JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LAGUERRE

Sur les singularités des courbes de quatrième classe

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 1 (1875), p. 265-276.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1875_3_1__265_0>

Sur les singularités des courbes de quatrième classe;

PAR M. LAGUERRE.

1. Une courbe de quatrième classe K possède vingt-huit points doubles δ et vingt-quatre points de rebroussement ρ. Il existe en outre dans son plan vingt et une droites P telles, que la première polaire de chacune d'elles, relativement à K, se décompose en un point p et une conique résiduelle ; aux vingt et une droites P correspondront donc vingt et un points remarquables p, que nous aurons à considérer en même temps que les points singuliers.

Je rappellerai à ce sujet que les soixante-treize points δ, ρ et p sont les points communs aux trois courbes

$$2S = \frac{dT}{dx} - 3T\frac{dS}{dx} = 0, \quad 2S\frac{dT}{dy} - 3T\frac{dS}{dy} = 0, \quad 2S\frac{dT}{dz} - 3T\frac{dS}{dz} = 0,$$

où S et T désignent respectivement l'invariant quadratique et l'invariant cubique de la forme $U = (a, b, c, d, e)(\lambda, \mu)$ qui, égalée à zéro, donne l'équation mixte de la courbe K [*].

2. Étant données deux équations à une inconnue, de degré m, $F = 0$ et $F' = 0$ déterminant par leurs racines deux systèmes de points situés sur une même droite (*ou deux faisceaux de droites passant par un même point*), je dirai que ces systèmes (*ou ces faisceaux*) sont *harmoniques*, si l'invariant quadratique des deux formes F et F' est nul; cette notion est, on le voit, une simple extension de la notion bien connue relative à deux systèmes de deux points (*ou à deux faisceaux de deux droites*).

[*] *Voir* (*Comptes rendus*, 16 mars 1874) la Note accompagnant la présentation de mon *Mémoire sur l'application de la théorie des formes binaires à la Géométrie plane.*

Cela posé,

$$(a, b, c, \ldots, h, k, l) = 0 \tag{1}$$

et

$$(a', b', c', \ldots, h', k', l') = 0 \tag{2}$$

étant les équations mixtes de deux courbes de $n^{\text{ième}}$ classe K^n et K'^n, il est clair que le lieu des points d'où l'on voit ces courbes suivant deux faisceaux harmoniques s'obtient en égalant à zéro l'invariant quadratique des deux formes (1) et (2); ce lieu est donc une courbe du $n^{\text{ième}}$ degré ayant pour équation

$$(\mathrm{I}) = al' - nbK' + \frac{n(n-1)}{1.2} ch' + \ldots + la' = 0, \tag{3}$$

et je la désignerai sous le nom de *courbe harmonique* des deux courbes K^n et K'^n.

A ce sujet, je ferai remarquer que, si n est impair, I ne change pas quand on remplace respectivement a par $a + \lambda a'$, b par $b + \lambda b', \ldots$; si donc C^n est la courbe harmonique de K^n et de K'^n, ce sera également la courbe harmonique de deux quelconques des courbes du faisceau déterminé par K^n et K'^n, et je dirai que c'est la courbe harmonique de ce faisceau.

3. Cela posé, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Étant donnée une courbe de quatrième classe* K, *si l'on considère les différentes droites que l'on peut mener par un point* M, *leurs premières polaires, relativement à* K, *forment un faisceau de courbes de troisième classe dont la* courbe harmonique *est la droite polaire du point* M, *relativement à la courbe du quatrième ordre* $\mathfrak{S}$ *qui passe par les vingt-quatre points de rebroussement de* K.

Démonstration. — Soient, comme ci-dessus, $U = (a, b, c, d, e) = 0$ l'équation mixte de la courbe K; S et T l'invariant quadratique et l'invariant cubique de U. On sait que la courbe $\mathfrak{S}$ a pour équation $S = 0$.

Pour simplifier les calculs, je supposerai la forme U réduite à sa forme canonique, en sorte que l'on aura simplement

$$\begin{aligned}
U &= \lambda^4 + 6m\lambda^2\mu^2 + \mu^4,\\
H &= m\lambda^4 + (1 - 3m^2)\lambda^2\mu^2 + m\mu^4,\\
S &= 1 + 3m^2 \quad \text{et} \quad T = m - m^3.
\end{aligned}$$

En appelant ξ, η, ζ les coordonnées du point M, désignons par

$$\omega = ux + vy + w = 0 \quad \text{et} \quad \omega_0 = u_0 x + v_0 y + w_0 z = 0$$

les équations de deux quelconques des droites qui se croisent au point M.

Désignons de plus par $\Delta = S^3 - 27T^2$ le discriminant de la forme U, et par $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0)$ les équations mixtes des premières polaires des deux droites précédentes relativement à K; d'après la formule (13) donnée dans mon *Mémoire sur l'application des formes binaires* (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. I, p. 120), on aura les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha &= \mathfrak{x} + \frac{3\omega}{2} m\mathfrak{x}', & \Delta\alpha_0 &= \mathfrak{x}_0 + \frac{3\omega_0}{2} m\mathfrak{x}',\\
\Delta\beta &= m\mathfrak{y} + \frac{\omega}{4}(1 - 3m^2)\mathfrak{y}', & \Delta\beta_0 &= m\mathfrak{y}_0 + \frac{\omega}{4}(1 - 3m^2)\mathfrak{y}',\\
\Delta\gamma &= m\mathfrak{x} + \frac{\omega}{4}(1 - 3m^2)\mathfrak{x}', & \Delta\gamma_0 &= m\mathfrak{x}_0 + \frac{\omega}{4}(1 - 3m^2)\mathfrak{x}',\\
\Delta\delta &= \mathfrak{y} + \frac{3\omega}{2} m\mathfrak{y}', & \Delta\delta_0 &= \mathfrak{y}_0 + \frac{3\omega}{2} m\mathfrak{y}',
\end{aligned}$$

où $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$ ont la même signification que dans le Mémoire précité (p. 119), et $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$ représentent les quantités analogues à $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$, dans lesquelles u, v, w ont été remplacés par u_0, v_0 et w_0.

Cela posé, en désignant par $I = 0$ l'équation de la courbe harmonique du faisceau formé par les polaires des droites qui se croisent au point M, on aura

$$I = \alpha\delta_0 - 3\beta\gamma_0 + 3\gamma\beta_0 - \delta\alpha_0,$$

et

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Delta^2 \mathrm{I} &= (1+3m^2)\,(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}\mathfrak{x}_0)\\
&\quad+\tfrac{9}{4}(m-m^3)\left[\mathfrak{x}'(\omega\mathfrak{y}_0-\omega_0\mathfrak{y})-\mathfrak{y}'(\omega\mathfrak{x}_0-\omega_0\mathfrak{x})\right];
\end{aligned}
\right.
$$

on a d'ailleurs

$$1+3m^2=\mathrm{S},\quad m-m^3=\mathrm{T},$$

$$\mathfrak{x}\mathfrak{x}_0-\mathfrak{y}\mathfrak{y}_0=\frac{\Delta}{12}\left(\xi\frac{d\Delta}{dx}+\eta\frac{d\Delta}{dy}+\zeta\frac{d\Delta}{dz}\right),$$

ou encore, si l'on pose, pour abréger,

$$\mathrm{S}_0=\xi\frac{d\mathrm{S}}{dx}+\eta\frac{d\mathrm{S}}{dy}+\zeta\frac{d\mathrm{S}}{dz},$$

$$\mathrm{T}_0=\xi\frac{d\mathrm{T}}{dx}+\eta\frac{d\mathrm{T}}{dy}+\zeta\frac{d\mathrm{T}}{dz},$$

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}\mathfrak{x}_0=\frac{\Delta}{12}(3\mathrm{S}^2\mathrm{S}_0-\mathrm{S}4\mathrm{T}\mathrm{T}_0),$$

puis

$$\mathfrak{x}'(\omega\mathfrak{y}_0-\omega\mathfrak{y})-\mathfrak{y}'(\omega\mathfrak{x}_0-\omega_0\mathfrak{x})=\Delta(2\mathrm{S}\mathrm{T}_0-3\mathrm{T}\mathrm{S}_0);$$

substituant ces valeurs dans (4), il viendra

$$\Delta^2\mathrm{I}=\frac{\mathrm{S}\Delta}{12}(3\mathrm{S}^2\mathrm{S}_0-\mathrm{S}^4\mathrm{T}\mathrm{T}_0)+\frac{9\mathrm{T}\Delta}{4}(2\mathrm{S}\mathrm{T}_0-3\mathrm{T}\mathrm{S}_0),$$

d'où, réductions faites,

$$\mathrm{I}=\frac{\mathrm{S}_0}{4}=\frac{1}{4}\left(\xi\frac{d\mathrm{S}}{dx}+\eta\frac{d\mathrm{S}}{dy}+\zeta\frac{d\mathrm{S}}{dz}\right).$$

Ce qui démontre la proposition énoncée.

4. En particulier, considérons une droite P, telle que sa première polaire, relativement à K, se décompose en un point p et une conique. Si l'on prend un point quelconque M de cette droite, le réseau formé par les premières polaires des droites qui se croisent en M comprend

en particulier le point p et la conique résiduelle; on en conclut que la courbe harmonique du faisceau passe par le point p. D'ailleurs cette courbe est la première polaire de M relativement à $\mathfrak{S}$; donc, réciproquement, d'après un théorème connu, la droite polaire de p, relativement à $\mathfrak{S}$, passe par le point M, et, comme ce point a été pris arbitrairement sur la droite P, cette droite n'est autre que la polaire de p.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème II. — *Si la première polaire d'une droite* P, *relativement à la courbe de quatrième classe* K, *se décompose en un point p et une conique résiduelle, la droite* P *est la droite polaire de p, relativement à la courbe du quatrième ordre* $\mathfrak{S}$, *qui passe par les vingt-quatre points de rebroussement de* K.

D'où encore cette conséquence :

Les vingt-et-une droites P *sont les droites polaires relativement à* $\mathfrak{S}$ *des vingt-et-un points p.*

La proposition précédente peut se démontrer directement ainsi qu'il suit :

En désignant par $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$ l'équation mixte de la première polaire de la droite $\omega = ux + vy + wz = 0$, je remarque que, si cette polaire se décompose en une conique et un point p, pour les coordonnées de ce point, on devra avoir $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, la tangente à la polaire étant en ce point entièrement indéterminée.

On a d'ailleurs, pour un tel point (n° 1), $\mathfrak{x}' = 0$ et $\mathfrak{y}' = 0$; d'après la formule (13) déjà citée de mon précédent Mémoire, on aura donc

$$a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y} = 0,\quad b\mathfrak{x} + c\mathfrak{y} = 0,\quad c\mathfrak{x} + d\mathfrak{y} = 0,\quad d\mathfrak{x} + e\mathfrak{y} = 0.$$

Il en résulte que $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ sont nuls; autrement (a, b, c, d, e) serait une puissance exacte, c'est-à-dire que les quatre tangentes menées du point p à K se confondraient en une seule, ce qui est impossible.

Les coordonnées du point p satisfont donc aux quatre équations

$$\mathfrak{x}' = 0,\quad \mathfrak{y}' = 0,\quad \mathfrak{x} = 0,\quad \mathfrak{y} = 0,$$

ou bien

$$2S\frac{dT}{dx} - 3T\frac{dS}{dx} = 0, \quad 2S\frac{dT}{dy} - 3T\frac{dS}{dy} = 0,$$

$$\omega\frac{d\Delta}{dx} - 12u\Delta = 0, \quad \omega\frac{d\Delta}{dy} - 12v\Delta = 0.$$

Remplaçons, dans les deux dernières relations, Δ par sa valeur $S^3 - 27T^2$, puis $\frac{dT}{dx}$ et $\frac{dT}{dy}$ par leurs valeurs tirées des deux premières; il viendra simplement, après avoir supprimé le facteur Δ,

$$\omega\frac{dS}{dx} = 4Su, \quad \omega\frac{dS}{dy} = 4Sv,$$

d'où encore, en vertu du théorème sur les fonctions homogènes,

$$\omega\frac{dS}{dz} = 4Sw.$$

La droite polaire du point p, relativement à S, a pour équation

$$X\frac{dS}{dx} + Y\frac{dS}{dy} + Z\frac{dS}{dz} = 0$$

ou, en vertu des relations précédentes,

$$uX + vY + wZ = 0.$$

La proposition est donc démontrée.

5. Étant données deux courbes de $n^{ième}$ classe K^n et K'^n, désignons par I l'invariant quadratique qui, égalé à zéro, donne l'équation de la courbe harmonique des courbes données; si le polynôme I est identiquement nul, K^n et K'^n jouissent de la propriété d'être vues d'un point quelconque du plan suivant deux faisceaux harmoniques. Je dirai alors qu'elles forment un *couple harmonique;* si, de plus, n est impair, deux quelconques des courbes du faisceau (K^n, K'^n) formeront un couple harmonique, et je dirai que le *faisceau est harmonique.*

Étant donnée une courbe K^n, dont l'équation mixte est

$$(a, b, \ldots, k, l) = 0,$$

on peut rechercher s'il est possible de lui adjoindre une autre courbe de même classe K'^n, qui constitue avec elle un couple harmonique.

En désignant par $(a', b', \ldots, k', l') = 0$ l'équation mixte de K'^n, il faut déterminer les polynômes $a', b', \ldots$, de telle sorte que l'on ait identiquement

$$I = al' - nbk' + \ldots = 0.$$

Nous disposons, à cet effet, des $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficients de l'équation de K'^n; la courbe représentée par $I = 0$ étant de degré n, il en résulte que les $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficients inconnus doivent satisfaire à un nombre égal d'équations linéaires sans second membre; j'appellerai Δ le déterminant de ce système d'équations.

6. Il est important maintenant de distinguer le cas où n est pair et le cas où n est impair.

Si n est impair, le système d'équations est toujours satisfait pour

$$a = a', \quad b = b', \ldots;$$

par conséquent on a toujours $\Delta = 0$. De plus, on sait que, si l'on a une solution qui diffère de celle-là, il y en a une infinité; en d'autres termes, comme je l'ai déjà fait observer, les diverses courbes qui constituent avec la courbe donnée un couple harmonique forment un faisceau.

On pourra donc supposer que l'un des coefficients inconnus est nul, et l'on aura à trouver $\frac{(n+1)(n+2)-1}{2}$ inconnues satisfaisant à $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ équations linéaires sans second membre, ce qui, en général, exige que deux relations entre les coefficients soient satisfaites.

On peut donc énoncer cette proposition :

Étant donnée une courbe de classe impaire, deux conditions doivent *être satisfaites pour que cette courbe fasse partie d'un réseau harmonique.*

On voit facilement, d'après cela, qu'un système de deux points ne peut former un couple harmonique, ce qui, géométriquement, était évident *a priori*.

Relativement aux courbes de troisième classe, il est très-remarquable que les conditions nécessaires soient toujours satisfaites et que toute courbe de troisième classe fasse partie d'un faisceau harmonique. Cela résulte de la proposition suivante, que j'ai démontrée dans le *Mémoire sur l'application de la théorie des formes binaires*, etc., déjà cité (*Journal de Mathématiques*, p. 108) :

Une courbe quelconque de troisième classe et sa hessienne sont vues d'un point quelconque du plan suivant deux faisceaux harmoniques.

7. Si la courbe K^n est de classe paire, la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle fasse partie d'un couple harmonique est que $\Delta = 0$; et je vais d'abord chercher comment on peut facilement former ce déterminant.

Représentons symboliquement, comme l'ont fait MM. Aronhold et Clebsch, par $(au + bv + cw)^2 = 0$ l'équation tangentielle de K^n, en convenant, dans le développement du trinôme, de remplacer le produit $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ par le coefficient $a_{\alpha\beta\gamma}$; l'équation mixte de cette courbe sera

$$[a\mu - b\lambda + c(\lambda y - \mu x)]^n = 0 \quad \text{ou} \quad [(cy - b)\lambda + (a - cx)\mu]^n = 0.$$

Semblablement, l'équation mixte d'une seconde courbe K'^n sera symboliquement

$$[(\gamma y - \beta)\lambda + (\alpha - \gamma x)\mu]^n = 0.$$

L'équation symbolique de la courbe harmonique des deux courbes données sera, par suite,

$$[(cy - b)(\alpha - \gamma x) - (\gamma y - \beta)(a - cx)]^n = 0,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$[x(b\gamma - c\beta) + y(c\alpha - a\gamma) + z(a\beta - b\alpha)]^n = 0.$$

Si l'on suppose que K^n et K'^n constituent un couple harmonique, les divers coefficients du développement de ce trinôme doivent être nuls.

On aura, par suite, les diverses équations

$$\begin{aligned}
&(a\beta - b\alpha)^n = 0, \quad (a\beta - b\alpha)^{n-1}(c\gamma - c\beta) = 0, \ldots,\\
&(b\gamma - c\beta)^n = 0, \quad (b\gamma - c\beta)^{n-1}(a\beta - b\alpha) = 0, \ldots,\\
&(c\alpha - a\gamma)^n = 0, \quad (c\alpha - a\gamma)^{n-1}(a\beta - b\alpha) = 0, \ldots;
\end{aligned}$$

et Δ sera le déterminant de ces $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ équations, si l'on y considère comme inconnues les diverses puissances de α, β et γ.

J'ai calculé par ce procédé la valeur de Δ, relative à la courbe générale de quatrième classe; je transcris ici l'expression de cet invariant, qui, comme je le ferai voir tout à l'heure, présente quelque intérêt dans l'étude des points de rebroussement de la courbe.

Pour simplifier l'écriture, j'ai adopté les notations de M. Salmon (*Higher curves*, p. 251), et puis pour équation de la courbe K l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
&au^4 + bv^4 + cw^4 + 6fv^2w^2 + 6gw^2u^2 + 6hu^2v^2\\
&\quad + 12lu^2vw + 12mv^2wu + 12nw^2uv + 4a_2u^3v\\
&\quad + 4a_3u^3w + 4b_1v^3u + 4b_3v^3w + 4c_1w^3u + 4c_2w^3v = 0.
\end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix}
0 & c & b & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & -b_3 \\
c & 0 & a_1 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_3 & -c_1 & 0 & 0 \\
b & a & 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & -b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_2 \\
6f & 0 & 0 & a & h & g & 2l & -a_3 & -a_2 & -3n & 0 & 0 & -3m & 0 & 0 \\
0 & 6g & 0 & h & b & f & -b_3 & 2m & -b_1 & 0 & -3l & 0 & 0 & -3n & 0 \\
0 & 0 & 6h & g & f & c & -c_2 & -c_1 & 2n & 0 & -a & -3m & 0 & 0 & -3l \\
0 & 0 & 0 & -2a_3 & 4m & -2c_1 & -n & 2g & -l & 3c_2 & 0 & -3h & -3f & 0 & 3a_2 \\
0 & 0 & 0 & -2a_2 & -2b_1 & 4n & -m & -l & 2h & -3f & 3a_3 & 0 & 3b_3 & -3g & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4l & -2b_3 & -2c_2 & 2f & -n & -m & 0 & 3g & 3b_1 & 0 & 3c_1 & -3h \\
0 & 0 & -4b_1 & -2n & 0 & 0 & 0 & c_2 & -f & 0 & c_1 & b_3 & 0 & -c & 3m \\
-4c_2 & 0 & 0 & 0 & 2l & 0 & -g & 0 & a_2 & c_1 & 0 & a_2 & 3n & 0 & -b \\
0 & -4a_3 & 0 & 0 & 0 & -2m & b_1 & -h & 0 & b_3 & a_2 & 0 & -a & 3l & 0 \\
0 & -4c_1 & 0 & -2m & 0 & 0 & 0 & -f & b_3 & 0 & 3n & -b & 0 & c_2 & b_1 \\
0 & 0 & -4a_2 & 0 & -2n & 0 & c_1 & 0 & -g & -c & 0 & 3l & c_2 & 0 & a_3 \\
-4b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2l & -h & a_1 & 0 & 3m & -a & 0 & b_1 & a_3 & 0
\end{vmatrix}.$$

8. Une courbe du sixième ordre étant déterminée par vingt-sept points, on ne peut pas, en général, faire passer une telle courbe par les vingt-huit points doubles d'une courbe de quatrième classe K; mais on peut, à cet égard, énoncer le théorème suivant :

Théorème III. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les vingt-huit points doubles d'une courbe de quatrième classe soient situés sur une courbe du sixième ordre est que l'invariant* Δ' *soit nul.*

Ce théorème résulte immédiatement de la proposition suivante :

Si les vingt-huit points doubles d'une courbe de quatrième classe K *sont situés sur une courbe du sixième ordre, elle fait partie d'un couple harmonique; la réciproque est également vraie.*

Démonstration. — Soit $U = (a, b, c, d, e) = 0$ l'équation mixte de K; supposons que cette courbe constitue un couple harmonique avec la courbe K' dont l'équation mixte est $(a', b', c', d', e') = 0$.

En désignant respectivement par S, T, I et J l'invariant quadratique et l'invariant cubique de U, l'invariant quadratique de U et de U', et l'expression $a'\frac{dT}{da} + b'\frac{dT}{db}, \ldots$, j'ai démontré [*Mémoire de Géométrie analytique*, n° 37 (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. XVII)], que la courbe du dixième ordre, représentée par l'équation

$$2SJ - 3TI = 0,$$

passait par les vingt-quatre points de rebroussement et les vingt-huit points doubles de K. Les deux courbes K et K' constituant un couple harmonique, on a identiquement $I = 0$; la courbe du dixième ordre se décompose donc en deux courbes du quatrième et du sixième ordre $S = 0$ et $J = 0$. D'ailleurs $\mathfrak{S}$ ne rencontre K qu'en ses points de rebroussement; les vingt-huit points doubles se trouvent donc sur la courbe du sixième ordre $J = 0$.

Réciproquement, si les vingt-huit points doubles sont situés sur une courbe du sixième ordre C dont l'équation soit $W = 0$, je dis que K fait partie d'un couple harmonique. Pour le démontrer, je m'appuierai sur la proposition suivante (*Mémoire de Géométrie analytique*, n° 38):

Si, par les cinquante-deux points singuliers d'une courbe de qua-

trième classe K, *on fait passer une courbe quelconque du dixième ordre, cette courbe rencontre* K *en seize points distincts des points singuliers; les tangentes menées à* K *en ces seize points touchent une courbe de quatrième classe.*

Puisque les vingt-huit points δ sont une courbe du sixième ordre C, l'ensemble des courbes $\mathfrak{S}$ et C détermine une courbe du dixième ordre passant par les cinquante-deux points singuliers; $\mathfrak{S}$ ne rencontre d'ailleurs K qu'en ses points de rebroussement; par suite, en vertu du théorème précédent, les tangentes menées à K aux points où cette courbe est coupée par C (abstraction faite des points doubles) forment un polygone Q dans lequel on peut inscrire une infinité de courbes de quatrième classe.

$U' = 0$ désignant l'équation mixte d'une quelconque des courbes inscrites dans ce polygone, on aura nécessairement

$$2SJ - 3TI = SW$$

d'où

$$S(2J - W) = 3TI,$$

et par suite, en désignant par μ un facteur numérique,

$$S = 3\mu I \quad \text{et} \quad T = \mu(2J - W).$$

Considérons maintenant la courbe de quatrième classe $U - 3\mu U' = 0$, inscrite évidemment dans le polygone Q; l'invariant I relatif à cette courbe et à K est égal à $S - 3\mu I$ et, par suite des relations précédentes, il est identiquement nul.

Les courbes déterminées par les équations

$$U = 0 \quad \text{et} \quad U = 3\mu U' = 0$$

constituent donc un couple harmonique et la proposition est complétement démontrée.