JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LAGUERRE

Mémoire sur l'application de la théorie des formes binaires à la Géométrie analytique

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 1 (1875), p. 99-120.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1875_3_1__99_0>

Mémoire sur l'application de la théorie des formes binaires à la Géométrie analytique;

PAR M. LAGUERRE.

CHAPITRE PREMIER.

ÉQUATION MIXTE DE LA POLAIRE D'UNE DROITE.

1. Dans ce Mémoire, je rapporterai les figures que j'aurai à considérer à un triangle de référence dont les côtés auront respectivement pour équations

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad z = 0.$$

Dans le but de simplifier le langage (ce qui ne diminue en rien la généralité des résultats obtenus), je supposerai que la droite $z = 0$ coïncide avec la droite de l'infini, en sorte que je supposerai toujours z égal à l'unité, ainsi que toutes les variables analogues z', ζ, ζ',... que j'aurai occasion d'introduire; je les mettrai néanmoins en évidence toutes les fois que cela sera nécessaire pour la clarté ou la simplicité des formules.

Cela posé, $ux + vy + wz = 0$ désignant l'équation d'une droite mobile et $F(u, v, w)$ une forme ternaire, homogène et du degré n, si les paramètres u, v et w sont liés entre eux par la relation

$$F(u, v, w) = 0, \tag{1}$$

la droite enveloppe une courbe de $n^{ième}$ classe K, dont l'équation (1) est l'équation tangentielle.

Soit (x, y) un point quelconque du plan et $\frac{\mu}{\lambda}$ le coefficient angulaire d'une quelconque des tangentes que l'on peut mener de ce point à la courbe K; cette tangente, en désignant par X, Y, Z les coordonnées courantes, a pour équation

$$\mu(X-x)-\lambda(Y-y)=0,$$

ou encore

$$\mu X-\lambda Y+\lambda y-\mu x=0;$$

on en déduit la relation

$$F(\mu, -\lambda, \lambda y-\mu x)=0,$$

qui a pour racines les coefficients angulaires des n tangentes, que l'on peut mener du point donné à la courbe.

Si l'on pose

$$F(\mu, -\lambda, \lambda y-\mu x)=U(\lambda, \mu), \tag{2}$$

U est une forme binaire du degré n par rapport aux variables λ et μ, dont les coefficients sont des polynômes du degré n en x et y; cette forme satisfait d'ailleurs évidemment à l'équation aux différences partielles

$$\lambda\frac{dU}{dx}+\mu\frac{dU}{dy}=0.$$

Je dirai que l'équation $U(\lambda, \mu)=0$ est l'*équation mixte* de la courbe K. J'ai déjà développé quelques-unes des conséquences les plus immédiates que l'on peut tirer de cette notion dans un Mémoire publié dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* [*], et je rappellerai à ce sujet la proposition suivante, dont je ferai un usage continuel :

Soit un nombre quelconque de courbes représentées par les équations mixtes

$$f_0(\lambda, \mu)=0,\quad f_1(\lambda, \mu)=0,\quad f_2(\lambda, \mu)=0, \ldots;$$

si l'on considère un invariant quelconque I *des formes* $f_0, f_1, f_2, \ldots,$

[*] *Mémoire de Géométrie analytique*, 2e série, t. XVII; 1872.

l'équation $I = 0$ *représente une courbe dont le degré est égal au poids de l'invariant.*

Il est utile ici de remarquer que, si I était un polynôme de degré inférieur au poids de l'invariant, relativement aux variables x et y, on devrait, en rendant le polynôme homogène, introduire comme facteur une certaine puissance de z, en sorte que la courbe $I = 0$ contiendrait un certain nombre de fois la droite de l'infini.

2. Le problème principal, que l'on doit résoudre pour employer utilement les équations mixtes dans les questions de Géométrie analytique, est le suivant :

Étant donnée une courbe K *ayant pour équation tangentielle* $F(u, v, w) = 0$ *et pour équation mixte* $U(\lambda, \mu) = 0$, *déduire de cette équation mixte, de ses invariants et des contrevariants de la forme* F, *les équations mixtes des courbes dont les équations s'obtiennent en égalant à zéro les divers covariants de* F.

Et tout d'abord je m'occuperai, tant à cause de leur simplicité qu'à cause de leur importance, des covariants doubles qui représentent les polaires des divers ordres des droites du plan par rapport à K.

3. Dans tout ce qui suit, en désignant par Z une fonction homogène quelconque, du degré n, des variables λ et μ, je représenterai, selon l'usage habituel, par Z_1 et Z_2 les quantités $\frac{1}{n}\frac{dZ}{d\lambda}$ et $\frac{1}{n}\frac{dZ}{d\mu}$, et de même par Z_{11}, Z_{12}, Z_{22} les quantités $\frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2Z}{d\lambda^2}$, $\frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2Z}{d\lambda\, d\mu}$, $\frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2Z}{d\mu^2}$.

D'une façon analogue, je représenterai par F_1, F_2 et F_3 le résultat que l'on obtient en remplaçant dans $\frac{1}{n}\frac{dF}{du}$, $\frac{1}{n}\frac{dF}{dv}$, $\frac{1}{n}\frac{dF}{dw}$ les variables u, v et w par μ, $-\lambda$ et $\lambda y - \mu x$.

F_{11}, F_{12}, ... représenteront de même le résultat que l'on obtient en faisant la même substitution dans $\frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2F}{du^2}$, $\frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2F}{du\, dv}$, ...

Cela posé, étant donnée une droite ayant pour équation

$$\omega = ux + vy + wz = 0,$$

l'équation mixte de sa première polaire est

$$uF_1 + vF_2 + wF_3 = 0.$$

En différentiant successivement par rapport à λ, μ, x et y la relation (2), on obtient les relations suivantes :

$$(3)\qquad U_1 = -F_2 + yF_3, \quad U_2 = F_1 - xF_3,$$

$$(4)\qquad F_3 = -\frac{1}{n\mu}\frac{dU}{dx} = \frac{1}{n\lambda}\frac{dU}{dy};$$

par suite, en désignant par $\Pi_\omega = 0$ l'équation de la polaire [*] de la droite $\omega = 0$, on a

$$\Pi_\omega = uU_2 - vU_1 + \omega F_3.$$

La polaire de la droite de l'infini a évidemment pour équation $F_3 = 0$; en posant

$$(4)'\qquad F_3 = \Pi,$$

on a donc

$$(5)\qquad \Pi_\omega = uU_2 - vU_1 + \omega\Pi.$$

4. Posons

$$U = (a, b, c, \ldots \between \lambda, \mu)^n$$

et

$$\Pi = (\alpha, \beta, \gamma, \ldots \between \lambda, \mu)^{n-1},$$

la comparaison des formules (4) et (4)′ donne immédiatement les relations suivantes :

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{da}{dy} = n\alpha, & \dfrac{db}{dy} = (n-1)\beta, & \dfrac{dc}{dy} = (n-2)\gamma, \ldots, \\ \dfrac{da}{dx} = 0, & \dfrac{db}{dx} = -\alpha, & \dfrac{dc}{dx} = -2\beta, \ldots, \end{cases}$$

qui permettent d'exprimer les fonctions α, β, γ,... au moyen des dérivées partielles des coefficients de U; mais, comme je le montrerai

---

[*] Ici, comme dans toute la suite de ce Mémoire, je désigne simplement sous le nom de *polaire* de la droite sa *première* polaire, qui est de la $(n-1)^{\text{ième}}$ classe.

dans la suite de ce Mémoire, elles nous seront surtout utiles pour exprimer ces dérivées en fonction des coefficients de Π.

5. Soit une courbe K' de classe n' et ayant pour équation mixte $V(\lambda, \mu) = 0$; étant menée une tangente à cette courbe, proposons-nous de trouver le lieu des points M où elle est coupée par sa polaire.

En désignant par $\omega = 0$ l'équation d'une de ces tangentes, je remarque d'abord qu'en désignant par λ' et μ' les coordonnées courantes l'équation mixte de sa polaire est, en vertu de l'équation (5),

$$uU_2(\lambda', \mu') - vU_1(\lambda', \mu') + \omega\Pi(\lambda', \mu') = 0;$$

son équation en coordonnées cartésiennes est le discriminant (par rapport à λ' et μ') de l'équation précédente. Le point M, satisfaisant à l'équation $\omega = 0$, satisfera donc à l'équation $\Delta = 0$, Δ désignant le discriminant du polynôme $uU_2(\lambda', \mu') - vU_1(\lambda', \mu')$.

Le coefficient angulaire de la tangente est d'ailleurs $\frac{u}{-v} = \frac{\mu}{\lambda}$; l'équation du lieu cherché s'obtiendra donc en éliminant λ et μ entre l'équation $V(\lambda, \mu) = 0$ et l'équation $\Delta = 0$, les variables u et v ayant été préalablement remplacées par μ et $-\lambda$ dans le polynôme Δ.

D'où la proposition suivante :

Théorème I. — *En désignant par* $U(\lambda, \mu) = 0$ *et* $V(\lambda, \mu) = 0$ *les équations mixtes de deux courbes* K *et* K', *on obtiendra l'équation du lieu des points où les tangentes à* K' *sont coupées par leurs polaires relativement à* K, *en éliminant* λ *et* μ *entre l'équation* $V(\lambda, \mu) = 0$ *et l'équation* $\Delta(\lambda, \mu) = 0$, Δ *désignant le discriminant pris par rapport à* λ' *et* μ' *du polynôme* $\lambda \frac{dU}{d\lambda'} + \mu \frac{dU}{d\mu'}$.

Il est clair que les considérations précédentes s'appliquent également aux polaires des divers ordres relativement à la courbe K; on peut donc énoncer cette proposition plus générale :

Théorème II. — *En désignant par* $U(\lambda, \mu) = 0$ *et* $V(\lambda, \mu) = 0$ *les équations mixtes des deux courbes* K *et* K', *on obtiendra l'équation du lieu des points où les tangentes à* K' *sont coupées par leurs* $m^{\text{ièmes}}$ *polaires relativement à* K, *en éliminant* λ *et* μ *entre l'équation* $V(\lambda, \mu) = 0$ *et l'équation* $\Delta(\lambda, \mu) = 0$, Δ *désignant le discriminant pris par rapport* *à λ' et μ' de l'émanant*

$$\left(\lambda \frac{d}{d\lambda'} + \mu \frac{d}{d\mu'}\right)^m \mathrm{U}.$$

6. Soit, pour faire une application simple du théorème précédent, une courbe de quatrième classe K^4, dont l'équation mixte soit

$$\mathrm{U} = (a, b, c, d, e)(\lambda, \mu)^4 = 0.$$

En considérant la première polaire, on voit que Δ est le discriminant du polynôme $(a\lambda + b\mu)\lambda'^3 + 3(b\lambda + c\mu)\lambda'^2\mu' + \ldots$, discriminant qui est de la forme $p\mathrm{TU} + q\mathrm{SH}$, en désignant par H le hessien de U, et par T et S son invariant cubique et son invariant quadratique.

Par suite, l'équation du lieu des points où les tangentes à K^4 rencontrent leurs polaires s'obtient en égalant à zéro le résultant de U et de $p\mathrm{TU} + q\mathrm{SH}$, c'est-à-dire $(\mathrm{S}^3 - 27\mathrm{T}^2)^2\mathrm{S}^4$.

On sait d'ailleurs que $\mathrm{S}^3 - 27\mathrm{T}^2 = 0$ est l'équation de K^4 en coordonnées cartésiennes et que $\mathrm{S} = 0$ est l'équation de la courbe du quatrième ordre S, qui passe par les vingt-quatre points de rebroussement de K^4; de là la proposition suivante :

Théorème III. — *Étant donnée une courbe de quatrième classe* K^4, *une quelconque de ses tangentes est coupée par sa polaire en six points, dont deux sont confondus au point de contact; les quatre autres points d'intersection décrivent, lorsque la tangente se déplace, la courbe de quatrième ordre* S, *qui passe par les vingt-quatre points de rebroussement de* K^4.

Réciproquement, si, par un point M *de* S, *on mène les quatre tangentes à* K^4, *leurs polaires relativement à cette courbe passent par* M.

7. L'application la plus importante du théorème II est relative au cas de la polaire conique; Δ est alors le discriminant de

$$\lambda'^2 \frac{d^2\mathrm{U}}{d\lambda^2} + 2\lambda'\mu' \frac{d^2\mathrm{U}}{d\lambda\, d\mu} + \mu'^2 \frac{d^2\mathrm{U}}{d\mu^2},$$

c'est-à-dire le hessien de U; d'où la proposition suivante :

Théorème IV. — *En désignant par* $\mathrm{U}(\lambda, \mu) = 0$ *et par* $\mathrm{V}(\lambda, \mu) = 0$

les équations mixtes de deux courbes K *et* K′, *par* $H(\lambda, \mu)$ *le hessien de* $U(\lambda, \mu)$, *l'équation du lieu des points, où les tangentes à* K′ *sont coupées par leur conique polaire relativement à* K, *s'obtient en égalant à zéro le résultant des polynômes* $H(\lambda, \mu)$ *et* $V(\lambda, \mu)$.

En particulier, soit M un point du plan ayant pour coordonnées ξ et η; en posant pour abréger, comme je le ferai toujours par la suite,

$$X = x - \xi \quad \text{et} \quad Y = y - \eta,$$

l'équation mixte de ce point est

$$\lambda Y - \mu X = 0;$$

d'où cette conclusion :

Le lieu des points où les diverses droites qui passent par un point (ξ, η) *sont rencontrées par leurs coniques polaires, relativement à la courbe* $U(\lambda, \mu) = 0$, *a pour équation*

$$H(X, Y) = 0.$$

On a ainsi l'interprétation géométrique du hessien de la forme U; quant à l'équation $U(X, Y) = 0$, elle représente, comme on le sait, l'ensemble des tangentes que l'on peut mener du point (ξ, η) à la courbe.

8. Considérons la courbe K ayant pour équation mixte $U(\lambda, \mu) = 0$; si une droite se meut tangentiellement à la hessienne de cette courbe, sa conique polaire se compose de deux points, ou encore, si on la considère comme une courbe du second ordre, de la droite qui joint ces deux points, cette droite étant comptée deux fois. Le lieu des intersections des tangentes à la hessienne avec leurs coniques polaires est donc une courbe double, la cayleyenne de K; la proposition suivante permettra d'obtenir son équation.

Théorème V. — *Étant donnée une courbe* K *ayant pour équation mixte* $U(\lambda, \mu) = 0$, *en désignant par* $H(\lambda, \mu)$ *le hessien de* U *et par* $W(\lambda, \mu) = 0$ *l'équation mixte de la hessienne de* K, *si l'on forme le résultant de* $H(\lambda, \mu)$ *et de* $W(\lambda, \mu)$, *ce résultant est un carré parfait* R^2, *et* $R = 0$ *est l'équation cartésienne de la cayleyenne de* K.

CHAPITRE II.

ÉQUATION MIXTE DE LA HESSIENNE D'UNE COURBE. ÉQUATION DE LA CAYLEYENNE.

9. Étant données une courbe K de classe n, dont l'équation tangentielle est

$$F(u, v, w) = 0,$$

et l'équation mixte

$$U(\lambda, \mu) = F(\mu, -\lambda, \lambda y - \mu x) = 0,$$

l'équation tangentielle de sa hessienne est, comme on le sait,

$$\frac{1}{n(n-1)}\begin{vmatrix} \frac{d^2F}{du^2} & \frac{d^2F}{du\,dv} & \frac{d^2F}{du\,dw} \\ \frac{d^2F}{du\,dv} & \frac{d^2F}{dv^2} & \frac{d^2F}{dv\,dw} \\ \frac{d^2F}{du\,dw} & \frac{d^2F}{dv\,dw} & \frac{d^2F}{dw^2} \end{vmatrix} = 0;$$

son équation mixte sera par suite

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Des équations (3) et (4) on déduit

$$\begin{aligned} U_{11} &= F_{22} - 2yF_{23} + y^2F_{33}, \\ U_{12} &= -F_{12} + xF_{23} + yF_{13} - xyF_{33}, \\ U_{22} &= F_{11} - 2xF_{13} + x^2F_{33}. \end{aligned}$$

En désignant par $\Pi = 0$ l'équation de la polaire de la droite de l'infini, l'équation $(4)'$ donne $\Pi = F_3$; d'où les relations

$$\Pi_1 = - F_{23} + y F_{23}, \quad \Pi_2 = F_{13} - x F_{33}.$$

En posant d'ailleurs $F_{33} = \varpi$, on sait que $\varpi = 0$ est l'équation mixte de la deuxième polaire de la droite de l'infini.

Des relations qui précèdent résulte l'identité

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_1 \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 & \varpi \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} F_{22} - 2y F_{23} + y^2 F_{33} & -F_{12} + x F_{23} + y F_{13} - xy F_{33} & -F_{23} + y F_{33} \\ -F_{12} + x F_{23} + y F_{13} - xy F_{33} & F_{11} - 2x F_{13} + x^2 F_{33} & F_{13} - x F_{33} \\ - F_{23} + y F_{33} & F_{13} - x F_{33} & F_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & y \\ -1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ y & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{vmatrix}.$$

L'équation mixte de la hessienne s'obtient en égalant à zéro le déterminant qui précède; d'où la proposition suivante :

Théorème VI. — *En désignant respectivement par* $U(\lambda, \mu) = 0$, $\Pi(\lambda, \mu) = 0$ *et* $\varpi(\lambda, \mu) = 0$ *les équations mixtes d'une courbe, de la première polaire et de la deuxième polaire de la droite de l'infini relativement à cette courbe, l'équation mixte de la hessienne de la courbe est* $W(\lambda, \mu) = 0$, W *désignant le polynôme*

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_1 \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 & \varpi \end{vmatrix}.$$

10. Cette forme remarquable de l'équation mixte donne lieu à diverses conséquences importantes que l'on peut en déduire, sans que l'on ait même besoin de déterminer l'expression des coefficients de Π et ϖ.

En particulier, je citerai les deux propositions suivantes, relatives aux courbes de troisième et de quatrième classe :

THÉORÈME. — *En désignant par* $(a, b, c, d) = 0$ [*] *l'équation mixte d'une courbe de troisième classe* K *et par* $(a', b', c', d') = 0$ *l'équation mixte d'une courbe quelconque de même classe* K' *tangente aux neuf tangentes de rebroussement de la première, si l'on forme l'invariant* $I = ad' - 3bc' + 3cb' - da'$, *ce polynôme est identiquement nul.*

Démonstration. — Comme I est un *combinant* des deux formes (a, b, c, d) et (a', b', c', d'), il suffit de démontrer la proposition pour l'une quelconque des courbes du faisceau (K, K'), par exemple pour la hessienne. Supposons (a, b, c, d) réduite à la forme canonique $\lambda^3 + \mu^3$, on aura simplement $I = d' - a'$. Or, en posant

$$\Pi = (\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{et} \quad \varpi = (A, B),$$

on déduit du théorème précédent :

$$(a', b', c', d') = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \alpha\lambda + \beta\mu \\ 0 & \mu & \beta\lambda + \gamma\mu \\ \alpha\lambda + \beta\mu & \beta\lambda + \gamma\mu & A\lambda + B\mu \end{vmatrix};$$

d'où

$$a' = -\beta^2 \quad \text{et} \quad d' = -\beta^2;$$

par suite

$$I = \beta^2 - \beta^2 = 0.$$

La proposition est donc démontrée.

THÉORÈME. — *En désignant par* $U = (a, b, c, d, e) = 0$ *l'équation mixte d'une courbe de quatrième classe* K *et par* (A, B, C, D, E, F, G) *le covariant sextique de* U, *par* $(a', b', c', d', e', f', g') = 0$ *l'équation mixte d'une courbe quelconque de sixième classe* K' *tangente aux vingt-quatre tangentes de rebroussement de* K; *si l'on forme l'invariant* $I = Ag' - 6Bf' + 15Ce' - 20Dd' + 15Ec' - 6Fb' + Ga'$, *ce polynôme est identiquement nul.*

---

[*] Ici, comme je le ferai souvent dans la suite quand il n'y aura lieu de craindre aucune ambiguïté, je pose, pour abréger,

$$(a, b, c, d \between \lambda, \mu)^4 = (a, b, c, d).$$

Démonstration. — La hessienne étant tangente aux vingt-quatre tangentes de rebroussement de K, l'équation mixte de K' sera de la forme $W(\lambda, \mu) + U(\lambda, \mu)V(\lambda, \mu)$, $V(\lambda, \mu) = 0$ étant l'équation mixte d'une conique quelconque.

Si nous supposons U réduite à sa forme canonique $\lambda^4 + 6m\lambda^2\mu^2 + \mu^4$, on a simplement

$$I = (1 - 9m^2)(b' - f').$$

Or le théorème V donne la relation

$$(a', b', c', d', e', f', g') = (\lambda^4 + 6m\lambda^2\mu^2 + \mu^4)(P\lambda^2 + 2Q\lambda\mu + R\mu^2)$$
$$+ \begin{vmatrix} \lambda^2 + m\mu^2 & 2m\lambda\mu & \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2 \\ 2m\lambda\mu & m\lambda^2 + \mu^2 & \beta\lambda^2 + 2\gamma\lambda\mu + \delta\mu^2 \\ \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2 & \beta\lambda^2 + 2\gamma\lambda\mu + \delta\mu^2 & P'\lambda^2 + 2Q'\lambda\mu + R'\mu^2 \end{vmatrix},$$

en posant, pour abréger,

$$\Pi = (\alpha, \beta, \gamma, \delta), \quad \varpi = (P', Q', R') \quad \text{et} \quad V = (P, Q, R).$$

On déduit de là, après quelques réductions faciles,

$$6b' = 6f' = 2Q + 2mQ' - 4\beta\gamma$$

et, par suite,

$$I = 0.$$

La proposition est donc démontrée.

11. On peut donner à la formule énoncée dans le théorème V une forme un peu plus générale et d'un usage plus commode pour les applications.

Soient $\Pi_\omega = 0$ et $\varpi_\omega = 0$ les équations mixtes de la première polaire et de la deuxième polaire de la droite $\omega = ux + vy + wz = 0$; on aura, d'après la formule (5),

$$\Pi_\omega = uU_2 - vU_1 + \omega\Pi.$$

On en déduit, en désignant par $\Pi_{\omega,1}$, $\Pi_{\omega,2}, \ldots$ les quantités analogues

Π_1 et Π_2, mais relatives à Π_ω,

$$\begin{aligned}
\Pi_{\omega,1} &= u\mathrm{U}_{12} - v\mathrm{U}_{11} + \omega\Pi_1,\\
\Pi_{\omega,2} &= u\mathrm{U}_{22} - v\mathrm{U}_{12} + \omega\Pi_2,\\
\varpi_\omega &= u\Pi_{\omega,2} - v\Pi_{\omega,1} + \omega\varpi',
\end{aligned}$$

$\varpi' = 0$ étant l'équation mixte de la polaire de la droite de l'infini, relativement à la première polaire de la droite $\omega = 0$, ou, ce qui est la même chose, de la polaire de cette droite relativement à la première polaire de la droite de l'infini.

On a donc

$$\varpi' = u\Pi_2 - v\Pi_1 + \omega\varpi$$

et, par suite,

$$\varpi_\omega = u\Pi_{\omega,2} - v\Pi_{\omega,1} + \omega(u\Pi_2 - v\Pi_1) + \omega^2\varpi. \tag{5'}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \mathrm{U}_{11} & \mathrm{U}_{12} & \Pi_{\omega,1} \\ \mathrm{U}_{12} & \mathrm{U}_{22} & \Pi_{\omega,2} \\ \Pi_{\omega,1} & \Pi_{\omega,2} & \varpi_\omega \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} \mathrm{U}_{11} & \mathrm{U}_{12} & u\mathrm{U}_{12} - v\mathrm{U}_{11} + \omega\Pi_1 \\ \mathrm{U}_{12} & \mathrm{U}_{22} & u\mathrm{U}_{22} - v\mathrm{U}_{12} + \omega\Pi_2 \\ \Pi_{\omega,1} & \Pi_{\omega,2} & u\Pi_{\omega,2} - v\Pi_{\omega,1} + \omega(u\Pi_2 - v\Pi_1) + \omega^2\varpi \end{vmatrix}\\
&= \omega\begin{vmatrix} \mathrm{U}_{11} & \mathrm{U}_{12} & \Pi_1 \\ \mathrm{U}_{12} & \mathrm{U}_{22} & \Pi_2 \\ u\mathrm{U}_{12} - v\mathrm{U}_{11} + \omega\Pi_1 & u\mathrm{U}_{22} - v\mathrm{U}_{12} + \omega\Pi_2 & u\Pi_2 - v\Pi_1 + \omega\varpi \end{vmatrix}\\
&= \omega^2\begin{vmatrix} \mathrm{U}_{11} & \mathrm{U}_{12} & \Pi_1 \\ \mathrm{U}_{12} & \mathrm{U}_{22} & \Pi_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 & \varpi \end{vmatrix} = \omega^2\mathrm{W}(\lambda, \mu);
\end{aligned}$$

d'où la formule suivante, qui permet d'exprimer le polynôme $\mathrm{W}(\lambda, \mu)$ au moyen des deux premières polaires d'une droite quelconque

$\omega = ux + vy + wz = 0$:

$$(7) \qquad \omega^2 W(\lambda, \mu) = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_{\omega,1} \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_{\omega,2} \\ \Pi_{\omega,1} & \Pi_{\omega,2} & \varpi_\omega \end{vmatrix} = \varpi_\omega H - \Omega,$$

en posant

$$\Omega = U_{11}\Pi^2_{\omega,2} - 2U_{12}\Pi_{\omega,1}\Pi_{\omega,2} + U_{22}\Pi^2_{\omega,1}$$

et en désignant par H le hessien de U.

12. J'ai montré (théorème IV) que le résultant de H et de W était égal à Θ^2, Θ désignant le contrevariant de la forme primitive $F(u, v, w)$ qui, égale à zéro, donne l'équation de la cayleyenne; on déduit de ce qui précède

$$W = \frac{\varpi H - \Omega}{\omega};$$

le résultant Θ^2 est donc le résultant de H et de $\frac{-\Omega}{\omega}$; d'où la proposition suivante :

Théorème VI. — *Si l'on forme le résultant du polynôme* H *et* $-\Omega$, *ce résultant est un carré parfait dont la racine est égale à* $\omega^{2(n-2)}\Theta$.

Remarque I. — Le premier terme de Ω est d'un poids égal à 2, le dernier terme de H d'un poids égal à $2(n-1)$: leur résultant est donc d'un poids égal à $4(n-2) + 6(n-1)(n-2)$, et, en vertu de la proposition fondamentale donnée (1), Θ est du degré

$$2(n-2) + 3(n-1(n-2) - 2(n-2) = 3(n-1)(n-2).$$

C'est en effet, comme on le sait, le degré de la cayleyenne.

Remarque II. — La proposition précédente donne une infinité de formes pour Θ, puisque u, v et w sont arbitraires; on peut, par exemple, remplacer ces quantités par les dérivées partielles d'un contrevariant quelconque Φ de F, et la proposition précédente donnera une expression de $\Phi^{2(n-2)}\Theta$.

Remarque III. — On peut trouver d'autres expressions de Θ souvent plus faciles à calculer. On a, par exemple, identiquement

$$\Omega U = [\Pi_{\omega,1}(\lambda U_{12} + \mu U_{22}) - \Pi_{\omega,2}(\lambda U_{11} + \mu U_{12})]^2 - H(\lambda \Pi_{\omega,1} + \mu \Pi_{\omega,2})^2.$$

Le résultant de H et de ΩU, c'est-à-dire $(\omega^{2(n-2)}\Theta\Delta)^2$, en désignant par Δ le discriminant de U [*], est donc égal au résultant de H et de

$$[\Pi_{\omega,1}(\lambda U_{12} + \mu U_{22}) - \Pi_{\omega,2}(\lambda U_{11} + \mu U_{12})]^2.$$

D'où cette conséquence :

Si l'on forme le résultant de H *et de* $\Pi_{\omega,1} U_2 - \Pi_{\omega,2} U_1$, *ce résultant est égal à* $\omega^{2(n-2)}\Delta\Theta$.

CHAPITRE III.

DÉTERMINATION DE L'ÉQUATION MIXTE DE LA POLAIRE D'UNE DROITE.

13. Les formules (6) données précédemment (4) permettent d'exprimer les coefficients de l'équation mixte de la polaire de la droite de l'infini (et par suite de la polaire d'une droite quelconque) au moyen des dérivées partielles des coefficients de U; mais il est préférable d'introduire les dérivées partielles d'un certain nombre d'invariants de cette forme.

Je m'appuierai sur la proposition suivante :

Théorème VII. — *Étant donné un invariant quelconque* I *de la forme* U, *en désignant son poids par* i, *on a les deux équations*

$$(8) \qquad \begin{cases} \alpha \dfrac{dI}{db} + 2\beta \dfrac{dI}{dc} + 3\gamma \dfrac{dI}{dd} + \ldots = \mathfrak{y}_1, \\ n\alpha \dfrac{dI}{da} (n-1)\beta \dfrac{dI}{db} + (n-2)\gamma \dfrac{dI}{dc} - \ldots = \mathfrak{x}_1, \end{cases}$$

où $(a, b, c, \ldots) = 0$ *est l'équation mixte de* K *et* $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0$ *l'équa-*

---

[*] Δ est le *réciprocant* de F; l'équation $\Delta = 0$ représente en coordonnées cartésiennes la courbe K.

tion mixte de la polaire de la droite $\omega = 0$ *et où j'ai posé, pour abréger,*

$$\mathfrak{x}_1 = -ivI + \omega\frac{dI}{dy},\quad \mathfrak{y}_1 = uiI - \omega\frac{dI}{dx}.$$

Démonstration. — Des formules (5) et (6) on déduit facilement les relations suivantes :

$$(6')\left\{\begin{aligned}
&n\alpha = \omega\frac{da}{dy} + n(ub - va),\\
&(n-1)\beta = \omega\frac{db}{dy} + (n-1)(uc - vb),\\
&(n-2)\gamma = \omega\frac{dc}{dy} + (n-2)(ud - vc) + \ldots,\\
&0 = \frac{da}{dx},\quad \alpha = -\omega\frac{db}{dx} + ub - va,\quad 2\beta = -\omega\frac{dc}{dx} + 2(uc - vb)\ldots;
\end{aligned}\right.$$

par suite, on a

$$\begin{aligned}
\omega\frac{dI}{dx} &= \frac{dI}{db}(-\alpha + ub - va) + \frac{dI}{dc}(-2\beta + 2uc - 2vb) + \ldots\\
&= -\alpha\frac{dI}{db} - 2\beta\frac{dI}{dc} - 3\gamma\frac{dI}{dd} + u\left(b\frac{dI}{db} + 2c\frac{dI}{dc} + \ldots\right)\\
&\quad - v\left(a\frac{dI}{db} + 2b\frac{dI}{dc} + \ldots\right)
\end{aligned}$$

ou encore, d'après les propriétés bien connues des invariants,

$$\omega\frac{dI}{dx} = -\left(\alpha\frac{dI}{db} + 2\beta\frac{dI}{dc} + 3\gamma\frac{dI}{dd} + \ldots\right) + uiI;$$

d'où enfin

$$\alpha\frac{dI}{db} + 2\beta\frac{dI}{dc} + 3\gamma\frac{dI}{dd} + \ldots = +uiI - \omega\frac{dI}{dx}.$$

L'autre formule se démontrerait de la même manière.

14. Dans l'application des formules précédentes, je considérerai deux cas suivant que la courbe K est de classe paire ou de classe impaire.

Dans le premier cas, le nombre des coefficients α, β,. . inconnus est pair; considérons $\frac{n}{2}$ invariants I, I′, I″,... de la forme U et désignons par x_I, $\mathfrak{y}_I$, $x_{I'}$, $\mathfrak{y}_{I'}$,... les polynômes formés de la façon indiquée au moyen des dérivées partielles de ces invariants : nous obtiendrons n équations linéaires de la forme (8), qui permettront d'exprimer les coefficients inconnus en fonction des coefficients de U et des polynômes x_I, $\mathfrak{y}_I$, $x_{I'}$,....

L'introduction de ces polynômes se trouve justifiée par le fait important que le polynôme Π_ω devient alors un covariant multiple de U, les divers couples de variables étant λ, μ; x_I, $\mathfrak{y}_I$;....

15. Si la courbe est de classe impaire, nous choisirons $\frac{n-1}{2}$ invariants qui fourniront $(n-1)$ relations linéaires entre les inconnues; une dernière relation linéaire peut être obtenue de la façon suivante. La méthode est évidemment générale, mais je ne l'exposerai que pour le cas d'une courbe de cinquième classe.

Soient $U = (a, b, c, d, e, f) = 0$ l'équation mixte d'une courbe de cinquième classe et (A, B, C, D) un covariant quelconque du troisième ordre de U; en désignant, pour un instant, par $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0, \varepsilon_0) = 0$ l'équation de la polaire de la droite de l'infini, posons

$$\Upsilon = \begin{vmatrix} a & b & \alpha_0 & A & 0 \\ 4b & 4c & 4\beta_0 & 3B & A \\ 6c & 6d & 6\gamma_0 & 3C & 3B \\ 4d & 4e & 4\delta_0 & D & 3C \\ e & f & \varepsilon_0 & 0 & D \end{vmatrix};$$

en appelant $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = 0$ l'équation mixte de la polaire de la droite $\omega = ux + vy + wz = 0$, on déduira de la formule (5)

$$\omega\Upsilon = \begin{vmatrix} a & b & \alpha & A & 0 \\ 4b & 4c & 4\beta & 3B & A \\ 6c & 6d & 6\gamma & 3C & 3B \\ 4d & 4e & 4\delta & D & 3C \\ e & f & \varepsilon & 0 & D \end{vmatrix};$$

d'où l'on conclut que Υ est un contrevariant de la forme fondamentale F [*].

En développant cette égalité, on obtiendra une équation linéaire qui, avec les $n-1$ autres précédemment obtenues, permettra d'exprimer les coefficients de Π_ω.

16. Des relations établies plus haut, n° **13**, on peut déduire une proposition générale, dont se déduisent un grand nombre de propriétés des courbes algébriques.

Soit I un invariant quelconque de U, en sorte que l'on ait les relations

$$\alpha\frac{dI}{db}+2\beta\frac{dI}{dc}+3\gamma\frac{dI}{dd}+\ldots=uiI-\omega\frac{dI}{dx},$$

$$n\alpha\frac{dI}{da}+(n-1)\beta\frac{dI}{db}+(n-2)\gamma\frac{dI}{dc}+\ldots=-viI+\omega\frac{dI}{dy}.$$

Considérons la courbe K' composée de la polaire de la droite $\omega=0$ et d'un point ξ,η; en posant $X=x-\xi$ et $Y=y-\eta$, l'équation mixte de ce point est

$$\lambda Y-\mu X=0;$$

par suite, l'équation mixte de K' est

$$n\left[\alpha\lambda^{n-1}+(n-1)\beta\lambda^{n-2}\mu+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\gamma\lambda^{n-3}\mu^2+\ldots\right](\lambda Y-\mu X)=0,$$

ou bien encore

$$[n\alpha Y,\ (n-1)\beta Y-\alpha X,\ (n-2)\gamma Y-2\alpha X,\ldots](\lambda,\mu)^n=0.$$

En représentant le premier membre de cette équation par $(a',b',c',\ldots)$,

---

[*] Il est bien clair que ce procédé peut être varié de bien des manières et que (si n est >4) il peut être aussi employé quand n est pair.

Cette équation, ainsi que beaucoup de celles établies dans ce Mémoire, est susceptible de diverses interprétations géométriques; mais leur développement m'écarterait trop de mon sujet principal.

on trouvera, par la valeur de l'invariant,

$$\mathfrak{J} = a'\frac{dI}{da} + b'\frac{dI}{db} + c'\frac{dI}{dc} + \ldots,$$

$$\mathfrak{J} = Y\left[n\alpha\frac{dI}{da} + (n-1)\beta\frac{dI}{db}\ldots\right] - X\left(\alpha\frac{dI}{db} + 2\beta\frac{dI}{dc}\ldots\right),$$

ou encore, en vertu des relations transcrites ci-dessus,

$$\mathfrak{J} = \omega\left(X\frac{dI}{dx} + Y\frac{dI}{dy}\right) - iI(uX + vY).$$

Posons

$$u\xi + v\eta + z\zeta = \omega',$$

on aura

$$uX + vY = \omega - \omega'$$

et

$$\mathfrak{J} = \omega\left[(x-\xi)\frac{dI}{dx} + (y-\eta)\frac{dI}{dy} - iI\right] + i\omega' I.$$

Remarquons maintenant que le poids i de l'invariant I est précisément le degré de ce polynôme en x, y, z; d'après le théorème des fonctions homogènes, on aura donc

$$\omega\left(\xi\frac{dI}{dx} + \eta\frac{dI}{dy} + \zeta\frac{dI}{dz}\right) = i\omega' I - \mathfrak{J} \tag{9}$$

et, par suite, si le point ξ, η est sur la droite $\omega = 0$,

$$\omega\left(\xi\frac{dI}{dx} + \eta\frac{dI}{dy} + \zeta\frac{dI}{dz}\right) = -\mathfrak{J}. \tag{10}$$

Je ferai remarquer que la quantité entre parenthèses dans le premier membre de cette équation représente, quand on l'égale à zéro, la polaire du point (ξ, η) relativement à la courbe $I = 0$.

17. Le cas particulier le plus intéressant à considérer est celui où, K étant de classe paire, on considère l'invariant quadratique I de U.

En convenant d'appeler *faisceaux harmoniques* deux faisceaux de n droites, tels que les équations du degré n qui les déterminent aient leur invariant quadratique nul, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Étant donnée une courbe* K *de classe* $2n$, *si l'on* *considère la courbe* C *du degré* $2n$, *dont l'équation s'obtient en égalant à zéro l'invariant quadratique de l'équation mixte de* K *et le lieu des points d'où l'on voit suivant deux faisceaux harmoniques : 1° la polaire d'une droite quelconque* D, *prise par rapport à* K, *et un point* M *de cette droite; 2° la courbe* K, *ce lieu se compose de la droite* D *elle-même et de la courbe du* $(2n-1)$ *ordre qui est la polaire du point* M *relativement à* C.

CHAPITRE IV.

APPLICATION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE AUX COURBES DE TROISIÈME ET DE QUATRIÈME CLASSE.

18. Considérons une courbe de troisième classe K, dont l'équation mixte soit

$$U = (a, b, c, d) = 0;$$

soit Δ son discriminant, en sorte que $\Delta = 0$ est l'équation de la courbe en coordonnées cartésiennes. En appelant H et J le hessien et le covariant cubique de U, je poserai, pour abréger,

$$H = (A, B, C) \quad \text{et} \quad J = (a', b', c', d').$$

Cela posé, en considérant l'invariant Δ, les équations (8) donnent les relations

$$\begin{aligned} \alpha\frac{d\Delta}{db} + 2\beta\frac{d\Delta}{dc} + 3\gamma\frac{d\Delta}{dd} &= \quad 6u\Delta - \omega\frac{d\Delta}{dx}, \\ 3\alpha\frac{d\Delta}{da} + 2\beta\frac{d\Delta}{db} + \gamma\,\frac{d\Delta}{dc} &= -6v\Delta + \omega\frac{d\Delta}{dy}, \end{aligned}$$

que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} -d'\alpha + 2c'\beta - b'\gamma &= -v\Delta + \frac{1}{6}\omega\frac{d\Delta}{dy} = \mathfrak{x}, \\ c'\alpha - 2b'\beta + a'\gamma &= \quad u\Delta - \frac{1}{6}\omega\frac{d\Delta}{dx} = \mathfrak{y}. \end{aligned}$$

Posons en outre (*voir* n° **15**)

$$\omega\Theta = \begin{vmatrix} a & b & \alpha \\ b & c & \beta \\ c & d & \gamma \end{vmatrix};$$

Θ est un contrevariant de la forme $F(u, v, w)$ qui, égalé à zéro, donne l'équation tangentielle de K; dans le cas actuel, l'équation $\Theta = 0$ représente, comme il est facile de le voir, la cayleyenne de K [*].

Le déterminant développé donne l'égalité

$$\alpha C - 2\beta B + \gamma A = \omega\Theta,$$

qui, jointe aux égalités précédentes, permet d'obtenir α, β et γ par les formules

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta\alpha &= a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y} - 2A\omega\Theta,\\ \Delta\beta &= b\mathfrak{x} + c\mathfrak{y} - 2B\omega\Theta,\\ \Delta\gamma &= c\mathfrak{x} + d\mathfrak{y} - 2C\omega\Theta,\end{aligned}\right.$$

qui, quand on réduit U à sa forme canonique $a\lambda^3 + d\mu^3$, prennent la forme très-simple suivante :

$$(11')\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta\alpha &= a\mathfrak{x},\\ \Delta\beta &= -ad\omega\Theta,\\ \Delta\gamma &= d\mathfrak{y}.\end{aligned}\right.$$

En désignant, comme je l'ai fait jusqu'ici, par $\Pi_\omega = 0$ l'équation de la polaire de la droite $\omega = 0$, relativement à la courbe K, on aura

$$(12)\qquad \Delta\Pi_\omega = \mathfrak{x}U_1 + \mathfrak{y}U_2 - 2\omega\Theta H.$$

L'équation en coordonnées cartésiennes de cette polaire est

$$\alpha\gamma - \beta^2 = 0;$$

en nous servant de la forme canonique de la forme U, on trouve immédiatement

$$\Delta^2(\alpha\gamma - \beta^2) = ad\mathfrak{x}\mathfrak{y} - a^2 d^2 \omega^2 \Theta^2;$$

d'où, généralement,

$$\Delta^2(\alpha\gamma - \beta^2) = H(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) - \omega^2 \Delta\Theta^2.$$

[*] *Voir* mon *Mémoire de Géométrie analytique*, déjà cité, n° 14.

19. Considérons maintenant une courbe de quatrième classe K ayant pour équation mixte $U = (a, b, c, d, e) = 0$; soient S et T les invariants quadratique et cubique de U; son discriminant Δ est égal à $S^3 - 27T^2$, et l'on sait d'ailleurs que $\Delta = 0$ est l'équation de la courbe en coordonnées cartésiennes. Je représenterai, pour abréger, le hessien H de U par la notation (a', b', c', d', e').

Cela posé, en considérant les invariants S et T, les formules (8) donnent les quatre relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\alpha e - 3\beta d - 3\gamma c - \delta b &= - \quad vS + \frac{\omega}{4}\frac{dS}{dy} = -S_1,\\
-\alpha d + 3\beta c - 3\gamma b + \delta a &= \quad uS - \frac{\omega}{4}\frac{dS}{dx} = -S_2,\\
\alpha e' - 3\beta d' + 3\gamma c' - \delta b' &= -\frac{3}{2}vT + \frac{\omega}{4}\frac{dT}{dy} = -T_1,\\
-\alpha d' + 3\beta c' - 3\gamma b' + \delta a' &= \frac{3}{2}uT - \frac{\omega}{4}\frac{dT}{dx} = -T_2,
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha &= a(18TT_1 - S^2S_1) + b(18TT_2 - S^2S_2)\\
&\quad + a'(18TS_1 - 12ST_1) + b'(18TS_2 - 12ST_2),\\
\Delta\beta &= b(18TT_1 - S^2S_1) + c(18TT_2 - S^2S_2)\\
&\quad + b'(18TS_1 - 12ST_1) + c'(18TS_2 - 12ST_2),\\
\Delta\gamma &= c(18TT_1 - S^2S_1) + d(18TT_2 - S^2S_2)\\
&\quad + c'(18TS_1 - 12ST_1) + d'(18TS_2 - 12ST_2),\\
\Delta\delta &= d(18TT_1 - S^2S_1) + d(18TT_2 - S^2S_2)\\
&\quad + d'(18TS_1 - 12ST_1) + e'(18TS_2 - 12ST_2)
\end{aligned}$$

Posons enfin, pour abréger,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x} &= 18TT_1 - S^2S_1 = \quad \frac{\omega}{12}\frac{d\Delta}{dy} - v\Delta,\\
\mathfrak{y} &= 18TT_2 - S^2S_2 = -\frac{\omega}{12}\frac{d\Delta}{dx} + u\Delta,\\
\mathfrak{x}' &= 2S\frac{dT}{dy} - 3T\frac{dS}{dy}, \quad \mathfrak{y}' = -2S\frac{dT}{dx} + 3T\frac{dS}{dx};
\end{aligned}$$

on aura enfin

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta\alpha &= a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y} + \frac{3\omega}{2}(a'\mathfrak{x}' + b'\mathfrak{y}'),\\ \Delta\beta &= b\mathfrak{x} + c\mathfrak{y} + \frac{3\omega}{2}(b'\mathfrak{x}' + c'\mathfrak{y}'),\\ \Delta\gamma &= c\mathfrak{x} + d\mathfrak{y} + \frac{3\omega}{2}(c'\mathfrak{x}' + d'\mathfrak{y}'),\\ \Delta\delta &= d\mathfrak{x} + e\mathfrak{y} + \frac{3\omega}{2}(d'\mathfrak{x}' + e'\mathfrak{y}'); \end{aligned}\right.$$

d'où encore

$$(14)\qquad \Delta\Pi_\omega = \mathfrak{x}U_1 + \mathfrak{y}U_2 + \frac{3\omega}{2}(\mathfrak{x}'H_1 + \mathfrak{y}'H_2).$$

20. J'ai montré (n° **12**, *Remarque III*) qu'en désignant par Θ l'équation de la cayleyenne de K, $\omega^4\Delta\Theta$ était le résultant de H et du polynôme $\Pi_{\omega,1}U_2 - \Pi_{\omega,2}U_1$; dans le cas actuel, ce polynôme se compose de deux parties : la première $\mathfrak{x}(U_{11}U_2 - U_{12}U_1) + \mathfrak{y}(U_{21}U_2 - U_{22}U_1)$ est exactement divisible par H : il n'y a donc pas à en tenir compte; la seconde, $Z = \frac{\omega}{4} \times \frac{\mathfrak{x}'(H_{11}U_2 - H_{12}U_1) + \mathfrak{y}'(H_{12}U_2 - H_{22}U_1)}{\Delta}$; le résultant de Z et de H est donc égal à $\omega^4\Delta\Theta$. Sans faire de calcul, on voit que ce résultat est le produit par $\frac{\omega^4}{\Delta^4}$ d'un covariant du quatrième degré et du vingtième ordre; on a donc

$$\Delta^5\Theta = p\,TU(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}') + q\,H(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'),$$

p et q désignant des invariants de U (fonctions entières, par conséquent, de S et de T) du seizième et du dix-huitième ordre.