JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. MANNHEIM

Sur les surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 1 (1875), p. 57-74.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1875_3_1__57_0>

Sur les surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions;

Par M. A. MANNHEIM.

Dans les Communications que j'ai faites à l'Académie des Sciences, dans le courant de mars 1873 (*voir* les *Comptes rendus*, t. LXXVI, p. 551 et 635), je me suis occupé des lignes décrites par les points d'une figure de forme invariable, dont le déplacement est assujetti à cinq conditions.

Je me propose aujourd'hui d'étudier ce qui est relatif aux surfaces trajectoires des points d'une figure assujettie seulement à quatre conditions.

Je commence par le cas où la figure est une simple ligne droite. Si trois points d'une droite sont assujettis à rester sur trois surfaces données, le déplacement de cette droite peut être effectué d'une infinité de manières. A chacun de ces déplacements correspond, pour un point de la droite, une ligne trajectoire, et toutes les lignes trajectoires relatives à un même point appartiennent à ce que j'ai appelé la *surface trajectoire* de ce point [*].

C'est dans mon Mémoire intitulé *Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable* qu'on trouve, pour la première fois, des recherches relatives aux surfaces trajectoires des points d'une figure mobile.

Ces surfaces trajectoires des points d'une figure constituent dans l'espace l'élément correspondant aux lignes décrites pendant le déplacement d'une figure plane sur son plan.

La considération des surfaces trajectoires permet d'étendre facile-

[*] *Recueil de Mémoires des Savants étrangers*, t. XX.

ment au cas de l'espace les propriétés relatives aux lignes trajectoires planes.

Ces surfaces trajectoires sont, à proprement parler, la généralisation de ces lignes.

Ainsi, sur un plan, on sait que :

« Lorsqu'une droite est normale à la trajectoire d'un de ses points, elle est normale aux trajectoires de tous ses points ».

De même, dans l'espace :

« Lorsqu'une droite est normale à la surface trajectoire d'un de ses points, elle est normale aux surfaces trajectoires de tous ses points ».

Pour le cas du déplacement d'une figure plane sur son plan :

« Les normales aux trajectoires des points de cette figure passent par un même point. »

Dans le cas de l'espace, la propriété analogue est la suivante :

Les normales aux surfaces trajectoires des points d'une figure rencontrent, toutes, deux mêmes droites.

Ce dernier théorème, qui est fondamental [*], donne lieu à des conséquences remarquables. J'ai pu déjà en déduire une construction des centres de courbure principaux de la surface des ondes, ainsi que la direction des lignes de courbure de cette surface [**]. J'en ai déduit aussi une théorie géométrique de la courbure des surfaces [***]. Aujourd'hui j'en donne encore une application.

Au début de ce travail, je fais connaître une nouvelle démonstration directe de cet important théorème; puis je cherche combien il y a de points sur une droite mobile dont les trajectoires jouissent de certaines propriétés sur les surfaces trajectoires de ces points.

Le nombre de ces points donne immédiatement le degré du lieu de tous les points analogues de l'espace.

Pour le cas du déplacement d'une figure plane sur son plan, il est utile de considérer les points imaginaires à l'infini situés sur un cercle.

---

[*] Je l'ai énoncé pour la première fois à la Société philomathique, en 1866. (Voir *Bulletin de la Société philomathique*, séance du 14 juillet 1866.)

[**] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 11 février 1867.

[***] *Mémoire sur les pinceaux de droites.* (*Journal de Mathématiques*, t. XVII, 2e série, 1872.)

Ces points sont immobiles pendant le déplacement. Il suffit, en effet, pour le démontrer, de remarquer qu'ils appartiennent toujours aux circonférences de cercle situées sur le plan mobile et entraînées avec ce plan. Ainsi :

THÉORÈME I. — *Pendant le déplacement d'un plan qui glisse sur lui-même en entraînant tous ses points, les points imaginaires à l'infini situés sur un cercle sont immobiles.*

Dans le cas du déplacement d'une figure dans l'espace, c'est le cercle imaginaire à l'infini situé sur une sphère que nous considérerons. Ce cercle n'est immobile qu'en tant que ligne ; il glisse sur lui-même pendant le déplacement. Il suffit, en effet, pour le démontrer, d'entraîner des sphères en même temps que la figure mobile. Toutes ces sphères ne cesseront pas de passer par le même cercle à l'infini. Les points de ce cercle se déplacent, car, si l'on coupe une des sphères par un plan, cette sphère passe bien toujours par le même cercle, mais le plan sécant entraîné ne passe pas par les mêmes points de ce cercle. Nous voyons donc que :

THÉORÈME II. — *Pendant le déplacement d'une figure entraînant tous les points de l'espace, le cercle imaginaire à l'infini glisse sur lui-même.*

En Cinématique, où l'on étudie les déplacements d'une figure de forme invariable, ces éléments imaginaires, points ou cercle, purement géométriques et n'ayant aucun sens mécanique, n'ont pas été introduits. L'utilité de leur emploi ressortira de ce travail.

L'étude des lignes trajectoires décrites par les points d'une figure sur les surfaces trajectoires de ces points est nouvelle et digne d'intérêt. On connaît seulement, dans cet ordre de recherches, la belle solution de Dupin pour la description mécanique des lignes de courbure d'un ellipsoïde engendré par un point d'une droite dont trois points sont assujettis à rester sur trois plans donnés.

§ I. *Préliminaires.*

Appelons G une droite mobile ; a, b, c trois de ses points ; (A), (B), (C) les surfaces données sur lesquelles ces points doivent se déplacer.

Enfin désignons par A, B, C les normales à ces surfaces issues, à un instant quelconque, des points a, b, c. Un déplacement infiniment petit quelconque de G s'obtient au moyen d'une rotation autour d'une *droite conjuguée* de G. Cette conjuguée, devant rencontrer A, B, C, est une génératrice de l'hyperboloïde défini par ces trois droites.

Une quelconque des génératrices de cet hyperboloïde du même système que G est une conjuguée de G relative à l'un des déplacements de cette droite.

Les plans passant par ces différentes conjuguées et un même point e de G sont respectivement normaux aux lignes trajectoires décrites par ce point pendant les déplacements qu'on peut imprimer à la droite G, à partir de la position qu'elle occupe.

Tous ces plans normaux se coupent suivant une génératrice de l'hyperboloïde du même système que A, B, C, et cette génératrice est la normale à la surface trajectoire du point e. Nous voyons ainsi que :

Théorème III. — *Le lieu des normales aux surfaces trajectoires des points d'une droite est un hyperboloïde.*

Supposons que G fasse partie d'une figure de forme invariable et qu'un point m de cette figure soit assujetti à se déplacer sur une surface (M), pendant que les points a, b, c de G se déplacent sur (A), (B), (C). Désignons par A, B, C, M les normales à ces surfaces issues, à un instant quelconque, des points a, b, c, m.

Les normales aux surfaces trajectoires des points de G appartiennent à un hyperboloïde (A, B, C), qui est rencontré par M en deux points. Par ces points passent les génératrices D, Δ de cet hyperboloïde, du même système que G. Par le point m menons une droite H qui rencontre G au point n. Le plan des deux droites G, H coupe l'hyperboloïde (A, B, C) suivant G et une droite L. Désignons par l le point où cette droite rencontre H.

La normale N à la surface trajectoire du point n rencontre D, Δ; il en est de même de L, qui est normale à la surface trajectoire du point l. L'hyperboloïde (A, B, C) et l'hyperboloïde des normales aux surfaces trajectoires des points de H, qui se coupent suivant les droites L, N, se coupent en outre suivant les droites D, Δ. Les normales aux surfaces trajectoires des points de H rencontrent donc D et Δ, et comme la droite H est quelconque dans le plan (G, *m*), il en est de même des normales aux surfaces trajectoires de tous les points de ce plan.

La normale à la surface trajectoire d'un point quelconque de la figure rencontre ce plan en un point, et cette droite, étant normale à la surface trajectoire de ce point, s'appuie alors aussi sur D et Δ; donc :

Théorème IV. — *Les normales aux surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invariable rencontrent, toutes, deux mêmes droites.*

Remarques. — Nous continuerons à désigner ces deux droites par D, Δ.

Les normales aux surfaces trajectoires de deux points quelconques de la figure mobile ne peuvent se rencontrer que sur ces droites.

Un point quelconque de D ou de Δ décrit toujours le même élément de ligne, quels que soient les déplacements de la figure mobile. Le plan normal à l'élément de ligne décrit par un point de l'une de ces droites est le plan passant par ce point et par l'autre droite.

§ II.

Reprenons la droite mobile G et l'hyperboloïde des normales aux surfaces trajectoires de ses points. Parmi les génératrices de cet hyperboloïde, il y en a deux d'un même système qui sont perpendiculaires à une génératrice du système différent. Il y a donc deux points de G dont les surfaces trajectoires ont pour normales des droites perpendiculaires à G, c'est-à-dire dont les surfaces trajectoires sont tangentes à G. Ainsi :

Théorème V. — *Parmi les surfaces trajectoires des points d'une droite mobile, il y en a deux qui sont tangentes à cette droite.*

Les plans tangents aux surfaces trajectoires des points d'une droite sont respectivement perpendiculaires aux génératrices d'un hyperboloïde; ils sont donc parallèles aux plans tangents au cône supplémentaire du cône directeur de cet hyperboloïde. Ce cône supplémentaire, qui est du deuxième ordre, est le cône directeur de la développable enveloppe de ces plans tangents. Ainsi :

Théorème VI. — *La développable enveloppe des plans tangents aux surfaces trajectoires des points d'une droite a un cône directeur du deuxième ordre.*

Cherchons le degré de cette développable. Considérons pour cela un premier déplacement de G : nous savons que les tangentes aux trajectoires des points de cette droite appartiennent à un paraboloïde contenant G. Pour un autre déplacement de la droite mobile, à partir de sa première position, nous aurons un autre paraboloïde passant aussi par G. Les tangentes aux trajectoires d'un même point m pour ces deux déplacements sont donc les génératrices de deux paraboloïdes. Le plan de ces tangentes étant le plan tangent à la surface trajectoire du point m, nous voyons ainsi que les plans tangents aux surfaces trajectoires des points d'une droite sont tangents à deux paraboloïdes ayant une génératrice commune; par suite l'enveloppe de ces plans tangents est du quatrième ordre et de la troisième classe. Ainsi :

Théorème VII. — *La développable enveloppe des plans tangents aux surfaces trajectoires de tous les points d'une droite est du quatrième ordre et de la troisième classe.*

Nous savons que les axes de courbure des trajectoires des points d'une droite mobile G appartiennent à un hyperboloïde qui contient la conjuguée de G relative au déplacement de cette droite [*].

Cet hyperboloïde des axes de courbure et l'hyperboloïde des normales aux surfaces trajectoires des points de G se coupent suivant cette droite conjuguée de G et suivant une cubique gauche. Un point de cette cubique est le point de rencontre de l'axe de courbure d'un certain point m de G avec la normale à la surface trajectoire de ce point. Ce point de la cubique est donc le centre de courbure de la section faite dans cette surface trajectoire par un plan normal à cette surface et qui contient la tangente à la ligne trajectoire du point m. Nous pouvons donc dire :

Théorème VIII. — *Les plans normaux aux surfaces trajectoires*

---

[*] Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 3 mars 1873.

des points d'une droite, qui contiennent respectivement les lignes décrites par les points de cette droite pendant un déplacement quelconque, déterminent, dans ces surfaces trajectoires, des sections dont les centres de courbure sont sur une cubique gauche.

Un point à l'infini sur cette cubique correspond à une section normale à une surface trajectoire, dont le plan contient la tangente à une ligne asymptotique de cette surface trajectoire. Comme il y a trois points de cette cubique qui sont à l'infini, nous avons ce théorème :

Théorème IX. — *Sur une droite mobile, il y a trois points dont les trajectoires sont tangentes à des lignes asymptotiques de leurs surfaces trajectoires.*

Puisque, sur une droite quelconque, il y a trois points de cette nature, les points d'une figure de forme invariable, qui jouissent de la propriété de décrire des éléments de lignes asymptotiques sur leurs surfaces trajectoires, appartiennent à une surface du troisième ordre. Cette surface doit contenir D et Δ, car les points de chacune de ces droites décrivent toujours les mêmes éléments de lignes. Ainsi :

Théorème X. — *Le lieu des points d'une figure de forme invariable dont les trajectoires sont tangentes à des lignes asymptotiques de leurs surfaces trajectoires est une surface du troisième ordre qui contient les droites* D, Δ.

Pour chaque déplacement, on a une surface du troisième ordre différente. On peut remarquer que par un point quelconque il ne passe que deux de ces surfaces du troisième ordre. Ces deux surfaces correspondent aux déplacements qui font décrire à ce point des éléments des deux lignes asymptotiques de sa surface trajectoire.

Si une droite est telle que, pour un déplacement, les trajectoires de quatre de ses points sont tangentes à des lignes asymptotiques des surfaces trajectoires de ces points, cette droite est tout entière sur la surface du troisième ordre relative à ce déplacement, et, par suite, tous ses points jouissent de cette propriété. Ainsi :

Théorème XI. — *Si les trajectoires de quatre points d'une droite sont tangentes à des lignes asymptotiques des surfaces trajectoires de ces points, il en est de même des trajectoires de tous les points de la droite.*

Tous les points des droites réelles de la surface du troisième ordre dont nous venons de parler jouissent de la propriété de décrire simultanément des éléments de lignes asymptotiques sur leurs surfaces trajectoires. Comme sur une surface du troisième ordre il y a toujours une droite réelle, nous voyons que :

Théorème XII. — *Dans une figure de forme invariable, il existe toujours une droite dont tous les points décrivent des éléments de lignes asymptotiques sur leurs surfaces trajectoires.*

Je ne compte pas les droites D, Δ, qui peuvent être imaginaires.

Pour deux instants consécutifs, nous pouvons considérer deux surfaces du troisième ordre analogues à la précédente. Les points de la ligne d'intersection de ces deux surfaces décrivent des trajectoires ayant successivement deux éléments communs avec des lignes asymptotiques de leurs surfaces trajectoires, c'est-à-dire ayant avec ces lignes asymptotiques un contact du deuxième ordre. Les deux surfaces du troisième ordre se coupent suivant une ligne de l'ordre 3^2. Ainsi :

Théorème XIII. — *Le lieu des points d'une figure dont les trajectoires ont avec des lignes asymptotiques de leurs surfaces trajectoires un contact du deuxième ordre est une ligne d'ordre* 3^2.

Introduisons, pour un troisième instant, une troisième surface du troisième ordre. Cette surface coupe les deux premières aux points dont les trajectoires ont un contact du troisième ordre avec des lignes asymptotiques des surfaces trajectoires de ces points. Ces trois surfaces se coupent en 3^3 points. Ainsi :

Théorème XIV. — *Les points d'une figure dont les trajectoires ont un contact du troisième ordre avec des lignes asymptotiques des surfaces trajectoires de ces points sont au nombre de* 3^3.

La cubique gauche qui entre dans l'énoncé du théorème VIII rencontre la droite G en deux points. Ces deux points de G sont donc confondus avec les centres de courbure des sections normales à leurs surfaces trajectoires. Ces sections normales ont alors leurs rayons de courbure nuls, et par suite il en est de même des trajectoires de ces deux points de G. Nous reviendrons plus loin sur les points d'une figure dont les trajectoires ont leurs rayons de courbure nuls.

Cherchons combien il y a de points sur une droite dont les trajectoires ont leurs plans osculateurs normaux aux surfaces trajectoires de ces points.

Prenons un plan parallèle aux tangentes aux trajectoires de tous les points de la droite mobile G, et considérons sur ce plan la trace du cône directeur de la développable enveloppe des plans osculateurs des trajectoires de G. Par le sommet de ce cône menons des parallèles aux normales des surfaces trajectoires des points de G. Ces parallèles sont les génératrices d'un deuxième cône du second ordre.

On demande alors un plan tangent au premier cône directeur, qui coupe celui-ci suivant une droite perpendiculaire à la trace de ce plan tangent sur le plan de la base du premier cône.

Le lieu des perpendiculaires abaissées du sommet de nos cônes sur les tangentes à la base du premier de ces cônes est du troisième ordre. Ce cône du troisième ordre coupe le cône directeur de l'hyperboloïde des normales aux surfaces trajectoires des points de G suivant six génératrices. Il y a donc six droites répondant à la question que nous nous étions posée, et, par suite :

Théorème XV. — *A un instant quelconque du déplacement continu d'une droite, il y a six points de cette droite dont les trajectoires ont leurs plans osculateurs normaux aux surfaces trajectoires de ces points.*

Ou, en d'autres termes :

Sur une droite mobile, il y a six points dont les trajectoires sont osculatrices à des géodésiques de leurs surfaces trajectoires.

Il résulte immédiatement de là que :

Théorème XVI. — *Le lieu des points d'une figure dont les trajectoires ont leurs plans osculateurs normaux aux surfaces trajectoires de ces points est une surface du sixième ordre.*

Avant d'examiner ce qui concerne les points d'une figure de l'espace dont les trajectoires ont leurs rayons de courbure nuls, je vais dire un mot du sujet analogue pour le cas du déplacement d'une figure plane sur son plan.

Pour que le rayon de courbure de la trajectoire d'un point soit nul, il faut que, pour un déplacement infiniment petit, l'arc décrit soit infiniment petit d'ordre supérieur. D'après cela, le centre instantané de rotation est le seul point *réel* dont la trajectoire ait un rayon de courbure nul.

Mais nous savons que *le lieu des centres de courbure des trajectoires de tous les points d'une droite est une conique* [*]. Les points de rencontre de la droite et de cette conique sont ceux dont la trajectoire a un rayon de courbure nul ; d'après ce que je viens de dire, ces deux points doivent être imaginaires. Comme il y a aussi deux points imaginaires sur toute droite du plan mobile, les points de ce plan dont les trajectoires ont leurs rayons de courbure nuls appartiennent à une conique imaginaire.

Le centre instantané de rotation, étant un point réel de ce lieu, doit être un point double, c'est-à-dire que cette conique se compose de deux droites imaginaires.

Je dis de plus que ce lieu passe par les points imaginaires à l'infini situés sur un cercle. Pour le montrer, considérons sur le plan mobile une circonférence de cercle tangente, à la base de la roulette du mouvement épicycloïdal de ce plan, au centre instantané de rotation. Le lieu des centres de courbure des trajectoires des points de cette circonférence est, comme il est facile de le voir, une circonférence de cercle tangente à la première au centre instantané de rotation. Les points d'intersection de ces deux circonférences, qui ne sont autres que les points imaginaires à l'infini, doivent donc être considérés comme donnant lieu chacun à une trajectoire dont le rayon de courbure est nul. Nous avons du reste vu que ces points sont immobiles.

Il résulte de là déjà que :

Théorème XVII. — *Les centres de courbure des trajectoires des points d'une courbe qui passe par les points imaginaires à l'infini situés sur un cercle appartiennent à une courbe qui passe aussi par ces points* [**].

---

[*] Cette propriété est due à M. Rivals. Elle a été publiée dans un Mémoire de M. Bresse, inséré dans le XXXV^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

[**] La formule de Savary donne très-simplement l'équation en coordonnées polaires du lieu des centres de courbure des trajectoires des points d'une courbe quelconque. (Voir *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVII^e cahier : *Constructions des centres de courbure*, etc.)

On voit aussi que les points du plan dont les trajectoires ont leurs rayons de courbure nuls appartiennent à deux droites imaginaires se coupant au centre instantané de rotation et passant par les points imaginaires à l'infini. Les droites imaginaires qui sont les asymptotes d'un cercle de rayon nul ont été nommées *droites isotropes* par M. Laguerre.

En faisant usage de cette expression, nous dirons alors :

Théorème XVIII. — *Lorsqu'un plan glisse sur lui-même, le lieu des points de ce plan dont les trajectoires ont leurs rayons de courbure nuls se compose des droites isotropes qui se coupent au centre instantané de rotation.*

On peut arriver immédiatement à ce résultat en employant la formule de Savary.

Ce dernier procédé, pas plus que ce que j'ai dit précédemment pour démontrer le théorème XVIII, ne laisse voir la marche à suivre pour arriver aux généralisations des derniers théorèmes énoncés.

Une simple remarque nous éclairera à ce sujet.

Relativement à l'un quelconque de ses points, une droite isotrope qui passe par le centre instantané est normale à la trajectoire de ce point. Les points du plan mobile dont les trajectoires ont leurs rayons de courbure nuls sont donc ceux dont les normales à ces lignes trajectoires sont des droites isotropes. Nous sommes donc conduit à faire remarquer que :

Théorème XIX. — *Lorsqu'en un point non singulier d'une courbe la normale est une droite isotrope, cette courbe a en ce point un rayon de courbure nul.*

Cette normale isotrope est aussi, comme l'on sait, tangente à la courbe. On peut donc énoncer ce théorème en parlant de tangente au lieu de normale.

Analytiquement, ce théorème résulte immédiatement de l'expression du rayon de courbure d'une courbe plane, puisque le numérateur de cette expression, égalé à zéro, montre que les points de la courbe pour lesquels le rayon de courbure est nul sont ceux pour lesquels la tangente à la courbe a pour coefficient angulaire $\pm\sqrt{-1}$.

Dans le cas d'une figure de l'espace, nous considérerons le cercle imaginaire à l'infini situé sur une sphère. Les plans tangents à ce cercle sont des *plans isotropes*, et les droites qui rencontrent ce cercle sont des *droites isotropes*.

Reprenons la droite G de l'espace. Les points de cette droite dont les trajectoires ont leurs rayons de courbure nuls sont ceux pour lesquels ces trajectoires ont pour tangentes des droites isotropes. Les plans normaux en ces points à ces courbes qui passent par la conjuguée de G doivent donc être des plans isotropes. Il y aura donc sur la droite deux points dont les trajectoires ont leurs rayons de courbure nuls, puisque par la conjuguée de cette droite on ne peut mener que deux plans isotropes. Ainsi :

Théorème XX. — *Sur une droite mobile, il y a deux points imaginaires dont les trajectoires ont leurs rayons de courbure nuls.*

Nous aurions pu arriver à ce résultat en raisonnant comme nous l'avons fait précédemment pour le cas d'une droite mobile sur un plan.

En effet, dans le cas du déplacement infiniment petit d'une figure dans l'espace, les arcs décrits simultanément sont du même ordre. Il n'y a donc pas de point réel dont la trajectoire ait son rayon de courbure nul. Nous savons que le lieu des axes de courbure des trajectoires de tous les points d'une droite est un hyperboloïde [*] ; les deux points de rencontre de la droite mobile et de cet hyperboloïde sont ceux dont les trajectoires ont leurs rayons de courbure nuls.

Si l'axe de courbure qui rencontre la droite n'était pas relatif à la trajectoire de ce point de rencontre, mais bien à la trajectoire d'un autre point de la droite mobile, il en résulterait que cette droite serait normale à la trajectoire de ce point et, par suite, aux trajectoires de tous ses points. Elle rencontrerait alors les axes de courbure des trajectoires de tous ses points et serait tout entière sur l'hyperboloïde lieu de ces axes.

Nous voyons donc comment on retrouve le théorème XX, et nous voyons, en outre, que :

---

[*] Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 3 mars 1873.

THÉORÈME XXI. — *Lorsqu'une droite est normale à la trajectoire d'un de ses points, elle est tout entière sur l'hyperboloïde des axes de courbure des trajectoires de ces points* [*].

Il résulte immédiatement du théorème XX que :

THÉORÈME XXII. — *Le lieu des points d'une figure de forme invariable dont les lignes trajectoires ont leurs rayons de courbure nuls est une surface imaginaire du second ordre.*

Occupons-nous maintenant des surfaces trajectoires des points d'une figure mobile.

Le théorème XIX peut se généraliser ainsi :

THÉORÈME XXIII. — *Lorsqu'en un point non singulier d'une surface la normale est une droite isotrope, cette surface a en ce point ses rayons de courbure principaux nuls, et réciproquement.*

Ce théorème résulte immédiatement de l'équation qui donne les rayons de courbure principaux d'une surface.

Si nous voulons obtenir maintenant les points d'une figure de forme invariable dont les surfaces trajectoires ont un rayon de courbure principal nul, nous n'avons qu'à prendre ceux pour lesquels les normales à leurs surfaces trajectoires sont des droites isotropes. Mais toutes les normales aux surfaces trajectoires des points d'une figure rencontrent D et Δ; donc les points que nous cherchons sont ceux de la surface réglée formée par les droites isotropes qui rencontrent D, Δ. Cette surface, qui a pour directrices le cercle imaginaire à l'infini et les droites D, Δ, est du quatrième ordre. Nous avons donc ce théorème :

THÉORÈME XXIV. — *Le lieu des points d'une figure de forme invariable dont les surfaces trajectoires ont un rayon de courbure principal nul est la surface réglée imaginaire du quatrième ordre qui passe par le cercle imaginaire et par les droites* D, Δ.

Cette surface a trois droites doubles : D, Δ et une droite à l'infini.

Puisque cette surface contient le cercle imaginaire à l'infini, nous

[*] Ce théorème résulte aussi de ce que l'hyperboloïde des axes de courbure des trajectoires des points d'une droite contient la conjuguée de cette droite, et que, dans le cas actuel, la droite mobile est à elle-même sa conjuguée.

pouvons énoncer le théorème suivant, tout à fait analogue au théorème XVII :

Théorème XXV. — *Les centres de courbure principaux des surfaces trajectoires des points d'une surface qui contient le cercle imaginaire de l'infini appartiennent à une surface qui contient aussi ce cercle.*

Il résulte du théorème XXIV que :

Théorème XXVI. — *Sur une droite mobile, il y a quatre points imaginaires dont les surfaces trajectoires ont un rayon de courbure principal nul.*

En un point quelconque de la surface du quatrième ordre lieu des droites isotropes rencontrant D et Δ, le plan tangent à la surface trajectoire de ce point est un plan isotrope. Si le point que l'on considère appartient aussi à une seconde surface du quatrième ordre analogue à la précédente et que l'on obtient après un déplacement infiniment petit de la figure mobile, ce point sera tel, qu'après son déplacement le plan tangent à sa surface trajectoire sera encore un plan isotrope. Ce point aura donc décrit un élément de la ligne de contact de sa surface trajectoire et de la développable isotrope qui est circonscrite à cette surface trajectoire, c'est-à-dire un élément de ligne de courbure de celle-ci. Il en est de même de tous les points de la ligne d'intersection de ces deux surfaces du quatrième ordre. Cette ligne d'intersection se compose du cercle imaginaire à l'infini, de trois droites doubles et d'une courbe du huitième ordre.

Introduisons, pour un nouveau déplacement, une troisième surface du quatrième ordre. Ces trois surfaces du quatrième ordre contiennent chacune le cercle imaginaire à l'infini et se coupent en quarante-six points. Ces points décrivent des trajectoires ayant un contact du second ordre avec des lignes de courbure de leurs surfaces trajectoires. Ils appartiennent à une courbe, à laquelle nous allons arriver, et dont tous les points jouissent de cette propriété. Pour cela, cherchons d'abord le lieu des points de l'espace dont les trajectoires sont tangentes à des lignes de courbure de leurs surfaces trajectoires.

Reprenons la droite mobile G et l'hyperboloïde des normales aux surfaces trajectoires de ses points. En vertu du théorème VIII, les centres de courbure des sections normales aux surfaces trajectoires des points G, menées tangentiellement aux lignes décrites par les points de cette droite pour un déplacement arbitraire, sont sur une cubique gauche. Cette cubique varie avec le déplacement considéré. Sur chacune des normales aux surfaces trajectoires des points de G, les centres de courbure principaux sont des positions limites pour les points appartenant aux différentes cubiques qu'on peut obtenir ainsi. Le lieu des centres de courbure principaux des surfaces trajectoires des points de G est alors, sur l'hyperboloïde des normales, la courbe qui limite la région occupée par ces cubiques gauches. Ce lieu est donc l'enveloppe de ces cubiques. Les points de contact de ce lieu et de l'une des cubiques sont aux points d'intersection de deux cubiques gauches infiniment voisines; par suite, ils sont au nombre de quatre. Ces quatre points de contact correspondent à des sections normales dont les centres de courbure coïncident avec des centres de courbure principaux de surfaces trajectoires. Ces sections normales sont donc tangentes à des lignes de courbure de ces surfaces trajectoires. Ainsi :

THÉORÈME XXVII. — *Sur une droite mobile, il y a quatre points dont les trajectoires sont tangentes à des lignes de courbure des surfaces trajectoires de ces points.*

Nous pouvons aussi déduire de ce que nous venons de dire l'ordre de la courbe enveloppe des cubiques. Cette courbe est, en effet, rencontrée par une cubique en huit points, et comme elle a toujours deux points sur la normale à la surface trajectoire d'un point quelconque de G, elle doit avoir quatre points sur G [*]. Par suite, elle est du sixième ordre. Ainsi :

THÉORÈME XXVIII. — *Le lieu des centres de courbure principaux des surfaces trajectoires des points d'une droite est une courbe gauche du sixième ordre.*

Du théorème XXVII nous concluons, comme précédemment, que :

---

[*] Ceci est une conséquence de la formule $pq' + p'q$, donnée par M. Chasles pour déterminer le nombre des points d'intersection de deux courbes gauches tracées sur un hyperboloïde. (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 16 décembre 1861.)

Théorème XXIX. — *Le lieu des points d'une figure dont les trajectoires sont tangentes à des lignes de courbure de leurs surfaces trajectoires est une surface du quatrième ordre qui contient les droites* D, Δ.

Cette surface contient la courbe du huitième ordre que nous avons trouvée déjà. On peut aussi remarquer que par chaque point de l'espace il n'y a, en général, que deux déplacements donnant lieu à des surfaces du quatrième ordre passant par ce point.

La courbe lieu des centres de courbure principaux des surfaces trajectoires des points de G rencontre le plan de l'infini en six points. Ces centres de courbure à l'infini correspondent aux points de la droite G dont les surfaces trajectoires ont un rayon de courbure principal infini, ou, en d'autres termes, qui ont un centre de courbure à l'infini, c'est-à-dire qui sont des *points paraboliques* sur leurs surfaces trajectoires. Nous voyons alors que :

Théorème XXX. — *Sur une droite mobile, il y a six points qui sont des points paraboliques sur leurs surfaces trajectoires.*

Par suite, comme précédemment, en remarquant que, parmi les points dont les surfaces trajectoires ont un centre de courbure à l'infini, il y a ceux du cercle imaginaire à l'infini :

Théorème XXXI. — *Le lieu des points d'une figure qui sont points paraboliques sur leurs surfaces trajectoires est une surface du sixième ordre qui contient le cercle imaginaire à l'infini.*

Théorème XXXII. — *La courbe dont les points décrivent des trajectoires tangentes aux lignes lieux des points paraboliques sur les surfaces trajectoires de ces points est de l'ordre* $6^2 - 2$.

Théorème XXXIII. — *Les points dont les trajectoires ont un contact du deuxième ordre avec les lignes lieux des points paraboliques sur les surfaces trajectoires de ces points sont au nombre de* $6^3 - 30$.

Ce que nous venons de dire à l'occasion des points dont les surfaces trajectoires ont un centre de courbure principal sur le plan de l'infini peut se répéter en considérant les points dont les surfaces trajectoires ont un centre de courbure principal sur un plan fixe quelconque. On trouve encore dans ce cas une surface du sixième ordre. Cette surface coupe le plan donné suivant une courbe du quatrième ordre (théorème XXIV) et une droite double. Cette droite est, sur le plan donné, celle qui joint les traces sur ce plan des droites D, Δ.

Les normales aux surfaces trajectoires des points de G contiennent chacune deux points de la courbe du sixième ordre lieu des centres de courbure principaux de ces surfaces. Parmi ces normales, celles qui sont tangentes à cette courbe correspondent aux points de G dont les surfaces trajectoires ont des rayons de courbure principaux égaux. Le nombre de ces normales, c'est-à-dire le nombre des génératrices de l'hyperboloïde des normales relatives à G, qui sont tangentes à la courbe du sixième ordre, donne le nombre de ces points. Au moyen d'une formule due à M. Chasles [*], on trouve que ce nombre est huit. Ainsi :

Théorème XXXIV. — *Sur une droite mobile, il y a huit points dont les surfaces trajectoires ont des rayons de courbure principaux égaux.*

De là résulte la conséquence suivante :

Théorème XXXV. — *Le lieu des points d'une figure dont les surfaces trajectoires ont des rayons de courbure principaux égaux est une surface du huitième ordre.*

Les points qui sont des ombilics sur leurs surfaces trajectoires sont ceux de la ligne double de cette surface du huitième ordre.

Cherchons maintenant combien il y a de points sur une droite dont les surfaces trajectoires ont des rayons de courbure principaux égaux et de signes contraires.

Considérons la droite G, l'hyperboloïde des normales aux surfaces trajectoires des points de G et la courbe du sixième ordre lieu des centres de courbure principaux de ces surfaces.

A partir d'un point quelconque de G sur la normale qui passe en ce point et en sens inverse des rayons de courbure principaux, portons des longueurs égales à ces rayons de courbure. Cette construction étant faite pour tous les points de G, les extrémités des segments ainsi obtenus appartiennent à une courbe du huitième ordre. Cette courbe rencontre la courbe du sixième ordre, lieu des centres de courbure

[*] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 16 décembre 1861.

principaux des surfaces trajectoires des points de G, en vingt points. Parmi ces points, il y a sur G quatre points communs à ces deux courbes et à l'infini six autres points communs à ces deux courbes; les dix points restants sont répartis par paires sur les génératrices de l'hyperboloïde des normales. Le segment compris entre deux de ces points sur une même génératrice a son milieu sur G. Ce point de G est tel que sa surface trajectoire a des rayons de courbure principaux égaux et de signes contraires; il y a donc, d'après ce qui précède, cinq points de G de cette nature. Ainsi :

Théorème XXXVI. — *Sur une droite, il y a cinq points dont les surfaces trajectoires ont leurs rayons de courbure principaux égaux et de signes contraires.*

D'où l'on déduit :

Théorème XXXVII. — *Le lieu des points d'une figure dont les surfaces trajectoires ont des rayons de courbure principaux égaux et de signes contraires est une surface du cinquième ordre.*

En terminant, je dois faire remarquer que je ne me suis pas occupé ici des conséquences qui résultent de la considération d'une droite mobile, lorsque celle-ci occupe certaine position particulière.

J'aurai l'occasion de revenir sur ce sujet en parlant de la surface du sixième ordre lieu des centres de courbure principaux des surfaces trajectoires des points d'un plan. Ce lieu présente quelques analogies avec le lieu des points dont les surfaces trajectoires ont un centre de courbure principal sur un plan. Ces deux lieux sont du sixième ordre, ils ont chacun trois droites doubles. Pour le premier, un point du plan donne lieu à deux centres de courbure; pour le deuxième, un point du plan donné correspond aux surfaces trajectoires de deux points.