

$$(3) \qquad \mathrm{M}' = \frac{\mathrm{M}}{\mu}\left(1 + \mu - k^2\frac{l}{g}\right).$$

$$(4) \qquad \lambda k^4 - (1+\mu)(1+\lambda)\frac{g}{l}k^2 + (1+\mu)\frac{l}{g} = 0;$$

d'où

$$(5) \quad k = \sqrt{\frac{g}{l}\left[\frac{(1+\lambda)(1+\mu)}{2\lambda}\right] \pm \sqrt{\frac{(1+\mu)}{\lambda}\left[\frac{(1+\mu)(1+\lambda)^2}{4\lambda} - 1\right]}}.$$

A l'inspection de l'équation (4), on reconnaît que les deux valeurs qu'elle donne pour k^2 sont, ou réelles et positives, ou imaginaires. La condition pour qu'elles soient réelles est exprimée par

$$(1-\lambda)^2 + (1+\lambda)^2\mu > 0,$$

et sera toujours satisfaite.

Ainsi l'équation (4) a quatre racines réelles égales deux à deux et de signes contraires; mais il nous suffit de considérer les racines positives k_1, k_2. Soient M_1, M'_1 et M_2, M'_2 les valeurs de M et M', qui leur correspondent respectivement, et ε_1, ε_2 celle de ε. Posons

$$h_1 = \frac{1+\mu - k_1^2 \frac{l}{g}}{\mu}, \quad h_2 = \frac{1+\mu - k_2^2 \frac{l}{g}}{\mu}.$$

Les intégrales des équations (1') et (2') seront

$$(6) \qquad \begin{cases} \alpha = M_1 \cos k_1(t+\varepsilon_1) + M_2 \cos k_2(t+\varepsilon_2), \\ \alpha' = h_1 M'_1 \cos k_1(t+\varepsilon_1) + h_2 M_2 \cos k_2(t+\varepsilon_2). \end{cases}$$

Chacun des pendules exécutera donc, en général, simultanément deux oscillations dont les durées seront différentes, mais qui seront respectivement les mêmes pour les deux pendules. Le mouvement oscillatoire ne peut être simple, quelles que soient les conditions initiales, pour les deux pendules, que si $\lambda = 0$, c'est-à-dire quand le système se réduit à un seul pendule.

Il serait encore simple pour le pendule inférieur si l'un des coefficients h_1, h_2 pouvait s'annuler, ou si l'équation (4) pouvait être vérifiée par

$$k^2 = (1+\mu)\frac{g}{l};$$

mais cela ne peut avoir lieu que si $\mu = 0$, ce qui réduit encore le système à un seul pendule.

Les deux oscillations coexisteront ainsi dans les deux pendules sans qu'aucune d'elles puisse s'annuler, sauf dans le cas où les conditions initiales du mouvement sont telles que l'une des constantes M_1, M_2 est nulle.

Lorsque les vitesses initiales sont nulles à l'origine du temps, on a

$$\alpha = M_1 \cos k_1 t + M_2 \cos k_2 t,$$
$$\alpha' = h_1 M_1 \cos k_1 t + h_2 M_2 \cos k_2 t.$$

Soient α_0, α'_0 les écarts à l'origine du temps du pendule supérieur, α'_0 du pendule inférieur; si les deux écarts satisfont à la relation

$\alpha'_0 = \alpha_0 h_1$, nous aurons

$$\alpha = \alpha_0 \cos k_1 t,$$
$$\alpha' = \alpha'_0 \cos k_1 t,$$

et les pendules exécuteront des oscillations simples dans le même temps.

Proposons-nous maintenant de voir si la durée d'une oscillation peut être double de celle de l'autre, ou si l'on peut avoir $k_2^2 = 4k_1^2$; d'après l'équation (4), on aurait

$$5k_1^2 = (1+\mu)(1+\lambda)\frac{g}{l},$$
$$4k_1^4 = (1+\mu)\frac{g^2}{l^2};$$

d'où, par l'élimination de k_1^2,

$$4\lambda^2(1+\mu) + \lambda[8(1+\mu) - 25] + 4(1+\mu) = 0.$$

Si l'on considère λ comme inconnue, cette équation ne peut avoir ses deux racines réelles que si $\mu < \frac{9}{16}$. Ainsi, si cette condition est remplie, on aura pour le pendule inférieur deux longueurs qui rendront *harmoniques*, si l'on peut s'exprimer ainsi, les deux oscillations; ces deux longueurs seront égales dans le cas où $\mu = \frac{9}{16}$.