JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE MATHIEU

Mémoire sur des formules de perturbation

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 1 (1875), p. 183-208.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1875_3_1__183_0>

Mémoire sur des formules de perturbation;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

Poisson, après avoir donné ses formules générales de perturbation dans le XV^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, les applique au mouvement d'un corps solide qui tourne autour d'un point fixe et sur lequel n'agissent que des forces perturbatrices; il trouve ainsi, page 336, des formules toutes semblables à celles qui sont relatives à la perturbation du mouvement d'une planète ou plus généralement du mouvement d'un point attiré par un centre fixe. Dans ces formules, les constantes relatives au plan de l'orbite sont remplacées par celles qui déterminent la position du plan dit *invariable*, qui est fixe quand le corps n'est sollicité par aucune force, mais qui se déplace par suite de la perturbation.

La parfaite analogie de deux systèmes de formules provenant de questions si différentes a attiré l'attention de Jacobi (tome III de ses Œuvres, p. 279). Après avoir embrassé, par une même analyse, les deux problèmes précédents, pour montrer qu'ils sont réductibles aux quadratures, il montre que les six constantes arbitraires, devenues variables par les perturbations, satisfont à six équations canoniques. Il développe ensuite seulement les calculs indiqués, pour le point attiré par un centre fixe, et trouve la signification des deux constantes conjuguées, l'une à l'axe du plan invariable et l'autre à la projection de cet axe sur une perpendiculaire à un plan fixe pris pour plan des x, y; mais, si l'on applique ces mêmes calculs au mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, on est conduit à des opérations beaucoup plus compliquées que ne le nécessite la question en elle-même, et il paraît difficile, en suivant cette marche, de déterminer la signification de ces deux constantes. D'ailleurs même la démonstration obtenue ainsi cessant d'être la même que pour le premier problème, il n'y aurait plus de raison de la préférer à celle qui a été donnée par Poisson.

D'après cela, il m'a semblé utile, pour la philosophie de la science, de chercher à démontrer entièrement, par la même analyse, les deux systèmes de formules de perturbation, et, en cherchant à reconnaître quels sont les liens communs aux deux questions, je suis arrivé à un théorème général qui renferme la démonstration de ces deux systèmes de formules.

Imaginons un système de points matériels pour lequel aient lieu le principe des forces vives et les trois intégrales des aires. Quoique la position relative des points du système varie, on peut se représenter à chaque instant ce système et les trois axes principaux d'inertie qui y sont relatifs et qui passent par l'origine des coordonnées. Désignons sous le nom d'*équateur* le plan qui passera par deux de ces axes principaux, et considérons la trace A de l'équateur sur le plan invariable; désignons par σ l'angle de cette trace A avec une droite fixe menée par l'origine dans le plan invariable; l'origine de l'angle σ étant arbitraire, on peut regarder σ comme s'ajoutant à une constante arbitraire $-g$.

Appelons *ligne des nœuds* la trace du plan invariable sur le plan fixe des x, y. Désignons par α la longitude du nœud comptée à partir d'une droite fixe tracée par l'origne des coordonnées dans le plan des x, y, par h la constante des forces vives, par k l'axe du plan invariable, par β la projection de cet axe sur l'axe des z, et par τ la constante qui s'ajoute au temps t.

Convenons maintenant de compter l'angle σ à partir de la ligne des nœuds, alors g désignera aussi la distance angulaire d'un point fixe du plan invariable à cette ligne de nœuds.

Enfin supposons que les équations différentielles du problème soient intégrées et que l'on veuille rechercher comment les équations du mouvement doivent être modifiées, quand, aux forces que l'on a examinées, il s'ajoute des forces perturbatrices; exprimons la fonction perturbatrice Ω au moyen de t et des constantes arbitraires parmi lesquelles se trouvent h, β, k, τ, α, g. Alors toutes les constantes deviendront variables par suite de la perturbation, et les valeurs variables des six quantités précédentes satisferont aux six équations canoniques suivantes :

$$(a)\qquad \begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{d\Omega}{d\tau}, & \dfrac{d\tau}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{dh};\\[2mm] \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{d\Omega}{d\beta}, & \dfrac{d\beta}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{d\alpha};\\[2mm] \dfrac{dk}{dt} = \dfrac{d\Omega}{dg}, & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{dk}. \end{cases}$$

Ces équations canoniques ne permettent pas de déterminer, en général, les six quantités $h, \tau, \ldots$, parce que Ω renferme, outre ces quantités, encore d'autres éléments. Mais ces six quantités sont entièrement déterminées par ces équations dans les deux problèmes dont nous avons déjà parlé. Dans le cas d'un corps attiré par un centre fixe, le plan invariable devient celui de l'orbite, et l'on peut prendre pour g la distance du périhélie au nœud ascendant; on a ainsi des formules qui se transforment immédiatement en celles que les astronomes emploient. Dans le cas d'un corps solide qui tourne autour d'un point fixe, sollicité seulement par des forces perturbatrices, on a des formules qui reviennent à celles de Poisson, citées ci-dessus. Enfin, dans le cas le plus général, si les six éléments $h, \tau, \ldots$ varient très-peu, on pourra les calculer avec une grande approximation, pendant un temps assez considérable, à l'aide de quadratures déduites de ces formules. Supposons, par exemple, qu'un corps, en s'approchant de notre système planétaire, vienne à le troubler, les formules (a) permettront de calculer le déplacement du plan invariable.

Rappel de quelques principes.

1. Désignons par $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les variables qui déterminent la position d'un système de points matériels; posons

$$\frac{dq_1}{dt} = q'_1, \quad \frac{dq_2}{dt} = q'_2, \ldots,$$

et exprimons la demi-force vive T du système au moyen de $q_1, q_2, \ldots, q_n$

et de leurs dérivées par rapport au temps t; puis posons

$$\frac{dT}{dq'_1} = p_1, \quad \frac{dT}{dq'_2} = p_2, \ldots, \quad \frac{dT}{dq'_n} = p_n;$$

enfin désignons par U la fonction de forces, et posons $T - U = H$.

Si u, v sont deux fonctions quelconques des variables q_i, p_i, on représente d'ordinaire par le symbole $[u, v]$ l'expression

$$\begin{gathered}\frac{du}{dq_1}\frac{dv}{dp_1} + \frac{du}{dq_2}\frac{dv}{dp_2} + \ldots + \frac{du}{dq_n}\frac{dv}{dp_n} \\ - \frac{du}{dp_1}\frac{dv}{dq_1} - \frac{du}{dp_2}\frac{dv}{dq_2} - \ldots - \frac{du}{dp_n}\frac{dv}{dq_n}.\end{gathered}$$

S'il n'existe aucune relation entre les n variables q_i, et qu'on les remplace par n autres variables également propres à déterminer la position du système, l'expression $[u, v]$ ne change pas de valeur.

Supposons ensuite qu'il existe entre les n variables q_i les r équations de condition

$$(1) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_r = 0,$$

qui expriment des liaisons entre les points du système, et posons

$$f_{r+1} = [f_1, H], \quad f_{r+2} = [f_2, H], \ldots, \quad f_{2r} = [f_r, H];$$

les variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$ peuvent s'exprimer au moyen de $n - r$ variables seulement $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-r}$, et T peut s'exprimer au moyen de ces mêmes variables et de leurs dérivées $Q'_1, Q'_2, \ldots$. Posons, en général,

$$\frac{dT}{dQ'_i} = P_i.$$

Les fonctions u, v peuvent s'exprimer au moyen des variables Q_i, P_i, et l'on peut former l'expression, analogue à $[u, v]$,

$$\sum_{i=0}^{i=n-r} \left(\frac{du}{dQ_i}\frac{dv}{dP_i} - \frac{du}{dP_i}\frac{dv}{dQ_i}\right),$$

que nous représenterons par $[u, v]'$. Alors on a

$$(2) \qquad [u, v]' = [u, v + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_{2r} f_{2r}],$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots$ étant donnés par les $2r$ équations renfermées dans celle-ci :

$$(3) \qquad [f_1, f_i]\mu_1 + [f_2, f_i]\mu_2 + \ldots + [f_{2r}, f_i]\mu_{2r} = [f_i, v],$$

où l'on doit donner à i les valeurs $1, 2, \ldots, 2r$. (*Voir* mon *Mémoire sur les équations différentielles canoniques de la Mécanique*, n° **20**, tome précédent de ce Journal, p. 304.)

2. Dans tout ce qui suivra, nous imaginerons un système de points matériels, pour lequel aient lieu le principe des forces vives et les trois intégrales des aires. Ces quatre intégrales ont lieu pour un système de points libres qui s'attirent ou se repoussent mutuellement; mais elles ont lieu plus généralement pour un système de points, soumis à une fonction de forces qui ne change pas par le mouvement des axes de coordonnées autour de l'origine et assujettis à des liaisons, pourvu que les équations qui les représentent subsistent par le même mouvement des axes de coordonnées. Les liaisons satisferont effectivement à cette condition, quand les points seront liés entre eux et à l'origine, mais ne seront liés à rien qui soit situé en dehors de l'origine ou du système de points; c'est ce qui a lieu en particulier pour un corps solide, qui ne peut que tourner autour de l'origine.

S'il s'agit d'appliquer ces quatre intégrales au système planétaire, il faudra prendre pour l'origine des coordonnées le centre de gravité du système, lequel a un mouvement rectiligne et uniforme.

Désignons par x_i, y_i, z_i généralement les coordonnées rectangulaires d'un point, dont la masse est m_i, et par x'_i, y'_i, z'_i leurs dérivées par rapport à t; nous aurons pour les trois équations des aires

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \Sigma m_i(y_i z'_i - z_i y'_i) = \text{const.},\\
\varphi_2 &= \Sigma m_i(z_i x'_i - x_i z'_i) = \text{const.},\\
\varphi_3 &= \Sigma m_i(x_i y'_i - y_i x'_i) = \text{const.}
\end{aligned}$$

Si l'on forme les trois expressions

$$[\varphi_2, \varphi_3], \quad [\varphi_3, \varphi_1], \quad [\varphi_1, \varphi_2],$$

en prenant pour les quantités q_s les variables x_i, y_i, z_i, et par suite, pour les quantités p_s les expressions $m_i x'_i$, $m_i y'_i$, $m_i z'_i$, on trouve facilement

$$[\varphi_2, \varphi_3] = \varphi_1, \quad [\varphi_3, \varphi_1] = \varphi_2, \quad [\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_3.$$

Imaginons ensuite qu'on exprime les fonctions φ_1, φ_2, φ_3 au moyen des $2(n-r)$ variables Q_i, P_i, entre lesquelles n'existent pas d'équations de condition, et examinons les trois expressions

$$[\varphi_2, \varphi_3]', \quad [\varphi_3, \varphi_1]', \quad [\varphi_1, \varphi_2]'.$$

Désignons par ψ une fonction quelconque des variables q_i, p_i; en appliquant la formule (2), nous aurons

$$(4) \qquad [\psi, \varphi_3]' = [\psi, \varphi_3 + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_{2r} f_{2r}],$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2r}$ étant donnés par les $2r$ équations renfermées dans celle-ci :

$$(5) \qquad [f_1, f_s]\mu_1 + [f_2, f_s]\mu_2 + \ldots + [f_{2r}, f_s]\mu_{2r} = [f_s, \varphi_3],$$

où s est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, 2r$.

Si s n'est pas plus grand que r, la fonction f_s désigne le premier membre d'une des équations (1); elle ne dépend que des variables q_i ou x_i, y_i, z_i, et l'on trouve facilement

$$[f_s, \varphi_3] = \sum_i \left(x_i \frac{df_s}{dy_i} - y_i \frac{df_s}{dx_i} \right).$$

Or, par hypothèse, l'équation $f_s = 0$ ne doit pas changer par le mouvement de rotation du système de coordonnées autour de l'axe des z, et il en résulte

$$\sum \left(x_i \frac{df_s}{dy_i} - y_i \frac{df_s}{dx_i} \right) = 0;$$

on a donc, si s n'est pas plus grand que r,

$$(6) \qquad [f_s, \varphi_3] = 0.$$

Je dis ensuite que cette équation a également lieu si s est $> r$. En effet, on a l'identité bien connue et facile à vérifier

$$[[H, f_s], \varphi_3] + [[\varphi_3, H], f_s] + [[f_s, \varphi_3], H] = 0.$$

Si s est supposé n'être pas plus grand que r, on a l'équation (6); et puisque $\varphi_3 =$ const. est une intégrale du problème, on a $[H, \varphi_3] = 0$; donc le deuxième et le troisième terme de l'identité sont nuls et elle devient

$$[f_{r+s}, \varphi_3] = 0.$$

On a donc enfin l'équation (6) pour $s = 1, 2, \ldots, 2r$.

Il résulte de là que les seconds membres des équations (5) sont nuls; donc on satisfera à ces équations en prenant $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2r}$ tous égaux à zéro, et l'équation (4) se réduit à

$$[\psi, \varphi_3]' = [\psi, \varphi_3];$$

en particulier, en faisant $\psi = \varphi_2$, on aura la première des trois formules

$$[\varphi_2, \varphi_3]' = [\varphi_2, \varphi_3], \quad [\varphi_3, \varphi_1]' = [\varphi_3, \varphi_1], \quad [\varphi_1, \varphi_2]' = [\varphi_1, \varphi_2],$$

et les deux autres s'en déduisent par analogie. On a donc aussi les formules suivantes :

$$[\varphi_2, \varphi_3]' = \varphi_1, \quad [\varphi_3, \varphi_1]' = \varphi_2, \quad [\varphi_1, \varphi_2]' = \varphi_3,$$

données par Jacobi (*Nova methodus*, etc., § 51, tome III de ses Œuvres, p. 234).

Analogie entre deux problèmes.

3. Le problème du mouvement d'un point attiré par un centre fixe et celui du mouvement, autour d'un point fixe, d'un corps solide qui

n'est sollicité par aucune force, ont été traités par Jacobi, à l'aide d'une même analyse que je vais rappeler (*Nova methodus*, § 66).

Dans ces deux problèmes on a le principe des forces vives et les trois intégrales des aires; car les liaisons dans le second problème satisfont à la condition expliquée au commencement du n° 2. De plus, les deux problèmes ne dépendent que de trois coordonnées q_1, q_2, q_3.

Soit

$$H = T - U = h$$

l'équation des forces vives, h désignant une constante, et soient, comme ci-dessus,

$$\varphi_1 = \text{const.}, \quad \varphi_2 = \text{const.}, \quad \varphi = \text{const.}$$

les trois équations des aires. D'après la fin du numéro précédent, on a, par rapport aux trois variables q_1, q_2, q_3, et leurs conjuguées p_1, p_2, p_3, les trois équations

$$(1) \qquad [\varphi_2, \varphi] = \varphi_1 \quad [\varphi, \varphi_1] = \varphi_2, \quad [\varphi_1, \varphi_2] = \varphi.$$

Posons

$$L = \sqrt{\varphi^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2},$$

nous aurons les trois équations

$$[H, \varphi] = 0, \quad [H, L] = 0, \quad [\varphi, L] = 0,$$

les deux premières ayant lieu parce que

$$\varphi = \text{const.}, \quad L = \text{const.}$$

sont deux intégrales, et la troisième se déduisant des équations (1). Posons les trois équations

$$(2) \qquad H = h, \quad \varphi = a, \quad L = k,$$

h, a, k étant des constantes arbitraires. Par l'origine nous mènerons une normale au plan invariable, et nous porterons, à partir de ce point, sur cette droite une longueur égale à k, que nous appellerons l'*axe du plan invariable;* alors a désignera la projection de l'axe du plan invariable sur l'axe des z.

D'après un théorème connu, si l'on tire p_1, p_2, p_3 des trois équations (2) et qu'on pose

$$V = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + p_3 dq_3),$$

les trois intégrales finies sont

$$(3) \qquad \frac{dV}{dh} = t + \tau, \quad \frac{dV}{da} = b, \quad \frac{dV}{dk} = l,$$

τ, b, l désignant trois nouvelles constantes. Supposons ensuite qu'on introduise des forces perturbatrices et que la fonction perturbatrice soit désignée par Ω; les six constantes précédentes deviendront variables, et, d'après un théorème connu, on déduit des équations (3) que ces six quantités, devenues variables, sont données par les équations suivantes :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d\Omega}{d\tau}, \quad \frac{da}{dt} = \frac{d\Omega}{db}, \quad \frac{dk}{dt} = \frac{d\Omega}{dl};$$
$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{d\Omega}{dh}, \quad \frac{db}{dt} = -\frac{d\Omega}{da}, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{d\Omega}{dk}.$$

Jacobi montre ensuite que, dans le problème du mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, $-b$ représente la longitude du nœud ascendant de l'orbite sur un plan fixe (qui est supposé le plan des x, y), et que l représente la distance angulaire du périhélie à ce nœud; mais pour le second problème, où le calcul de la fonction V devient plus compliqué, il ne détermine pas la signification géométrique de ces deux constantes. Je vais m'occuper de la détermination de ces deux constantes dans ces deux problèmes, en employant la même analyse et en résolvant un problème plus général.

Formule qui donne la trace de l'équateur, d'un système de points en mouvement, sur le plan invariable.

4. Considérons le système de points défini au n° **2**, et qui comprend un système de points entièrement libre. Représentons-nous à chaque instant ce système et les trois axes principaux qui y sont relatifs et qui passent par le point O, origine des coordonnées; enfin désignons sous le nom d'*équateur* un plan mené par deux des trois axes principaux.

Pour le système en question, nous avons le principe des forces vives et les trois intégrales des aires; par conséquent il existe un plan invariable, c'est-à-dire un plan du maximum des aires qui est fixe.

Outre le système fixe de coordonnées rectangulaires des x, y, z, qui passe par le point O, imaginons un second système rectangulaire des x', y', z', les axes des x', y' étant menés suivant les deux axes principaux situés dans le plan de l'équateur, et l'axe des z' étant mené suivant le troisième axe principal.

Désignons généralement par m la masse du point dont les coordonnées sont x, y, z dans le premier système et x', y', z' dans le second; nous aurons, d'après les propriétés des axes principaux, les trois équations où le signe sommatoire Σ se rapporte à toutes les masses m

$$\Sigma m x' y' = 0, \quad \Sigma m y' z' = 0, \quad \Sigma m z' x' = 0,$$

et l'on passe du premier système de coordonnées au second par les formules

$$\begin{aligned} x &= a x' + b y' + c z', \\ y &= a' x' + b' y' + c' z', \\ z &= a'' x' + b'' y' + c'' z', \end{aligned}$$

a, b, c,... étant les cosinus des angles des axes des x, y, z avec ceux des x', y', z'. Désignons : 1° par σ l'angle compris entre l'axe des x et la trace du plan des x', y' sur le plan des x, y; 2° par φ l'angle de cette trace avec l'axe des x'; 3° par θ l'inclinaison du plan des x', y' sur le plan des x, y, on aura les formules connues

$$\begin{aligned} a &= -\cos\theta \sin\sigma \sin\varphi + \cos\sigma \cos\varphi, \\ b &= -\cos\theta \sin\sigma \cos\varphi - \cos\sigma \sin\varphi, \\ c &= \quad \sin\theta \sin\sigma; \\ a' &= \quad \cos\theta \cos\sigma \sin\varphi + \sin\sigma \cos\varphi, \\ b' &= \quad \cos\theta \cos\sigma \cos\varphi - \sin\sigma \sin\varphi, \\ c' &= -\sin\theta \cos\sigma; \end{aligned}$$

$$a'' = \sin\theta \sin\varphi, \quad b'' = \sin\theta \cos\varphi, \quad c'' = \cos\theta.$$

Si ensuite nous posons

$$\begin{aligned} c\,db + c'\,db' + c''\,db'' &= p\,dt,\\ a\,dc + a'\,dc' + a''\,dc'' &= q\,dt,\\ b\,da + b'\,da' + b''\,da'' &= r\,dt, \end{aligned}$$

nous déduirons des valeurs de a, b, c,... les trois équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} p\,dt &= \sin\varphi \sin\theta\, d\sigma + \cos\varphi\, d\theta,\\ q\,dt &= \cos\varphi \sin\theta\, d\sigma - \sin\varphi\, d\theta,\\ r\,dt &= d\varphi + \cos\theta\, d\sigma; \end{aligned}\right.$$

$p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$ représentent les rotations instantanées que doit subir le système des axes des x', y', z' autour de chacun de ces trois axes, pour qu'il vienne à la position infiniment voisine qu'il doit en effet occuper au bout de l'instant dt.

Désignons par u, v, w les vitesses relatives du point (x, y, z) par rapport aux axes principaux, en sorte que l'on ait

$$\begin{aligned} u &= a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt},\\ v &= b\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + b''\frac{dz}{dt},\\ w &= c\frac{dx}{dt} + c'\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt}. \end{aligned}$$

Prenons maintenant pour plan des x, y le plan invariable; alors, en projetant l'axe k du plan invariable, qui est dirigé suivant l'axe des z, sur les axes des x', y', z', on aura facilement

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \Sigma m(y'w - z'v) &= k \sin\theta \sin\varphi,\\ \Sigma m(z'u - x'w) &= k \sin\theta \cos\varphi,\\ \Sigma m(x'v - y'u) &= k \cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Des équations (1) on déduit

$$(3)\qquad \sin^2\theta\, d\sigma = \sin\varphi \sin\theta\, p\,dt + \cos\varphi \sin\theta\, q\,dt,$$

et de la troisième équation (2)

$$\sin^2\theta = \frac{1}{k^2}\left(k^2 - \left(\Sigma m(x'v - y'u)\right)^2\right).$$

La quantité $(x'v - y'u)dt$ représente l'aire infiniment petite, décrite par la projection de la masse m dans le plan de l'équateur pendant l'instant dt; posons

$$\Sigma m(x'v - y'u) = \mathcal{A},$$

$\mathcal{A}$ représente deux fois la somme des masses multipliées par la vitesse aréolaire de leurs projections, et l'on déduit de l'équation (3) la formule

$$(4) \qquad d\sigma = \frac{pk\sin\varphi\sin\theta + qk\cos\varphi\sin\theta}{k^2 - \mathcal{A}^2}k\,dt,$$

qui donne le mouvement de la trace de l'équateur sur le plan invariable.

Nous allons donner une autre forme au numérateur de la formule (4). Nous avons les trois équations

$$\Sigma my'z' = 0, \quad \Sigma mz'x' = 0, \quad \Sigma mx'y' = 0;$$

au bout de l'instant dt, les axes des x', y', z' ont changé de position, mais ils sont restés des axes principaux; on a donc, en différentiant les trois équations précédentes,

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum my'\frac{dz'}{dt} + \sum mz'\frac{dy'}{dt} = 0, \quad \sum mz'\frac{dx'}{dt} + \sum mx'\frac{dz'}{dt} = 0, \\ &\qquad\qquad \sum mx'\frac{dy'}{dt} + \sum my'\frac{dx'}{dt} = 0. \end{aligned} \right.$$

En différentiant les expressions de x, y, z, on a

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x'\frac{da}{dt} + y'\frac{db}{dt} + z'\frac{dc}{dt} + a\frac{dx'}{dt} + b\frac{dy'}{dt} + c\frac{dz'}{dt}, \\
\frac{dy}{dt} &= x'\frac{da'}{dt} + y'\frac{db'}{dt} + z'\frac{dc'}{dt} + a'\frac{dx'}{dt} + b'\frac{dy'}{dt} + c'\frac{dz'}{dt}, \\
\frac{dz}{dt} &= x'\frac{da''}{dt} + y'\frac{db''}{dt} + z'\frac{dc''}{dt} + a''\frac{dx'}{dt} + b''\frac{dy'}{dt} + c''\frac{dz'}{dt};
\end{aligned}$$

et en se reportant aux expressions des composantes u, v, w de la vitesse, suivant les axes des x', y', z'

$$u = qz' - ry' + \frac{dx'}{dt},$$

$$v = rx' - pz' + \frac{dy'}{dt},$$

$$w = py' - qx' + \frac{dz'}{dt}.$$

On aura donc

$$\begin{aligned}\sum m(y'w - z'v) &= \sum m\left(py'^2 - qx'y' + y'\frac{dz'}{dt} - rx'z' + pz'^2 - z'\frac{dy'}{dt}\right)\\ &= p\sum m(z'^2 + y'^2) + \sum m\left(y'\frac{dz'}{dt} - z'\frac{dy'}{dt}\right);\end{aligned}$$

on a de même

$$\sum m(z'u - x'w) = q\sum m(x'^2 + z'^2) + \sum m\left(z'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dz'}{dt}\right).$$

On déduit des formules (2)

$$k\sin\theta\sin\varphi = \mathrm{A}p + \sum m\left(y'\frac{dz'}{dt} - z'\frac{dy'}{dt}\right),$$

$$k\sin\theta\cos\varphi = \mathrm{B}q + \sum m\left(z'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dz'}{dt}\right),$$

en posant

$$\Sigma m(z'^2 + y'^2) = \mathrm{A},\quad \Sigma m(x'^2 + z'^2) = \mathrm{B}.$$

En substituant ces expressions dans la formule (4) et en ayant égard aux équations (5), on a la formule

$$(6)\qquad d\sigma = \frac{\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + 2\sum m(py' - qx')\frac{dz'}{dt}}{k^2 - \mathcal{A}^2}\,kdt,$$

qui détermine le mouvement de la ligne des nœuds du plan de l'équateur sur le plan invariable.

Sur des relations qui existent entre six éléments des intégrales.

5. On comprend facilement que l'on puisse déterminer, d'abord en fonction de t, toutes les quantités renfermées dans le second membre de l'équation (6); donc, en désignant par g une constante arbitraire, on pourra poser que $\sigma - g$ est égal à l'intégrale du second membre. Au reste, il n'est pas indispensable de connaître la formule (6) pour se représenter la constante g. En effet, en prenant σ pour une des inconnues du problème, nous devrons dans les intégrales trouver σ ajouté à une constante $-g$; car, de même que t est ajouté à une constante τ dans ces intégrales, parce que les formules du mouvement ne doivent pas dépendre de l'origine prise pour t, de même, l'origine de l'angle σ étant arbitraire, σ doit s'ajouter à une constante arbitraire.

Désignons par γ l'inclinaison du plan invariable sur un plan fixe, qu'on peut prendre pour plan des x, y d'un système d'axes rectangulaires, dont l'origine est toujours au point O. Désignons par $\frac{1}{2}\beta$, $\frac{1}{2}\beta_1$, $\frac{1}{2}\beta_2$ la somme des masses multipliées par les projections des aires qu'elles décrivent dans l'unité de temps, respectivement sur le plan des x, y, des y, z, des z, x. Soit α la longitude du nœud du plan invariable sur le plan fixe des x, y; enfin désignons, comme ci-dessus, par h la constante de l'équation des forces vives, par τ la constante qui s'ajoute au temps t et par k la grandeur de l'axe du plan invariable.

Nous allons examiner des relations existant entre h, β, k, τ, α, g.

1° L'équation $L = k$ du n° 3 étant une intégrale qui ne renferme pas t, on a, comme on sait, $[H, L] = 0$, ce qui peut s'écrire

$$[h, k] = 0,$$

en imaginant h, k remplacés par les fonctions des variables q_i, p_i qui leur sont égales.

2° De même on a, puisque $\varphi = \beta$ est une intégrale,

$$[h, \beta] = 0;$$

on a pour la même raison les deux autres intégrales

$$[h, \beta_1] = 0, \quad [h, \beta_2] = 0.$$

3° La longitude α du nœud du plan invariable est constante; donc, si l'on suppose α exprimé au moyen des variables q_i, p_i, l'équation

$$\alpha = \text{const.}$$

est une intégrale; par suite on a

$$[h, \alpha] = 0.$$

On le voit encore comme il suit. Menons l'axe des x suivant l'origine des longitudes et l'axe des y suivant la longitude $\frac{\pi}{2}$; nous aurons, en projetant l'axe du plan invariable sur les axes des x et des y,

$$\beta_1 = k \sin\gamma \sin\alpha, \quad \beta_2 = -k \sin\gamma \cos\alpha,$$

et par suite

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{\beta_1}{\beta_2}, \quad d\alpha = \frac{\beta_1 d\beta_2 - \beta_2 d\beta_1}{\beta_1^2 + \beta_2^2},$$

$$[h, \alpha] = \frac{\beta_1}{\beta_1^2 + \beta_2^2}[h, \beta_2] - \frac{\beta_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2}[h, \beta_1] = 0.$$

4° Prouvons que l'on a

$$[\beta, -\alpha] = 1.$$

En effet on a

$$[\beta, \alpha] = \frac{\beta_1}{\beta_1^2 + \beta_2^2}[\beta, \beta_2] - \frac{\beta_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2}[\beta, \beta_1].$$

Or on a, d'après la fin du n° **2**,

$$[\beta, \beta_2] = -\beta_1, \quad [\beta, \beta_1] = \beta_2;$$

on a donc

$$[\beta, \alpha] = -1.$$

5° L'équation $[\varphi, L] = 0$, trouvée au n° **3**, peut s'écrire

$$[\beta, k] = 0.$$

6° On a

$$[k, \alpha] = \frac{1}{\beta_1^2 + \beta_2^2}(\beta_1[k, \beta_2] - \beta_2[k, \beta_1]);$$

or, de même qu'on a $[k, \beta] = 0$, on a aussi $[k, \beta_1] = 0$, $[k, \beta_2] = 0$; donc

$$[k, \alpha] = 0.$$

7° Je dis que l'on a

$$[h, \tau] = 1, \quad [\tau, \beta] = 0, \quad [\tau, k] = 0, \quad [\tau, \alpha] = 0.$$

En effet, en général, pour un problème quelconque de Dynamique, dans lequel ont lieu les trois intégrales des aires et l'intégrale des forces vives, on peut imaginer un système de n intégrales du premier ordre, résolues par rapport aux constantes arbitraires $h, h_1, \ldots, h_{n-1}$,

$$(1) \qquad H = h, \quad H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2, \ldots, \quad H_{n-1} = h_{n-1},$$

dont la première sera l'intégrale des forces vives, la deuxième l'équation des aires pour le plan des x, y, en sorte que la constante h_1 est égale à β, et la troisième l'équation $L = k$, en sorte que h_2 est égal à k, tous les premiers membres des équations (1) satisfaisant, d'après un théorème de M. Liouville, aux $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions renfermées dans la formule

$$[H_i, H_s] = 0,$$

où i, s désignent deux quelconques des nombres $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Alors, si l'on tire des n équations (1) les quantités $p_1, p_2, \ldots, p_n$ en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et qu'on les substitue dans l'expression

$$V = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n),$$

on aura les intégrales finies

$$\frac{dV}{dh} = t + \tau, \quad \frac{dV}{dh_1} = l_1, \quad \frac{dV}{dh_2} = l_2, \ldots, \frac{dV}{dh_{n-1}} = l_{n-1},$$

et les quantités

$$(2) \qquad \begin{cases} h, & h_1 = \beta, & h_2 = k, \ldots, & h_{n-1}, \\ l_0 = \tau, & l_1, & l_2, \ldots, & l_{n-1} \end{cases}$$

forment un système d'éléments canoniques, c'est-à-dire satisfaisant aux équations

$$[h_i, h_s] = 0, \quad [l_i, l_s] = 0, \quad [h_i, l_s] = 0, \quad [h_i, l_i] = 1,$$

i, s étant susceptibles des valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, mais différents entre eux. On a donc, en particulier, les trois équations à démontrer

$$[h, \tau] = 1, \quad [\tau, \beta] = 0, \quad [\tau, k] = 0.$$

Je dis qu'on a aussi $[\tau, \alpha] = 0$. En effet, puisque l'on a $[\tau, \beta] = 0$, quel que soit d'ailleurs le choix que l'on ait fait des variables q_i, p_i on a de même

$$[\tau, \beta_1] = 0, \quad [\tau, \beta_2] = 0;$$

et, comme on a $\operatorname{tang}\alpha = -\frac{\beta_1}{\beta_2}$, il en résulte

$$[\tau, \alpha] = 0.$$

La quantité l_1 n'est pas nécessairement égale à $-\alpha$, mais elle peut être prise égale. En effet, si nous posons

$$l_1 = \text{fonct.}\,(\alpha, h_2, h_3, \ldots, h_{n-1}; l_2, l_3, \ldots, l_{n-1}),$$

nous aurons

$$[\beta, l_1] = \frac{dl_1}{d\alpha}[\beta, \alpha] + \frac{dl_1}{dh_2}[\beta, h_2] + \frac{dl_1}{dh_3}[\beta, h_3] + \ldots$$
$$+ \frac{dl_1}{dl_2}[\beta, l_2] + \frac{dl_1}{dl_3}[\beta, l_3] + \ldots,$$

et, comme on a $[\beta, h_2] = 0$, $[\beta, l_2] = 0, \ldots$, il en résulte

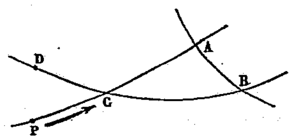
$$[\beta, l_1] = \frac{dl_1}{d\alpha}[\beta, \alpha] = -\frac{dl_1}{d\alpha};$$

ensuite, β, l_1 étant deux éléments conjugués, on a $[\beta, l_1] = 1$, donc

$$\frac{dl_1}{d\alpha} = -1 \quad \text{et} \quad l_1 = -\alpha + \text{fonct.}(h_2, h_3, \ldots, l_2, l_3, \ldots);$$

la fonction du second membre est arbitraire; on peut la prendre égale à zéro, et alors on a $l_1 = -\alpha$.

6. Je vais maintenant démontrer que l'élément l_2 du système (2) d'éléments canoniques peut être pris égal à g.



Imaginons une sphère dont le centre soit à l'origine des coordonnées; elle est coupée par le plan des x, y suivant le grand cercle DB, par le plan invariable suivant le grand cercle CA, enfin par l'équateur suivant le grand cercle AB.

Convenons que l'on compte l'arc σ défini au n° 4 à partir du point C, alors on aura $CA = \sigma$; si D est le point à partir duquel on compte les longitudes, on a $DC = \alpha$. Désignons l'arc CB par χ; enfin sur le grand cercle CA prenons, à partir du point C, CP égal à g.

L'angle aigu ACB représente l'inclinaison γ; supposons les longitudes comptées positivement de C vers B, alors sur la figure α est positif. Dans le cas où le grand cercle CA représente l'orbite d'une planète dont C est le nœud ascendant, on a l'habitude de compter positivement les longitudes sur l'orbite, dans le sens de la flèche; nous supposerons qu'on fasse de même ici; d'après la figure, en ayant égard au signe, il faudra donc faire $CP = -g$, g étant négatif, et l'on aura

$$PA = \sigma - g.$$

Supposons que le plan des x, y tourne autour de la ligne des nœuds, jusqu'à ce qu'il vienne coïncider avec le plan invariable; à la limite, l'inclinaison γ sera nulle et $\beta = k\cos\gamma$ deviendra égal à k; l'arc CB ou χ deviendra égal à CA ou σ, et, si l'on suppose qu'à la limite PC est égal à DC, ce qui est permis, on aura aussi à la limite $g = -\alpha$; or β, $-\alpha$ sont constamment deux éléments conjugués : donc à la limite k, g sont également deux éléments conjugués; par conséquent l'élément l_2 du tableau (2) peut être pris égal à g, pour cette limite.

Ainsi on a $l_2 = g$, quand le plan des x, y est venu coïncider avec le plan invariable, et je dis maintenant que l_2 peut être pris égal à g, quelle que soit la position du plan des x, y mené par le point origine.

Les éléments h_i, l_i du tableau (2) forment un système d'éléments canoniques, dont les six premiers sont

$$h_0 = h, \quad h_1 = \beta, \quad h_2 = k,$$
$$l_0 = \tau, \quad l_1 = -\alpha, \quad l_2.$$

Désignons par h'_i, l'_i ce que deviennent les éléments h_i, l_i, quand le plan des x, y, après avoir tourné autour de la ligne des nœuds, vient à coïncider avec le plan invariable; nous aurons

$$h'_0 = h, \quad h'_2 = k,$$
$$l'_0 = \tau, \quad l'_2 = g,$$

les éléments h'_1, l'_1 s'étant confondus avec h'_2, l'_2.

Les deux quantités β, α sont suffisantes pour déterminer la position du plan invariable, qui passe par l'origine, par rapport aux axes de coordonnées. Donc on peut regarder h_2, l_2, h_3, $l_3, \ldots$ comme indépendants de la position du plan invariable par rapport à ces axes, et par suite, lorsque le plan des x, y, après avoir tourné autour de la ligne des nœuds, aura coïncidé avec le plan invariable, on peut supposer que h_2, l_2, h_3, $l_3, \ldots$ restent les mêmes ou qu'on a

$$h'_2 = h_2, \quad h'_3 = h_3, \ldots,$$
$$l'_2 = l_2, \quad l'_3 = l_3, \ldots;$$

donc, réciproquement, si l'on a d'abord calculé les éléments h'_2, l'_2, h'_3, $l'_3, \ldots$, on pourra les prendre pour les éléments h_2, l_2, h_3, $l_3, \ldots$ et, en particulier, puisqu'on a $l'_2 = g$, on a également

$$l_2 = g.$$

7. On a donc enfin le théorème suivant :

« Supposons un problème de Dynamique pour lequel le principe » des forces vives et les trois intégrales des aires aient lieu. Désignons » par h la constante du principe des forces vives, par k la grandeur de » l'axe du plan invariable, par α la longitude de la trace c du plan in- » variable sur un plan fixe, par β la projection de k sur la normale à » ce plan fixe, par τ la constante qui s'ajoute au temps t par l'intégra-

» tion, enfin par g la distance angulaire du nœud c à un point fixe du
» grand cercle déterminé par le plan invariable sur la sphère dont le
» centre est à l'origine. Alors les six quantités

$$\begin{matrix} h, & \beta, & k, \\ \tau, & -\alpha, & g \end{matrix}$$

» forment trois couples d'éléments canoniques conjugués; c'est-à-dire
» qu'ils satisfont aux quinze équations suivantes :

$$\begin{gathered}
[h, \tau] = 1, \quad [\beta, -\alpha] = 1, \quad [k, g] = 1, \\
[h, \beta] = 0, \quad [h, \alpha] = 0, \quad [h, k] = 0, \quad [h, g] = 0, \\
[\tau, \beta] = 0, \quad [\tau, \alpha] = 0, \quad [\tau, k] = 0, \quad [\tau, g] = 0, \\
[\beta, k] = 0, \quad [\beta, g] = 0, \quad [\alpha, k] = 0, \quad [\alpha, g] = 0.
\end{gathered}$$

Sur des formules de perturbation.

8. Supposons que l'on soit parvenu à intégrer les équations différentielles d'un problème de Mécanique, dans lequel ont lieu le principe des forces vives et les trois intégrales des aires. Concevons ensuite que l'on ajoute aux forces du problème précédent des forces perturbatrices; désignons par Ω la fonction perturbatrice; alors on passe des équations différentielles canoniques du problème précédent

$$\begin{aligned}
\frac{dq_1}{dt} &= \frac{dH}{dp_1}, & \frac{dq_2}{dt} &= \frac{dH}{dp_2}, \ldots, \\
\frac{dp_1}{dt} &= -\frac{dH}{dq_1}, & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{dH}{dq_2}, \ldots,
\end{aligned}$$

à celles du problème actuel, en y changeant U en $U + \Omega$ ou H en $H - \Omega$; Ω est une fonction des quantités q_i, p_i et, en remplaçant les q_i, p_i par les valeurs résultant des intégrations, on aura Ω exprimé au moyen de t et des constantes,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{matrix} h, & \beta, & k, & h_3, & h_4, \ldots, & h_{n-1}, \\ \tau, & -\alpha, & g, & l_3, & l_4, \ldots, & l_{n-1}. \end{matrix} \right.$$

Dans le second problème on conserve la même forme aux expressions des q_i, p_i que dans le premier, mais les constantes (1) qui y sont renfermées sont alors considérées comme des éléments variables, et, d'après un théorème connu, ces éléments satisfont à un système d'équations différentielles canoniques, dont je ne marque que les six premières

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{d\Omega}{d\tau}, & \dfrac{d\tau}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{dh}, \\ \dfrac{d\beta}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{d\alpha}, & \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{d\Omega}{d\beta}, \\ \dfrac{dk}{dt} = \dfrac{d\Omega}{dg}, & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{dk}. \end{cases}$$

Ces six équations ne permettent pas, en général, de déterminer les six quantités

$$(3)\qquad \begin{cases} h, & \beta, & k, \\ \tau, & -\alpha, & g, \end{cases}$$

parce que Ω renferme, outre ces quantités, encore $6n-6$ éléments variables

$$(4)\qquad \begin{cases} h_3, & h_4, \ldots, & h_{n-1}, \\ l_3, & l_4, \ldots, & l_{n-1}. \end{cases}$$

Toutefois, si toutes ces quantités varient très-lentement, on pourra calculer les éléments (3) avec une grande approximation, pendant un temps assez considérable, à l'aide de quadratures.

Il n'est pas indispensable que les $6n-6$ constantes qu'il faut ajouter aux six constantes (3), pour obtenir toutes les constantes arbitraires des intégrales, forment un système d'éléments canoniques; il suffit évidemment, pour appliquer les équations (2), que Ω soit exprimé au moyen des six éléments (3) et de $6n-6$ autres éléments qui soient fonctions des éléments (4), sans être fonctions des éléments (3). En désignant donc par s un quelconque de ces nouveaux éléments, il devra satisfaire à ces six équations

$$[h, s] = 0, \quad [\tau, s] = 0, \quad [\beta, s] = 0, \quad [\alpha, s] = 0, \quad [k, s] = 0, \quad [g, s] = 0;$$

la première exprime que s est indépendant de τ conjugué à h, la deuxième que s est indépendant de h, etc.

La constante τ ne se trouve dans Ω que par $t+\tau$, et, sans qu'on soit obligé à aucune attention pour la détermination des $6n-6$ dernières constantes, elles seront indépendantes de τ, de sorte qu'on aura la première des équations (2)

$$\frac{dh}{dt}=\frac{d\Omega}{d\tau}, \tag{5}$$

sans connaître les éléments canoniques (4). En effet, désignons les $2n-1$ constantes qui restent après τ et qui entrent dans Ω par a_1, $a_2,\ldots, a_{2n-1}$; d'après une formule générale connue, on a

$$\frac{dh}{dt}=[h,\tau]\frac{d\Omega}{d\tau}+[h,a_1]\frac{d\Omega}{da_1}+\ldots+[h,a_{2n-1}]\frac{d\Omega}{da_{2n-1}}.$$

Or, $a_1, a_2,\ldots, a_{2n-1}$ étant indépendants de τ, on a

$$[h,a_1]=0,\quad [h,a_2]=0,\ldots,$$

et il reste bien l'équation (5). C'est une formule donnée pour la première fois par Lagrange, et qu'on trouve dans sa *Mécanique analytique* (section V, § 3).

Si l'on examine le mouvement du système par rapport au plan invariable, les $2n-2$ constantes qu'on obtiendra par les intégrations seront indépendantes de β, α; on en peut encore conclure la deuxième ligne des formules (2)

$$\frac{d\beta}{dt}=-\frac{d\Omega}{d\alpha},\quad \frac{d\alpha}{dt}=\frac{d\Omega}{d\beta}, \tag{6}$$

sans être obligé de connaître les éléments (4).

Pour étudier le mouvement du système quand la fonction de forces est simplement U, nous pouvons examiner le mouvement relatif du système par rapport au plan mobile de l'équateur, ensuite le mouvement du plan de l'équateur, et enfin sa trace sur le plan invariable au moyen de la formule (6) du n° 4 (c'est une marche de calcul que je me propose d'exposer dans un autre article). La dernière constante introduite par la dernière formule est g, et toutes les constantes obtenues auparavant par les intégrations sont évidemment indépendantes de g. Donc, sans connaître les éléments (4), on pourra, quand on ajoutera aux forces d'abord existantes des forces perturbatrices, poser la cinquième des équations (2)

$$\frac{dk}{dt} = \frac{d\Omega}{dg}, \tag{7}$$

qui déterminera la variation de k.

9. Pour donner une application des formules précédentes, supposons, par exemple, qu'un corps, en s'approchant de notre système planétaire, vienne à le troubler; alors on prendra pour l'origine des coordonnées le centre de gravité du système dont le mouvement est rectiligne et uniforme, et l'on sait que le principe des forces vives et les trois intégrales des aires ont lieu par rapport à ce point. Les formules (6) et (7) permettront de calculer le déplacement du plan invariable; en effet, au moyen de ces formules, on peut calculer la variation de la longitude α du plan invariable et celles de k et β; par suite on peut calculer aussi la variation de l'inclinaison γ du plan invariable donnée par la formule

$$\cos\gamma = \frac{\beta}{k}.$$

Remarquons une quantité qui mérite d'être considérée; c'est la rotation élémentaire du plan invariable autour de son axe, que je désignerai par dg'. Si le nœud du plan invariable sur le plan fixe était immobile, on aurait évidemment $dg' = dg$; mais, ce nœud étant mobile, on peut considérer, dans le problème du mouvement troublé, le plan invariable comme ayant dans le temps dt un premier mouvement de rotation autour de son intersection avec sa position infiniment voisine et un second mouvement autour de l'axe de ce plan, que nous avons désigné par dg'. Alors on trouve, par la considération géométrique la plus facile,

$$dg' = dg + \cos\gamma\, d\alpha\,;$$

d'après les équations (2) on a

$$dg = -\frac{d\Omega}{dk}dt,$$

$$d\alpha = \frac{d\Omega}{d\beta}dt = -\frac{1}{k\sin\gamma}\frac{d\Omega}{d\gamma}dt;$$

on en conclut donc, pour la vitesse angulaire du plan invariable autour de son axe due à la perturbation,

$$\frac{dg'}{dt} = -\frac{d\Omega}{dk} - \frac{\cos\gamma}{k\sin\gamma}\frac{d\Omega}{d\gamma}.$$

10. Arrivons enfin aux deux problèmes dont l'analogie m'a fourni l'occasion de ce Mémoire. Dans ces deux problèmes, le système est fixé par trois coordonnées seulement. Les variables q_i, p_i, se réduisent à $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$. Les constantes arbitraires (1) se réduisent aux six premières, et sont entièrement déterminées par le système des équations (2).

1° Dans le cas d'un corps solide qui tourne autour d'un point fixe, et qui n'est sollicité que par des forces perturbatrices, on a les équations (2), qui se changent très-aisément en celles que Poisson a données (*Journal de l'École Polytechnique*, XV[e] Cahier, p. 336).

2° Dans le cas d'un corps attiré par un centre fixe, le plan invariable devient celui de l'orbite, l'équateur un plan quelconque passant par le rayon vecteur mené du corps au centre fixe; la quantité que j'ai désignée par σ représente l'angle compris entre la ligne des nœuds et le rayon vecteur; g est la distance angulaire au nœud d'un point fixe quelconque de l'orbite, lequel est ensuite censé se mouvoir en vertu de la perturbation. Mais je dis que l'on peut aussi prendre pour g la distance angulaire du périhélie à la ligne des nœuds, et que les éléments troublés seront encore fournis par les équations (2).

Faisons pour ce problème le calcul indiqué au n° **3**, avec la simplification qui résulte de la supposition que les coordonnées se rapportent au plan de l'orbite; ce qui les réduit à deux seulement.

Formons les deux équations de ce numéro

$$H = h, \quad L = k;$$

en désignant par r le rayon vecteur, et prenant la masse du corps égale à l'unité, nous trouverons facilement qu'elles se réduisent aux deux suivantes:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 - 2\mathrm{U} = 2h,$$

$$r^2\frac{d\sigma}{dt} = k.$$

En représentant par r' et σ' les deux dérivées de r et σ, on a

$$p_1 = \frac{d\mathrm{T}}{dr'} = r', \quad p_2 = \frac{d\mathrm{T}}{d\sigma'} = r^2\sigma',$$

et ces deux équations deviennent

$$p_1^2 + \frac{1}{r^2}p_2^2 = 2\mathrm{U} + 2h,$$

$$p_2 = k;$$

l'expression $\mathrm{V} = \int(p_1 dq_1 + p_2 dq_2)$ devient

$$\mathrm{V} = k\sigma + \int_\rho^r \sqrt{2\mathrm{U} + 2h - \frac{k^2}{r^2}}\,dr,$$

ρ étant une constante, et l'on aura les deux intégrales finies

$$(a) \qquad \frac{d\mathrm{V}}{dh} = t + \tau, \quad \frac{d\mathrm{V}}{dk} = g,$$

qui peuvent s'écrire

$$(b) \qquad \left\{ \begin{aligned} t + \tau &= \int_\rho^r \frac{r\,dr}{\sqrt{2\mathrm{U}r^2 + 2hr^2 - k^2}}, \\ \sigma - g &= \int_\rho^r \frac{k\,dr}{r\sqrt{2\mathrm{U}r^2 + 2hr^2 - k^2}}. \end{aligned} \right.$$

Si, au lieu de prendre pour ρ une valeur constante déterminée et indépendante de h, k, on prend pour ρ la valeur minimum de r, laquelle satisfait à l'équation, où U est fonction de r,

$$(c) \qquad 2\mathrm{U} + 2h - \frac{k^2}{r^2} = 0,$$

les deux équations (a) se confondront encore avec les équations (b). En effet, quand on prend pour ρ une quantité dépendante de h, k, les seconds membres des équations (b) doivent, en général, être augmentés de nouveaux termes; mais ces termes ont pour facteur

$$\sqrt{2U_1 + 2h - \frac{k^2}{\rho^2}},$$

U_1 étant le résultat de la substitution de ρ à la place de r dans U, et, par conséquent, ils s'annulent si ρ est racine de l'équation (c).

En faisant $r = \rho$ dans les deux équations (b), on a

$$\sigma = g, \quad t = -\tau,$$

c'est-à-dire que g représente la distance angulaire du périhélie au nœud et $-\tau$ le temps du passage de l'astre au périhélie.

Nous voyons donc que les intégrales sont exactement les mêmes quand on prend pour g la distance angulaire du nœud, ou à un point fixe du plan de l'orbite ou au périhélie. Il est évident qu'il en sera de même pour un système plus général de coordonnées où l'on aura trois intégrales

$$(d) \qquad \frac{dV}{dh} = t + \tau, \quad \frac{dV}{d\beta} = -\alpha, \quad \frac{dV}{dk} = g,$$

au lieu de deux seulement.

Donc enfin les six équations canoniques (2), relatives au mouvement troublé, qui se déduisent des trois équations (d), subsistent encore, en prenant pour g la distance du nœud au périhélie, et pour $-\tau$ le temps du passage de l'astre à ce point. Ainsi l'on voit que le périhélie a le même mouvement angulaire qu'un point du plan de l'orbite regardé comme fixe dans le mouvement non troublé.

Les formules (2) se transforment d'ailleurs très-aisément en celles que les astronomes ont coutume d'employer pour calculer les perturbations d'une planète.