JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ALLÉGRET

Mémoire sur le problème des trois corps

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 1 (1875), p. 277-316.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1875_3_1__277_0>

Mémoire sur le problème des trois corps;

PAR M. ALLÉGRET,
Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Clermont.

INTRODUCTION.

L'étude analytique du mouvement de la Lune attirée à la fois par la Terre et par le Soleil a donné, depuis prés de deux siècles, à cause de ses difficultés, une grande célébrité au problème qui fait l'objet de ce Mémoire. Il est très-aisé, en plaçant l'origine des coordonnées au centre de gravité des trois astres ou de l'un d'eux, de former un système différentiel du douzième ordre que quatre intégrales abaissent au huitième. De nouvelles intégrations semblent ensuite nécessaires pour approcher davantage de la solution rigoureuse; mais les efforts tentés dans cette voie n'ont pas permis de répondre, au sujet des équations différentielles, à ce défi de Clairaut : « *Intègre maintenant qui pourra !* » [*].

Il est bien remarquable cependant que, sans qu'il soit besoin de recourir à ce moyen presque désespéré, on puisse notablement restreindre le nombre et la difficulté des premières intégrations, par la décomposition des équations différentielles du mouvement en systèmes d'ordre inférieur, liés les uns aux autres.

C'est ainsi que Lagrange, dans le premier chapitre de l'*Essai sur le problème des trois corps* (couronné en 1772), et, plus tard, Jacobi (*Élimination des nœuds*, 1842) sont parvenus à réduire la question au

[*] *Réflexions sur le problème des trois corps* (*Journal des Sçavants de* 1759, p. 576.)

septième ordre des différences et à une quadrature finale. Comme les systèmes différentiels considérés par ces deux illustres géomètres ne contiennent le temps que par sa différentielle, ils sont susceptibles d'être abaissés au sixième ordre, par l'élimination de cette variable sous forme de quadrature, et tous les travaux postérieurs n'ont pas pu, depuis, diminuer davantage l'ordre des équations du problème, malgré quelques modifications de forme ou de méthode.

Dans la première Section de ce Mémoire, nous étendons la réduction précédente à un nombre quelconque de corps, $n+1$, soumis à leurs attractions mutuelles. Nous montrons que l'ordre $6n$ des équations du mouvement peut toujours être abaissé de 6 unités, c'est-à-dire de deux unités de plus que par la simple adjonction des quatre intégrales des aires et des forces vives.

Dans la Section suivante, après avoir rattaché les mêmes équations à une autre aux dérivées partielles à $3n$ variables indépendantes, nous éliminons deux des dérivées à l'aide de deux intégrales transformées en équations aux dérivées partielles et compatibles avec la première. Le problème est ainsi ramené à l'intégration d'un système aux dérivées ordinaires d'ordre $6(n-1)$, et cela d'une manière extrêmement générale, sans qu'il soit besoin de faire un choix particulier de variables ou de plans coordonnés. Quelques intégrales de ce dernier système combinées entre elles et avec la quatrième intégrale, dont il n'a pas été fait usage, détermineraient, par le procédé connu, la fonction caractéristique, à l'aide de laquelle la solution s'achèverait enfin par de simples différentiations.

Cette méthode, appliquée au problème des trois corps, n'exigerait plus qu'une ou deux intégrales d'un système canonique du sixième ordre.

Dans la troisième et la dernière section, nous proposons une réduction encore plus grande. Après avoir successivement annulé deux et trois constantes des intégrales des aires, nous faisons voir que ces équations deviennent compatibles avec l'équation fondamentale et admettent une solution singulière à trois constantes arbitraires, laquelle peut être déduite de l'intégration d'un système différentiel du quatrième ordre; et quoique le nombre des constantes annulées soit supérieur à deux, le mouvement conserve toute sa généralité, pourvu qu'on ajoute à la fraction des forces certains termes convenables que nous apprenons à former.

Ces résultats intéressants paraissent avoir échappé à Jacobi [*], dont la méthode d'intégration, telle qu'il l'a présentée dans son beau Mémoire posthume *Nova methodus*, ne peut pas conduire, dans le problème des trois corps, à un abaissement inférieur au huitième ordre. Nous donnons donc plus d'extension à cette nouvelle théorie en faisant contribuer toute intégrale connue, mais prise d'une manière restreinte, à une diminution de deux unités dans l'ordre des équations. La méthode que nous exposons convient à toutes les équations différentielles qui, comme celles de la Dynamique, sont susceptibles de dépendre d'une seule équation aux dérivées partielles, et cette précieuse propriété procure d'autres avantages, notamment pour le calcul approché des intégrales. Mais nous avons réservé ce dernier sujet de nos recherches pour un Mémoire spécial, où nous avons l'intention d'examiner quelques points importants de la théorie de la Lune.

SECTION PREMIÈRE.

DU MOUVEMENT DES CORPS LIBRES SOUMIS A LEURS ATTRACTIONS MUTUELLES.

CHAPITRE PREMIER.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT.

1. Lorsque plusieurs points matériels en nombre $n+1$ s'attirent ou se repoussent mutuellement suivant une même loi donnée, fonction de la distance, on peut faire abstraction d'un mouvement général

---

[*] L'illustre géomètre prussien s'est exprimé ainsi au § 56 de son Mémoire : « Non omnibus casibus, quoties habetur integrale novum..... ordinem differentiationum duabus unitatibus deprimere licet. Ita non fit ut altero et tertio integrali quod » principium arearum concernit, duas variabiles cum earum differentialibus eliminare » liceat, ideoque *quatuor* unitatibus iste ordo deprimatur. » (*Journal de Crelle*, t. LX.)

rectiligne et uniforme du système et supposer le centre de gravité en repos. Après avoir mené par ce point trois axes coordonnés rectangulaires de direction fixe, appelons μ la masse du premier mobile, ξ, η, ζ ses coordonnées, et respectivement μ_1, ξ_1, η_1, ζ_1; μ_2, ξ_2, η_2, $\zeta_2, \ldots$; μ_n, ξ_n, η_n, ζ_n les masses et les coordonnées des n autres corps. Désignons, en outre, par ρ_k et $\rho_{k,k'}$ la fonction dont la dérivée exprime la loi d'attraction entre μ, μ_k et μ_k, $\mu_{k'}$.

2. Les équations du mouvement seront, après avoir posé,

$$U = \mu(\mu_1\rho_1 + \mu_2\rho_2 + \ldots + \mu_n\rho_n) + \Sigma\mu_k\mu_{k'}\rho_{k,k'}; \tag{1}$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \mu\dfrac{d^2\xi}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial \xi}, & \mu\dfrac{d^2\eta}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial \eta}, & \mu\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial \zeta}, \\ \mu_1\dfrac{d^2\xi_1}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial \xi_1}, & \mu_1\dfrac{d^2\eta_1}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial \eta_1}, & \mu_1\dfrac{d^2\zeta_1}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial \zeta_1}, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\ \mu_n\dfrac{d^2\xi_n}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial \xi_n}, & \mu_n\dfrac{d^2\eta_n}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial \eta_n}, & \mu_n\dfrac{d^2\zeta_n}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial \zeta_n}. \end{array}\right. \tag{2}$$

3. Les coordonnées ξ, η, $\zeta, \ldots, \zeta_n$ sont liées entre elles par les relations connues, relatives au centre de gravité,

$$\sum_{k=0}^{k=n}\mu_k\xi_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{k=n}\mu_k\eta_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{k=n}\mu_k\zeta_k = 0. \tag{3}$$

Il est facile d'éliminer trois des variables au moyen de ces équations et de réduire le système différentiel (2) à $3n$ équations du second ordre. Les seconds membres perdent alors la propriété d'être les dérivées partielles de la fonction U; mais on peut éviter cet inconvénient par une substitution linéaire et en faisant usage des formules connues de Lagrange.

CHAPITRE II.

RÉDUCTION DES ÉQUATIONS A L'ORDRE $6n$, PAR LA MÉTHODE DE JACOBI.

4. Soient, par un changement de variables,

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \xi = \alpha x + 6 x_1 + \ldots + \lambda x_{n-1}, \\ \eta = \alpha y + 6 y_1 + \ldots + \lambda y_{n-1}, \\ \zeta = \alpha z + 6 z_1 + \ldots + \lambda z_{n-1}; \\ \xi_1 = \alpha_1 x + 6_1 x_1 + \ldots + \lambda_1 x_{n-1}, \\ \eta_1 = \alpha_1 y + 6_1 y_1 + \ldots + \lambda_1 y_{n-1}, \\ \zeta_1 = \alpha_1 z + 6_1 z_1 + \ldots + \lambda_1 z_{n-1}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \xi_n = \alpha_n x + 6_n x_1 + \ldots + \lambda_n x_{n-1}, \\ \eta_n = \alpha_n y + 6_n y_1 + \ldots + \lambda_n y_{n-1}, \\ \zeta_n = \alpha_n z + 6_n z_1 + \ldots + \lambda_n z_{n-1}, \end{array}\right.$$

où $\alpha, 6, \ldots, \lambda, \ldots, \alpha_n, 6_n, \ldots, \lambda_n$ désignent $n(n+1)$ coefficients constants et $x, x_1, x_{n-1}, y, y_1, \ldots, y_{n-1}, z, z_1, \ldots, z_{n-1}$, $3n$ nouvelles variables, qui remplaceront les précédentes, pourvu que les coefficients de la substitution soient assujettis aux n équations linéaires

$$(5)\quad \sum_{k=0}^{k=n} \mu_k \alpha_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{k=n} \mu_k 6_k = 0, \ldots, \quad \sum_{k=0}^{k=n} \mu_k \lambda_k = 0,$$

qui permettent de rendre identiques les équations (3), au moyen des valeurs (4).

5. Nous ajouterons aux conditions (5) les $\frac{n(n-1)}{2}$ nouvelles, en nombre égal aux combinaisons deux à deux des n lettres $\alpha, 6, \ldots, \lambda$, savoir

$$(6)\quad \sum_{k=0}^{k=n} \mu_k \alpha_k 6_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{k=n} \mu_k \alpha_k \gamma_k = 0, \ldots, \quad \sum_{k=0}^{k=n} \mu_k 6_k \lambda_k = 0.$$

Ce qui donne identiquement

$$(7)\quad \begin{cases} \mathrm{T} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \mu_k \left[\left(\frac{d\xi_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_k}{dt}\right)^2\right] \\ \quad = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k \left[\left(\frac{dx_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_k}{dt}\right)^2\right], \end{cases}$$

en faisant

$$(8)\qquad m = \sum_{k=0}^{k=n} \mu_k \alpha_k^2, \quad m_1 = \sum_{k=0}^{k=n} \mu_k 6_k^2, \ldots, \quad m_{n-1} = \sum_{k=0}^{k=n} \mu_k \lambda_k^2.$$

Par l'application de la formule de Lagrange

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial\left(\dfrac{dx_k}{dt}\right)} = \frac{\partial(\mathrm{T}+\mathrm{U})}{\partial x_k},$$

il viendra ensuite, pour les équations du mouvement,

$$(9)\quad \begin{cases} m\,\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}, & m\,\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}, & m\,\dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}, \\ m_1\,\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_1}, & m_1\,\dfrac{d^2y_1}{dt^2} = \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y_1}, & m_1\,\dfrac{d^2z_1}{dt^2} = \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial z_1}, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\ m_{n-1}\,\dfrac{d^2x_{n-1}}{dt^2} = \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_{n-1}}, & m_{n-1}\,\dfrac{d^2y_{n-1}}{dt^2} = \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y_{n-1}}, & m_{n-1}\,\dfrac{d^2z_{n-1}}{dt^2} = \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial z_{n-1}}; \end{cases}$$

système semblable à (2), qui comprend trois équations de moins, et où la valeur (1) de U est transformée par les substitutions (4). C'est la transformation que Jacobi a fait connaître dans son Mémoire sur l'*Élimination des nœuds dans le problème des trois corps.*

CHAPITRE III.

D'UNE SIMPLIFICATION APPORTÉE AUX FORMULES PRÉCÉDENTES.

6. Le nombre des coefficients indéterminés qui entrent dans (4) est $n(n+1)$ et celui des conditions (5) et (6) est égal à $\frac{n(n+1)}{2}$. Si l'on observe qu'on peut multiplier par n facteurs quelconques les variables $x, x_1, \ldots, x_{n-1}$, et respectivement aussi $y, y_1, \ldots, y_{n-1}$; $z, z_1, \ldots, z_{n-1}$, ce qui revient à multiplier par les facteurs inverses tous les coefficients correspondants $\alpha_k, \beta_k, \ldots, \lambda_k$ des substitutions, il ne restera plus que $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions arbitraires. Nous en disposerons en écrivant les substitutions (4) sous forme triangulaire, et en doublant la première ligne de n termes.

Nous avons ainsi été conduit à un théorème intéressant, qui nous paraît ajouter un perfectionnement à la méthode de Jacobi. Les coefficients précédents prennent alors une signification géométrique qui fait disparaître toute indétermination des formules considérées.

7. Désignons, pour cela, par G_1 le centre de gravité des deux premiers corps A, A_1, puis par G_2 le centre des trois premiers A, A_1, $A_2, \ldots$ et enfin par G_n le centre de gravité des $n+1$ corps A, $A_1, \ldots, A_n$. Soient, de plus, x, y, z; $x_1, y_1, z_1, \ldots$; $x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}$ les projections sur les axes coordonnés des longueurs AA_1, $G_1A_2, \ldots$; $G_{n-1}A_n$, et faisons

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma &= \mu, \\ \sigma_1 &= \mu + \mu_1, \\ \sigma_2 &= \mu + \mu_1 + \mu_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sigma_n &= \mu + \mu_1 + \ldots + \mu_n = \sum_{k=0}^{k=n} \mu_k. \end{aligned}\right.$$

8. On trouvera pour valeurs des coordonnées $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \xi_n, \eta_n, \zeta_n$, prises par rapport au centre de gravité G_n, les expressions linéaires suivantes :

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\xi &= -\frac{\mu_1}{\sigma_1}x - \frac{\mu_2}{\sigma_2}x_1 - \frac{\mu_3}{\sigma_3}x_2 - \dots - \frac{\mu_n}{\sigma_n}x_{n-1},\\
\xi_1 &= \frac{\sigma}{\sigma_1}x - \frac{\mu_2}{\sigma_2}x_1 - \frac{\mu_3}{\sigma_3}x_2 - \dots - \frac{\mu_n}{\sigma_n}x_{n-1},\\
\xi_2 &= \frac{\sigma_1}{\sigma_2}x_1 - \frac{\mu_3}{\sigma_3}x_2 - \dots - \frac{\mu_n}{\sigma_n}x_{n-1},\\
\xi_3 &= \frac{\sigma_2}{\sigma_3}x_2 - \dots - \frac{\mu_n}{\sigma_n}x_{n-1},\\
\multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots},\\
\xi_{n-1} &= \frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}}x_{n-2} - \frac{\mu_n}{\sigma_n}x_{n-1},\\
\xi_n &= \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}x_{n-1}.
\end{array}\right.$$

On formera, de même, deux systèmes semblables par rapport aux deux autres axes coordonnés.

Appelons maintenant $r, r_1, \dots, r_{n-1}$ les distances précédentes AA_1, $G_1A_2, \dots, G_{n-1}A_n$; $\delta_{k,k'}$ la distance des deux points μ_k, $\mu_{k'}$, et Δ_k celle de μ_k à G_n. Faisons, de plus,

$$(12)\qquad m = \sigma\frac{\mu_1}{\sigma_1},\quad m_1 = \sigma_1\frac{\mu_2}{\sigma_2},\dots,\quad m_{n-1} = \sigma_{n-1}\frac{\mu_n}{\sigma_n}.$$

On vérifiera aisément les identités géométriques

$$\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{k=n}\sum_{k'=0}^{k'=n}\mu_k\mu_{k'}\delta_{k,k'}^2 = \sum_{k=0}^{k=n}\mu_k\Delta_k^2 = \sum_{k=0}^{k=n-1} m r_k^2;$$

par suite aussi l'équation analogue (7). Ainsi les substitutions (11), comme les précédentes (4), feront prendre aux équations du mouvement la forme (9), après le changement préalable de l'expression (1) de U.

CHAPITRE IV.

FONCTION PERTURBATRICE. — APPLICATION AU PROBLÈME DES TROIS CORPS.

9. Dans la théorie des planètes on devra faire $\mu = \sigma$ égale à la masse du Soleil, et μ_1 égale à celle de la planète dont on veut étudier le mouvement; $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n$ seront les autres masses dans l'ordre de leur influence perturbatrice à l'égard de la première planète μ_1. De cette manière les quantités auxiliaires $m, m_1, \ldots, m_{n-1}$ différeront très-peu des masses $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$.

Les équations du mouvement de la planète considérée seront

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Dans l'hypothèse de l'attraction newtonienne, U contiendra le premier terme important

$$\mu\mu_1\rho_1 = \frac{\mu\mu_1}{\delta_{0,1}} = \frac{\mu\mu_1}{r},$$

qui donne le mouvement elliptique de la planète.

10. La fonction perturbatrice U′ sera, après avoir retranché de U ce premier terme, et en continuant de faire usage des formules (11),

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
U' = {} & \frac{\mu\mu_2}{\left[\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}x + x_1\right)^2 + \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}y + y_1\right)^2 + \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}z + z_1\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \\
& + \frac{\mu\mu_3}{\left[\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}x + \frac{\mu_2}{\sigma_2}x_1 + x_2\right) + \ldots\right]^{\frac{1}{2}}} + \ldots \\
& + \frac{\mu\mu_n}{\left[\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}x + \frac{\mu_2}{\sigma_2}x_1 + \ldots + x_{n-1}\right)^2 + \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}y + \frac{\mu_2}{\sigma_2}y_1 + \ldots + y_{n-1}\right)^2 + \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}z + \frac{\mu_2}{\sigma_2}z_1 + \ldots + z_{n-1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \\
& + \frac{\mu_1\mu_2}{\left[\left(-\frac{\sigma}{\sigma_1}x + x_1\right)^2 + \left(-\frac{\sigma}{\sigma_1}y + y_1\right)^2 + \left(-\frac{\sigma}{\sigma_1}z + z_1\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} + \ldots \\
& + \frac{\mu_1\mu_k}{\left[\left(-\frac{\sigma}{\sigma_1}x + \frac{\mu_2}{\sigma_2}x_1 + \ldots + x_{n-1}\right)^2 + \left(\ldots\right)^2 + \left(\ldots\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} + \ldots \\
& + \frac{\mu_1\mu_n}{\left[\left(-\frac{\sigma}{\sigma_1}x + \frac{\mu_2}{\sigma_2}x_1 + \ldots + x_{n-1}\right)^2 + \ldots\right]^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}\right.$$

11. Le développement en série de U' qui comprend $2(n-1)$ termes n'offre pas beaucoup plus de difficultés que dans la méthode ordinaire. Les inégalités dues aux perturbations conserveront la même forme; mais les arguments devront être corrigés, et ne seront plus des multiples des élongations réelles des astres. Les positions de ces derniers devront être préalablement modifiées par de petites équations analogues aux parallaxes, à cause de l'éloignement du centre primitif A (ici, du Soleil) des divers points $G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}$.

12. Pour appliquer cette méthode à la Lune, on devra faire $n=2$ et μ, μ_1, μ_2 respectivement égales aux masses de la Terre, de la Lune et du Soleil. Les formules précédentes deviendront dans ce cas

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} U' = {} & \frac{\mu\mu_2}{\left[\left(\frac{\mu_1}{\mu+\mu_1}\right)^2 r^2 + r_1^2 + \frac{2\mu_1}{\mu+\mu_1} r r_1 \cos\omega\right]^{\frac{1}{2}}} \\ & + \frac{\mu_1\mu_2}{\left[\left(\frac{\mu}{\mu+\mu_1}\right)^2 r^2 + r_1^2 - \frac{2\mu}{\mu+\mu_1} r r_1 \cos\omega\right]^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}\right.$$

en désignant par r, r_1 les distances

$$AA_1 = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad G_1A_2 = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2},$$

définies comme ci-dessus, et par ω l'angle des directions correspondantes. Si l'on fait, dans les premières des équations (9), $m = \frac{\mu\mu_1}{\mu+\mu_1}$, les équations du mouvement de la Lune troublée par le Soleil seront

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = {} & (\mu+\mu_1)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\mu_2}{\left(\frac{\mu_1}{\mu+\mu_1}\right)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\left[r_1^2 + \frac{2\mu_1}{\mu+\mu_1} r_1 r\cos\omega + \left(\frac{\mu_1}{\mu+\mu_1} r\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \\ & + \frac{\mu_2}{\left(\frac{\mu}{\mu+\mu_1}\right)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\left[r_1^2 - \frac{2\mu}{\mu+\mu_1} r_1 r\cos\omega + \left(\frac{\mu r}{\mu+\mu_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right.$$

et deux autres équations semblables qu'on obtient par le changement de x en y et en z.

Le calcul des perturbations de la Lune dépendra donc du développement connu de l'expression

$$(r_1^2 + \alpha^2 r^2 + 2\alpha r r_1 \cos\omega)^{-\frac{1}{2}},$$

où il faudrait ensuite tenir compte des valeurs approchées de r, r_1 et des cosinus des multiples de ω en fonction du temps, et remplacer successivement α par $\frac{\mu_1}{\mu+\mu_1}$ et par $-\frac{\mu}{\mu+\mu_1}$.

Dans le cas où le problème devrait être traité en toute rigueur, comme nous le supposerons dans la suite de ce Mémoire, les six équations du mouvement se réduiraient à

$$(16)\qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial x}, & m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial y}, \quad m\dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial z}; \\ m_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial x_1}, & m_1\dfrac{d^2y_1}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial y_1}, \quad m_1\dfrac{d^2z_1}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial z_1}, \end{cases}$$

et l'on aurait

$$(17)\qquad U = \frac{\mu\mu_1}{r} + U',$$

$$(18)\qquad m = \mu\frac{\mu_1}{\mu+\mu_1}, \quad m_1 = (\mu+\mu_1)\frac{\mu_2}{\mu+\mu_1+\mu_2},$$

en donnant à U' la valeur (14). Il importe de remarquer que la fonction U dépendra ici uniquement des trois variables p, q, l, savoir :

$$(19)\qquad p = \tfrac{1}{2}r^2, \quad q = \tfrac{1}{2}r_1^2, \quad l = rr_1\cos\omega,$$

et nous aurons occasion d'utiliser plus tard cette propriété.

CHAPITRE V.

FORME DES INTÉGRALES CONNUES.

13. On déduit facilement des équations (9),

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k\left(\frac{d^2x_k}{dt^2}dx_k + \frac{d^2y_k}{dt^2}dy_k + \frac{d^2z_k}{dt^2}dz_k\right) = dU,$$

et, en intégrant,

$$(20)\qquad \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k\left[\left(\frac{dx_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_k}{dt}\right)^2\right] = U - H,$$

qui est l'*équation des forces vives,* où H désigne une constante arbitraire.

14. Les équations (2) donnent aussi

$$\sum_{k=0}^{k=n} \mu_k\left(\eta_k\frac{d^2\zeta_k}{dt^2} - \zeta_k\frac{d^2\eta_k}{dt^2}\right) = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} \mu_k\left(\zeta_k\frac{d^2\xi_k}{dt^2} - \xi_k\frac{d^2\zeta_k}{dt^2}\right) = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} \mu_k\left(\xi_k\frac{d^2\eta_k}{dt^2} - \eta_k\frac{d^2\xi_k}{dt^2}\right) = 0,$$

et, par la substitution des expressions (4) et en ayant égard aux relations (5), (6) et (8), il viendra

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k\left(y_k\frac{d^2z_k}{dt^2} - z_k\frac{d^2y_k}{dt^2}\right) = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k\left(z_k\frac{d^2x_k}{dt^2} - x_k\frac{d^2z_k}{dt^2}\right) = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k\left(x_k\frac{d^2y_k}{dt^2} - y_k\frac{d^2x_k}{dt^2}\right) = 0,$$

d'où résultent, par de nouvelles intégrations, les trois intégrales dites des *aires* :

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k\left(y_k\frac{dz_k}{dt}-z_k\frac{dy_k}{dt}\right)=\mathrm{A},\\ &\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k\left(z_k\frac{dx_k}{dt}-x_k\frac{dz_k}{dt}\right)=\mathrm{B},\\ &\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k\left(x_k\frac{dy_k}{dt}-y_k\frac{dx_k}{dt}\right)=\mathrm{C}.\end{aligned}\right.$$

Les équations (20) et (21) sont, sous une forme un peu différente, quatre intégrales bien connues.

CHAPITRE VI.

DÉTERMINATION DE DEUX NOUVELLES INTÉGRALES.

15. Par un changement d'axes coordonnés, on peut rendre nulles les deux premières constantes A et B des équations (21). Il suffit, pour cela, de choisir pour l'un des plans coordonnés le *plan invariable* du système, ou celui qui correspond au *maximum des aires* dans le mouvement considéré.

Projetons sur ce plan les droites menées de l'origine aux points x, y, z; $x_1, y_1, z_1, \ldots$; $x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}$, et désignons par $s, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$, u, $u+\omega_1$, $u+\omega_2, \ldots, u+\omega_{n-1}$ les longueurs des projections obtenues et les angles qu'elles font respectivement avec l'axe des x, de sorte que $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ sont les angles que font avec s les autres projections $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$.

16. Ajoutons, membre à membre, les deux premières équations (21) ainsi modifiées, après avoir multiplié la première par $-\sqrt{-1}$, et introduit la base e des logarithmes népériens. Il viendra

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k\left\{z_k\frac{d}{dt}\left[s_k e^{(u+\omega_k)\sqrt{-1}}\right]-s_k\frac{dz_k}{dt}e^{(u+\omega_k)\sqrt{-1}}\right\}=0$$

où, en divisant par $e^{u\sqrt{-1}}$, et supposant en outre $\omega_0 = 0$,

$$(22)\quad \sum_{k=0}^{k=n-1} m_k e^{\omega_k\sqrt{-1}}\left[z_k\frac{ds_k}{dt} - s_k\frac{dz_k}{t} + s_k z_k\left(\frac{du}{dt}+\frac{d\omega_k}{dt}\right)\sqrt{-1}\right] = 0.$$

D'un autre côté, la troisième intégrale des aires (21) devient, par ce changement de variables,

$$(23)\qquad \sum_{k=0}^{k=n-1} m_k s_k^2\left(\frac{du}{dt}+\frac{d\omega_k}{dt}\right) = \mathrm{C},$$

et l'on en tire

$$(24)\qquad \frac{du}{dt} = \frac{\mathrm{C} - \sum\limits_{k=1}^{k=n-1} m_k s_k^2 \dfrac{d\omega_k}{dt}}{\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} m_k s_k^2}.$$

17. Si l'on substitue cette valeur de $\frac{du}{dt}$ dans (22) et qu'on décompose ensuite en deux l'équation résultante, en égalant à zéro les parties réelles et imaginaires, on trouvera

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{k=n-1} m_k\left[\left(z_k\frac{ds_k}{dt} - s_k\frac{dz_k}{dt}\right)\cos\omega_k - z_k s_k\frac{d\omega_k}{dt}\sin\omega_k\right]\\
&\qquad + \left(\sum_{k=1}^{k=n-1} m_k s_k z_k \sin\omega_k\right)\frac{\mathrm{C} - \sum\limits_{k=1}^{k=n-1} m_k s_k^2\dfrac{d\omega_k}{dt}}{\sum\limits_{k=1}^{k=n-1} m_k s_k^2} = 0,\\
&\sum_{k=1}^{k=n-1} m_k\left(s_k z_k\frac{d\omega_k}{dt}\cos\omega_k\right) + \left(z_k\frac{ds_k}{dt} - s_k\frac{dz_k}{dt}\right)\sin\omega_k\\
&\qquad + \left(\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k s_k z_k \cos\omega_k\right)\frac{\mathrm{C} - \sum\limits_{k=1}^{k=n-1} m_k s_k^2\dfrac{d\omega_k}{dt}}{\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} m_k s_k^2} = 0.
\end{aligned}\right.$$

18. L'équation des forces vives (20) deviendra de même

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{2} m_k \left[\left(\frac{ds_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_k}{dt}\right)^2 + s_k^2 \left(\frac{du}{dt} + \frac{d\omega_k}{dt}\right)^2\right] = \mathrm{U} - \mathrm{H},$$

ou, après la substitution de la valeur (24) de $\frac{du}{dt}$, et, toutes réductions faites,

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{2} m_k \left[\left(\frac{ds_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_k}{dt}\right)^2 + s_k^2 \left(\frac{d\omega_k}{dt}\right)^2\right] \\ &\qquad + \frac{\mathrm{C}^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{k=n-1} m_k s_k^2 \frac{d\omega_k}{dt}\right)^2}{2 \sum\limits_{k=0}^{k=n-1} m_k s_k^2} = \mathrm{U} - \mathrm{H}. \end{aligned} \right.$$

Il importe de remarquer que la variable u n'entre pas dans les trois dernières équations, non plus que dans la fonction des forces U.

19. Nous transformerons les équations du mouvement, dans le système des nouvelles variables, au moyen des formules de Lagrange. En posant

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &m \left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] + \sum_{k=1}^{k=n-1} m_k \left[\left(\frac{ds_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_k}{dt}\right)^2 + s_k^2 \left(\frac{d\omega_k}{dt}\right)^2\right] \\ &\qquad + \frac{\mathrm{C}^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{k=n-1} m_k s_k^2 \frac{d\omega_k}{dt}\right)^2}{\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} m_k s_k^2} \end{aligned} \right\},$$

et, en considérant maintenant C comme une constante particulière donnée, nous formerons ainsi les $3n-1$ équations différentielles du second ordre

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z},\quad m_1\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_1},\ldots,\quad m_{n-1}\frac{d^2z_{n-1}}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_{n-1}},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{ds}{dt}\right)}=\frac{\partial(T+U)}{\partial s},\ldots,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\frac{ds_{n-1}}{dt}}=\frac{\partial(T+U)}{ds_{n-1}},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\omega_1}{dt}\right)}=\frac{\partial(T+U)}{\partial\omega_1},\ldots,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\omega_{n-1}}{dt}\right)}=\frac{\partial(T+U)}{\partial\omega_{n-1}}.$$

20. Pour abaisser ces équations au premier ordre, nous introduirons $3n-1$ variables auxiliaires, savoir

$$(27)\quad \begin{cases} z'=m\dfrac{dz}{dt}, & z'_1=m_1\dfrac{dz_1}{dt},\ldots, & z'_{n-1}=m_{n-1}\dfrac{dz_{n-1}}{dt},\\ s'=m\dfrac{ds}{dt}, & s'_1=m_1\dfrac{ds_1}{dt},\ldots, & s'_{n-1}=m_{n-1}\dfrac{ds_{n-1}}{dt},\\ & \omega'_1=\dfrac{d\omega_1}{dt},\ldots, & \omega'_{n-1}=\dfrac{d\omega_{n-1}}{dt}; \end{cases}$$

ce qui donne

$$(28)\quad \begin{cases} T=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{2m_k}(s_k'^2+z_k'^2)\\ \qquad+\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{2}m_k s_k^2\omega_k'^2+\frac{C^2-\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1}m_k s_k^2\omega'_k\right)^2}{2\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}m_k s_k^2}, \end{cases}$$

et pour les équations du mouvement

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{dz'}{dt}=\dfrac{\partial U}{\partial z}, & \dfrac{dz'_1}{dt}=\dfrac{\partial U}{\partial z_1},\ldots, & \dfrac{dz'_{n-1}}{dt}=\dfrac{\partial U}{\partial z_{n-1}};\\ \dfrac{ds'}{dt}=\dfrac{\partial(T+U)}{\partial s}, & \dfrac{ds'_1}{dt}=\dfrac{\partial(T+U)}{\partial s_1},\ldots, & \dfrac{ds'_{n-1}}{dt}=\dfrac{\partial(T+U)}{\partial s_{n-1}};\\ & \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\omega'_1}=\dfrac{\partial(T+U)}{d\omega_1},\ldots, & \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\omega'_{n-1}}=\dfrac{\partial(T+U)}{\partial\omega_{n-1}}, \end{cases}$$

en exprimant U en fonction des mêmes variables $s, s_1, \ldots; z, z_1, \ldots, z_{n-1}, \ldots; \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$, et prenant pour T l'expression (28). Ces dernières, jointes à (27), forment un système complet, d'ordre $6n-2$, entre le temps t et les $6n-2$ variables

$$\begin{array}{lll} z, z_1, \ldots, z_{n-1}; & s, s_1, \ldots, s_{n-1}; & \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}; \\ z', z'_1, \ldots, z'_{n-1}; & s', s'_1, \ldots, s'_{n-1}; & \omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_{n-1}. \end{array}$$

Mais on peut en éliminer immédiatement t, et réduire ainsi le système à $6n-3$ équations du premier ordre entre les $6n-2$ dernières variables. Les relations (25) et (26) fourniront trois intégrales et abaisseront, par suite, l'ordre à $6n-6$, ou à celui qui correspond au mouvement de $n-1$ points, mais dans le cas où la conservation des forces vives n'a plus lieu.

21. Après avoir intégré complétement le système formé par (27) et (29), réduit par l'élimination du temps et à l'aide des intégrales connues (25) et (26), les variables s'exprimeront toutes au moyen d'une d'entre elles, ω_1 par exemple, et la solution s'achèvera par deux quadratures, savoir :

$$t - t_0 = \int \frac{d\omega_1}{\omega'_1}, \tag{30}$$

$$u - u_0 = \int \frac{C - \sum_{k=1}^{k=n-1} m_k s_k^2 \omega'_k}{\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k s_k^2} \frac{d\omega_1}{\omega'_1}, \tag{31}$$

en désignant par t_0 et u_0 deux nouvelles constantes arbitraires.

22. Jacobi a signalé comme immédiate au n° **22** du Mémoire latin, sur la *Théorie du nouveau multiplicateur* (*Journal de Crelle*, t. XXIX, p. 259), la détermination du temps par une dernière quadrature, et il s'exprime ainsi : « *Ultimam integrationem, qua t per coordinatas exprimatur, quadraturis absolvi, res erat nota et sponte patens.* »

Nous observerons, toutefois, que l'intégrale (30) n'est pas plus ici la dernière que (31), et il n'y a pas lieu, il semble, au point de vue de l'intégration rigoureuse, d'établir entre les deux intégrales un ordre de prééminence. En les considérant simultanément, comme nous venons de le faire, on effectue sûrement deux intégrations, dans le sens même du géomètre prussien. Or, dans son Mémoire *Sur l'élimination des nœuds,* Jacobi s'était borné à dire : « *Les intégrales connues n'étant qu'au nombre de quatre, on pourra dire que l'on a fait une intégration de plus dans le système du monde.* »

SECTION DEUXIÈME.

FORME CANONIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET DES INTÉGRALES.

CHAPITRE PREMIER.

AUTRE MÉTHODE D'INTÉGRATION.

23. Après avoir mis les équations du mouvement de $n+1$ points sous la forme (9) (n° 5), savoir :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x},\ldots,\quad m_{n-1}\frac{d^2z_{n-1}}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_{n-1}},\tag{1}$$

nous poserons

$$x'=m\frac{dx}{dt},\ y'=m\frac{dy}{dt},\ldots,\ y'_{n-1}=m_{n-1}\frac{dy_{n-1}}{dt},\ z'_{n-1}=m_{n-1}\frac{dz_{n-1}}{dt},\tag{2}$$

ce qui permet d'écrire ainsi les quatre intégrales connues

$$U-\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{1}{2m_i}(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)=H,\tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}(y_iz'_i-z_iy'_i)=A,\tag{4}$$

$$(5)\qquad \sum_{i=0}^{i=n-1} (z_i x'_i - x_i z'_i) = \mathrm{B},$$

$$(6)\qquad \sum_{i=0}^{i=n-1} (x_i y'_i - y_i x'_i) = \mathrm{C},$$

et de donner aux équations (1) la forme *canonique*

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{lll}
\dfrac{dx'}{dt} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}, & \dfrac{dy'}{dt} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}, & \dfrac{dz'}{dt} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}, \\
\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x'}, & \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y'}, & \dfrac{dz}{dt} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial z'}, \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
\dfrac{dx'_{n-1}}{dt} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_{n-1}}, & \dfrac{dy'_{n-1}}{dt} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y_{n-1}}, & \dfrac{dz'_{n-1}}{dt} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial z_{n-1}}, \\
\dfrac{dx_{n-1}}{dt} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x'_{n-1}}, & \dfrac{dy_{n-1}}{dt} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y'_{n-1}}, & \dfrac{dz_{n-1}}{dt} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial z'_{n-1}},
\end{array}\right.$$

où H désigne le premier membre de l'équation (3).

24. Les équations (7) sont précisément celles qui serviraient à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles (3), où, sans égard aux relations (2), on supposerait, à nouveau,

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{lll}
x' = \dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial x}, & y' = \dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial y}, & z' = \dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial z}, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\
x'_{n-1} = \dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_{n-1}}, & y'_{n-1} = \dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial y_{n-1}}, & z'_{n-1} = \dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial z_{n-1}},
\end{array}\right.$$

en représentant par S une fonction de $3n$ variables $x, y, \ldots, z_{n-1}$ et de $3n-1$ constantes arbitraires, non compris la constante H et celle qui s'ajoute à S. S est donc une solution complète de l'équation (3) à $3n$ variables indépendantes, qui satisfera identiquement à cette équation.

25. D'après une théorie connue, les constantes qui entreront dans S sont celles des intégrales mêmes de (7), mais choisies de manière que deux quelconques d'entre elles, f et g par exemple, donnent l'identité *nécessaire et suffisante* [*Nova methodus* (*Journal de Crelle*, tome LX)].

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} [f, g] = \sum_{i=1}^{i=n-1} \Big(& \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x'_i} - \frac{\partial f}{\partial x'_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} \\ & + \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial g'_i} - \frac{\partial f}{\partial y'_i}\frac{\partial g}{\partial y_i} + \frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{\partial g}{\partial z'_i} - \frac{\partial f}{\partial z'_i}\frac{\partial g}{\partial z_i}\Big) = 0, \end{aligned} \right.$$

et si l'on connaissait $3n - 1$ intégrales de (7), distinctes de H, satisfaisant deux à deux à cette condition, on en déduirait facilement ensuite les valeurs des dérivées x', y',..., z'_{n-1} et, par suite, la fonction S par une quadrature. En égalant à de nouvelles constantes arbitraires les dérivées partielles de S par rapport aux $3n - 1$ constantes qui y entrent, et $\frac{\partial S}{\partial H}$ à $t_0 - t$ (t_0 désignant la constante arbitraire du temps), on obtiendra les $3n$ intégrales finies du problème, avec $6n$ constantes arbitraires, parmi lesquelles H.

CHAPITRE II.

DÉTERMINATION DE TROIS INTÉGRALES CANONIQUES.

26. La condition essentielle $[f, g] = 0$ est toujours remplie lorsqu'on prend pour l'une des intégrales H ou (3). Si l'on différentie, en effet, l'autre intégrale, par rapport au temps, et que l'on remplace les dérivées des variables par leurs valeurs (7), il vient identiquement $[H, g] = 0$, par suite de la disparition des constantes. Il est donc inutile d'appliquer le caractère discriminant (9) aux combinaisons binaires où entre H, que nous prendrons pour première intégrale canonique, et nous lui adjoindrons pour seconde intégrale canonique l'une quelconque des intégrales des aires, par exemple l'équation (6) ou C.

27. Avant de procéder à la recherche d'une nouvelle intégrale canonique, nous devons faire observer que la constante H, de même que C ou toute autre constante canonique, peut figurer à titre de de simple constante particulière ou être remplacée, à volonté, par sa valeur en fonction des variables dans le premier membre de toute intégrale de (7) qu'on voudra considérer.

En appelant F et G ce que deviennent les fonctions f et g, après qu'on aura remplacé les constantes canoniques $\alpha, 6, \ldots, C, H$ par leurs valeurs données en fonction des seules variables $x, y, \ldots, z'_{n-1}$, on aura, en effet, identiquement

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} [F, G] = [f, g] + [\alpha, 6]\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial g}{\partial 6} - \frac{\partial f}{\partial 6}\frac{\partial g}{\partial \alpha}\right) + \ldots \\ + [\alpha, H]\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial g}{\partial H} - \frac{\partial f}{\partial H}\frac{\partial g}{\partial \alpha}\right) + \ldots \\ + [\alpha, C]\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial g}{\partial C} - \frac{\partial f}{\partial C}\frac{\partial g}{\partial \alpha}\right) + \ldots \end{aligned}\right.$$

et, par suite,

$$(11)\qquad [F, G] = [f, g],$$

à cause des identités

$$[\alpha, 6] = [\alpha, H] = [\alpha, C] = \ldots = 0,$$

auxquelles donnent lieu, deux à deux, les intégrales canoniques $\alpha, \ldots, C$ et H.

28. Les intégrales (4) et (5), dont nous n'avons pas fait usage, ne remplissent plus la condition (9), car on a

$$(12)\qquad [A, B] = C,$$

de même que

$$(13)\qquad [B, C] = A \quad \text{et} \quad [C, A] = B.$$

On ne peut donc prendre ni A ni B pour nouvelles intégrales canoniques à adjoindre aux précédentes H et C; mais si l'on fait

$$(14)\quad K = A^2 + B^2 = \left[\sum_{i=0}^{i=n-1} (y_i z'_i - z_i y'_i)\right]^2 + \left[\sum_{i=0}^{i=n-1} (z_i x'_i - x_i z'_i)\right]^2,$$

en appelant K une nouvelle constante arbitraire, cette intégrale de (7) sera distincte à la fois de C et de H.

Nous aurons d'abord évidemment (nº **26**)

$$[H, K] = 0,$$

et, d'autre part, par l'application de la formule (10) du numéro précédent, il viendra

$$\begin{aligned}[K, C] = [A, C]&\left(\frac{\partial K}{\partial A}\frac{\partial C}{\partial C} - \frac{\partial K}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial A}\right)\\ &+ [B, C]\left(\frac{\partial K}{\partial B}\frac{\partial C}{\partial C} - \frac{\partial K}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial B}\right) = -2AB + 2BA = 0.\end{aligned}$$

Ainsi les deux conditions

$$(15)\qquad [H, K] = 0 \quad \text{et} \quad [K, C] = 0$$

seront identiquement remplies et K sera la troisième intégrale canonique qu'il est permis d'adjoindre aux précédentes H et C.

29. Si l'on rapproche l'identité (9) des équations différentielles qu'il faudrait établir pour intégrer les équations

$$f = \alpha, \quad g = \beta,$$

où α et β désignent deux constantes arbitraires et f et g deux fonctions intégrales du système (7), on s'assure aisément que les intégrales *canoniques*, qui définissent la fonction S, sont toutes, de même que H, satisfaites par les mêmes dérivées partielles (8). Ainsi S est une solution commune à $3n$ équations distinctes, aux dérivées partielles du premier ordre, correspondant aux intégrales canoniques H, C, K,..., et à toutes celles qu'on en déduit par des combinaisons quelconques. La proposition réciproque, généralement vraie lorsqu'on considère des solutions complètes, ne l'est plus pour des solutions singulières de l'équation (3), qui peuvent satisfaire en même temps à des intégrales non canoniques particulières de (7), où les constantes seraient nulles; mais nous ne nous occuperons d'abord dans cette Section que du cas ordinaire où la solution S est complète.

CHAPITRE III.

NOUVELLE RÉDUCTION DE SIX UNITÉS DANS L'ORDRE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET CONSÉQUENCES QUI EN RÉSULTENT.

30. Si, conformément à la remarque précédente, on élimine entre les trois intégrales canoniques, H, C et K, deux quelconques des $3n$ variables x', $x'_1, \ldots$, x'_{n-1}, y', $y'_1, \ldots$, z'_{n-1}, par exemple y' et z', on pourra supposer ensuite que la première x' est déterminée en fonction des $6n-5$ autres, savoir :

$$x, x_1, y_1, z_1, \ldots; \quad x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}, \ldots; \quad x'_1, y'_1, z'_1, \ldots; \quad x'_{n-1}, y'_{n-1}, z'_{n-1},$$

et traiter y et z, de même que C, H et K, comme des constantes particulières dans l'équation aux dérivées partielles, où n'entreront plus alors les dérivées de S par rapport à y et à z.

Par l'application de la méthode connue, l'intégration de cette dernière équation, qui dépend toujours, comme l'équation (3), de celle du système (7) aux dérivées ordinaires, se ramène, à cause de la disparition des dérivées y' et z', à l'intégration du nouveau système canonique de l'ordre $6n-6$, savoir :

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\dfrac{dx'_1}{dx} = \dfrac{\partial x'}{\partial x_1}, & \dfrac{dy'_1}{dx} = \dfrac{\partial x'}{\partial y_1}, & \dfrac{dz'_1}{dx} = \dfrac{\partial x'}{\partial z_1}, \\
\dfrac{dx_1}{dx} = -\dfrac{\partial x'}{\partial x'_1}, & \dfrac{dy_1}{dx} = -\dfrac{\partial x'}{\partial y'_1}, & \dfrac{dz_1}{dx} = -\dfrac{\partial x'}{\partial z'_1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\dfrac{dx'_{n-1}}{dx} = \dfrac{\partial x'}{\partial x_{n-1}}, & \dfrac{dx}{dy'_{n-1}} = \dfrac{\partial x'}{\partial y_{n-1}}, & \dfrac{dz'_{n-1}}{dx} = \dfrac{\partial x'}{\partial z_{n-1}}, \\
\dfrac{dx_{n-1}}{dx} = -\dfrac{\partial x'}{\partial x'_{n-1}}, & \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = -\dfrac{\partial x'}{\partial y'_{n-1}}, & \dfrac{dz_{n-1}}{dx} = -\dfrac{\partial x'}{\partial z'_{n-1}}.
\end{array}\right.$$

Ces dernières équations sont d'un ordre inférieur de six unités à celui des équations (7). Il faudra néanmoins s'assurer, conformément à la méthode exposée au Chapitre V de notre Mémoire sur l'*Intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (p. 251), que les intégrales de (16) sont communes à (7) ou conviennent au problème, ce qui peut exiger quelques nouvelles intégrations auxiliaires plus ou moins pénibles. Ainsi, si l'on obtenait une première intégrale (α) de (16), qui ne fût pas en même temps une intégrale de (7), on devrait remplacer α par une fonction inconnue de y et de z. En différentiant, par rapport à toutes les variables, et en tenant compte des équations (7) et des valeurs de H, C, K, il faudra que les variables y et z s'éliminent naturellement. On devra donc obtenir une équation linéaire et du premier ordre entre $\frac{\partial\alpha}{\partial y}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial z}$, y et z, dont l'intégration dépendra, au plus, du second ordre des différences ordinaires. Toutes les intégrales de (16) se déduisant immédiatement des solutions S, qui, en nombre infini, sont communes à H, C et K, il est naturel d'admettre réciproquement qu'en général la constante α de toute intégrale de (16) correspondra, après la détermination d'une fonction particulière de y et de z, à la constante arbitraire d'une autre intégrale de (7). Si néanmoins, et exceptionnellement, les conditions dont nous venons de parler ne pouvaient pas être remplies, la méthode cessant d'être applicable, il faudrait rejeter comme superflue l'intégrale de (16) qui n'aurait plus sa correspondante dans (7) ou dans le problème actuel.

31. Rappelons le parti avantageux que l'on aurait à tirer, en outre, de l'intégrale α, commune à (16) et à (7). En la combinant avec les intégrales *non canoniques* A *et* B, et en égalant à une constante arbitraire l'expression

$$[\alpha, A] \quad \text{ou} \quad [\alpha, B],$$

on aura, en général, une autre intégrale de (7). L'intégrale α fournirait ainsi de nouvelles intégrales susceptibles, de même, de donner naissance à d'autres. Dans le cas de $n = 2$, ou du problème des trois corps, une ou deux intégrales communes à (16) et à (7), jointes aux quatre connues, formeraient un nombre qui paraît suffisant, à cause de la possibilité de les combiner entre elles, comme il vient d'être dit.

SECTION TROISIÈME.

RÉDUCTION DU PROBLÈME DES TROIS CORPS AU QUATRIÈME ORDRE ET A LA FORME CANONIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

DES SOLUTIONS SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

32. La théorie exposée dans la Section précédente fait dépendre, comme on a vu, la solution du problème des trois corps, abstraction faite de quelques difficultés secondaires, de l'intégration de six équations différentielles du premier ordre, analogues à celles par lesquelles on exprimerait le mouvement d'un point matériel libre, lorsque la conservation des forces vives n'a pas lieu.

Mais on n'a eu besoin de faire intervenir, dans la nouvelle solution, que trois des intégrales connues, savoir : H, C et K, et l'on a laissé arbitraires les plans coordonnés, et, au fond, aussi la nature des variables qui déterminent la position des corps. Il y a donc lieu d'espérer qu'en utilisant toutes les intégrales, et choisissant convenablement les plans coordonnés, ainsi que les variables du problème, on approchera davantage encore de la solution. Nous croyons y être parvenu, en exprimant les intégrales au moyen des dérivées partielles d'une même fonction, qui ne renfermerait plus, comme précédemment, six, mais seulement trois constantes arbitraires, et serait une *solution singulière* de l'équation fondamentale, à six variables indépendantes, dont dépend le problème.

33. Nous mettrons cette dernière sous la forme (3) du n° **23**

$$(1)\qquad U-\frac{1}{2m}(x'^2+y'^2+z'^2)-\frac{1}{2\mu}(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)=H,$$

où nous ferons, comme plus haut, et en changeant les variables x, y

et z, et ξ, η et ζ,

$$(2)\quad x' = \frac{\partial S}{\partial x},\quad y' = \frac{\partial S}{\partial y},\quad z' = \frac{\partial S}{\partial z};\quad \xi' = \frac{\partial S}{\partial \xi},\quad \eta' = \frac{\partial S}{\partial \eta},\quad \zeta' = \frac{\partial S}{\partial \zeta}.$$

Les équations du problème étant écrites sous la forme canonique

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{dy'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y},\ldots,\quad \frac{d\zeta'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \zeta},\\ \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial U}{\partial x'},\quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial y'},\ldots,\quad \frac{d\zeta}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \zeta'},\end{aligned}\right.$$

les intégrales finies du problème seront, lorsqu'on suppose que S est une solution quelconque *complète* de (1),

$$(4)\qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \alpha',\quad \frac{\partial S}{\partial 6} = 6',\ldots,\quad \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = \varepsilon',\quad \frac{\partial S}{\partial H} = t_0 - t,$$

en désignant par α, 6, γ, δ, ε, H les six constantes qui entrent dans S (non compris la constante additive), et par α', $6'$,..., ε' et t_0 six autres constantes arbitraires conjuguées.

34. Supposons maintenant nulles deux de ces dernières, par exemple δ' et ε', ou

$$(5)\qquad \frac{\partial S}{\partial \delta} = 0,\qquad \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Nous tirerons de ces deux équations les valeurs de δ et ε des fonctions de x, y,..., ζ et des autres constantes α, 6, γ et H. La substitution de δ et ε dans la solution précédente S la transforme en S_1, et les équations (2) et (4) continueront à être des intégrales du problème des trois corps, en y changeant S en S_1, mais elles sont compatibles avec (5), ce qui restreint un peu la généralité de l'intégration.

On aura, en effet,

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial x} = x',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial S_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial S}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \alpha',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

à cause des conditions (5), et après avoir effectué le changement de S en S_1. Ainsi les identités (2) seront encore satisfaites, et, d'un autre côté, les équations

$$\frac{\partial S_1}{\partial \alpha} = \alpha', \quad \frac{\partial S_1}{\partial \beta} = \beta', \quad \frac{\partial S_1}{\partial \gamma} = \gamma', \quad \frac{\partial S_1}{\partial H} = t_0 - t, \tag{6}$$

pouvant être regardées comme des combinaisons particulières des intégrales précédentes (4) et (5), seront aussi des intégrales du problème des trois corps.

35. Il importe de remarquer que ces solutions singulières modifient beaucoup la théorie que nous avons rappelée et appliquée dans la Section précédente. Ainsi la solution S_1 à quatre constantes arbitraires, que nous venons de définir, satisfait identiquement aux six équations qu'on obtient, en en prenant les diverses dérivées partielles. On peut donc former, par suite, un système de six intégrales de (3), dont quatre, résolues par rapport aux constantes α, β, γ et δ, sont de la forme

$$f_1 = \alpha, \quad f_2 = \beta, \quad f_3 = \gamma, \quad f_4 = \delta, \tag{7}$$

tandis que les deux dernières, où n'entrerait aucune constante arbitraire, seraient

$$f_5 = 0, \quad f_6 = 0. \tag{8}$$

Si l'on applique le caractère discriminant $[f_k, f_{k'}] = 0$ aux six fonctions intégrales, sans constantes, désignées par $f_1, f_2, \ldots, f_6$, et prises deux à deux, on obtiendra encore quinze identités; mais il faut expressément, pour cela, tenir compte des deux relations (8). Réciproquement, ces conditions seraient suffisantes, en général, pour que l'ensemble des intégrales (7) et (8) définît la solution singulière S_1 correspondant aux intégrales finies (6) du système (3). Les équations (6), (7) et (8) forment dix intégrales, et il ne resterait plus que les deux dernières à trouver pour résoudre complétement le problème actuel.

Ces propositions s'étendent évidemment au cas où la solution singulière renfermerait moins de constantes arbitraires et correspondrait, en même temps, à un plus petit nombre d'intégrales de (3). Elles s'établissent facilement, en suivant la marche que nous avons adoptée au Chapitre III de notre Mémoire *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles*. (*Voir* aussi les nos 33 et 34 du même Mémoire, page 259.)

CHAPITRE II.

NOUVELLE ÉTUDE DU PROBLÈME DES TROIS CORPS, EN RAPPORTANT LE MOUVEMENT AU PLAN INVARIABLE DU SYSTÈME.

36. Nous transformerons maintenant l'équation (1), au moyen des variables dont nous avons déjà fait usage dans la première Section, lesquelles sont liées aux précédentes x, y, z, ξ, η et ζ par les formules

$$(9)\quad x = s\cos u,\quad y = s\sin u;\quad \xi = \sigma\cos(u+\omega),\quad \eta = \sigma\sin(u+\omega),$$

et leurs inverses

$$(10)\quad s^2 = x^2 + y^2,\quad \sigma^2 = \xi^2 + \eta^2;\quad \operatorname{tang} u = \frac{y}{x},\quad \operatorname{tang}\omega = \frac{x\eta - y\xi}{x\xi + y\eta}.$$

Il est bien visible que la fonction U ne dépend que des cinq variables s, σ, z, ζ et ω.

Appelons s', σ', ω' et u' les dérivées partielles de S, solution de (1), par rapport à s, σ, ω et u. Ces nouvelles variables seront liées à x', y', ξ' et η' par les équations

$$s' = x'\frac{\partial x}{\partial s} + y'\frac{\partial y}{\partial s} + \xi'\frac{\partial \xi}{\partial s} + \eta'\frac{\partial \eta}{\partial s},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$u' = x'\frac{\partial x}{\partial u} + y'\frac{\partial y}{\partial u} + \xi'\frac{\partial \xi}{\partial u} + \eta'\frac{\partial \eta}{\partial u}$$

et

$$x' = s'\frac{\partial s}{\partial x} + \sigma'\frac{\partial s}{\partial x} + \omega'\frac{\partial \omega}{\partial x} + u'\frac{\partial u}{\partial x},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\eta' = s'\frac{\partial s}{\partial \eta} + \sigma'\frac{\partial \sigma}{\partial \eta} + \omega'\frac{\partial \omega}{\partial \eta} + u'\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

37. En appliquant ces formules aux équations (9) et (10), il viendra

$$(11)\quad \begin{cases} s' = \dfrac{xx'+yy'}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \sigma' = \dfrac{\xi\xi'+\eta\eta'}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}}; \\ \omega' = \xi\eta' - \eta\xi', \quad u' = xy' - yx' + \xi\eta' - \eta\xi' \end{cases}$$

et

$$(12)\begin{cases} x' = s'\cos u + \dfrac{\omega'-u'}{s}\sin u, \quad y' = s'\sin u - \dfrac{\omega'-u'}{s}\cos u; \\ \xi' = \sigma'\cos(\omega+u) - \dfrac{\omega'}{\sigma}\sin(\omega+u), \quad \eta' = \sigma'\sin(\omega+u) + \dfrac{\omega'}{\sigma}\cos(\omega+u). \end{cases}$$

38. On aura, en outre,

$$(13)\quad \begin{cases} x'^2 + y'^2 = s'^2 + \left(\dfrac{\omega'-u'}{s}\right)^2, \\ \xi'^2 + \eta'^2 = \sigma'^2 + \dfrac{\omega'^2}{\sigma^2}, \\ x\eta' - y\xi' = s\left(\sigma'\sin\omega + \dfrac{\omega'}{\sigma}\cos\omega\right), \\ \xi y' - \eta x' = \sigma\left(s\sin\omega + \dfrac{\omega'-u'}{s}\cos\omega\right). \end{cases}$$

39. La substitution des valeurs (12) dans (1) transformera cette dernière en

$$(14)\quad \mathrm{U} - \frac{1}{2m}\left[s'^2 + z'^2 + \left(\frac{\omega'-u'}{s}\right)^2\right] - \frac{1}{2\mu}\left(\sigma'^2 + \zeta'^2 + \frac{\omega'^2}{\sigma^2}\right) = \mathrm{H};$$

et, comme la variable u n'entre dans cette équation que par sa différentielle, il suffit pour la faire disparaître de poser

$$(15)\qquad \mathrm{S} = \mathrm{C}u + \mathrm{V},$$

ou encore

$$(16)\qquad u' = \mathrm{C},$$

en désignant par C une constante arbitraire et par V une fonction inconnue qui ne dépend, de même que U, que des cinq variables s, σ, z, ζ et ω.

L'équation (14) devient, par suite,

$$(17)\quad \mathrm{U} - \frac{1}{2m}\left[s'^2 + z'^2 + \left(\frac{\omega' - \mathrm{C}}{s}\right)^2\right] - \frac{1}{2\mu}\left(\sigma'^2 + \zeta'^2 + \frac{\omega'^2}{\sigma^2}\right) = \mathrm{H},$$

en continuant à désigner par s', σ', z', ζ' et ω' les dérivées partielles de la fonction V.

40. La dernière des équations (11) montre que C est précisément l'une des constantes des aires, et si on la considère, de même que H, comme une constante particulière de (17), le problème des trois corps se ramènera à l'intégration du système canonique du huitième ordre

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{ds'}{d\omega} = \frac{\partial\omega'}{\partial s}, && \frac{d\sigma'}{d\omega} = \frac{\partial\omega'}{\partial\sigma}, && \frac{dz'}{d\omega} = \frac{\partial\omega'}{\partial z}, && \frac{d\zeta'}{d\omega} = \frac{\partial\omega'}{\partial\zeta}, \\ &\frac{ds}{d\omega} = -\frac{\partial\omega'}{\partial s'}, && \frac{d\sigma}{d\omega} = -\frac{\partial\omega'}{\partial\sigma'}, && \frac{dz}{d\omega} = -\frac{\partial\omega'}{\partial z'}, && \frac{d\zeta}{d\omega} = -\frac{\partial\omega'}{\partial\zeta'}, \end{aligned}\right.$$

où ω' est donné en fonction des neuf variables $s, \sigma, z, \zeta, s', \ldots, \zeta'$ et ω, au moyen de (17).

41. Formons maintenant l'expression

$$zx' - xz' + \zeta\xi' - \xi\zeta' + \sqrt{-1}\,(zy' - yz' + \zeta\eta' - \eta\zeta'),$$

qui, égalée à une constante arbitraire, est une intégrale du problème. Si nous supposons cette constante nulle, il viendra, par le changement de variables (9) et (12) et après la division par le facteur commun $\cos u + \sqrt{-1}\sin u$,

$$\begin{aligned} &zs' - sz' + \cos\omega\,(\zeta\sigma' - \sigma\zeta') - \frac{\zeta\omega'}{\sigma}\sin\omega \\ &\qquad + \sqrt{-1}\left[z\frac{u' - \omega'}{s} + \frac{\zeta\omega'}{\sigma}\cos\omega + \sin\omega\,(\zeta\sigma' - \sigma\zeta')\right] = 0. \end{aligned}$$

Le changement de signe de $\sqrt{-1}$ donnera une autre intégrale, et l'on en déduira sans difficulté les deux intégrales particulières

$$(sz' - zs')\sin\omega + \left(\frac{\zeta}{\sigma} - \frac{z}{s}\cos\omega\right)\omega' + \frac{zu'}{s}\cos\omega = 0,$$
$$(\sigma\zeta' - \zeta\sigma')\sin\omega + \left(\frac{z}{s} - \frac{\zeta}{\sigma}\cos\omega\right)\omega' - \frac{zu'}{s} = 0.$$

Or la variable u n'entre pas sous forme finie dans ces dernières, et la relation $u' = C$ permet de l'éliminer complétement. On obtient ainsi

$$(19)\qquad (sz' - zs')\sin\omega + \left(\frac{\zeta}{\sigma} - \frac{z}{s}\cos\omega\right)\omega' + \frac{Cz}{s}\cos\omega = P = 0,$$
$$(20)\qquad (\sigma\zeta' - \zeta\sigma')\sin\omega + \left(\frac{z}{s} - \frac{\zeta}{\sigma}\cos\omega\right)\omega' - \frac{Cz}{s} = Q = 0,$$

en désignant, pour abréger, par P et Q les premiers membres de ces deux équations. Ce sont là deux intégrales particulières de (18) qui réduisent le problème des trois corps au sixième ordre. Cette méthode ne diffère de celle qui a été exposée dans la première Section que par la forme canonique (18) donnée maintenant aux équations différentielles.

42. Conformément à la théorie rappelée au Chapitre précédent, il est naturel d'essayer de faire servir les équations (19) et (20) à une nouvelle réduction de l'équation aux dérivées partielles (17), en prenant pour V une solution singulière, à deux constantes arbitraires, outre C, H et la constante additive.

En faisant les opérations indiquées par le symbole [...], relativement aux dix variables $s, \sigma, \ldots, \omega'$, il viendra d'abord identiquement

$$(21)\qquad [H, P] = 0, \quad [H, Q] = 0,$$

à cause des conditions $P = Q = 0$, et en remarquant que U dépend uniquement des trois binômes $s^2 + z^2$, $\sigma^2 + \zeta^2$, $s\sigma\cos\omega + z\zeta$.

Il faudrait encore qu'on eût aussi

$$(22)\qquad [P, Q] = 0.$$

Mais on s'assure qu'on a, en supposant toujours $P = Q = 0$,

$$\frac{\partial P}{\partial s}\frac{\partial Q}{\partial s'} - \frac{\partial P}{\partial s'}\frac{\partial Q}{\partial s} + \ldots + \frac{\partial P}{\partial \omega}\frac{\partial Q}{\partial \omega'} - \frac{\partial P}{\partial \omega'}\frac{\partial Q}{\partial \omega} = C\sin\omega.$$

Ainsi la constante C doit être nulle pour que les conditions (21) et (22) soient remplies à la fois et pour que les équations (17), (19) et (20), aux dérivées partielles, soient compatibles et satisfaites par une même fonction V des cinq variables s, σ, z, ζ et ω.

45. Dans cette hypothèse, ces équations deviennent

$$(23)\qquad U - \frac{1}{2m}\left(s'^2 + z'^2 + \frac{\omega'^2}{s^2}\right) - \frac{1}{2\mu}\left(\sigma'^2 + \zeta'^2 + \frac{\omega'^2}{\sigma^2}\right) = H;$$

$$(24)\qquad \begin{cases} (sz' - zs')\sin\omega + \left(\dfrac{\zeta}{\sigma} - \dfrac{z}{s}\cos\omega\right)\omega' = 0, \\ (\sigma\zeta' - \zeta\sigma')\sin\omega + \left(\dfrac{z}{s} - \dfrac{\zeta}{\sigma}\cos\omega\right)\omega' = 0, \end{cases}$$

et l'élimination de z' et ζ' transforme la première équation en

$$(25)\qquad \begin{cases} U - \dfrac{1}{2m}\left(s'^2 + \dfrac{\omega'^2}{s^2}\right) - \dfrac{1}{2\mu}\left(\sigma'^2 + \dfrac{\omega'^2}{\sigma^2}\right) \\ \quad - \dfrac{1}{2ms^2\sin^2\omega}\left[zs'\sin\omega + \left(\dfrac{z}{s}\cos\omega - \dfrac{\zeta}{\sigma}\right)\omega'\right]^2 \\ \quad - \dfrac{1}{2\mu\sigma^2\sin^2\omega}\left[\zeta\sigma'\sin\omega + \left(\dfrac{\zeta}{\sigma}\cos\omega - \dfrac{z}{s}\right)\omega'\right]^2 = H. \end{cases}$$

L'intégration de cette nouvelle équation, qui ne renferme plus que les trois variables s, σ et ω, dépendra uniquement de celle du système aux dérivées ordinaires du quatrième ordre

$$(26)\qquad \frac{ds'}{d\omega} = \frac{\partial\omega'}{\partial s}, \quad \frac{d\sigma'}{d\omega} = \frac{\partial\omega'}{\partial\sigma}; \quad \frac{ds}{d\omega} = -\frac{\partial\omega'}{\partial s'}, \quad \frac{d\sigma}{d\omega} = -\frac{\partial\omega'}{\partial\sigma'},$$

où l'on donnerait à ω' sa valeur tirée de (25). Les intégrales de (26), convenablement choisies, devraient appartenir au problème des trois corps ainsi restreint.

CHAPITRE III.

NOUVELLES SIMPLIFICATIONS DANS LE CAS PARTICULIER OU LES CONSTANTES DES AIRES SONT NULLES.

44. Les équations (25) et (26) sont susceptibles de prendre une forme moins compliquée. Remarquons d'abord que chacune des équations linéaires (24) s'intègre rigoureusement. La première donne lieu, en effet, aux équations simultanées

$$\frac{dz}{s} = \frac{-ds}{z} = \frac{s\sigma \sin\omega \, d\omega}{s\zeta - z\sigma\cos\omega},$$

et, en y considérant σ et ζ comme deux constantes, on obtient sans peine les deux intégrales

$$\alpha = s^2 + z^2 \quad \text{et} \quad \beta = z\zeta + s\sigma\cos\omega\,;$$

V doit donc être une fonction de ces deux binômes, et, en intégrant de même la seconde équation (24), on reconnaît que la fonction V dépend uniquement des trois binômes $s^2 + z^2$, $\sigma^2 + \zeta^2$ et $z\zeta + s\sigma\cos\omega$ ou encore des trois trinômes

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad \text{et} \quad x\xi + y\eta + z\zeta$$

dans le système des variables primitives x, y, z, ξ, η et ζ.

45. Nous changerons la signification des variables s, σ et ω, et nous supposerons maintenant que ces lettres expriment deux côtés et l'angle compris du triangle des trois corps. Nous aurons ainsi

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \sigma^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \quad s\sigma\cos\omega = x\xi + y\eta + z\zeta$$

et, si nous introduisons, en même temps, les variables conjuguées,

$$(27) \qquad s' = \frac{\partial V}{\partial s}, \quad \sigma' = \frac{\partial V}{\partial \sigma}, \quad \omega' = \frac{\partial V}{\partial \omega},$$

il y aura, entre les variables x, y,..., ζ' et les nouvelles, les relations

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{x}{s}\left(s' + \frac{\omega'}{s}\cot\omega\right) - \frac{\xi\omega'}{s\sigma\sin\omega},\\ y' &= \frac{y}{s}\left(s' + \frac{\omega'}{s}\cot\omega\right) - \frac{\eta\omega'}{s\sigma\sin\omega},\\ z' &= \frac{z}{s}\left(s' + \frac{\omega'}{s}\cot\omega\right) - \frac{\zeta\omega'}{s\sigma\sin\omega};\\ \xi' &= \frac{\xi}{\sigma}\left(\sigma' + \frac{\omega'}{\sigma}\cot\omega\right) - \frac{x\omega'}{s\sigma\sin\omega},\\ \eta' &= \frac{\eta}{\sigma}\left(\sigma' + \frac{\omega'}{\sigma}\cot\omega\right) - \frac{y\omega'}{s\sigma\sin\omega},\\ \zeta' &= \frac{\zeta}{\sigma}\left(\sigma' + \frac{\omega'}{\sigma}\cot\omega\right) - \frac{z\omega'}{s\sigma\sin\omega}. \end{aligned}\right.$$

Ces dernières démontrent *a posteriori* la possibilité de rendre identiques à la fois les équations

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} xy' - yx' + \xi\eta' - \eta\xi' &= 0,\\ yz' - zy' + \eta\zeta' - \zeta\eta' &= 0,\\ zx' - xz' + \zeta\xi' - \xi\zeta' &= 0, \end{aligned}\right.$$

qui sont une conséquence immédiate des équations (28).

46. Si l'on porte les valeurs (28) dans l'équation (1), elle prendra cette forme plus simple

$$(30)\quad U - \frac{s'^2}{2m} - \frac{\sigma'^2}{2\mu} - \frac{\omega'^2}{2}\left(\frac{1}{ms^2} + \frac{1}{\mu\sigma^2}\right) = H,$$

où n'entrent plus que les trois variables s, σ et ω, et les dérivées partielles de V par rapport à ces dernières. V dépendra donc, après avoir résolu l'équation (30), par rapport à ω', des deux seules intégrales du système canonique du quatrième ordre

$$(31)\quad \frac{ds'}{d\omega} = \frac{\partial\omega'}{\partial s},\quad \frac{d\sigma'}{d\omega} = \frac{\partial\omega'}{\partial\sigma};\quad \frac{ds}{d\omega} = -\frac{\partial\omega'}{\partial s'},\quad \frac{d\sigma}{d\omega} = -\frac{\partial\omega'}{\partial\sigma'}.$$

Lorsqu'on aura déterminé V avec deux constantes arbitraires α et β, on en déduira les trois intégrales finies du problème

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \alpha', \ \frac{\partial V}{\partial \sigma} = \sigma', \ \frac{\partial V}{\partial H} = t_0 - t, \tag{32}$$

qui feront connaître, à chaque instant, s, σ et ω, où les éléments du triangle formé par les trois corps.

47. Les coordonnées finies x, y, z, ξ, η et ζ, rapportées à trois axes fixes arbitraires, sont exprimables au moyen de trois angles φ, ν et ψ qui détermineraient la position du triangle dans l'espace, et qu'il faut joindre à s, σ et ω. Or les quatre intégrales des aires et des forces vives fournissent quatre équations du premier ordre, entre le temps t et les variables φ, ψ, et ν où l'une d'elles ψ, celle du nœud, n'entrera que par sa différentielle. Après élimination de φ, $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\psi}{dt}$, on obtiendra donc une équation du premier ordre en ν, et de la même manière une autre en φ. Enfin l'angle ψ sera donné par une quadrature finale.

CHAPITRE IV.

DU CAS OU LE MOUVEMENT A LIEU DANS UN PLAN ET DU PROBLÈME GÉNÉRAL.

48. Pour étendre la solution précédente au cas ordinaire où les aires ne sont plus nulles, nous commencerons par supposer que les trois corps se meuvent dans un même plan.

Après avoir tracé dans ce plan un premier axe fixe OX, nous imaginerons un second axe mobile OΞ faisant, avec le premier, un angle variable χ, de telle sorte que la somme des aires relatives, comptées à partir de cette droite, soit constamment nulle.

Soient u, θ, s et σ les angles et les rayons vecteurs qui fixent les positions des mobiles m et μ par rapport à OX, et soient de plus u' et θ' les angles de ces rayons vecteurs avec l'axe mobile OΞ; on aura, d'après notre convention,

$$ms^2 \frac{du'}{dt} + \mu\sigma^2 \frac{d\theta'}{dt} = 0, \tag{33}$$

d'où l'on tire, en introduisant l'angle $\omega = \theta' - u' = \theta - u$,

$$(34)\qquad \frac{du'}{dt} = -\frac{\mu\sigma^2}{ms^2+\mu\sigma^2}\frac{d\omega}{dt},\quad \frac{d\theta'}{dt} = \frac{ms^2}{ms^2+\mu\sigma^2}\frac{d\omega}{dt}.$$

L'expression T de la demi-somme des forces vives sera

$$\mathrm{T} = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + s^2\left(\frac{d\chi}{dt}+\frac{du'}{dt}\right)^2\right] + \frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + \sigma^2\left(\frac{d\chi}{dt}+\frac{d\theta'}{dt}\right)^2\right]$$

ou, après substitution des valeurs (34),

$$(35)\quad \mathrm{T} = \frac{ms^2+\mu\sigma^2}{2}\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mu\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right] + \frac{m\mu s^2\sigma^2}{2(ms^2+\mu\sigma^2)}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2.$$

Comme χ, de même que u, θ, u' et θ', n'entre pas dans U, et que ces variables ne figurent dans T que par leurs différentielles, le mouvement est parfaitement défini par le système des quatre variables s, σ, ω et χ, auxquelles il faudra joindre ultérieurement les relations différentielles (34). Les formules de Lagrange peuvent donc être appliquées à l'expression (35) de T, qui est homogène, et du second degré par rapport à $\frac{ds}{dt}, \frac{d\sigma}{dt}, \frac{d\omega}{dt}$ et $\frac{d\chi}{dt}$. En posant, avec Hamilton,

$$(36)\qquad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial\left(\frac{ds}{dt}\right)} = s',\quad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)} = \sigma',\quad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial\left(\frac{d\omega}{dt}\right)} = \omega',\quad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial\left(\frac{d\chi}{dt}\right)} = \chi',$$

on formera ensuite l'équation

$$(37)\qquad \mathrm{U} - \frac{s'^2}{2m} - \frac{\sigma'^2}{2\mu} - \frac{\omega'^2}{2}\left(\frac{1}{ms^2}+\frac{1}{\mu\sigma^2}\right) - \frac{\chi'^2}{2(ms^2+\mu\sigma^2)} = \mathrm{H},$$

analogue à (30), où s', σ', ω' et χ' pourront être remplacés par les dérivées partielles, suivant s, σ, ω et χ, d'une même fonction caractéristique S.

49. Si l'on fait maintenant

$$(38)\qquad \chi' = \mathrm{C},$$

et

$$(39)\qquad S = C\chi + V;$$

attendu que χ n'est pas dans U, l'équation (37) deviendra, en changeant S en V,

$$(40)\qquad \left[U - \frac{C^2}{2(ms^2+\mu\sigma^2)}\right] - \frac{s'^2}{2m} - \frac{\sigma'^2}{2\mu} - \frac{\omega'^2}{2}\left(\frac{1}{ms^2} + \frac{1}{\mu\sigma^2}\right) = H,$$

dont l'intégration, comme celle de (30), dépend du quatrième ordre des différences ordinaires.

Le problème que nous examinons rentre donc dans celui qui a été résolu au Chapitre III, après avoir retranché de la fonction des forces U le terme $\frac{C^2}{2(ms^2+\mu\sigma^2)}$.

Lorsqu'on aura obtenu la solution complète V de (40), avec les constantes arbitraires α et $\mathfrak{G}$, les trois intégrales finies du problème seront

$$(41)\qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha} = \alpha', \quad \frac{\partial V}{\partial \mathfrak{G}} = \mathfrak{G}', \quad \frac{\partial V}{\partial H} = t_0 - t;$$

on aura, d'ailleurs, par une quadrature finale,

$$u = u' + \chi \quad \text{ou} \quad \theta = \theta' + \chi,$$

au moyen de l'intégrale C des aires, ou encore

$$(42)\quad u' = -\frac{1}{m}\int \frac{\partial V}{\partial \omega}\frac{dt}{s^2}, \quad \theta' = \frac{1}{\mu}\int \frac{\partial V}{\partial \omega}\frac{dt}{\sigma^2}, \quad \chi = \int \frac{C\,dt}{ms^2+\mu\sigma^2} = \chi_0 - \frac{dV}{dC},$$

et toutes les variables seront ainsi exprimées en fonctions du temps.

50. Pour traiter, de la même manière, le problème général, nous tracerons encore, dans le plan du triangle des trois corps, une droite mobile, à partir de laquelle la somme des aires décrites par les rayons s et σ soit nulle, et nous représenterons la vitesse de rotation de cette ligne, dans ce plan, par $\frac{d\chi}{dt}$. Supposons que les deux corps mobiles soient animés de vitesses quelconques perpendiculaires au même plan, outre celles qui produisent la déformation continue du triangle des trois corps. En faisant abstraction de ces dernières, le triangle passera de sa position à la position infiniment voisine par une rotation instantanée autour d'une droite particulière située dans le plan du triangle. On peut évidemment décomposer cette rotation en deux, l'une $\frac{d\rho}{dt}$ dirigée suivant le côté s du triangle, et l'autre $\frac{d\varpi}{dt}$ suivant OII, menée perpendiculairement à ce côté, dans le plan du triangle des trois corps. Les nouvelles variables ρ et ϖ seront représentées, de même que χ, par les longueurs de deux lignes courbes convenables, tracées sur une sphère dont le centre est en O, et dont le rayon est égal à l'unité. L'expression T de la demi-somme des forces vives du mouvement des deux corps m et μ deviendra, par suite,

$$\begin{aligned} T = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + s^2\left(\frac{d\chi}{dt}+\frac{du'}{dt}\right)^2 + s^2\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)^2\right] \\ + \frac{\mu}{2}\left\{\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + \sigma^2\left[\left(\frac{d\chi}{dt}+\frac{d\theta'}{dt}\right)^2 + \sin^2\omega\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2\right]\right. \\ \left. + \sigma^2\cos^2\omega\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

où, en tenant compte des relations (34) qui subsistent,

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} T = \frac{ms^2+\mu\sigma^2}{2}\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + \frac{ms^2+\mu\sigma^2\cos^2\omega}{2}\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)^2 + \frac{\mu\sigma^2\sin^2\omega}{2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 \\ + \frac{1}{2}\left[m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mu\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + \frac{m\mu s^2\sigma^2}{ms^2+\mu\sigma^2}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right]. \end{aligned}\right.$$

Comme les variables χ, ϖ, ρ, de même que les précédentes u' et θ', n'entrent dans T que sous forme de différentielles, le mouvement est amené, comme plus haut, à dépendre des trois seules variables s, σ et ω. Si l'on fait

$$(44)\qquad \rho' = \frac{\partial T}{\partial \frac{d\rho}{dt}} = \mu\sigma^2\sin^2\omega\frac{d\rho}{dt},\quad \varpi' = \frac{\partial T}{\partial\frac{d\varpi}{dt}} = (ms^2+\mu\sigma^2\cos^2\omega)\frac{d\varpi}{dt},$$

on joindra ces variables aux précédentes (36) pour former l'équation

$$(45)\quad \left[U - \frac{\chi'^2}{2(ms^2+\mu\sigma^2)} - \frac{\rho'^2}{2\mu\sigma^2\sin^2\omega} - \frac{\varpi'^2}{2(ms^2+\mu\sigma^2\cos^2\omega)}\right] - \frac{s'^2}{2m} - \frac{\sigma'^2}{2\mu} - \frac{\omega'^2}{2}\left(\frac{1}{ms^2}+\frac{1}{\mu\sigma^2}\right) = \mathrm{H},$$

où $s', \sigma', \omega', \chi', \rho'$ et ϖ' sont les dérivées partielles de la fonction caractéristique S. Posons, comme ci-dessus,

$$(46)\quad \chi' = \mathrm{C},\ \rho' = \mathrm{F},\ \varpi' = \mathrm{G}$$

et

$$(47)\quad \mathrm{S} = \mathrm{C}\chi + \mathrm{F}\rho + \mathrm{G}\varpi + \mathrm{V},$$

en désignant par C, F et G trois constantes arbitraires. Le mouvement sera déterminé par l'intégration de (30) où il suffira de remplacer la fonction U par

$$U - \frac{C^2}{2(ms^2+\mu\sigma^2)} - \frac{F^2}{2\mu\sigma^2\sin^2\omega} - \frac{G^2}{2(ms^2+\mu\sigma^2\cos^2\omega)}.$$

Les six intégrales finies du problème deviendront, en appelant α et β les constantes arbitraires de V, et α', β', χ_0, ρ_0, ϖ_0 et t_0 six autres constantes,

$$(48)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial\alpha} = \alpha', & \dfrac{\partial V}{\partial\beta} = \beta', \quad \dfrac{\partial V}{\partial H} = t_0 - t, \\ \dfrac{\partial V}{\partial C} = \chi_0 - \chi, & \dfrac{\partial V}{\partial F} = \rho_0 - \rho, \quad \dfrac{\partial V}{\partial G} = \varpi_0 - \varpi, \end{cases}$$

dont les trois premières feront connaître tous les éléments du triangle des trois corps en fonction de C, F, G et t.

51. Les constantes arbitraires C, F et G ne sont ici autre chose, comme il est bien facile de s'en assurer, que le double des sommes des aires prises par rapport au plan du triangle des trois corps et à deux plans perpendiculaires au côté s et à la droite perpendiculaire OII. Ces quantités sont, on le voit, exprimables, sous forme finie, à l'aide des constantes des aires relatives à trois plans coordonnés rectangulaires invariables, et des angles ψ, φ et ν qui fixent dans l'espace la position variable du triangle des trois corps, savoir, ψ l'angle du nœud, φ l'inclinaison sur le plan fixe (du maximum des aires), et l'angle ν du côté s avec la ligne des nœuds; et ces quantités C, F et G sont, par suite, tout à fait indépendantes des variables s, σ et ω qui entrent seules, sous forme finie et sous forme différentielle, dans (45). Lorsque les éléments du triangle des trois corps seront connus, au moyen de la solution singulière V et des trois premières équations (48), on devra faire varier les angles ψ, φ et ν, ainsi que les fonctions désignées par C, F et G, et l'on déterminera finalement ces angles comme il a été dit au n° 47, par les équations des aires et des forces vives. Le problème sera ainsi résolu dans toute sa généralité.

52. On voit donc qu'en ajoutant à la fonction des forces U quelques termes fort simples, où n'entrent que les éléments mêmes du triangle des trois corps, le problème sera rendu identique à celui que nous avons considéré dans les deux Chapitres précédents, où les constantes des aires ont été supposées nulles. En écartant quelques difficultés secondaires, le problème qu'il reste à résoudre devient semblable à celui du mouvement d'un point unique assujetti à se mouvoir sur un plan. Le temps, remplacé ici par la variable angulaire ω, est renfermé explicitement, il est vrai, dans la fonction connue des forces; mais les équations du mouvement ont la forme canonique.