

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. RESAL

De la résistance au choc d'une chaîne à maillons plats

Journal de mathématiques pures et appliquées 3^e série, tome 1 (1875), p. 43-56.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1875_3_1__43_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

De la résistance au choc d'une chaîne à maillons plats;

PAR M. H. RESAL.

La seule règle admise dans la pratique pour calculer l'équarrissage du fer d'une chaîne à maillons plats, capable de supporter une charge déterminée, consiste à assimiler la chaîne à deux tringles de même longueur qu'elle même, dont le diamètre est celui du fer des maillons. J'ai démontré, en 1862, que cette règle est défectueuse, et que, dans l'application, elle doit conduire à des déceptions, trop souvent accusées par de sérieux accidents.

Je me propose, dans cette Note, de calculer l'effet d'un choc sur une chaîne; mais, auparavant, il est nécessaire que je reprenne sommairement la question que j'ai traitée, il y a douze ans, pour donner aux formules fondamentales une forme mieux appropriée à mes nouvelles recherches.

Considérons d'abord un maillon à l'état naturel et soient

O le centre de la fibre moyenne de l'une des parties circulaires qui terminent le maillon;

C le centre de figure du maillon;

A₀ le point de la fibre moyenne circulaire, situé sur la direction de OC;

B₀ une des naissances de la même fibre;

ρ_0 son rayon;

a le rayon de la section de la pièce;

$\Omega = \pi a^2$ l'aire de cette section;

$I = \frac{\pi a^4}{4}$ son moment d'inertie par rapport à un diamètre;

A un point quelconque de l'arc A₀B₀;

θ l'angle AOA₀;

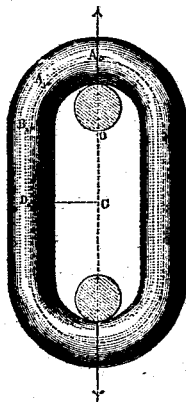
D₀ le milieu de la fibre moyenne rectiligne aboutissant au point B₀;

l la longueur B₀D₀;

E le coefficient d'élasticité de la matière.

Prenons respectivement les directions de CO et CD_0 pour axes des x et des y .

Représentons par $2P$ l'intensité des efforts égaux et de sens contraires qui agissent dans la section de A_0 et dans son opposée.



Il est clair que, en raison de la symétrie par rapport au point D_0 , il n'y a pas de glissement dans la section correspondant à ce point.

L'effort longitudinal suivant B_0D_0 étant égal à P , on a pour la dilatation dans cette partie du maillon

$$(1) \quad \delta_1 = \frac{P}{E\Omega}$$

L'une des conditions d'équilibre de la portion AB_0 de la pièce donne, en appelant δ la dilatation en A ,

$$P \sin \theta = E\Omega \delta,$$

d'où

$$(2) \quad \delta = \delta_1 \sin \theta,$$

et la dilatation en A_0 est ainsi nulle.

Soient maintenant

π le moment du couple élastique dans la section menée par le point A ;
 $d\omega$ un élément superficiel de cette section ;

ζ sa distance à la droite dont la trace est A ;

ρ le rayon de courbure de la fibre moyenne déformée au point A.

On sait que l'on a

$$\begin{aligned} \pi &= E \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) \int \frac{\zeta^2 d\omega}{1 + \frac{\zeta}{\rho_0}} = E \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) \rho_0^2 \int \left(\frac{\zeta}{\rho_0} - 1 + \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{\rho_0}} \right) d\omega \\ &= E \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) \rho_0^2 \left(-\pi a^2 + \int \frac{d\omega}{1 + \frac{\zeta}{\rho_0}} \right). \end{aligned}$$

On peut prendre pour $d\omega$ l'élément limité par les circonférences ayant A pour centre et pour rayons χ , $\chi + d\chi$, et par deux rayons infiniment voisins faisant avec la droite projetée en A les angles ψ , $\psi + d\psi$. On a ainsi

$$d\omega = \chi d\chi d\psi, \quad \zeta = \chi \sin \psi$$

et

$$\begin{aligned} \int \frac{d\omega}{1 + \frac{\zeta}{\rho_0}} &= \int_0^a \chi d\chi \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{1 + \frac{\chi}{\rho_0} \sin \psi} \\ &= \int_0^a \chi d\chi \left(\int_0^\pi \frac{d\psi}{1 + \frac{\chi}{\rho_0} \sin \psi} + \int_0^\pi \frac{d\psi}{1 - \frac{\chi}{\rho_0} \sin \psi} \right). \end{aligned}$$

En posant $z = \tan \frac{\psi}{2}$, on voit facilement que

$$\int_0^\pi \frac{d\psi}{1 + \frac{\chi}{\rho_0} \sin \psi} = 2 \int_0^\infty \frac{dz}{1 + z^2 + 2z\frac{\chi}{\rho_0}} = \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{\chi^2}{\rho_0^2}}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\frac{\chi}{\rho_0}}{\sqrt{1 - \frac{\chi^2}{\rho_0^2}}} \right).$$

On a de même

$$\int_0^\pi \frac{d\psi}{1 - \frac{\chi}{\rho_0} \sin \psi} = \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{\chi^2}{\rho_0^2}}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\frac{\chi}{\rho_0}}{\sqrt{1 - \frac{\chi^2}{\rho_0^2}}} \right).$$

par suite

$$\int \frac{d\omega}{1 + \frac{\xi}{\rho_0}} = 2\pi \int_0^a \frac{\chi d\chi}{\sqrt{1 - \frac{\chi^2}{\rho_0^2}}} = 2\pi\rho_0^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{\rho_0^2}}\right)$$

et enfin

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= E \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) \pi\rho_0^2 \left[-a^2 + 2\rho_0^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{\rho_0^2}}\right) \right] \\ &= EI \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) \frac{4\rho_0^2}{a^2} \left[-1 + \frac{2\rho_0^2}{a^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{\rho_0^2}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$(1) \quad \frac{a}{\rho_0} = \sin \gamma,$$

l'expression précédente prend la forme

$$(2) \quad \mathfrak{M} = \frac{EI}{\cos^4 \frac{\gamma}{2}} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right).$$

En représentant par $A\rho_0$ le moment du couple élastique développé dans la section passant par A_0 , on a enfin

$$(3) \quad EI \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) = - (P \sin \theta + A) \rho_0 \cos^4 \frac{\gamma}{2}.$$

Si α est l'angle que forme la normale en A avec l'axe des x , on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{(1 + \delta)\rho_0 d\theta} = \frac{d\alpha}{(1 + \delta_1 \sin \theta)\rho_0 d\theta},$$

et l'équation précédente donne, par suite, en continuant à négliger les termes du second ordre,

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \delta_1 \sin \theta - \frac{(P \sin \theta + A)}{EI} \rho_0^2 \cos^4 \frac{\gamma}{2},$$

d'où, en remarquant que l'on a $\alpha = 0$ pour $\theta = 0$,

$$\alpha = \theta + 2 \delta_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} - \left(\frac{2 P \sin^2 \frac{\theta}{2} + A \theta}{EI} \right) \rho_0^2 \cos^4 \frac{\gamma}{2}.$$

En appelant α_1 la valeur de cet angle pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \delta_1 - \left(\frac{P + A \frac{\pi}{2}}{EI} \right) \rho_0^2 \cos^4 \frac{\gamma}{2}.$$

On peut prendre

$$(4) \quad \text{tang} \left(\alpha_1 - \frac{\pi}{2} \right) = \delta_1 - \left(\frac{P + A \frac{\pi}{2}}{EI} \right) \rho_0^2 \cos^4 \frac{\gamma}{2}.$$

L'équation relative à la flexion des parties droites des maillons s'obtiendra en supposant $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{\rho_0} = \infty$, $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2}$ dans la formule (3), dont on devra changer, en outre, le signe du second membre, ce qui donne

$$(5) \quad EI \frac{d^2 y}{dx^2} = (P + A) \rho_0 \cos^4 \frac{\gamma}{2},$$

d'où, en remarquant que $\frac{dy}{dx} = 0$ au point D_0 ou pour $x = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(P + A)}{EI} \rho_0 x \cos^4 \frac{\gamma}{2}.$$

Or on a pour $x = l$

$$\frac{dy}{dx} = \text{tang} \left(\alpha_1 - \frac{\pi}{2} \right),$$

d'où

$$(6) \quad A = - P \epsilon,$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} k = \frac{l}{\rho_0}, \\ \epsilon = \frac{1 + k - \text{tang}^2 \frac{\gamma}{2}}{\frac{\pi}{2} + k}. \end{array} \right.$$

Le coefficient ε est inférieur à l'unité et n'approche de cette limite que lorsque les maillons sont très-allongés ou que k est suffisamment grand.

Les équations (3) et (5) prennent alors la forme suivante :

$$(3') \quad EI \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) = -P(\sin \theta - \varepsilon) \rho_0 \cos^4 \frac{\gamma}{2},$$

$$(5') \quad EI \frac{d^2 \gamma}{dx^2} = P(1 - \varepsilon) \rho_0 \cos^4 \frac{\gamma}{2}.$$

Conditions de résistance. — La tension élastique développée en un point quelconque d'une partie circulaire du maillon a pour expression

$$E \delta + E \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) \frac{\zeta}{1 + \frac{\zeta}{\rho_0}} = \frac{P}{\Omega} \sin \theta - \frac{P(\sin \theta - \varepsilon)}{1} \rho_0 \cos^4 \frac{\gamma}{2} \frac{\zeta}{1 + \frac{\zeta}{\rho_0}},$$

et l'on voit que son maximum correspond à $\zeta = -a$, $\theta = \frac{\pi}{2}$; de sorte que le maillon tend à s'ouvrir à l'intérieur de la naissance des parties courbes. En exprimant que ce maximum est au plus égal à la limite Γ que l'on se donne *a priori*, on a

$$\frac{P}{\Omega} + \frac{P(1 - \varepsilon)}{1} \rho_0 \cos^4 \frac{\gamma}{2} \frac{a}{1 + \frac{a}{\rho_0}} \leq \Gamma,$$

ou

$$(8) \quad \frac{\Gamma \pi}{P} \rho_0^2 \sin^3 \gamma > \sin \gamma + \frac{4(1 - \varepsilon) \cos^4 \frac{\gamma}{2}}{1 - \sin \gamma}.$$

L'équation

$$\frac{\Gamma \pi \rho_0^2}{P} \sin^2 \gamma - 1 = \frac{4(1 - \varepsilon) \cos^4 \frac{\gamma}{2}}{(1 - \sin \gamma) \sin \gamma}$$

fera connaître la limite supérieure de $\sin \gamma = \frac{a}{\rho_0}$.

En posant

$$\sin \gamma_1 = \sqrt{\frac{P}{\Gamma \pi \rho_0^2}},$$

et remplaçant ε par sa valeur, cette équation devient

$$(9) \quad \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \gamma_1} - 1 = \frac{4 \left(\frac{\pi}{2} - 1 + \tan^2 \frac{\gamma}{2} \right) \cos^4 \frac{\gamma}{2}}{\left(k + \frac{\pi}{2} \right) (1 - \sin \gamma) \sin \gamma}.$$

On calcule ordinairement γ comme si la chaîne était formée de deux tiges parallèles, ce qui revient à prendre $\gamma = \gamma_1$; mais, d'après l'équation précédente, on voit que cette valeur est trop faible d'une certaine quantité due aux parties courbes des maillons, et qu'elle conduit à donner au fer un trop faible équarrissage.

D'autre part, l'équation (9) ne peut être résolue que dans chaque cas particulier, et encore sa solution présente-t-elle des difficultés sérieuses. Nous éviterons ce double inconvénient en prenant pour $\sin \gamma$ une valeur approximative un peu forte, ce qui ne peut qu'être avantageux au point de vue de la sécurité. A cet effet, remarquons d'abord que le dénominateur du second membre de l'équation (9) croît à partir de $\sin \gamma = 0$ jusqu'à $\sin \gamma = \frac{1}{2}$, valeur que l'on ne dépasse jamais dans la pratique; il est par suite supérieur à

$$\left(k + \frac{\pi}{2} \right) (1 + \sin \gamma_1) \sin \gamma_1.$$

Le numérateur décroît, comme il est facile de s'en assurer, lorsque l'on fait croître γ à partir de zéro; il est donc inférieur à

$$4 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right);$$

de sorte que, si nous posons

$$(9') \quad \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \gamma_1} = 1 + \frac{4 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)}{\left(k + \frac{\pi}{2} \right) (1 + \sin \gamma_1) \sin \gamma_1} = 1 + \frac{2,28}{(k + 1,57) (1 + \sin \gamma_1) \sin \gamma_1},$$

nous serons certains d'obtenir pour $\sin \gamma$ une valeur plus que suffisante pour assurer la sécurité.

La condition de résistance des branches rectilignes est également

donnée par l'inégalité (8), et l'on voit qu'elles ont la même tendance à s'ouvrir le long de leur génératrice intérieure.

Il est facile de voir que tout ce qui précède s'applique aux maillons circulaires, en supposant $k = 0$.

Déformation d'un maillon. — Pour les branches rectilignes, on a, en intégrant l'équation (6') et désignant par M une constante arbitraire,

$$(10) \quad y = \frac{Px^2}{2EI} (1 - \varepsilon + M) \rho_0 \cos^4 \frac{\gamma}{2} = \frac{Px^2}{8E\pi\rho_0^2 \sin^4 \frac{\gamma}{2}} (1 - \varepsilon + M).$$

Soit $r = \rho_0 (1 + u)$ le rayon vecteur, correspondant à l'angle primitif θ de la fibre moyenne déformée, u et ses dérivées par rapport à cet angle étant censées des quantités assez petites pour qu'il suffise d'en conserver les premières puissances. L'équation (3') peut se mettre sous la forme

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{P}{EI} (\sin \theta - \varepsilon) \rho_0^2 \cos^4 \frac{\gamma}{2} = \frac{P}{4E\pi\rho_0^2 \sin^4 \frac{\gamma}{2}} (\sin \theta - \varepsilon);$$

d'où, en intégrant et remarquant que $\frac{du}{d\theta} = 0$ pour $\theta = 0$,

$$(11) \quad u = \frac{P}{4E\pi\rho_0^2 \sin^4 \frac{\gamma}{2}} \left(-\frac{\theta \cos \theta}{2} - \varepsilon + N \cos \theta \right),$$

N étant une autre constante arbitraire.

Si l'on désigne par $\Delta\theta$ la variation qu'a éprouvée l'angle θ à la suite de la déformation, celles de l'ordonnée et l'abscisse du point considéré ont respectivement pour valeurs

$$\Delta y = \rho_0 (1 + u) \sin(\theta + \Delta\theta) - \rho_0 \sin \theta = \rho_0 (u \sin \theta + \cos \theta \Delta\theta),$$

$$\Delta x = \rho_0 (1 + u) \cos(\theta + \Delta\theta) - \rho_0 \cos \theta = \rho_0 (u \cos \theta - \sin \theta \Delta\theta);$$

d'où

$$(12) \quad \begin{cases} \Delta y = \rho_0 u \\ \Delta x = -\rho_0 \Delta\theta \end{cases} \text{ pour } \theta = \frac{\pi}{2};$$

mais on a

$$\frac{d\Delta\theta}{d\theta} + u = \delta = \delta_1 \sin\theta = \frac{P \sin\theta}{4 E \pi \rho_0^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2}};$$

d'où, en remarquant que $\Delta\theta = 0$ pour $\theta = 0$,

$$\Delta\theta = \frac{P}{4 E \pi \rho_0^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} \left[\frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} \left(\frac{\theta \sin\theta - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2} + \varepsilon\theta - N \sin\theta \right) \right],$$

et l'on a pour $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$(13) \quad \begin{cases} \Delta\theta = \frac{P}{4 E \pi \rho_0^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} \left\{ \frac{1}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) - \frac{1}{2} - N \right] \right\}, \\ \Delta y = - \frac{P \varepsilon}{4 E \pi \rho_0 \sin^4 \frac{\gamma}{2}}, \\ \Delta x = - \frac{P}{4 E \pi \rho_0 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} \left\{ \frac{1}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) - \frac{1}{2} - N \right] \right\}. \end{cases}$$

Or ces dernières valeurs de Δy et Δx sont respectivement égales à celle de $y - \rho_0$, déduite de l'équation (10) pour $x = l$, et à $l\delta_1 = k\rho_0\delta_0$, ce qui permet de déterminer les constantes M et N; mais il nous suffit de connaître la seconde de ces constantes, qui a pour expression

$$(14) \quad N = (1 + k) \tan^2 \frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) - \frac{1}{2}.$$

Désignant par ξ la valeur de $\rho_0 u$ pour $\theta = 0$, nous aurons

$$\xi = \frac{P}{4 E \pi \rho_0^2 \sin^4 \frac{\gamma}{2}} (N - \varepsilon),$$

d'où, pour le travail moléculaire développé dans le maillon

$$(15) \quad \mathfrak{E} = 4 \int P d\xi = \frac{(N - \varepsilon) P^2}{2 E \pi \rho_0 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}$$

Supposons qu'une chaîne composée de n maillons soit fixée par son extrémité supérieure et que son autre extrémité soit élevée à une hauteur H au-dessus de sa position d'équilibre naturel, puis qu'on y accroche un poids Q ; si on laisse retomber ce poids, on aura, en appelant V sa vitesse vibratoire et négligeant l'inertie de la chaîne,

$$\frac{QV^2}{2g} = QH - \frac{\mathfrak{E}}{n} = QH - \frac{(N - \varepsilon) P^2}{2 E \pi \rho_0 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}$$

Le maximum de P correspond à $V = 0$, et a pour valeur

$$(16) \quad P = \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{2 E \pi \rho_0 QH}{N - \varepsilon}}$$

En portant cette valeur dans l'équation (9), après avoir substitué celle de $\sin \gamma$, on calculera $\sin \gamma$ et a sera, par suite, déterminé.

Application aux chaînes de sûreté du matériel des chemins de fer. — Supposons qu'une barre d'attelage vienne à se briser. Avant que le mécanicien ait pu fermer le régulateur de la machine, le mouvement de la première partie du train s'accéléra; l'inverse aura lieu pour la seconde partie, jusqu'au moment où un choc se produira sur les chaînes de sûreté.

Proposons-nous de déterminer la tension maximum élastique, développée dans ces chaînes pendant le choc, en admettant qu'elles ne se rompent pas, hypothèse qui sera ou non justifiée par les résultats du calcul.

Soient

T l'effort de traction, estimé en kilogrammes, en tenant compte des résistances passives de la machine et du tender;

M, m les masses d'avant et d'arrière du train, séparées par la barre d'attelage rompue;

S, s les chemins parcourus au bout du temps t après la rupture par M et m avant que les chaînes ne soient tendues;

φ l'accélération due à T , définie par $T = (M + m)\varphi$;

e l'excès de la longueur des chaînes sur la distance normale des attaches.

Immédiatement après la rupture, le mouvement de m , qui n'est plus sollicité par $m\varphi$, force qui faisait équilibre aux résistances passives développées dans la partie postérieure du train, sera retardé; et comme, pendant un temps aussi court que celui qui s'écoule entre la rupture de la barre et la tension des chaînes, ces résistances ne varient pas sensiblement, nous aurons, en appelant V_0 la vitesse du train au moment où la rupture a lieu,

$$s = V_0 t - \varphi \frac{t^2}{2}.$$

Le mouvement de la masse M s'accéléra, au contraire, sous l'action de l'effort $T - M\varphi = m\varphi$, qui excède celui qui est nécessaire pour vaincre les résistances passives développées dans la partie antérieure du train, d'où l'accélération $\frac{m\varphi}{M}$ et par suite

$$S = V_0 t + \frac{1}{2} \frac{m}{M} \varphi t^2.$$

Les chaînes seront tendues lorsque l'on aura $S - s = e$ ou, au bout du temps,

$$t = \sqrt{\frac{2eM}{(M+m)\varphi}},$$

et l'on aura, pour les vitesses correspondantes de M et m ,

$$v = V_0 - \varphi t = V_0 - \sqrt{\frac{2eM\varphi}{M+m}},$$

$$V = V_0 + \frac{m}{M} \varphi t = V_0 + \frac{m}{M} \sqrt{\frac{2eM\varphi}{M+m}},$$

◆◆

d'où

$$(16) \quad V - v = \sqrt{\frac{2e\gamma(M+m)}{M}} = \sqrt{\frac{2eT}{M}}.$$

Au moment où les chaînes auront atteint leur plus grand allongement, M et m posséderont la même vitesse de translation U , et l'on aura, d'après un théorème connu,

$$MV + mv = (M + m)U.$$

En partant de là, on trouve, en ayant égard à la relation (16) pour la demi-force vive perdue pendant le choc,

$$\frac{MV^2 + mv^2 - (M + m)U^2}{2} = \frac{Mm}{2(M + m)}(V - v)^2 = \frac{m}{M + m}Te.$$

Si n est le nombre des maillons de chacune des chaînes, le travail moléculaire développé dans chaque maillon est

$$\frac{Te}{2n} \frac{m}{M + m}.$$

On a donc, en vertu de l'équation (15),

$$\frac{(N - \varepsilon)P^2}{2E\pi\rho_0 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{Te}{2n} \frac{m}{M + m},$$

d'où

$$(17) \quad P = \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{E\pi\rho_0 Te}{(N - \varepsilon)n} \frac{m}{M + m}}.$$

En portant cette expression dans la formule (9) après y avoir substitué celle de $\sin \gamma$, on obtiendra la valeur T de la plus grande tension élastique développée.

Nous supposerons dorénavant, ce qui est évidemment permis, que M et m représentent les poids, exprimés en tonnes, des deux parties du train, et nous admettrons la formule empirique suivante, due à M. Wyndam Harding :

$$(18) \quad T = (2,72 + 0,094W)(M + m) + 0,00484W^2,$$

dans laquelle W est la vitesse du train par heure, exprimée en kilomètres, et \mathfrak{A} la surface maximum du train exposée à la résistance de l'air, estimée en mètres carrés.

Appliquons les considérations qui précèdent à l'exemple suivant, emprunté à la Compagnie des chemins de fer de Paris à Lyon et à la Méditerranée :

Machine mixte, série 700, avec charge maximum ..	32 tonnes.
Tender,	22 "
Charge maximum que peut remorquer la machine..	582 "
Total.....	$M + m = 636$ tonnes;
Vitesse maximum du train.....	$W = 30$ kilomètres;
$\mathfrak{A} = 2,6 \times 2,41 = 6,266.$	

La formule (18) donne, dans ces conditions,

$$\frac{T}{M + m} = 5,58.$$

Nous avons maintenant

$$a = 0^m,011, \quad \rho_0 = 0^m,034, \quad l = 0,052, \quad n = 5, \quad e = 0^m,30,$$

d'où

$$k = 1,530, \quad \sin \gamma = \frac{a}{\rho_0} = 0,323, \quad \varepsilon = 0,807, \quad N = 1,624.$$

Les formules (17) et (9) donnent respectivement

$$P = 811 \sqrt{m},$$

$$\Gamma = 10^5 \cdot 9,314 \sqrt{m}.$$

Ainsi, en supposant $m = 49$ tonnes, on a

$$\Gamma = 10^5 \cdot 58,85,$$

tandis que la résistance à la rupture admise des fers au bois de première qualité est $10^5 \cdot 60$. En admettant que les chaînes de sûreté soient formées de cette matière, le poids total d'un wagon étant estimé à

9 tonnes, la rupture de la barre d'attelage reliant le sixième au septième wagon de queue entraînera celle des chaînes de sûreté correspondantes.

J'avais déjà démontré l'inanité des chaînes de sûreté à la suite d'une analyse moins complète que la précédente, dans une Note insérée au Compte rendu de la séance du 14 août 1871 de l'Académie des Sciences. Je terminais cette Note en proposant de transformer les chaînes de sûreté en chaînes de secours accrochées respectivement à leur propre wagon, et qui serviraient à l'occasion à réunir les deux parties du train et à les conduire doucement à la gare suivante; mais ma proposition n'a eu aucun succès administratif.