JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CATALAN

Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 1 (1875), p. 209-240.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1875_3_1__209_0>

Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet;

PAR M. E. CATALAN [*].

1.

Si l'on suppose

$$(1) \qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=l(n)+\varphi(n)+C,$$

on a les formules connues

$$(2) \qquad C=\int_0^1\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{l(x)}\right]dx,$$

$$(3) \qquad \varphi(n)=-\int_0^1\left[\frac{x}{1-x}+\frac{1}{l(x)}\right]x^{n-1}\,dx.$$

Une simple identité permet de remplacer les intégrales définies par d'autres, qui se rattachent aux fonctions elliptiques.

Si, dans l'égalité (1), on change n en $2n$, et que l'on retranche, on trouve

$$(4) \qquad \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=l(2)+\varphi(2n)-\varphi(n);$$

mais, ainsi qu'il est aisé de le reconnaître,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2n}\ [^{**}].$$

[*] Des extraits de ce petit Mémoire ont paru dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (juillet 1873) et dans les *Bulletins de l'Académie de Belgique* (juillet-novembre 1872).

[**] *Voir* la Note à la fin.

Par conséquent, le premier membre de l'égalité (4) équivaut à

$$l(2) - \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \ldots\right)$$
$$= l(2) - \int_0^1 (x^{2n} - x^{2n+1} + x^{2n+2} - \ldots)\, dx,$$

ou à

$$l(2) - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\, dx.$$

La relation (4) devient donc

$$\varphi(n) - \varphi(2n) = \int_1^0 \frac{x^{2n}}{1+x} dx. \tag{5}$$

Dans cette égalité (5), changeons n en $2n, 4n, 8n, \ldots$, puis faisons la somme : à cause de $\varphi(\infty) = 0$, nous aurons

$$\varphi(n) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}[x^{2n} + x^{4n} + x^{8n} + \ldots]; \tag{6}$$

ce qui est la formule annoncée.

Il en résulte, comme cas particulier,

$$\varphi(1) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}[x^2 + x^4 + x^8 + \ldots];$$

puis, par la relation (1),

$$C = 1 - \int_0^1 \frac{dx}{1+x}[x^2 + x^4 + x^8 + \ldots]. \tag{7}$$

II.

On tire de la formule (6), en changeant la notation,

$$\varphi(1) = \int_0^1 \frac{dq}{1+q}[q^2 + q^4 + q^8 + q^{16} + \ldots],$$
$$\varphi(5) = \int_0^1 \frac{dq}{1+q}[q^{10} + q^{20} + q^{40} + q^{80} + \ldots],$$
$$\varphi(9) = \int_0^1 \frac{dq}{1+q}[q^{18} + q^{36} + q^{72} + q^{144} + \ldots],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soit, comme dans un autre Mémoire [*],

$$(8)\qquad F(q) = q + q^2 + q^4 + q^8 + \ldots .$$

Alors la première des séries ci-dessus égale $F(q) - q$; la deuxième égale $F(q^5) - q^5$, etc. Il résulte, des égalités précédentes,

$$\varepsilon_1\varphi(1) + \varepsilon_5\varphi(5) + \varepsilon_9\varphi(9) + \ldots$$
$$= \int_0^1 \frac{dq}{1+q}\left[\varepsilon_1 F(q) + \varepsilon_5 F(q^5) + \varepsilon_9 F(q^9) + \ldots - \varepsilon_1 q - \varepsilon_5 q^5 - \varepsilon_9 q^9 - \ldots\right] \text{ [**]}.$$

Or

$$\varepsilon_1 F(q) + \varepsilon_5 F(q^5) + \varepsilon_9 F(q^9) + \ldots = f(q) = \frac{1}{4}\left(\frac{2\omega}{\pi} - 1\right),$$
$$\varepsilon_1 q + \varepsilon_5 q^5 + \varepsilon_9 q^9 + \ldots = f(q) - f(q^2) = \frac{(1-k')\omega}{4\pi} \quad \text{[***]};$$

on a donc simplement

$$(9)\qquad \varepsilon_1\varphi(1) + \varepsilon_5\varphi(5) + \varepsilon_9\varphi(9) + \ldots = -\frac{1}{4}l(2) + \frac{1}{4\pi}\int_0^1 \frac{dq}{1+q}(1+k')\omega.$$

III.

Le calcul précédent, appliqué à la formule (3), donne

$$\varepsilon_1\varphi(1) + \varepsilon_5\varphi(5) + \varepsilon_9\varphi(9) + \ldots$$
$$= -\int_0^1 dq\left[\frac{1}{1-q} + \frac{1}{q\,l(q)}\right](\varepsilon_1 q + \varepsilon_5 q^5 + \varepsilon_9 q^9 + \ldots),$$

---

[*] *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 76.

[**] En général, ε_n *représente l'excès du nombre des diviseurs de* n, *ayant la forme* $4\mu + 1$, *sur le nombre de ceux qui ont la forme* $4\mu - 1$. (*Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 75.)

[***] Suivant la notation de M. Bertrand,

$$\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

(*Recherches sur quelques produits indéfinis*, pp. 74 et 76.)

ou

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1\varphi(1) + \varepsilon_5\varphi(5) + \varepsilon_9\varphi(9) + \ldots \\ \quad = -\frac{1}{4\pi}\int_0^1 dq\left[\frac{1}{1-q} + \frac{1}{q\,l(q)}\right](1-k')\omega. \end{array} \right.$$

Conséquemment

$$\int_0^1 \frac{dq}{1+q}(1+k')\omega + \int_0^1 dq\left[\frac{1}{1-q} + \frac{1}{q\,l(q)}\right](1-k')\omega = \pi l(2),$$

ou, après quelques réductions,

$$(11) \quad \int_0^1 \left[2\frac{1-qk'}{1-q^2} + \frac{1-k'}{q\,l(q)}\right]\omega\,dq = \pi l(2) \text{ [*]}.$$

---

[*] Ce résultat semblera peut-être digne de remarque, si l'on fait attention que ω, k' sont des fonctions transcendantes de q, *définies* par les formules

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2\omega}{\pi} - 1\right) = \frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \ldots,$$
$$\frac{(1-k')\omega}{4\pi} = \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} - \ldots.$$

(*Recherches*, etc., p. 76.) En outre, d'après les égalités (7), (8),

$$C = 1 - \int_0^1 \frac{dq}{1+q}[-q + F(q)],$$

puis

$$\int_0^1 \frac{dq}{1+q}F(q) = 2 + l(2) - C,$$

ou enfin

$$\int_0^1 \frac{dq}{1+q}F(q) = 0{,}729\ 637\ 154\ 538\ 522\ldots.$$

Ainsi l'on peut évaluer $\int_0^1 \frac{dq}{1+q}F(q)$, bien que la transcendante $F(q)$ ne paraisse pas exprimable sous forme finie.

IV.

Pour généraliser les formules (6), (7), soit

$$(12)\qquad \frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu+1}+\cdots+\frac{1}{\mu+n-1}=l(\mu+n-1)+\varphi(n,\mu)+C_\mu,$$

μ étant une quantité positive et la fonction $\varphi(n,\mu)$ s'annulant, comme $\varphi(n)$, pour n infini. La *constante* C_μ, qui devient $C_1 = C$ si $\mu = 1$, est définie par la condition

$$(13)\qquad C_\mu = \lim\left[\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu+1}+\cdots+\frac{1}{\mu+n-1}-l(\mu+n-1)\right].$$

D'après l'équation (12), et par des transformations connues,

$$(14)\qquad \varphi(n,\mu)+C_\mu=\int_0^1\left[x^{\mu-1}\frac{1-x^n}{1-x}+\frac{1-x^{\mu+n-2}}{l(x)}\right]dx.$$

Lorsque n devient infini, cette relation se réduit à

$$(15)\qquad C_\mu=\int_0^1\left[\frac{x^{\mu-1}}{1-x}+\frac{1}{l(x)}\right]dx.$$

Par suite,

$$(16)\qquad \varphi(n,\mu)=-\int_0^1\left[\frac{x}{1-x}+\frac{1}{l(x)}\right]x^{\mu+n-2}\,dx;$$

et, si l'on fait $x=e^{-z}$,

$$(17)\qquad C_\mu=-\int_0^\infty\left[\frac{e^{-z}}{z}-\frac{e^{-\mu z}}{1-e^{-z}}\right]dz,$$

$$(18)\qquad \varphi(n,\mu)=\int_0^\infty\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{e^z-1}\right]e^{-(\mu+n-1)z}\,dz$$

V.

L'intégrale contenue dans l'égalité (16) représente, comme l'on sait, $\frac{d.l\Gamma(\mu)}{d\mu}$; donc

$$C_\mu = -\frac{d.l\Gamma(\mu)}{d\mu}\ [*]; \tag{19}$$

et, en particulier,

$$C = -\left[\frac{d.l\Gamma(\mu)}{d\mu}\right]_{(\mu=1)}, \tag{20}$$

formule connue.

VI.

La comparaison des valeurs (2), (14) donne cette relation simple :

$$C - C_\mu = \int_0^1 \frac{1 - x^{\mu-1}}{1-x}\,dx. \tag{21}$$

Il en résulte que *la différence* $C - C_\mu$ *est réductible à l'intégrale d'une différentielle rationnelle, si* μ *est commensurable.* Par exemple,

$$C - C_{\frac{1}{2}} = -2\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = -2l(2).$$

On a aussi, par la formule (20), en supposant μ inférieur à l'unité,

$$C - C_{1-\mu} = \int_0^1 \frac{1 - x^{-\mu}}{1-x}\,dx,$$

et, par conséquent,

$$C_\mu - C_{1-\mu} = \int_0^1 \frac{x^{\mu-1} - x^{-\mu}}{1-x}\,dx, \tag{22}$$

ou

$$C_\mu - C_{1-\mu} = \pi \cot \mu\pi\ [**]. \tag{23}$$

---

[*] On voit que $-C_\mu$ est la fonction $Z'(\mu)$ de Legendre.

[**] BIERENS DE HAAN, Table 3.

Ainsi la fonction C_μ sera déterminée entre $\mu = \frac{1}{2}$ et $\mu = 1$, si elle l'est pour $\mu < \frac{1}{2}$. D'ailleurs, la relation (22) équivaut à l'équation d'Euler

$$\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu) = \frac{\pi}{\sin \mu\pi}.$$

En effet, on tire de celle-ci

$$l\Gamma(\mu) + l\Gamma(1-\mu) = -l \sin \mu\pi,$$

puis

$$\frac{d.l\Gamma(\mu)}{d\mu} - \frac{d.l\Gamma(1-\mu)}{d\mu} = -\pi \cot \mu\pi;$$

etc.

VII.

Indépendamment de ces deux expressions de la *constante d'Euler*

(2) $$C = \int_0^1 \left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{l(x)}\right] dx,$$

(7) $$C = 1 - \int_0^1 \frac{dx}{1+x}[x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + \ldots],$$

on a [*]

$$C = \frac{1}{2} + 2\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^2} \frac{1}{e^{2\pi x}-1}.$$

Ces diverses formules ne semblent pas se prêter au calcul numérique de C [**]. Pour en trouver une autre un peu plus satisfaisante,

---

[*] *Note sur une formule de M. Botesu.* (*Bulletins de l'Académie*, novembre 1872.)

[**] Il en est de même d'une ingénieuse transformation, employée par Binet, et d'après laquelle

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{l(1-y)} = \int_0^1 \beta_1 \, d\beta - y \int_0^1 \beta_2 \, d\beta + y^2 \int_0^1 \beta_3 \, d\beta - \ldots,$$

en supposant

$$(1-y)^\beta = 1 - \beta_1 y + \beta_2 y^2 - \beta_3 y^3 + \ldots.$$

reprenons l'égalité (1)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=l(n)+\varphi(n)+\mathrm{C}.$$

Comme

$$l(n)=l\frac{n}{n-1}+l\frac{n-1}{n-2}+\ldots+l\frac{2}{1},$$

on peut l'écrire ainsi

$$\mathrm{C}=1-\left(l\frac{2}{1}-\frac{1}{2}\right)-\left(l\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)-\ldots-\left(l\frac{n}{n-1}-\frac{1}{n}\right)-\ldots;$$

ou, si l'on fait

(25) $$u_n=l\frac{n}{n-1}-\frac{1}{n}\quad[*]:$$

(26) $$\mathrm{C}=1-\sum_2^\infty u_n.$$

Or

$$l\frac{n}{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2(n-1)^2}+\frac{1}{3(n-1)^3}-\frac{1}{4(n-1)^4}+\ldots;$$

donc

$$\sum_2^\infty u_n=\sum_2^\infty\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{S}_2+\frac{1}{3}\mathrm{S}_3-\frac{1}{4}\mathrm{S}_4+\ldots,$$

S_2, S_3, S_4,... représentant, suivant la notation habituelle, les sommes des puissances entières, négatives, des nombres naturels. A cause de

$$\sum_2^\infty\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1,$$

la formule (26) se réduit à

(27) $$\mathrm{C}=\frac{1}{2}\mathrm{S}_2-\frac{1}{3}\mathrm{S}_3+\frac{1}{4}\mathrm{S}_4-\frac{1}{5}\mathrm{S}_5+\ldots.$$

Les termes du second membre, alternativement positifs et négatifs,

---

[*] *Comptes rendus*, t. XLIII, p. 628. *Mélanges mathématiques*, p. 165.

décroissent indéfiniment; donc la série est convergente. Pour qu'elle le devienne davantage, ajoutons au second membre

$$-l(2)+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots=0 \quad [*].$$

De là résulte

$$(28)\quad C=1-l(2)+\frac{1}{2}(S_2-1)-\frac{1}{3}(S_3-1)+\frac{1}{4}(S_4-1)-\ldots \quad [**].$$

VIII.

En combinant l'équation (28) avec celle-ci :

$$(29)\quad 1-C=\frac{1}{2}l(2)+\frac{1}{3}(S_3-1)+\frac{1}{5}(S_5-1)+\frac{1}{7}(S_7-1)+\ldots \quad [***],$$

on trouve un résultat assez curieux, savoir

$$(30)\quad l(2)=(S_2-1)+\frac{1}{2}(S_4-1)+\frac{1}{3}(S_6-1)+\frac{1}{4}(S_8-1)+\ldots.$$

Pour vérifier cette relation (dans laquelle on pourrait introduire les Nombres de Bernoulli), il suffit de se rappeler que

$$S_{2p}=\frac{1}{\Gamma(2p)}\int_0^\infty \frac{z^{2p-1}dz}{e^z-1}.$$

---

[*] Artifice employé par Legendre.

[**] Cette formule, qui n'est pas nouvelle, est comprise dans une équation donnée par Legendre (*Traité des fonctions elliptiques*, t. II, p. 432) et reproduite par M. Serret (*Calcul différentiel* de Lacroix, t. II, p. 334). Mais la démonstration de Legendre est inadmissible. En effet, cet illustre Géomètre y fait usage d'une série dont *le premier terme* est $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ (p. 430). Du reste, on connaît divers procédés, très-expéditifs, qui permettent de calculer C avec un grand nombre de décimales.

[***] Legendre, p. 434. Serret, p. 335.

On conclut de cette valeur

$$S_{2p}-1=\frac{1}{\Gamma(2p)}\left[\int_0^\infty \frac{z^{2p-1}dz}{e^z-1}-\int_0^\infty e^{-z}z^{2p-1}dz\right]=\frac{1}{\Gamma(2p)}\int_0^\infty \frac{z^{2p-1}dz}{e^z(e^z-1)}.$$

L'égalité (30) devient

$$l(2)=2\int_0^\infty \frac{dz}{e^z(e^z-1)}\left[\frac{z}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3.4}+\frac{z^5}{1.2\ldots6}+\cdots\right];$$

ou, si l'on somme la série,

$$l(2)=\int_0^\infty \frac{e^z+e^{-z}-2}{ze^z(e^z-1)}dz=\int_0^\infty \frac{e^z-1}{z}e^{-2z}dz;$$

etc.

Le même calcul, appliqué à la relation (29), la transforme en

$$1-C-\tfrac{1}{2}l(2)=\int_0^\infty \frac{dz}{e^z(e^z-1)}\left[\frac{z^2}{1.2.3}+\frac{z^4}{1.2.3.4.5}+\cdots\right];$$

ou, par la sommation de la série, en

$$1-C-\tfrac{1}{2}l(2)=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^z-e^{-z}-2z}{ze^z(e^z-1)}dz.$$

Au moyen de l'expression précédente de $l(2)$, cette égalité se réduit à

$$1-C=\int_0^\infty \frac{e^z-1-z}{ze^z(e^z-1)}dz;$$

ou encore à

$$C=\int_0^\infty \frac{(z-1)e^z+1}{ze^z(e^z-1)}dz=\int_0^\infty\left(\frac{e^z}{e^z-1}-\frac{1}{z}\right)e^{-z}dz,$$

formule connue.

IX.

A cause des équations (3), (6), on a

$$(31)\quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x}[x^{2\mu}+x^{4\mu}+x^{8\mu}+\ldots]+\int_0^1\left[\frac{x}{1-x}+\frac{1}{l(x)}\right]x^{\mu-1}dx=0,$$

au moins *lorsque* μ *est entier.* Afin de voir si la même relation subsiste pour toutes les valeurs positives de cette variable, prenons l'équation dérivée

$$(32)\quad \int_0^1 \frac{dx\,l(x)}{1+x}[2x^{2\mu}+4x^{4\mu}+8x^{8\mu}+\ldots]+\int_0^1\left[\frac{x\,l(x)}{1-x}+1\right]x^{\mu-1}dx=0.$$

Si l'on remplace μ par 2μ, on trouve aisément

$$(33)\quad 2\int_0^1 \frac{dx\,l(x)}{1+x}x^{2\mu}+\int_0^1\left[\frac{l(x)}{1-x}+\frac{1}{x}\right](x^{\mu}-2x^{2\mu})dx=0;$$

ou, en supprimant une intégrale nulle,

$$\int_0^1 \frac{dx\,l(x)}{1-x}x^{\mu}=4\int_0^1 \frac{dx\,l(x)}{1-x^2}x^{2\mu+1}.$$

Il est visible que cette équation est identique. Il en est donc de même pour l'égalité (33).

Si maintenant, dans cette égalité (33), on change μ en 2μ, 4μ, $8\mu,\ldots$, et qu'en même temps on multiplie par 2, 4, 8,..., on retombe sur la relation (32). Donc celle-ci est *générale*, et l'équation (31) l'est pareillement.

Par suite, la formule (16) peut être écrite ainsi :

$$(34)\quad \varphi(n,\mu)=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}[x^{2(\mu+n-1)}+x^{4(\mu+n-1)}+x^{8(\mu+n-1)}+\ldots]\quad [*].$$

[*] Si μ est *entier*, le second membre représente $\varphi(\mu+n-1)$ (6); donc, dans ce cas, $\varphi(n,\mu)=\varphi(\mu+n-1)$. Cette relation s'accorde avec l'égalité (12).

X.

De l'équation (31), on conclut

$$\int_0^1 \frac{x^{2\mu}}{1+x}\,dx + \int_0^1 \left[\frac{x}{1-x} + \frac{1}{l(x)}\right](x^{\mu-1} - x^{2\mu-1})\,dx = 0,$$

ou

$$\int_0^1 \left(\frac{x^{2\mu}}{1+x} + \frac{x^{\mu} - x^{2\mu}}{1-x}\right)dx + \int_0^1 \frac{x^{\mu-1} - x^{2\mu-1}}{l(x)}\,dx = 0.$$

La seconde intégrale a pour valeur

$$l\left(\frac{1}{2}\right) = -\,l(2) \quad [*];$$

donc

(35) $$\int_0^1 \frac{1 + x - 2x^{\mu+1}}{1-x^2}\,x^{\mu}\,dx = l(2),$$

ou, par le changement de x^2 en x,

(36) $$\int_0^1 \frac{x^{\frac{\mu-1}{2}} + x^{\frac{\mu}{2}} - 2x^{\mu}}{1-x}\,dx = 2\,l(2).$$

Cette intégrale définie, assez remarquable, peut évidemment en donner d'autres. Au lieu d'écrire ces nouvelles formules, nous allons tirer, de l'équation (36), une relation entre les transcendantes C_μ.

On a

(15) $$C_\mu = \int_0^1 \left[\frac{x^{\mu-1}}{1-x} + \frac{1}{l(x)}\right]dx;$$

et, par conséquent,

(37) $$C_\mu + C_{\mu+\frac{1}{2}} - 2C_{2\mu} = \int_0^1 \frac{x^{\mu-1} + x^{\mu-\frac{1}{2}} - 2x^{2\mu-1}}{1-x}\,dx.$$

---

[*] Bierens de Haan, Table 168.

Le second membre se déduit du premier membre de la relation (36), par le changement de $\frac{\mu-1}{2}$ en $\mu-1$; et, puisque l'intégrale (36) est indépendante de μ, on a

$$C_\mu + C_{\mu+\frac{1}{2}} - 2C_{2\mu} = 2l(2). \tag{38}$$

Lorsque $\mu = \frac{1}{2}$, cette relation générale se réduit à

$$C_{\frac{1}{2}} - C_1 = 2l(2)\,(\text{VI}).$$

XI.

Si nous réduisons en série la fraction $\frac{1+x-2x^{\mu+1}}{1-x^2}$, nous aurons

$$\frac{1+x-2x^{\mu+1}}{1-x^2} = \sum_1^\infty (1+x-2x^{\mu+1})x^{2n-2}.$$

L'équation (35) devient donc

$$\sum_1^\infty \int_0^1 (1+x-2x^{\mu+1})x^{\mu+2n-2}\,dx = l(2),$$

ou

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{\mu+2n-1} + \frac{1}{\mu+2n} - \frac{1}{\mu+n}\right) = l(2), \tag{39}$$

ou encore

$$\sum_1^\infty \frac{\mu^2+2n\mu+n}{(\mu+n)(\mu+2n-1)(\mu+2n)} = l(2). \tag{40}$$

Chacune de ces deux formules donne, on le voit, une infinité de développements de $l(2)$. Elles subsistent même pour $\mu = 0$; car, dans ce cas, la première se réduit à

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = l(2);$$

et la seconde, transformée de la première, devient

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{7.8}+\cdots=l(2).$$

La convergence des séries (39), (40), assez faible déjà si $\mu=0$, diminue quand ce paramètre augmente. Par exemple, pour $\mu=99$, la formule (39) devient

$$\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{101}-\frac{1}{100}\right)+\left(\frac{1}{102}+\frac{1}{103}-\frac{1}{101}\right)+\left(\frac{1}{104}+\frac{1}{105}-\frac{1}{102}\right)+\cdots=l(2).$$

On voit que les termes du premier membre ne décroissent guère plus rapidement que ceux de la série *divergente*

$$\frac{1}{101}+\frac{1}{103}+\frac{1}{105}+\cdots,$$

du moins pour les premières valeurs de n. Mais, quand ce nombre grandit, le terme général de la série (40) tend vers $\frac{2\mu+1}{2n(2n-1)}$: la série est donc convergente.

XII.

Soient

$$(41)\qquad A_\mu=C_{\mu+\frac{1}{2}}-C_{2\mu}=\int_0^1\frac{x^{\mu-\frac{1}{2}}-x^{2\mu-1}}{1-x}dx,$$

$$(42)\qquad B_\mu=C_\mu-C_{2\mu}=\int_0^1\frac{x^{\mu-1}-x^{2\mu-1}}{1-x}dx,$$

d'après l'égalité (37). Pour essayer de déterminer A_μ, B_μ, observons que la relation (38) donne

$$A_\mu+B_\mu=2l(2),$$

et que, d'un autre côté,

$$A_\mu-B_\mu=-\int_0^1\frac{x^{\mu-1}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)}{1-x}dx,$$

ou, plus simplement,

$$(43)\qquad A_\mu - B_\mu = -2\int_0^1 \frac{x^{2\mu-1}}{1+x}\,dx.$$

Par conséquent,

$$A_\mu = l(2) - \int_0^1 \frac{x^{2\mu-1}}{1+x}\,dx, \quad B_\mu = l(2) + \int_0^1 \frac{x^{2\mu-1}}{1+x}\,dx;$$

ou, si l'on veut,

$$(44)\qquad A_\mu = \int_0^1 \frac{1-x^{2\mu-1}}{1+x}\,dx, \quad B_\mu = \int_0^1 \frac{1+x^{2\mu-1}}{1+x}\,dx.$$

L'intégrale (43) n'étant pas exprimable sous forme finie, du moins en général, il en est de même pour les quantités A_μ, B_μ. Néanmoins, la dernière recherche nous donne ces formules de *réduction* :

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{\mu-\frac{1}{2}} - x^{2\mu-1}}{1-x}\,dx &= \int_0^1 \frac{1-x^{2\mu-1}}{1+x}\,dx, \\ \int_0^1 \frac{x^{\mu-1} - x^{2\mu-1}}{1-x}\,dx &= \int_0^1 \frac{1+x^{2\mu-1}}{1+x}\,dx. \end{aligned}\right.$$

XIII.

Prenons l'équation connue

$$(46)\qquad l\Gamma(\mu) = (\mu - \tfrac{1}{2})\,l(\mu) - \mu + \tfrac{1}{2}l(2\pi) + \varpi(\mu),$$

dans laquelle $\varpi(\mu)$ représente la *fonction de Binet*, savoir :

$$(47)\qquad \varpi(\mu) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-\mu x}}{x}\,dx.$$

Il en résulte, à cause de la formule (19) et de $\int_0^\infty e^{-\mu x}dx = \frac{1}{\mu}$,

$$(48)\qquad C_\mu = \frac{1}{2\mu} - l(\mu) - \varpi'(\mu)\ [*],$$

$$(49)\qquad \varpi'(\mu) = -\frac{1}{2\mu} - \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right)e^{-\mu x}\,dx.$$

[*] Dans la Note insérée aux *Comptes rendus*, le terme $-l(\mu)$ a été omis.

Si l'on fait $e^x = \frac{1}{\alpha}$, la dernière équation devient

$$(50) \qquad \varpi'(\mu) = -\frac{1}{2\mu} - \int_0^1 \left[\frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{1}{l(\alpha)}\right] \alpha^{\mu-1} d\alpha,$$

et, par l'égalité (31),

$$(51) \qquad \varpi'(\mu) = -\frac{1}{2\mu} + \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\left[x^{2\mu} + x^{4\mu} + x^{8\mu} + \ldots\right].$$

Conséquemment (48),

$$(52) \qquad C_\mu = \frac{1}{\mu} - l(\mu) - \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\left[x^{2\mu} + x^{4\mu} + x^{8\mu} + \ldots\right];$$

puis, comme ci-dessus,

$$(7) \qquad C_1 = C = 1 - \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\left[x^2 + x^4 + x^8 + \ldots\right].$$

XIV.

Dans la relation

$$(38) \qquad C_\mu + C_{\mu+\frac{1}{2}} - 2C_{2\mu} - 2l(2),$$

substituons aux quantités C_μ, $C_{\mu+\frac{1}{2}}$, $C_{2\mu}$ leurs valeurs

$$(52) \quad \begin{cases} C_\mu = \frac{1}{\mu} - l(\mu) - \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\left[x^{2\mu} + x^{4\mu} + x^{8\mu} + \ldots\right], \\ C_{\mu+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mu+\frac{1}{2}} - l(\mu+\tfrac{1}{2}) - \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\left[x^{2\mu+1} + x^{4\mu+2} + x^{8\mu+4} + \ldots\right], \\ C_{2\mu} = \frac{1}{2\mu} - l(2\mu) - \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\left[x^{4\mu} + x^{8\mu} + x^{16\mu} + \ldots\right]; \end{cases}$$

nous aurons

$$\frac{1}{\mu+\frac{1}{2}}+l\frac{\mu}{\mu+\frac{1}{2}}+\int_0^1\frac{dx}{1+x}[-x^{2\mu}-x^{2\mu+1}+x^{4\mu}-x^{4\mu+2}+x^{8\mu}-x^{8\mu+4}+\ldots]=0,$$

ou

$$\frac{1}{\mu+\frac{1}{2}}+l\frac{\mu}{\mu+\frac{1}{2}}+\int_0^1 dx[-x^{2\mu}+x^{4\mu}(1-x)+x^{8\mu}(1-x+x^2-x^3)$$
$$+x^{16\mu}(1-x+x^2-\ldots-x^7)+\ldots]=0.$$

On peut remplacer $\frac{1}{\mu+\frac{1}{2}}=\frac{2}{2\mu+1}$ par $2\int_0^1 x^{2\mu}dx$. De plus, $l\frac{\mu}{\mu+\frac{1}{2}}=-l\frac{2\mu+1}{2\mu}=-l\left(1+\frac{1}{2\mu}\right)$; donc la relation précédente devient

$$l\left(1+\frac{1}{2\mu}\right)=\int_0^1 dx[x^{2\mu}+x^{4\mu}(1-x)+x^{8\mu}(1-x+x^2-x^3)+\ldots].$$

Si l'on intègre chaque terme, et que l'on remplace 2μ par a, on a enfin

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned}
l\left(1+\frac{1}{a}\right)&=\frac{1}{a+1}+\left(\frac{1}{2a+1}-\frac{1}{2a+2}\right)\\
&+\left(\frac{1}{4a+1}-\frac{1}{4a+2}+\frac{1}{4a+3}-\frac{1}{4a+4}\right)\\
&+\left(\frac{1}{8a+1}-\frac{1}{8a+2}+\ldots+\frac{1}{8a+8}\right)\\
&+\left(\frac{1}{16a+1}-\ldots+\frac{1}{16a+16}\right)\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Dans ce nouveau développement, a est une quantité *positive* quelconque. $a=1$ donne l'expression ordinaire du logarithme de 2. Si l'on suppose $a=\frac{1}{2}$, $a=2$, on trouve

$$l(3)=\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots-\frac{1}{12}\right)+\ldots,$$
$$l\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{18}+\ldots-\frac{1}{24}\right)+\ldots.$$

XV.

De l'équation (51), on conclut

$$\varpi(\mu) - \varpi(1) = -\tfrac{1}{2}l(\mu)$$
$$+\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)}\left[\frac{x^{2\mu}-x^2}{2}+\frac{x^{4\mu}-x^4}{4}+\frac{x^{8\mu}-x^8}{8}+\ldots\right],$$

ou, parce que $\varpi(1) = 1 - \frac{1}{2}l(2\pi)$ (46),

$$(54)\quad \begin{cases} \varpi(\mu) = 1 - \tfrac{1}{2}l(2\mu\pi) \\ \qquad +\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)}\left[\frac{x^{2\mu}-x^2}{2}+\frac{x^{4\mu}-x^4}{4}+\frac{x^{8\mu}-x^8}{8}+\cdots\right]. \end{cases}$$

Pour simplifier cette formule, prenons $\mu = \frac{1}{2}$:

$$\varpi(\tfrac{1}{2}) = 1 - \tfrac{1}{2}l(\pi) + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)}\left[\frac{x-x^2}{2}+\frac{x^2-x^4}{4}+\frac{x^4-x^8}{8}+\cdots\right],$$

ou

$$\varpi(\tfrac{1}{2}) = 1 - \tfrac{1}{2}l(\pi) - \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)}\left[-x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^8}{8}+\cdots\right].$$

Mais, à cause de $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, on tire, de la relation (51),

$$\varpi(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}l(2);$$

donc l'égalité précédente se réduit à

$$0 = 1 - l\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)}\left[-x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^8}{8}+\cdots\right].$$

Combinant celle-ci avec la relation (54), on obtient

$$(55)\quad \varpi(\mu) = \tfrac{1}{2}l\frac{\pi}{8\mu} + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)}\left[-x+\frac{x^{2\mu}}{2}+\frac{x^{4\mu}}{4}+\frac{x^{8\mu}}{8}+\cdots\right].$$

Voilà donc une expression de la transcendante $\varpi(\mu)$, qui subsiste pour toutes les valeurs positives de μ, et qui dépend d'une série dont la convergence augmente indéfiniment avec cette variable. Au moyen de l'identité

$$0 = \frac{1}{2} l\left(\frac{\pi^2}{4}\right) + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\, l(x)}(1-x) \text{ [*]},$$

on peut écrire ainsi la dernière formule

$$(56) \quad \varpi(\mu) = -\tfrac{1}{2} l(2\mu\pi) + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\, l(x)}\left[-1 + \frac{x^{2\mu}}{2} + \frac{x^{4\mu}}{4} + \frac{x^{8\mu}}{8} + \ldots\right].$$

De celle-ci, l'on conclut ces deux résultats simples :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\, l(x)}\left[-1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{8} + \ldots\right] = 1,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\, l(x)}\left[-1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{8} + \ldots\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} l\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

XVI.

Si, dans la relation (46), on substitue à $\varpi(\mu)$ sa valeur (56), on trouve

$$(57) \quad l\Gamma(\mu) = (\mu-1)\, l(\mu) - \mu + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\, l(x)}\left[-1 + \frac{x^{2\mu}}{2} + \frac{x^{4\mu}}{4} + \frac{x^{8\mu}}{8} + \ldots\right];$$

ou, ce qui est équivalent,

$$(58) \quad \left\{\begin{aligned} l\Gamma(\mu) &= (\mu-1) l(\mu) - \mu \\ &\quad - \int_0^1 \frac{dx}{(1+x) l(x)}\left[\frac{1-x^{2\mu}}{2} + \frac{1-x^{4\mu}}{4} + \frac{1-x^{8\mu}}{8} + \ldots\right] \text{ [**]}. \end{aligned}\right.$$

En général,

$$\int_0^1 \frac{dx\,(1-x^q)}{(1+x)\, l(x)} = l\frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+2}{2}\right)} \text{ [***]};$$

---

[*] Bierens de Haan, Table 171.

[**] Est-il nécessaire de rappeler que

$$-1 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} - \ldots ?$$

[***] Bierens de Haan, Table 171.

donc

$$\int_0^1 \frac{dx(1-x^{2\mu})}{(1+x)\,l(x)} = l\,\frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\mu+1)} = -\,l\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}.$$

Appliquant cette transformation à chacune des parties de l'intégrale (58), nous aurons

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\,l(x)}&\left[\frac{1-x^{2\mu}}{2}+\frac{1-x^{4\mu}}{4}+\frac{1-x^{8\mu}}{8}+\ldots\right]\\ &= -\,l\Gamma(\tfrac{1}{2}) - \left[\frac{1}{2}\,l\,\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}+\frac{1}{4}\,l\,\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})}+\frac{1}{8}\,l\,\frac{\Gamma(4\mu+1)}{\Gamma(4\mu+\frac{1}{2})}+\ldots\right],\end{aligned}$$

ou bien

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\,l(x)}\left[\frac{1-x^{2\mu}}{2}+\frac{1-x^{4\mu}}{4}+\frac{1-x^{8\mu}}{8}+\ldots\right]\\ &\qquad = -\,l\left\{\sqrt{\pi}\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{4}}\left[\frac{\Gamma(4\mu+1)}{\Gamma(4\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{8}}\ldots\right\};\end{aligned}\right.$$

puis, au lieu de la formule (58),

$$(60)\quad \Gamma(\mu)=\mu^{\mu-1}e^{-\mu}\sqrt{\pi}\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{4}}\left[\frac{\Gamma(4\mu+1)}{\Gamma(4\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{8}}\ldots.$$

XVII.

On tire, de cette égalité (60) :

$$\Gamma(2\mu)=(2\mu)^{2\mu-1}e^{-2\mu}\sqrt{\pi}\left[\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Gamma(4\mu+1)}{\Gamma(4\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{4}}\left[\frac{\Gamma(8\mu+1)}{\Gamma(8\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{8}}\ldots,$$

$$[\Gamma(\mu)]^2=\mu^{2\mu-2}e^{-2\mu}\pi\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right]\left[\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Gamma(4\mu+1)}{\Gamma(4\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{4}}\ldots;$$

et, par la division,

$$\frac{\Gamma(2\mu)}{[\Gamma(\mu)]^2}=2^{2\mu-1}\,\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+1)},$$

ou

$$(61)\qquad \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\mu)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\mu-1}},$$

formule de Legendre.

XVII.

On sait, et il est d'ailleurs évident [*], que

$$e = \lim \frac{n}{\sqrt[n]{1.2\ldots n}},$$

quand n est un nombre entier, croissant indéfiniment. Une transformation de l'égalité (60) va nous permettre de généraliser cette propriété.

Le produit des facteurs fractionnaires peut être écrit ainsi :

$$\left[\frac{\mu\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{(2\mu)\Gamma(2\mu)}{\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{4}}\left[\frac{(4\mu)\Gamma(4\mu)}{\Gamma(4\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{8}}\cdots$$

Or :

$$\mu^{\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{4}}\mu^{\frac{1}{8}}\ldots = \mu, \quad 2^{\frac{1}{4}}4^{\frac{1}{8}}8^{\frac{1}{16}}\ldots = 2^{\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}}\ldots = 1;$$

donc

$$(62)\quad \Gamma(\mu) = 2\sqrt{\pi}\mu^{\mu}e^{-\mu}\left[\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{4}}\left[\frac{\Gamma(4\mu)}{\Gamma(4\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{8}}\cdots.$$

Appliquons la formule de Legendre à chacun des facteurs du produit indéfini

$$(63)\qquad P_{\mu} = \left[\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{4}}\left[\frac{\Gamma(4\mu)}{\Gamma(4\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{8}}\cdots;$$

nous aurons

$$P_{\mu} = \left[\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu)}{\Gamma(2\mu)}\,\frac{2^{2\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Gamma(2\mu)\Gamma(2\mu)}{\Gamma(4\mu)}\,\frac{2^{4\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\right]^{\frac{1}{4}}\left[\frac{\Gamma(4\mu)\Gamma(4\mu)}{\Gamma(8\mu)}\,\frac{2^{8\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\right]^{\frac{1}{8}}\cdots,$$

ou

$$P_{\mu} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(\mu)}{[\Gamma(2\mu)]^{\frac{1}{2}}}\,2^{\mu}\times\frac{\Gamma(2\mu)}{[\Gamma(4\mu)]^{\frac{1}{4}}}\,2^{\mu}\times\frac{\Gamma(4\mu)}{[\Gamma(8\mu)]^{\frac{1}{8}}}\,2^{\mu}\times\ldots.$$

---

[*] Par la formule de Stirling.

Le produit des p facteurs, qui suivent immédiatement $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$, est égal à

$$2^{p\mu}\frac{\Gamma(\mu)}{[\Gamma(2^p\mu)]^{\frac{1}{2^p}}}.$$

Conséquemment,

$$P_\mu = \frac{\Gamma(\mu)}{2\sqrt{\pi}}\lim\frac{2^{p\mu}}{[\Gamma(2^p\mu)]^{\frac{1}{2^p}}};$$

puis, par la formule (62),

$$e^\mu = \mu^\mu \lim\frac{2^{p\mu}}{[\Gamma(2^p\mu)]^{\frac{1}{2^p}}}.$$

En élevant les deux membres à la puissance $\frac{1}{\mu}$, on a donc

$$e = \lim\frac{2^p\mu}{[\Gamma(2^p\mu)]^{\frac{1}{2^p\mu}}}.$$

D'après la démonstration précédente, p est un nombre entier, et la fonction contenue dans le second membre est *discontinue*. Mais si nous prenons

$$y = \frac{x}{[\Gamma(x)]^{\frac{1}{x}}},$$

x étant une variable positive, la fonction *continue* y deviendra égale à la première fonction, toutes les fois que x prendra les valeurs 2μ, 4μ, 8μ,...; donc les deux fonctions tendent vers la même limite; et, en résumé,

$$(64) \qquad e = \lim\frac{x}{[\Gamma(x)]^{\frac{1}{x}}},$$

x croissant indéfiniment [*].

---

[*] Le même raisonnement est applicable à la fonction *discontinue* $Z = \frac{n}{[\Gamma(n+1)]^{\frac{1}{n}}}$: si l'on prend la fonction *continue*, auxiliaire, $z = \frac{x}{[\Gamma(x+1)]^{\frac{1}{x}}}$, les valeurs de z seront égales à celles de Z pour $x = n$. On peut donc abréger, d'une manière notable, la démonstration précédente. Néanmoins je l'ai conservée, à cause des transformations de $\Gamma(\mu)$.

Par exemple, le nombre e est la limite des quantités

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\pi}]^2},\quad \frac{\frac{3}{2}}{\left[\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right]^{\frac{2}{3}}},\quad \frac{\frac{5}{2}}{\left[\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\sqrt{\pi}\right]^{\frac{2}{5}}},\quad \frac{\frac{7}{2}}{\left[\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\sqrt{\pi}\right]^{\frac{2}{7}}},\dots.$$

XVIII.

Dans la formule (60), supposons que μ soit un nombre entier n. Nous aurons

$$\Gamma(n+1) = n^n e^{-n}\sqrt{\pi}$$
$$\times\left[\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2.4.6\ldots 4n}{1.3.5\ldots\overline{4n-1}}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right]^{\frac{1}{4}}\left[\frac{2.4.6\ldots 8n}{1.3.5\ldots\overline{8n-1}}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right]^{\frac{1}{8}}\dots,$$

ou, par le calcul effectué plusieurs fois,

$$(65)\quad \left\{\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n^n e^{-n}\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots\overline{2n-1}} \\ &\times\left[\frac{\overline{2n+2}\ldots 4n}{\overline{2n+1}\ldots\overline{4n-1}}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\overline{4n+2}\ldots 8n}{\overline{4n+1}\ldots\overline{8n-1}}\right]^{\frac{1}{4}}\dots\end{aligned}\right.$$

On tire de cette équation

$$(66)\quad e^n = \frac{(2n)^n}{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}\left[\frac{\overline{2n+2}\ldots 4n}{\overline{2n+1}\ldots\overline{4n-1}}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\overline{4n+2}\ldots 8n}{\overline{4n+1}\ldots\overline{8n-1}}\right]^{\frac{1}{4}}\dots$$

Ainsi *toute puissance entière et positive de e est développable en un produit indéfini*. En particulier,

$$(67)\,[*]\qquad e = \frac{2}{1}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{6.8}{5.7}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{10.12.14.16}{9.11.13.15}\right)^{\frac{1}{8}}\dots$$

---

[*] Cette formule, qui me paraît curieuse, ne diffère pas, au fond, de la première des égalités (56).

XIX.

Il est visible que

$$\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}\left[\frac{\overline{2n+2}\ldots 4n}{\overline{2n+1}\ldots\overline{4n-1}}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left[\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\frac{2n-2}{2n-1}\right]^{\frac{1}{2}}\sqrt{2n}\left[\frac{2n}{2n-1}\frac{2n+2}{2n-1}\cdots\frac{4n}{4n-1}\right]^{\frac{1}{2}};$$

donc la formule (65) équivaut à

$$\Gamma(n+1)=n^n e^{-n}\sqrt{2n}\left[\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\frac{2n-2}{2n-1}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\left[\frac{2n}{2n-1}\frac{2n+2}{2n+1}\cdots\frac{4n}{4n-1}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{4n+2}{4n+1}\cdots\frac{8n}{8n-1}\right]^{\frac{1}{4}}\cdots.$$

Mais, par la formule de Stirling,

$$\Gamma(n+1)=n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon_n),$$

ε_n devenant zéro pour n infini. La comparaison de ces deux valeurs de $\Gamma(n+1)$ donne

$$(68)\left\{\begin{aligned}1+\varepsilon_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}&\left[\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\frac{2n-2}{2n-1}\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\times\left[\frac{2n}{2n-1}\frac{2n+2}{2n+1}\cdots\frac{4n}{4n-1}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{4n+2}{4n+1}\cdots\frac{8n}{8n-1}\right]^{\frac{1}{2}}\cdots,\end{aligned}\right.$$

ou

$$(69)\left\{\begin{aligned}l(1+\varepsilon_n)=-\frac{1}{2}l(\pi)&+\frac{1}{2}l\left[\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\frac{2n-2}{2n-1}\right]\\ &+\frac{1}{2}l\left[\frac{2n}{2n-1}\frac{2n+2}{2n+1}\cdots\frac{4n}{4n-1}\right]\\ &+\frac{1}{4}l\left[\frac{4n+2}{4n+1}\cdots\frac{8n}{8n-1}\right]+\cdots,\end{aligned}\right.$$

et comme la formule de Stirling est

$$l(1.2.3\ldots n)=nl(n)-n+\frac{1}{2}l(2\pi n)+l(1+\varepsilon_n),$$

il s'ensuit que la série (69) représente la *fonction complémentaire* $l(1+\varepsilon_n)$, fonction dont le développement, en *série divergente*, est

$$\frac{B_1}{1.2n}+\frac{B_3}{3.4n^3}+\frac{B_5}{5.6n^5}+\ldots.$$

XX.

Au moyen de la formule de Wallis, on peut encore simplifier les relations (68), (69). En effet, suivant cette formule,

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\left[\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}\frac{2n+2}{2n+1}\cdots\right]^{\frac{1}{2}},$$

ou

$$\left[\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2n-1}{2n}\frac{2n+1}{2n}\frac{2n+1}{2n+2}\cdots\right]^{\frac{1}{2}};$$

donc, après une réduction évidente,

$$(70)\quad\left\{\begin{aligned}1+\varepsilon_n=\frac{1}{\sqrt{2}}&\left[\frac{2n+1}{2n}\frac{2n+1}{2n+2}\cdots\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2n+2}{2n+1}\cdots\frac{4n}{4n-1}\right]^{\frac{1}{2}}\\&\times\left[\frac{4n+2}{4n+1}\cdots\frac{8n}{8n-1}\right]^{\frac{1}{4}}\cdots,\end{aligned}\right.$$

et

$$(71)\quad\left\{\begin{aligned}l(1+\varepsilon_n)=-\frac{1}{2}l(2)+\frac{1}{2}l&\left[\frac{2n+1}{2n}\frac{2n+1}{2n+2}\cdots\right]\\&+\frac{1}{2}l\left[\frac{2n+2}{2n+1}\cdots\frac{4n}{4n-1}\right]+\frac{1}{4}l\left[\frac{4n+2}{4n+1}\cdots\frac{8n}{8n-1}\right]+\ldots.\end{aligned}\right.$$

XXI.

Il est facile de voir que chacun de ces produits fractionnaires, le premier excepté, a pour limite $\sqrt{2}$. Soit

$$Q_n=\frac{2n+2}{2n+1}\frac{2n+4}{2n+3}\cdots\frac{4n}{4n-1};$$

et, par conséquent,

$$lQ_n = l\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)+l\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)+\cdots+l\left(1+\frac{1}{4n-1}\right).$$

Le second membre est compris entre

$$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\cdots+\frac{1}{4n-1}=S_n$$

et

$$S_n-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+3)^2}+\cdots+\frac{1}{(4n-1)^2}\right];$$

ou, à plus forte raison, compris entre S_n et $S_n-\frac{1}{8n}$.

Or

$$S_n=\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{4n}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right];$$

donc [*]

$$\lim S_n = l(2)-\tfrac{1}{2}l(2)=\tfrac{1}{2}l(2);$$

puis

$$\lim l.Q_n=\tfrac{1}{2}l(2),$$

ou

$$\lim Q_n=\sqrt{2}.$$

Chacun des produits $Q_n, Q_{2n}, Q_{4n}, \ldots$ ayant pour limite $\sqrt{2}$, il résulte de l'égalité (70) que

$$\lim\left[\frac{2n+1}{2n}\,\frac{2n+1}{2n+2}\,\frac{2n+3}{2n+2}\,\frac{2n+3}{2n+4}\cdots\right]=1,$$

propriété assez visible *a priori*.

---

[*] *Note sur une formule de M. Botesu.*

XXII.

On a

$$Q_n = \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})\ldots(2n-\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(2n+1)\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(2n+\frac{1}{2})};$$

et, par conséquent,

$$(72) \qquad \lim \frac{\Gamma(2n+1)\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)\Gamma(2n+\frac{1}{2})} = \sqrt{2},$$

n étant un nombre entier, indéfiniment grand [*].

Le raisonnement dont nous avons fait usage ci-dessus (XVII) est encore applicable; donc, μ *étant une variable positive, indéfiniment croissante,*

$$(73) \qquad \lim \frac{\Gamma(2\mu+1)\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})} = \sqrt{2};$$

ou, ce qui est équivalent,

$$(74) \qquad \lim \frac{\int_0^1 \theta^{2\mu}(1-\theta)^{\mu-\frac{1}{2}}d\theta}{\int_0^1 \theta^{2\mu-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\mu}d\theta} = \sqrt{2};$$

ou encore, avec la notation de Binet,

$$(75) \qquad \lim \frac{B(2\mu+1, \mu+\frac{1}{2})}{B(2\mu+\frac{1}{2}, \mu+1)} = \sqrt{2}.$$

---

[*] Si l'on fait $T_n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}$, la fraction considérée est $\frac{T_{2n}}{T_n}$. Les valeurs du numérateur sont comprises parmi celles du dénominateur; donc il semblerait que l'on dût avoir $\lim \frac{T_{2n}}{T_n} = 1$. Mais cette conclusion serait erronée, parce que les fonctions T_n, T_{2n} deviennent infinies avec n.

Ainsi *le rapport des intégrales* $B(2\mu+1, \mu+\frac{1}{2})$, $B(2\mu+\frac{1}{2}, \mu+1)$, *qui tendent vers zéro, tend lui-même vers* $\sqrt{2}$.

XX.

De

$$Q_n = \frac{2n+2}{2n+1}\,\frac{2n+4}{2n+3}\cdots\frac{4n}{4n-1},$$

on tire

$$\frac{Q_n}{Q_{n-1}} = \frac{(4n-2)4n}{(4n-3)(4n-1)} : \frac{2n}{2n-1},$$

ou

$$Q_n = Q_{n-1}\,\frac{4n-2}{4n-3}\,\frac{4n-2}{4n-1}.$$

Et comme

$$Q_1 = \frac{4}{3} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3},$$

il s'ensuit que

$$\sqrt{2} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\,\frac{10}{9}\,\frac{10}{11}\,\frac{14}{13}\,\frac{14}{15}\cdots \tag{76}$$

Si de cette relation (probablement connue), on rapproche la formule de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\,\frac{8}{7}\,\frac{8}{9}\,\frac{10}{9}\,\frac{10}{11}\cdots,$$

on trouve

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{8}{7}\,\frac{8}{9}\,\frac{12}{11}\,\frac{12}{13}\,\frac{16}{15}\,\frac{16}{17}\cdots \quad [*]. \tag{77}$$

---

[*] On sait qu'Euler a donné un grand nombre de résultats analogues aux précédents.

XXI.

Reprenons l'équation

$$(46) \qquad l\Gamma(\mu) = \left(\mu - \frac{1}{2}\right) l(\mu) - \mu + \frac{1}{2} l(2\pi) + \varpi(\mu)$$

et comparons-la avec l'égalité (62), écrite sous la forme

$$(78) \quad \begin{cases} l\Gamma(\mu) = \mu l(\mu) - \mu + l(2) \\ \qquad + \frac{1}{2} l(\pi) + \frac{1}{2} l\left[\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right] + \frac{1}{4} l\left[\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})}\right] + \ldots \end{cases}$$

Il en résulte, par la soustraction,

$$(79) \quad \varpi(\mu) = \frac{1}{2} l(2\mu) + \frac{1}{2} l\left[\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right] + \frac{1}{4} l\left[\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})}\right] + \frac{1}{8} l\left[\frac{\Gamma(4\mu)}{\Gamma(4\mu+\frac{1}{2})}\right] + \ldots$$

Ce développement de la fonction de Binet serait peu propre au calcul numérique; mais l'on en conclut

$$(80) \qquad \varpi(\mu) - \frac{1}{2}\varpi(2\mu) = \frac{1}{4} l(\mu) + \frac{1}{2} l\left[\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right],$$

relation qui donne $\varpi(2\mu)$ si $\varpi(\mu)$ est connue, et réciproquement.

La même combinaison, appliquée à la formule (55), conduit à celle-ci :

$$(81) \quad \varpi(\mu) - \frac{1}{2}\varpi(2\mu) = -\frac{1}{4} l(\mu\pi) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\,l(x)}(1 - x^{2\mu});$$

donc

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\,l(x)}(1 - x^{2\mu}) = -\frac{1}{2} l(\mu^2\pi) - l\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})} = l\frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\mu+1)};$$

ce qui est exact (XVI).

XXII.

A cause de

$$(19) \qquad C_\mu = -\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu},$$

la relation

$$(62) \quad \Gamma(\mu) = 2\sqrt{\pi}\mu^\mu e^{-\mu}\left[\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{4}}\left[\frac{\Gamma(4\mu)}{\Gamma(4\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{8}}\cdots$$

équivaut à

$$2C_\mu = -2l(\mu) + [C_\mu - C_{\mu+\frac{1}{2}}] + [C_{2\mu} - C_{2\mu+\frac{1}{2}}] + [C_{4\mu} - C_{4\mu+\frac{1}{2}}] + \ldots.$$

On conclut de celle-ci

$$2C_{2\mu} = -2l(2\mu) + [C_{2\mu} - C_{2\mu+\frac{1}{2}}] + [C_{4\mu} - C_{4\mu+\frac{1}{2}}] + \ldots;$$

puis

$$(38) \qquad C_\mu + C_{\mu+\frac{1}{2}} - 2C_{2\mu} = 2l(2),$$

comme précédemment.

XXIII.

En partant de la *définition*

$$(13) \quad C_\mu = \lim\left[\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu+1} + \ldots + \frac{1}{\mu+n-1} - l(\mu+n-1)\right],$$

jointe à cette relation (**38**), on peut trouver de nouvelles séries, *en nombre infini,* ayant pour limite $l(2)$. Posons, pour abréger,

$$u_n = \frac{1}{\mu+n-1} + \frac{1}{\mu+n-\frac{1}{2}} - \frac{2}{2\mu+n-1};$$

alors

$$\lim \left[\sum_1^n u_n + l \frac{(2\mu + n - 1)^2}{(\mu + n - 1)(\mu + n - \frac{1}{2})} \right] = 2l(2),$$

ou

$$\sum_1^\infty u_n + \lim \left[\frac{(\mu + n - 1)^2}{(\mu + n - 1)(\mu + n - \frac{1}{2})} \right] = 2l(2).$$

Mais, quand n augmente indéfiniment, la fraction $\frac{(2\mu + n - 1)^2}{(\mu + n - 1)(\mu + n - \frac{1}{2})}$ tend vers l'unité; donc enfin

$$(82) \quad \frac{1}{2} \sum_1^\infty \left[\frac{1}{\mu + n - 1} - \frac{1}{\mu + n - \frac{1}{2}} - \frac{2}{2\mu + n - 1} \right] = l(2).$$

Par exemple,

$$(83) \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \ldots = l(2).$$

NOTE.

L'un des derniers numéros du *Journal* de Schlömilch cite, comme *nouveauté*, une Note de M. *Unferdinger*, relative à la limite de $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$, pour $n = \infty$. Cette Note a paru dans les *Bulletins de l'Académie de Vienne* (*Sitzungsberichte der Mathematisch*), année 1867! Pour trouver la limite dont il s'agit, l'auteur emploie les *sommes des puissances négatives des nombres naturels*, *les Nombres de Bernoulli*, la *constante d'Euler*, etc. Si M. Unferdinger avait consulté les *Nouvelles Annales*, il aurait pu y lire, dès 1858, diverses solutions élémentaires de la *Question* 458 [*].

Toutes ces solutions, beaucoup plus simples que celle de l'hono-

---

[*] $\lim \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \right) = l(2)$. (*Nouvelles Annales*, t. XVII, p. 434; t. XVIII, p. 195.)

rable Géomètre autrichien, sont encore *trop compliquées*. En effet, la proposition énoncée est une conséquence immédiate des relations

$$\text{(A)} \qquad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = l(2),$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2n}.$$

Il est vrai que, les procédés simples étant presque toujours ceux qui se présentent en dernier, c'est seulement vers 1872 que j'ai rencontré, par hasard, *l'identité* (B). [*Note sur une formule de M. Botesu.* (*Bulletins de l'Académie de Belgique.*)]