# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

L. PAINVIN

**Étude d'un système de rayons**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série*, tome 19 (1874), p. 57-112.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1874_2_19__57_0>

# ÉTUDE D'UN SYSTÈME DE RAYONS;

**PAR M. L. PAINVIN.**

---

**1.** L'étude des systèmes de rayons (ou congruences de droites) peut être faite à deux points de vue : il y a ce qu'on pourrait appeler la *Géométrie infinitésimale* des systèmes de rayons, inaugurée surtout par Hamilton (*Transactions of the royal Irish Academy*, t. XVI), continuée par M. Kummer, dans un beau Mémoire analytique (*Journal de Crelle*, t. 57, ou *Nouvelles Annales*, 1860, 1861, 1862), reprise dernièrement et complétée par M. Mannheim (*Journal de Mathématiques*, 1872, p. 109); dans cette Géométrie, on considère un des rayons du système et tous ceux qui lui sont infiniment voisins, et formant ce qu'on nomme un *pinceau de droites*, et l'on étudie les propriétés de ces pinceaux sans avoir égard à l'ordre ni à la classe du système de rayons.

Il y a, en second lieu, la *Géométrie finie* des systèmes de rayons, où l'on considère l'ensemble de tous les rayons d'un système d'ordre et de classe déterminés, et où l'on étudie les propriétés d'ensemble; Kummer s'est également occupé de ce genre de recherches, et, dans un Mémoire fort remarquable (*Académie des Sciences de Berlin*, 1866), il a fait une étude approfondie des sytèmes de rayons du premier et du second ordre.

Le Mémoire actuel a pour objet un système particulier de rayons de quatrième ordre et de quatrième classe, qui se présente dans le complexe du second ordre dont je me suis précédemment occupé. Ce genre de questions est assez nouveau pour que l'étude d'un système de rayons, même particulier, offre quelque intérêt; d'ailleurs ce n'est que la continuation et le complément des recherches antérieures que j'ai faites sur un complexe du second ordre, ayant des rapports intimes avec les surfaces homofocales du second ordre et avec la surface des ondes.

J'envisagerai ce système de rayons au double point de vue que j'ai défini en commençant.

## § I. — Détermination des foyers, plans focaux, etc.

**2.** Lorsque le cône (C) du complexe étudié précédemment (*Nouvelles Annales*, t. XI, 2[e] série, p. 49, 97, 202, etc.; 1872) se réduit à un système de deux plans, la droite d'intersection des deux plans est une droite particulière du complexe touchant la surface $\Delta$; je donnerai à ces droites le nom de *droites limites*. L'ensemble de toutes les droites limites constitue un *système de rayons*, ou encore une *congruence de droites;* chacune des droites est déterminée lorsqu'on l'assujettit à passer par un point arbitrairement choisi.

Les coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point quelconque d'une *droite limite* ou d'un *rayon* du système sont définies par les équations suivantes :

$$(1)\qquad (\mathrm{R})\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{\lambda x_0}{a^2+\rho_2}, \\ y = y_0 + \dfrac{\lambda y_0}{b^2+\rho_2}, \\ z = z_0 + \dfrac{\lambda z_0}{c^2+\rho_2}, \end{cases}$$

ou

$$(2)\qquad \begin{cases} b_1^2 c_1^2 x_0^2 = (\rho_1^2 - a^4)(\rho_2 + a^2), \\ c_1^2 a_1^2 y_0^2 = (\rho_1^2 - b^4)(\rho_2 + b^2), \\ a_1^2 b_1^2 z_0^2 = (\rho_1^2 - c^4)(\rho_2 + c^2); \end{cases}$$

$\lambda$ est un paramètre arbitraire; $x_0$, $y_0$, $z_0$ sont les coordonnées du point où le rayon (R) touche la surface $\Delta$; $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$ sont les paramètres des trois surfaces homofocales passant par le point $(x_0, y_0, z_0)$; premier Mémoire, n° [[**12**]], *loc. cit.*

Dans ce qui suit, je renfermerai dans un double crochet [[ ]] les numéros de renvoi à mon premier Mémoire : *Étude d'un complexe du second ordre* (*Nouvelles Annales*, t. XI, 1872).

On sait qu'en général les droites d'un système de rayons touchent deux surfaces ou deux nappes d'une même surface. Les points du rayon où a lieu le contact se nomment les *foyers de ce rayon* (Kummer); les surfaces touchées sont dites les *surfaces focales* du système de rayons (il peut arriver que les surfaces focales se réduisent à des courbes rencontrées par tous les rayons du système : ce sont alors des *courbes focales*); les plans tangents aux surfaces focales aux points où elles sont touchées par un même rayon sont dits les *plans focaux* de ce rayon.

Je vais chercher d'abord les foyers, les plans focaux, etc., d'un rayon quelconque du système (R), défini par les équations (1).

**3.** Nous adopterons les notations suivantes, dont plusieurs ont déjà été employées :

$$
(3)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
(1^\circ) & \left\{\begin{array}{l} A = b^2+c^2, \\ B = c^2+a^2, \\ C = a^2+b^2, \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} a_1^2 = b^2-c^2, \\ b_1^2 = c^2-a^2, \\ c_1^2 = a^2-b^2, \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} e = a^2+b^2+c^2, \\ g = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2, \\ h = a^2b^2c^2; \end{array}\right. \\
(2^\circ) & \left\{\begin{array}{l} D = (\rho_2+a^2)(\rho_2+b^2)(\rho_2+c^2) = \rho_2^3+e\rho_2^2+g\rho_2+h, \\ D_1 = (\rho_1^2-a^4)(\rho_1^2-b^4)(\rho_1^2-c^4) = \rho_1^2(\rho_1^2+g)^2-(e\rho_1^2+h)^2; \end{array}\right. \\
(3^\circ) & \left\{\begin{array}{l} E = \rho_2(\rho_1^2+g)+(e\rho_1^2+h), \\ F = \rho_1^2(\rho_1^2+g)+\rho_2(e\rho_1^2+h). \end{array}\right.
\end{array}
\right.
$$

Il faudra avoir égard aussi aux relations (28), (29), (30) et (31) du n° [[**13**]]; de là et d'après les valeurs (2) de $x_0$, $y_0$, $z_0$, et les égalités (23), n° [[**11**]], on déduit plusieurs identités que je vais grouper ici; elles nous seront souvent utiles et permettront de faire rapidement les calculs qui seront indiqués dans ce qui suit. Voici ces relations :

$$
(3\ bis)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
(1^{\circ}) & x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = e + \rho_2, \\
(2^{\circ}) & \mathrm{A}x_0^2 + \mathrm{B}y_0^2 + \mathrm{C}z_0^2 = g + \rho_1^2, \\
(3^{\circ}) & b^2c^2x_0^2 + c^2a^2y_0^2 + a^2b^2z_0^2 = h - \rho_1^2\rho_2, \\
(4^{\circ}) & \dfrac{x_0^2}{a^2+\rho_2} + \dfrac{y_0^2}{b^2+\rho_2} + \dfrac{z_0^2}{c^2+\rho_2} = 1, \\
(5^{\circ}) & \dfrac{x_0^2}{(a^2+\rho_2)^2} + \dfrac{y_0^2}{(b^2+\rho_2)^2} + \dfrac{z_0^2}{(c^2+\rho_2)^2} = \dfrac{\rho_2^2-\rho_1^2}{\mathrm{D}}, \\
(6^{\circ}) & \dfrac{\mathrm{A}x_0^2}{a^2+\rho_2} + \dfrac{\mathrm{B}y_0^2}{b^2+\rho_2} + \dfrac{\mathrm{C}z_0^2}{c^2+\rho_2} = 0, \\
(7^{\circ}) & \dfrac{x_0^2}{(a^2+\rho_2)^3} + \dfrac{y_0^2}{(b^2+\rho_2)^3} + \dfrac{z_0^2}{(c^2+\rho_2)^3} = \dfrac{(\rho_2^2-\rho_1^2)^2-(\mathrm{F}+\rho_2\mathrm{E})}{\mathrm{D}^2}, \\
(8^{\circ}) & \dfrac{x_0^2}{\rho_1^2-a^4} + \dfrac{y_0^2}{\rho_1^2-b^4} + \dfrac{z_0^2}{\rho_1^2-c^4} = 0, \\
(9^{\circ}) & \dfrac{x_0^2}{(\rho_1^2-a^4)^2} + \dfrac{y_0^2}{(\rho_1^2-b^4)^2} + \dfrac{z_0^2}{(\rho_1^2-c^4)^2} = -\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}_1}, \\
(10^{\circ}) & \dfrac{x_0^2(a^2+\rho_2)^2}{(\rho_1^2-a^4)^2} + \dfrac{y_0^2(b^2+\rho_2)^2}{(\rho_1^2-b^4)^2} + \dfrac{z_0^2(c^2+\rho_2)^2}{(\rho_1^2-c^4)^2} = -\dfrac{(\rho_1^2+\rho_2^2)\mathrm{E}+2\rho_2\mathrm{F}}{\mathrm{D}_1}, \\
(1^{\circ})' & \dfrac{a_1^2}{\rho_2+a^2} + \dfrac{b_1^2}{\rho_2+b^2} + \dfrac{c_1^2}{\rho_2+c^2} = -\dfrac{a_1^2b_1^2c_1^2}{\mathrm{D}}, \\
(2^{\circ})' & \dfrac{a_1^2}{\rho_1^2-a^4} + \dfrac{b_1^2}{\rho_1^2-b^4} + \dfrac{c_1^2}{\rho_1^2-c^4} = -\dfrac{a_1^2b_1^2c_1^2(\rho_1^2+g)}{\mathrm{D}_1}, \\
(3^{\circ})' & \dfrac{a_1^2}{(\rho_2+a^2)^2} + \dfrac{b_1^2}{(\rho_2+b^2)^2} + \dfrac{c_1^2}{(\rho_1^2+e^2)^2} = -\dfrac{a_1^2b_1^2c_1^2\dfrac{\partial\mathrm{D}}{\partial\rho_2}}{\mathrm{D}^2}.
\end{array}
\right.
$$

*Remarque*. A un système de valeurs quelconques données aux paramètres $\rho_1^2$ et $\rho_2$ correspondent huit droites appartenant au système de rayons défini par les équations (1) et (2); ces huit rayons forment quatre groupes de droites parallèles et sont situés sous un même hyperboloïde (H), dont l'équation est

$$
(4)\qquad (\mathrm{H})\quad \frac{a^2+\rho_2}{\rho_1^2-a^4}x^2 + \frac{b^2+\rho_2}{\rho_1^2-b^4}y^2 + \frac{c^2+\rho_2}{\rho_1^2-c^4}z^2 + 1 = 0.
$$

**4.** Si $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont les cosinus des angles que le rayon (1) fait avec les axes, on aura

$$(5) \qquad \frac{\alpha}{\frac{x_0}{a^2+\rho_2}} = \frac{\beta}{\frac{y_0}{b^2+\rho_3}} = \frac{\gamma}{\frac{z_0}{c^2+\rho^2}} = \frac{1}{+\sqrt{\frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{D}}},$$

en tenant compte de la relation (3 *bis*), (5°).

Nous rappellerons aussi que le rayon (1), qui touche la surface $\Delta$ au point $(x_0, y_0, z_0)$, la rencontre encore en deux points qui sont déterminés à l'aide de l'équation (33), n° [[**13**]], laquelle donne, eu égard aux notations (3), après avoir supprimé le facteur $\lambda^2$, qui correspond au point $(x_0, y_0, z_0)$,

$$F + \rho_2 E + 2E.\lambda + E\frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{D}\lambda^2 = 0.$$

Or, si l'on désigne par $r$ la distance du point $(x, y, z)$ au point $(x_0, y_0, z_0)$, on a

$$x = x_0 + \alpha r, \quad y = y_0 + \beta r, \quad z = z_0 + \gamma r;$$

c'est-à-dire, en ayant égard aux équations (1) et (5),

$$(6) \qquad r = +\lambda\sqrt{\frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{D}}, \quad \text{ou} \quad \lambda = +r\sqrt{\frac{D}{\rho_2^2-\rho_1^2}};$$

nous avons adopté le signe + devant le radical $\sqrt{\frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{D}}$ : le choix était d'ailleurs arbitraire; $r$ représente plus ou moins la distance du point $(x, y, z)$ au point $(x_0, y_0, z_0)$, suivant que le point $(x, y, z)$ se trouve sur la demi-droite comptée à partir du point $(x_0, y_0, z_0)$ et définie par les équations (5), ou sur son prolongement.

Si l'on remplace $\lambda$ par la valeur (6) dans l'équation qui précède, il vient

$$(7) \qquad r^2 + 2\sqrt{\frac{D}{\rho_2^2-\rho_1^2}}\,r + \left(\frac{F}{E} + \rho_2\right) = 0;$$

*l'équation* (7) *donne les distances* $r_1$, $r_2$ *du point* $(x_0, y_0, z_0)$ *aux* *deux points où le rayon* (1), *tangent en* $(x_0, y_0, z_0)$ *à la surface* $\Delta$, *rencontre encore cette surface.*

De cette équation on conclut

$$(7\ bis) \qquad r_1 + r_2 = -2\sqrt{\frac{D}{\rho_2^2 - \rho_1^2}}, \quad r_1 r_2 = \frac{F}{E} + \rho_2;$$

ce qui fournit une signification géométrique très-simple des expressions

$$\sqrt{\frac{D}{\rho_2^2 - \rho_1^2}}, \quad \left(\frac{F}{E} + \rho_2\right).$$

5. Nous allons maintenant chercher les *foyers* du rayon (R), c'est-à-dire les points où il est rencontré par des rayons infiniment voisins.

Les coordonnées $x_0$, $y_0$, $z_0$ du point de départ du rayon, ainsi que les cosinus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ des angles qu'il fait avec les axes, sont des fonctions des deux paramètres $\rho_1$, $\rho_2$, arbitraires et indépendants, définies par les équations (2) et (5).

Soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées du point où le rayon (R) est rencontré par un rayon infiniment voisin, on aura

$$(8) \qquad \frac{x - x_0}{\frac{x_0}{a^2 + \rho_2}} = \frac{y - y_0}{\frac{y_0}{b^2 + \rho^2}} = \frac{z - z_0}{\frac{z_0}{c^2 + \rho_2}} = \mu,$$

et $\mu$ est alors, non plus une quantité arbitraire comme $\lambda$ dans les équations (1), mais une fonction déterminée des paramètres $\rho_1$ et $\rho_2$. Ces égalités donnent

$$x = x_0 + \mu \frac{x_0}{a^2 + \rho_2}, \quad y = y_0 + \mu \frac{y_0}{b^2 + \rho_2}, \quad z = z_0 + \mu \frac{z_0}{c^2 + \rho_2};$$

si l'on différentie ces équations en faisant varier arbitrairement $\rho_1$ et $\rho_2$, $x$, $y$, $z$ ne varient pas, puisque ce sont les coordonnées du point de rencontre du rayon (R) avec un rayon infiniment voisin; on a donc

$$(9)\quad \begin{cases} dx_0 + \mu d\dfrac{x_0}{a^2+\rho_2} + \dfrac{x_0}{a^2+\rho_2}d\mu = 0, \\ dy_0 + \mu d\dfrac{y_0}{b^2+\rho_2} + \dfrac{y_0}{b^2+\rho_2}d\mu = 0, \\ dz_0 + \mu d\dfrac{z_0}{c^2+\rho_2} + \dfrac{z_0}{c^2+\rho_2}d\mu = 0. \end{cases}$$

Ajoutons ces dernières équations, après les avoir multipliées respectivement par $a_1^2\dfrac{a^2+\rho_2}{x_0}$, $b_1^2\dfrac{b^2+\rho_2}{y_0}$, $c_1^2\dfrac{c^2+\rho_2}{z_0}$, il vient

$$(10)\quad \begin{cases} \left(a_1^2\dfrac{a^2+\rho_2}{x_0}dx_0 + b_1^2\dfrac{b^2+\rho_2}{y_0}dy_0 + c_1^2\dfrac{c^2+\rho_2}{z_0}dz_0\right) \\ \quad + \mu\left(a_1^2\dfrac{a^2+\rho_2}{x_0}d\dfrac{x_0}{a^2+\rho_2} + b_1^2\dfrac{b^2+\rho_2}{y_0}d\dfrac{y_0}{b^2+\rho_2} + c_1^2\dfrac{c^2+\rho^2}{z_0}d\dfrac{z_0}{c^2+\rho_2}\right) = 0; \end{cases}$$

puis, entre ces mêmes équations, éliminons $\mu$ et $d\mu$; on a

$$(11)\quad \begin{vmatrix} dx_0 & d\dfrac{x_0}{a^2+\rho_2} & \dfrac{x_0}{a^2+\rho_2} \\ dy_0 & d\dfrac{y_0}{b^2+\rho_2} & \dfrac{y_0}{b^2+\rho_2} \\ dz_0 & d\dfrac{z_0}{c^2+\rho_2} & \dfrac{z_0}{c^2+\rho_2} \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation (11) donne la condition pour que le rayon (R) soit rencontré par un rayon infiniment voisin, et l'équation (10) fournit la valeur correspondante de $\mu$.

L'équation (11) développée devient

$$(11\ bis)\quad \begin{cases} \dfrac{x_0}{a^2+\rho_2}\left(dy_0\, d\dfrac{z_0}{c^2+\rho_2} - dz_0\, d\dfrac{y_0}{b^2+\rho_2}\right) \\ + \dfrac{y_0}{b^2+\rho_2}\left(dz_0\, d\dfrac{x_0}{a^2+\rho_2} - dx_0\, d\dfrac{z_0}{c^2+\rho_2}\right) \\ + \dfrac{z_0}{c^2+\rho_2}\left(dx_0\, d\dfrac{y_0}{b^2+\rho_2} - dy_0\, d\dfrac{x_0}{a^2+\rho_2}\right) = 0. \end{cases}$$

Or on déduit des équations (2)

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} dx_0 &= \frac{\rho_2+a^2}{b_1^2\,c_1^2\,x_0}\,\rho_1\,d\rho_1 + \frac{\rho_1^2-a^4}{2\,b_1^2\,c_1^2\,x_0}\,d\rho_2,\\ dy_0 &= \frac{\rho_2+b^2}{c_1^2\,a_1^2\,y_0}\,\rho_1\,d\rho_1 + \frac{\rho_1^2-b^4}{2\,c_1^2\,a_1^2\,y_0}\,d\rho_2,\\ dz_0 &= \frac{\rho_2+c^2}{a_1^2\,b_1^2\,z_0}\,\rho_1\,d\rho_1 + \frac{\rho_1^2-c^4}{2\,a_1^2\,b_1^2\,z_0}\,d\rho_2,\end{aligned}\right.$$

$$(12\,bis)\quad \left\{\begin{aligned} d\,\frac{x_0}{a^2+\rho_2} &= \frac{1}{b_1^2\,c_1^2\,x_0}\,\rho_1\,d\rho_1 - \frac{\rho_1^2-a^4}{2\,b_1^2\,c_1^2\,x_0(a^2+\rho_2)}\,d\rho_2,\\ d\,\frac{y_0}{b^2+\rho_2} &= \frac{1}{c_1^2\,a_1^2\,y_0}\,\rho_1\,d\rho_1 - \frac{\rho_1^2-b^4}{2\,c_1^2\,a_1^2\,y_0(b^2+\rho_2)}\,d\rho_2,\\ d\,\frac{z_0}{c^2+\rho_2} &= \frac{1}{a_1^2\,b_1^2\,z_0}\,\rho_1\,d\rho_1 - \frac{\rho_1^2-c^4}{2\,a_1^2\,b_1^2\,z_0(c^2+\rho_2)}\,d\rho_2.\end{aligned}\right.$$

De là résulte

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} & dy_0\,d\,\frac{z_0}{c^2+\rho_2} - dz_0\,d\,\frac{y_0}{b^2+\rho_2}\\ &= \Bigg\{ + \frac{\rho_1^2}{a_1^2\,b_1^2\,c_1^2\,y_0 z_0}\,d\rho_1^2 - \frac{(\rho_1^2-b^4)(\rho_1^2-c^4)}{4\,a_1^2\,b_1^2\,c_1^2\,y_0 z_0(b^2+\rho_2)(c^2+\rho_2)}\,d\rho_2^2\\ &\qquad + \frac{1}{2a_1^2 b_1^2 c_1^2 y_0 z_0}\left[\frac{(\rho_1^2-b^4)(\rho_2+c^2)}{a_1^2(\rho_2+b^2)} - \frac{(\rho_1^2-c^4)(\rho_2+b^2)}{a_1^2(\rho_2+c^2)} - \mathrm{A}\right]\rho_1\,d\rho_1\,d\rho_2\Bigg\}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on substitue les valeurs (13) dans l'équation (11 *bis*), il vient, après avoir multiplié par $x_0\,y_0\,z_0$ et supprimé le facteur $a_1^2\,b_1^2\,c_1^2$, et en ayant égard aux notations (3),

$$\left\{\begin{aligned} &\rho_1^2\,d\rho_1^2\left(\frac{x_0^2}{a^2+\rho_2}+\frac{y_0^2}{b^2+\rho_2}+\frac{z_0^2}{c^2+\rho_2}\right)\\ &-\frac{\mathrm{D}_1}{4\mathrm{D}}\left(\frac{x_0^2}{\rho_1^2-a_4}+\frac{y_0^2}{\rho_1^2-b^4}+\frac{z_0^2}{\rho_1^2-c^4}\right)d\rho_2^2\\ &+\frac{1}{2\mathrm{D}}\Bigg\{\quad \frac{x_0^2}{a_1^2}[(\rho_1^2-b^4)(\rho_2+c^2)^2-(\rho_1^2-c^4)(\rho_2+b^2)^2]\\ &\qquad +\frac{y_0^2}{b_1^2}[(\rho_1^2-c^4)(\rho_2+b^2)^2-(\rho_1^2-b^4)(\rho_2+a^2)^2]\\ &\qquad +\frac{z_0^2}{c_1^2}[(\rho_1^2-a^4)(\rho_2+a^2)^2-(\rho_1^2-a^4)(\rho_2+c^2)^2]\\ &\qquad\qquad -\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{A}x_0^2}{a^2+\rho_2}+\frac{\mathrm{B}y_0^2}{b^2+\rho_2}+\frac{\mathrm{C}z_0^2}{c^2+\rho_2}\right)\Bigg\}\rho_1\,d\rho_1\,d\rho_2\end{aligned}\right\}=0.$$

Si maintenant on remarque que

$$(\rho_1^2 - b^4)(\rho_2 + c^2)^2 - (\rho_1^2 - c^4)(\rho_2 + b^2)^2$$
$$= - a_1^2[2\rho_1^2\rho_2 + A(\rho_1^2 + \rho_2^2) + 2b^2c^2\rho_2],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et si l'on a égard aux relations (3 *bis*), l'égalité précédente se réduit à

$$\rho_1^2 d\rho_1^2 - \frac{1}{2D}[2\rho_1^2\rho_2(e+\rho_2)+(\rho_1^2+\rho_2^2)(g+\rho_1^2)+2\rho_2(h-\rho_1^2\rho_2)]\rho_1 d\rho_1 d\rho_2 = 0,$$

ou enfin à

$$(14) \qquad 2D\rho_1 d\rho_1^2 - (F + \rho_2 E)\, d\rho_1\, d\rho_2 = 0.$$

**6.** L'équation (14) donne les deux solutions

$$(15) \qquad \begin{cases} (1^\circ) & d\rho_1 = 0, \\ (2^\circ) & \rho_1 d\rho_1 = \dfrac{F + \rho_2 E}{2D} d\rho_2. \end{cases}$$

Pour la première des solutions (15), l'équation (10) donne, en tenant compte des valeurs (12) pour $d\rho_1 = 0$,

$$\mu \frac{a_1^2 b_1^2 c_1^2}{2D} = 0;$$

d'où il résulte par les équations (8)

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0.$$

Ainsi nous trouvons, comme premier foyer $f_0$, le point de départ $(x_0, y_0, z_0)$ du rayon D, c'est-à-dire le point où il touche la surface $\Delta$; la surface $\Delta$ est donc une première surface focale; ce qui devait être, d'après les propriétés démontrées dans le premier Mémoire.

Considérons maintenant la seconde des solutions (15), savoir

$$(2^\circ) \qquad \rho_1 d\rho_1 = \frac{F + \rho_2 E}{2D} d\rho_2.$$

Calculons d'abord la valeur de $\mu$ fournie par l'équation (10), sans introduire aucune hypothèse. Ayons égard aux valeurs (12) et (12 *bis*), et remarquons que

$$\frac{a_1^2(a^2+\rho_2)^2}{b_1^2c_1^2x_0^2} = \frac{a_1^2(a^2+\rho_2)}{\rho_1^2-a^4} = a_1^2b_1^2c_1^2\frac{x_0^2}{(\rho_1^2-a^4)^2};$$

$$\frac{a_1^2(a^2+\rho_2)}{b_1^2c_1^2x_0^2} = \frac{a_1^2}{\rho_1^2-a^4},\quad \frac{a_1^2(\rho_1^2-a^4)}{b_1^2c_1^2x_0^2} = \frac{a_1^2}{a^2+\rho_2},$$

l'équation (10) devient

$$a_1^2b_1^2c_1^2\rho_1 d\rho_1\sum\frac{x_0^2}{(\rho_1^2-a^4)^2}+\mu\left(\rho_1 d\rho_1\sum\frac{a_1^2}{\rho_1^2-a^4}-\frac{1}{2}d\rho_2\sum\frac{a_1^2}{a^2+\rho_2}\right)=0,$$

ou enfin, en ayant égard aux relations (3 *bis*) : (9°), (1°)′, (2°)′ :

$$(3°)\qquad \mu\left[\frac{D_1}{2D}d\rho_2-\rho_1 d\rho_1(\rho_1^2+g)\right]-E\rho_1 d\rho_1=0.$$

En remplaçant maintenant $\rho_1 d\rho_1$ par la valeur (2°), il vient

$$\mu[D_1-(\rho_1^2+g)(F+\rho_2E_1)]=E(F+\rho_2E);$$

mais, d'après les relations (3), on a

$$D_1=\rho_1^2(\rho_1^2+g)^2-(e\rho_1^2+h)^2,$$
$$F+\rho_2E=(\rho_1^2+\rho_2^2)(\rho_1^2+g)+2\rho_2(e\rho_1^2+h);$$

par conséquent

$$D_1-(F+\rho_2E)(\rho_1^2+g)=-\rho_2^2(\rho_1^2+g)^2$$
$$-2\rho_2(\rho_1^2+g)(e\rho_1^2+h)-(e\rho_1^2+h)^2=-E^2;$$

on a donc définitivement

$$(16)\qquad \mu=-\frac{F+\rho_2E}{E}.$$

Si nous désignons par $x_1, y_1, z_1$ les coordonnées du second foyer $f_1$, par $\delta$ sa distance au point $(x_0, y_0, z_0)$ qui est le premier foyer $f_0$, les équations (8) et (6) donnent alors, en y remplaçant $\mu$ par sa valeur (16),

$$x_1 - x_0 = -\frac{x_0}{a^2+\rho_2}\left(\frac{F}{E}+\rho_2\right),\quad y_1 - y_0 = -\frac{y_0}{b^2+\rho_2}\left(\frac{F}{E}+\rho_2\right),$$

$$z_1 - z_0 = -\frac{z_0}{c^2+\rho_2}\left(\frac{F}{E}+\rho_2\right),$$

$$\delta = -\frac{F+\rho_2 E}{E}\sqrt{\frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{D}},$$

ou encore

$$(17)\quad x_1 = \frac{x_0}{a^2+\rho_2}\,\frac{a^2E-F}{E},\quad y_1 = \frac{y_0}{b^2+\rho_2}\,\frac{b^2E-F}{E},\quad z_1 = \frac{z_0}{c^2+\rho_2}\,\frac{c^2E-F}{E}.$$

Si l'on remarque que, d'après les formules (30), n° [[**15**]], on a

$$a^2E - F = -(\rho_1^2 - a^4)(\rho_1^2 + A\rho_2 + b^2c^2),$$

les valeurs (17) de $x_1, y_1, z_1$ peuvent s'écrire sous cette autre forme

$$(17\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= -\frac{x_0(\rho_1^2-a^4)}{a^2+\rho_2}\,\frac{(\rho_1^2+A\rho_2+b^2c^2)}{E},\\ y_1 &= -\frac{y_0(\rho_1^2-b^4)}{b^2+\rho_2}\,\frac{(\rho_1^2+B\rho_2+c^2a^2)}{E},\\ z_1 &= -\frac{z_0(\rho_1^2-c^4)}{c^2+\rho_2}\,\frac{(\rho_1^2+C\rho_2+a^2b^2)}{E},\end{aligned}\right.$$

**7.** Nous avons ainsi ce premier théorème :

THÉORÈME I. — *Sur chaque rayon il y a deux* FOYERS $f_0$ *et* $f_1$ ; *si* $\rho_1$ *et* $\rho_2$ *sont les valeurs des paramètres qui déterminent ce rayon, les coordonnées* $x_0, y_0, z_0$ *du premier foyer* $f_0$ *sont définies par les équations*

$$(1^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} b_1^2c_1^2x_0^2 &= (\rho_1^2-a^4)(\rho_2+a^2),\\ c_1^2a_1^2y_0^2 &= (\rho_1^2-b^4)(\rho_2+b^2),\\ a_1^2b_1^2z_0^2 &= (\rho_1^2-c^4)(\rho_2+c^2);\end{aligned}\right.$$

*les coordonnées* $x_1, y_1, z_1$ *du second foyer* $f_1$ *sont données par les équa-*

*tions*

$$(18)\quad (2^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_0}{a^2+\rho_2}\left(a^2-\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}}\right) = -\frac{x_0(\rho_1^2-a^4)(\rho_1^2+\mathrm{A}\rho_2+b^2c^2)}{(a^2+\rho_2)\mathrm{E}},\\ y_1 &= \frac{y_0}{b^2+\rho_2}\left(b^2-\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}}\right) = -\frac{y_0(\rho_1^2-b^4)(\rho_1^2+\mathrm{B}\rho_2+c^2a^2)}{(b^2+\rho_2)\mathrm{E}},\\ z_1 &= \frac{z_0}{c^2+\rho_2}\left(c^2-\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}}\right) = -\frac{z_0(\rho_1^2-c^4)(\rho_1^2+\mathrm{C}\rho_2+a^2b^2)}{(e^2+\rho_2)\mathrm{E}},\end{aligned}\right.$$

*les quantités* E *et* F *étant définies par les égalités* (3).

*La distance $\delta$ des deux foyers est donnée par la formule*

$$(3^\circ)\qquad \delta = -\frac{\mathrm{F}+\rho_2\mathrm{E}}{\mathrm{E}}\sqrt{\frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{\mathrm{D}}};$$

*et si $r_1$, $r_2$ sont les distances du foyer $f_0$ aux deux points où le rayon rencontre la surface $\Delta$, on a*

$$(4^\circ)\qquad r_1+r_2 = -2\sqrt{\frac{\mathrm{D}}{\rho_2^2-\rho_1^2}},\quad r_1 r_2 = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}}+\rho_2.$$

*Pour les foyers $f_0$ la* SURFACE FOCALE *est la surface $\Delta$ déjà rencontrée et étudiée dans le premier Mémoire ; pour les foyers $f_1$ la* SURFACE FOCALE *est une certaine surface que je désignerai par $\Sigma$. Les rayons* (R) *touchent tous les surfaces $\Delta$ et $\Sigma$.*

On pourrait obtenir l'équation de la surface $\Sigma$ en éliminant $\rho_1$ et $\rho_2$ entre les équations (18) ($2^\circ$); nous la trouverons plus loin par une méthode beaucoup plus simple.

*Remarque I.* — Le paramètre $\rho_2$ devra varier entre des limites différentes suivant que le point $(x_0, y_0, z_0)$ appartient à la nappe inférieure ou à la nappe supérieure de la surface $\Delta$ ; et d'après les formules (23) et (24), ($3^\circ$), n° [[11]], et les inégalités (14), n° [[5]], on a pour la nappe supérieure

$$-b^2 < \rho_2 < -c^2;$$

pour la nappe inférieure

$$-a^2 < \rho_2 < -b^2.$$

*Remarque II.* — Il a été convenu que, dans toutes les formules qui précèdent, le radical $\sqrt{\frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{D}}$ doit être pris avec une valeur absolue positive, lorsque cette valeur est réelle.

**8.** Les équations (3°) et (4°) du groupe (18) donnent

$$\delta = r_1 r_2 \frac{2}{r_1+r_2} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{\delta} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$

De là ce second théorème :

THÉORÈME II. — *Entre la distance $\delta$ des deux foyers et les distances $r_1$, $r_2$ du foyer $f_0$ aux points où le rayon rencontre la première focale $\Delta$, on a la relation simple*

$$\frac{2}{\delta} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}: \tag{19}$$

c'est-à-dire que *les deux foyers $f_0$, $f_1$ et les deux points* $R_1$, $R_2$ *où le rayon* (R) *coupe la surface $\Delta$ forment un système harmonique.*

**9.** Nous allons nous occuper, en second lieu, de la recherche des *plans focaux* relatifs au rayon (R), c'est-à-dire des plans renfermant le rayon (R) et l'un ou l'autre des rayons qui le rencontrent.

Ce plan devant contenir le rayon (R) passera par le point $(x_0, y_0, z_0)$ et sera parallèle à la direction dont les cosinus sont proportionnels à $\frac{x_0}{a^2+\rho_2}$, $\frac{y_0}{b^2+\rho_2}$, $\frac{z_0}{c^2+\rho_2}$; si on l'assujettit en outre à être parallèle au rayon infiniment voisin $\frac{x_0}{a^2+\rho_2} + d\frac{x_0}{a^2+\rho_2}, \ldots$, son équation sera

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ \frac{x_0}{a^2+\rho_2} & \frac{y_0}{b^2+\rho_2} & \frac{z_0}{c^2+\rho_2} & 0 \\ d\frac{x_0}{a^2+\rho_2} & d\frac{y_0}{b^2+\rho_2} & d\frac{z_0}{c^2+\rho_2} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \dfrac{x_0}{a^2+\rho_2} & \dfrac{y_0}{b^2+\rho_2} & \dfrac{z_0}{c^2+\rho_2} \\ d\dfrac{x_0}{a^2+\rho_2} & d\dfrac{y_0}{b^2+\rho_2} & d\dfrac{z_0}{c^2+\rho_2} \end{vmatrix} = 0,$$

ou enfin

$$(1^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} &(x-x_0)\left(\frac{y_0}{b^2+\rho_2}\,d\frac{z_0}{c^2+\rho_2} - \frac{z_0}{c^2+\rho_2}\,d\frac{y_0}{b^2+\rho_2}\right) \\ &+(y-y_0)\left(\frac{z_0}{c^2+\rho_2}\,d\frac{x_0}{a^2+\rho_2} - \frac{x_0}{a^2+\rho_2}\,d\frac{z_0}{c^2+\rho_2}\right) \\ &+(z-z_0)\left(\frac{x_0}{a^2+\rho_2}\,d\frac{y_0}{b^2+\rho_2} - \frac{y_0}{b^2+\rho_2}\,d\frac{x_0}{a^2+\rho_2}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Or des égalités (12 *bis*) on tire

$$\begin{aligned} &\frac{y_0}{b^2+\rho_2}\,d\frac{z_0}{c^2+\rho_2} - \frac{z_0}{c^2+\rho_2}\,d\frac{y_0}{b^2+\rho_2} \\ &\quad = -\frac{A}{a_1^2 b_1^2 c_1^2 y_0 z_0}\rho_1\,d\rho_1 - \frac{1}{2a_1^2 b_1^2 c_1^2 y_0 z_0}\,\frac{D_1}{D}\,\frac{a^2+\rho_2}{\rho_1^2-a^4}\,d\rho_2; \end{aligned}$$

l'équation (1°) devient alors

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &xx_0\left(A\rho_1\,d\rho_1 + \frac{D_1}{2D}\,\frac{a^2+\rho_2}{\rho_1^2-a^4}\,d\rho_2\right) \\ &+yy_0\left(B\rho_1\,d\rho_1 + \frac{D_1}{2D}\,\frac{b^2+\rho_2}{\rho_1^2-b^4}\,d\rho_2\right) \\ &+zz_0\left(C\rho_1\,d\rho_1 + \frac{D_1}{2D}\,\frac{c^2+\rho_2}{\rho_1^2-c^4}\,d\rho_2\right) = (g+\rho_1^2)\rho_1\,d\rho_1 - \frac{D_1}{2D}\,d\rho_2. \end{aligned}\right.$$

Pour le foyer $f_0$, on a, d'après la première des équations (15),

$$d\rho_1 = 0;$$

l'équation (20) devient alors

$$(21)\qquad (F_0)\quad xx_0\frac{a^2+\rho_2}{\rho_1^2-a^4} + yy_0\frac{b^2+\rho_2}{\rho_1^2-b^4} + zz_0\frac{c^2+\rho_2}{\rho_1^2-c^4} + 1 = 0.$$

Pour le foyer $f_1$, on a, d'après la seconde des équations (15),

$$\rho_1\, d\rho_1 = \frac{F + \rho_2 E}{2D}\, d\rho_2,$$

et l'équation (20) devient

$$\begin{aligned} xx_0[A(F+\rho_2E) + (a^2+\rho_2)(\rho_1^2 - b^4)(\rho_1^2 - c^4)] + yy_0[\ldots] + zz_0[\ldots] \\ = (g + \rho_1^2)(F + \rho_2 E) - D_1; \end{aligned}$$

mais on constate aisément que

$$\begin{aligned} A(F + \rho_2 E) + (a^2 + \rho_2)(\rho_1^2 - b^4)(\rho_1^2 - c^4) = E(\rho_1^2 + A\rho_2 + b^2c^2), \\ (g + \rho_1^2)(F + \rho_2 E) - D_1 = E^2, \end{aligned}$$

et l'on a définitivement

$$(22) \quad (F_1) \left\{ \begin{aligned} & xx_0(\rho_1^2 + A\rho_2 + b^2c^2) + yy_0(\rho_1^2 + B\rho_2 + c^2a^2) \\ & \qquad + zz_0(\rho_1^2 + C\rho_2 + a^2b^2) = E. \end{aligned} \right.$$

Le plan $(F_1)$, (22), touche la surface $\Delta$ au point $f_0$, comme cela résulte évidemment de l'équation (27), nº [[**12**]].

Quant au plan $F_0$, il touche la surface $\Sigma$ au point $f_1$. En effet, des formules (18), (2º), on tire

$$dx_1 = \left(a^2 - \frac{F}{E}\right) d\frac{x_0}{a^2 + \rho_1} - \frac{x_0}{a^2 + \rho_2}\, d\frac{F}{E}, \quad dy_1 = \ldots, \quad dz_1 = \ldots;$$

si l'on substitue les valeurs $x_1 + dx_1$, $y_1 + dy_1$, $z_1 + dz_1$, au lieu de $x$, $y$, $z$, dans l'équation (21) du plan $F_0$, il vient

$$\begin{aligned} \sum x_1 x_0 \frac{\rho_2 + a^2}{\rho_1^2 - a^4} + \sum \left(a^2 - \frac{F}{E}\right) x_0 \frac{\rho_2 + a^2}{\rho_1^2 - a^4}\, d\frac{x_0}{a^2 + \rho} \\ - d\frac{F}{E} \sum \frac{x_0^2}{a^2 + \rho_2} \frac{a^2 + \rho_2}{\rho_1^2 - a^4} + 1; \end{aligned}$$

or cette quantité est nulle, quels que soient $d\rho_1$ et $d\rho_2$, car, si l'on a égard aux valeurs (18), (2º), et (12 *bis*), elle se réduit à

$$-1 + \frac{\rho_1\, d\rho_1}{D_1}\left[\frac{F}{E}(\rho_2\rho_1^2 + e\rho_1^2 + g\rho_2 + h) - (\rho_1^4 + e\rho_2\rho_1^2 + g\rho_1^2 + h\rho_2)\right] + 1$$

ou

$$\frac{\rho_1\, d\rho_1}{D_1}\left(F - \frac{F}{E}\,E\right);$$

donc le plan $F_0$ touche en $f_1$ la surface $\Sigma$.

Remarquons enfin que le plan $(F_0)$ est osculateur en $f_0$ à la courbe définie sur la surface $\Delta$ par l'équation

$$d\rho_1 = 0,$$

et que le plan $F_1$ est osculateur en $f_1$ à la courbe définie sur la surface $\Sigma$ par l'équation

$$\rho_1\, d\rho_1 = \frac{F + \rho_2 E}{2D}\, d\rho_2.$$

En effet, considérons, par exemple, le cas

$$d\rho_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \rho_1 = \text{const.};$$

lorsqu'un rayon infiniment voisin du rayon (R) (ou $f_0 f_1$) vient couper celui-ci en $f_0$, ce rayon décrit un élément de surface développable ayant pour arête de rebroussement la courbe $\rho_1 = \text{const.}$; le plan $(F_0)$, passant par (R) et parallèle au rayon infiniment voisin, devient, à la limite, tangent à la surface développable le long de $f_0 f_1$, et par conséquent osculateur en $f_0$ à l'arête de rebroussement. De plus, ce même plan, contenant les rayons $f_0 f_1$ et $f'_0 M_1$ respectivement tangents à la surface $\Sigma$ en $f_1$ et $M_1$, deviendra, à la limite, tangent à la surface $\Sigma$ en $f_1$, puisque la sécante $f_1 M_1$ devient tangente en $f_1$.

Il en sera de même pour le plan $(F_1)$, lequel sera osculateur en $f_1$ et touchera $\Delta$ en $f_0$.

Ainsi :

Théorème III. — *Les* plans focaux *relatifs au rayon* $(\rho_1, \rho_2)$ *ont respectivement pour équations*

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{lll} (F_0) & (1^\circ) & x x_0 \dfrac{\rho_2 + a^2}{\rho_1^2 - a^4} + y y_0 \dfrac{\rho_2 + b^2}{\rho_1^2 - b^4} + z z_0 \dfrac{\rho_2 + c^2}{\rho_1^2 - c^4} + 1 = 0, \\ (F_1) & (2^\circ) & \left\{\begin{array}{l} x x_0(\rho_1^2 + A\rho_2 + b^2 c^2) + y y_0(\rho_1^2 + B\rho_2 + c^2 a^2) \\ \qquad + z z_0(\rho_1^2 + C\rho_2 + a^2 b^2) = E. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

*Le plan focal* ($F_0$), *correspondant au foyer* $f_0$, *touche la surface* $\Sigma$ *en* $f_1$ *et est osculateur en* $f_0$ *à la courbe que le rayon touche sur la surface* $\Delta$, *courbe définie par l'équation*

$$(3^\circ) \qquad d\rho_1 = 0;$$

*le plan focal* ($F_1$), *correspondant au foyer* $f_1$, *touche la surface* $\Delta$ *en* $f_0$ *et est osculateur en* $f_1$ *à la courbe que le rayon touche sur la surface* $\Sigma$, *courbe définie par l'équation*

$$(4^\circ) \qquad \rho_1\, d\rho_1 = \frac{F + \rho_2 E}{2D}\, d\rho_2.$$

*Ajoutons que le plan focal* ($F_0$) *touche l'hyperboloïde* (H), n° [3], *au point* ($x_0$, $y_0$, $z_0$).

**10.** Désignons par $U_0$, $V_0$, $W_0$ et $U_1$, $V_1$, $W_1$ les coordonnées des plans ($F_0$) et ($F_1$); on a

$$(24) \qquad \left\{\begin{array}{ll} (F_0) & \left\{\begin{array}{l} U_0 = -x_0 \dfrac{\rho_2 + a^2}{\rho_1^2 - a^4}, \\ V_0 = -y_0 \dfrac{\rho_2 + b^2}{\rho_1^2 - b^4}, \\ W_0 = -z_0 \dfrac{\rho_2 + c^2}{\rho_1^2 - c^4}; \end{array}\right. \\ (F_1) & \left\{\begin{array}{l} U_1 = x_0 \dfrac{\rho_1^2 + A\rho_2 + b^2c^2}{E}, \\ V_1 = y_0 \dfrac{\rho_1^2 + B\rho_2 + c^2a^2}{E}, \\ W_1 = z_0 \dfrac{\rho_1^2 + C\rho_2 + a^2b^2}{E}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Si l'on transporte ces valeurs dans les formules (18), (2°), on trouve

$$\frac{U_1}{x_1} = \frac{U_0}{x_0}, \quad \frac{V_1}{y_1} = \frac{V_0}{y_0}, \quad \frac{W_1}{z_1} = \frac{W_0}{z_0}.$$

Donc :

Théorème IV. — Si $x_0$, $y_0$, $z_0$ *et* $x_1$, $y_1$, $z_1$ *sont les coordonnées des foyers* $f_0$ *et* $f_1$, *situés sur un même rayon* (R); *si* $U_0$, $V_0$, $W_0$ *sont les* *coordonnées du plan focal* ($F_0$) *osculateur en* $f_0$ *et touchant la surface* $\Sigma$ *en* $f_1$, *et que* $U_1$, $V_1$, $W_1$ *soient les coordonnées du plan focal* ($F_1$) *osculateur en* $f_1$ *et touchant la surface* $\Delta$ *en* $f_0$, *on a, entre ces éléments, la correspondance très-simple*

$$\frac{x_1}{U_1} = \frac{x_0}{U_0}, \quad \frac{y_1}{V_1} = \frac{y_0}{V_0}, \quad \frac{z_1}{W_1} = \frac{z_0}{W_0}. \tag{25}$$

**11.** Calculons encore l'angle $\theta$ des deux plans focaux ($F_0$) et ($F_1$). D'après les équations (23), on a

$$(1^\circ) \qquad \cos\theta = \frac{\sum x_0^2 \frac{\rho_2 + a^2}{\rho_1^2 - a^4}(\rho_1^2 + A\rho_2 + b^2c^2)}{\sqrt{\sum x_0^2 \frac{(a^2+\rho_2)^2}{(\rho_1^2 - a^4)^2}} \sqrt{\Sigma x_0^2 (\rho_1^2 + A\rho_2 + b^2c^2)^2}};$$

mais on trouve, en ayant égard aux relations (3 *bis*) et aux relations (30), n° [[**13**]]

$$(2^\circ) \left\{ \begin{aligned} &\sum x_0^2 \frac{\rho_2 + a^2}{\rho_1^2 - a^4}(\rho_1^2 + A\rho_2 + b^2c^2) = \rho_2^2 - \rho_1^2, \\ &\sum x_0^2 \frac{(a^2+\rho_2)^2}{(\rho_1^2 - a^4)^2} = -\frac{(\rho_1^2 + \rho_2^2)E + 2\rho_2 F}{D_1}, \\ &\sum x_0^2 (\rho_1^2 + A\rho_2 + b^2c^2)^2 = \sum \frac{1}{b_1^2 c_1^2}(F - a^2E)[E + A(\rho_2^2 - \rho_1^2)] \\ &\qquad = -E(\rho_2^2 - \rho_1^2). \end{aligned} \right.$$

De là résulte

$$\cos^2\theta = \frac{D_1(\rho_2^2 - \rho_1^2)}{E[(\rho_1^2 + \rho_2^2)E + 2\rho_2 F]}, \tag{26}$$

d'où l'on déduit encore

$$\sin^2\theta = \frac{(F + \rho_2 E)^2}{E[(\rho_1^2 + \rho_2^2)E + 2\rho_2 F]}. \tag{27}$$

**12.** Kummer a démontré les propriétés suivantes relatives aux systèmes de rayons :

1° *Les pieds des plus courtes distances d'un rayon à tous les rayons infiniment voisins qui l'entourent se trouvent tous sur un segment déterminé du rayon; les extrémités de ce segment sont nommées* POINTS LIMITES. (KUMMER, *Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 369, année 1860.)

2° *Le point milieu de la distance des foyers coïncide avec le point milieu du segment déterminé par les deux points-limites; ce point milieu a été nommé le* CENTRE *du rayon.* (KUMMER, *Nouvelles Annales*, t. XX, p. 257, année 1861.)

3° *La distance focale est égale à la distance des points limites, multipliée par les sinus de l'angle que font entre eux les plans focaux.* (KUMMER, *Nouvelles Annales*, t. XX, p. 260.)

**13.** Nous avons désigné par $\delta$ la distance des deux foyers; en représentant par $2d$ la distance des deux points limites, on aura, d'après la troisième des propositions qui précèdent,

$$\delta = 2d\sin\theta;$$

et, d'après les formules (18, 3°) et (27), il vient

$$2d\frac{F+\rho_2 E}{\sqrt{E}\sqrt{(\rho_1^2+\rho_2^2)E+2\rho_2 F}} = -\frac{F+\rho_2 E}{E}\sqrt{\frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{D}},$$

ou, en réduisant,

$$(28)\qquad 2d = -\sqrt{\frac{(\rho_2^2-\rho_1^2)}{DE}}\sqrt{(\rho_1^2+\rho_2^2)E+2\rho_2 F}.$$

Si $l$ et $l_0$ sont les distances des points limites au foyer $f_0$, on a

$$l - l_0 = 2d,$$

et, d'après la proposition (2°)

$$\frac{\delta}{2} = \frac{l+l_0}{2};$$

d'où l'on déduit

$$2l = 2d + \delta.$$

En remplaçant dans cette dernière égalité $2d$ et $\delta$ par leurs valeurs (28) et (18, 3°), il vient

$$(29)\qquad 2l = -\frac{F+\rho_2 E}{E}\sqrt{\frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{D}} - \sqrt{\frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{DE}}\sqrt{(\rho_1^2+\rho_2^2)E+2\rho_2 F}.$$

Si l'on veut introduire la quantité $\lambda$, qui figure dans les équations du rayon, il faut avoir égard à la relation (6) et remplacer $l$ par $\lambda\sqrt{\frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{D}}$, ce qui donne

$$(30)\qquad 2\lambda = -\frac{F+\rho_2 E}{E} - \sqrt{\frac{(\rho_1^2+\rho_2^2)E+2\rho_2 F}{E}}.$$

D'après cela, eu égard aux équations (1), nous avons :

Théorème V. — *Les coordonnées* $x'$, $y'$, $z'$ *des* points limites *sont définies par les équations*

$$(31)\qquad \begin{cases} x' = x_0 + \dfrac{x_0}{a^2+\rho_2}\lambda', \\ y' = y_0 + \dfrac{y_0}{b^2+\rho_2}\lambda', \\ z' = z_0 + \dfrac{z_0}{c^2+\rho_2}\lambda', \end{cases}$$

*où* $\lambda'$ *est une quelconque des racines de l'équation*

$$(32)\qquad \lambda^2 + \frac{F+\rho_2 E}{E}\lambda + \frac{F^2-\rho_1^2 E^2}{4E^2} = 0.$$

*Les distances* $l$ *des points limites au foyer* $f_0$ *seront données par l'équation*

$$(33)\qquad l^2 + \sqrt{\frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{D}}\,\frac{F+\rho_2 E}{E}\,l + \frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{D}\,\frac{F^2-\rho_1^2 E^2}{E^2} = 0.$$

*Si* $d$ *est la demi-distance des points limites, et si* $r_1$ *et* $r_2$ *sont les distances du foyer* $f_0$ *aux points où le rayon rencontre la surface* $\Delta$, *on a encore*

$$(34)\qquad d^2 = \frac{2\rho_2 r_1 r_2 - (\rho_2^2-\rho_1^2)}{(r_1+r_2)^2}.$$

L'équation de la surface décrite par les points limites s'obtiendrait en éliminant $\rho_1$, $\rho_2$ et $\lambda$ entre les quatre équations (31) et (32), après y avoir remplacé $x_0$, $y_0$, $z_0$ par leurs valeurs (2).

**14.** La recherche des foyers, nos 5 et 6, nous conduit en même temps aux équations des courbes que les rayons doivent toucher sur chaque surface focale.

*Surface focale* $\Delta$.

Pour les foyers $f_0$, lesquels appartiennent à la surface $\Delta$, on a

$$d\rho_1 = 0, \quad \text{ou} \quad \rho_1 = \text{const.};$$

donc, pour la courbe $\rho_1 = \text{const.}$, il y a un rayon infiniment voisin de R, qui rencontre R (aux infiniment petits du second ordre près); et, par suite, lorsque le rayon R se déplace pour venir coïncider avec ce rayon infiniment voisin, il le fait en touchant la courbe $\rho_1 = \text{const.}$ Réciproquement, si le rayon R se déplace en touchant une courbe tracée sur la surface $\Delta$, on devra avoir $d\rho_1 = 0$, puisque alors il rencontre le rayon infiniment voisin.

D'ailleurs, pour les points de la surface $\Delta$, on a, s'il s'agit, par exemple, de la nappe supérieure, $\rho_1 = -\rho_3$, (23), n° [[11]]; donc les courbes $\rho_1 = \text{const.}$ sont des lignes de courbure de la surface $(\rho_1)$, et ces lignes de courbure seront de systèmes différents pour $(\rho_1)$ lorsqu'on passera d'une nappe à une autre sur la surface $\Delta$, n° [[11]].

Ajoutons que les rayons du système ne peuvent jamais être des tangentes principales pour la surface $\Delta$.

Voici comment on peut démontrer cette dernière proposition :

Les coordonnées $x_0$, $y_0$, $z_0$ d'un point quelconque de la surface $\Delta$ peuvent être considérées comme des fonctions, définies par les équations (2), des paramètres arbitraires $\rho_1$ et $\rho_2$; d'après cela, si l'on pose

$$(1^\circ)\qquad \left\{\begin{aligned} X_0 &= \frac{dy_0}{d\rho_1}\frac{dz_0}{d\rho_2} - \frac{dy_0}{d\rho_2}\frac{dz_0}{d\rho_1},\\ Y_0 &= \frac{dz_0}{d\rho_1}\frac{dx_0}{d\rho_2} - \frac{dz_0}{d\rho_2}\frac{dx_0}{d\rho_1},\\ Z_0 &= \frac{dx_0}{d\rho_1}\frac{dy_0}{d\rho_2} - \frac{dx_0}{d\rho_2}\frac{dy_0}{d\rho_1},\end{aligned}\right.$$

les équations de la normale en $(x_0, y_0, z_0)$ à la surface $\Delta$ seront

$$(2^\circ)\qquad \frac{x - x_0}{X_0} = \frac{y - y_0}{Y_0} = \frac{z - z_0}{Z_0},$$

ou

$$(3^\circ)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \mu X_0, \\ y = y_0 + \mu Y_0, \\ z = z_0 + \mu Z_0; \end{cases}$$

car, si l'on remplace $x_0, y_0, z_0$ par leurs valeurs (2) dans l'équation $\Delta = 0$, on a une identité en $\rho_1$ et $\rho_2$; par suite,

$$\frac{d\Delta}{dx_0}\frac{dx_0}{d\rho_1} + \frac{d\Delta}{dy_0}\frac{dy_0}{d\rho_1} + \frac{d\Delta}{dz_0}\frac{dz_0}{d\rho_1} = 0,$$
$$\frac{d\Delta}{dx_0}\frac{dx_0}{d\rho_2} + \frac{d\Delta}{dy_0}\frac{dy_0}{d\rho_2} + \frac{d\Delta}{dz_0}\frac{dz_0}{d\rho_2} = 0;$$

d'où il résulte

$$\frac{\frac{d\Delta}{dx_0}}{X_0} = \frac{\frac{d\Delta}{dy_0}}{Y_0} = \frac{\frac{d\Delta}{dz_0}}{Z_0};$$

ce qui conduit immédiatement aux équations (2°) de la normale.

Si la normale (3°) est rencontrée par la normale infiniment voisine, on devra avoir

$$dx_0 + \mu dX_0 + X_0 d\mu = 0,$$
$$dy_0 + \mu dY_0 + Y_0 d\mu = 0,$$
$$dz_0 + \mu dZ_0 + Z_0 d\mu = 0;$$

en éliminant $\mu$ et $d\mu$, il vient

$$(4^\circ)\qquad \begin{vmatrix} dx_0 & dX_0 & X_0 \\ dy_0 & dY_0 & Y_0 \\ dz_0 & dZ_0 & Z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Or, si le rayon (R) est une tangente principale en $(x_0, y_0, z_0)$ à la surface $\Delta$, il doit d'abord toucher une courbe tracée sur cette surface, et l'on aura, d'après ce qui précède, $d\rho_1 = 0$; l'équation de condition (4°) devient alors

$$(5°)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{dx_0}{d\rho_2} & \dfrac{dX_0}{d\rho_2} & X_0 \\ \dfrac{dy_0}{d\rho_2} & \dfrac{dY_0}{d\rho_2} & Y_0 \\ \dfrac{dz_0}{d\rho_2} & \dfrac{dZ_0}{d\rho_2} & Z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

En ayant égard aux valeurs (1°) de $X_0$, $Y_0$, $Z_0$, cette dernière équation pourra s'écrire

$$(6°)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(X_0 \frac{d^2x_0}{d\rho_2^2} + Y_0 \frac{d^2y_0}{d\rho_2^2} + Z_0 \frac{d^2z_0}{d\rho_2^2}\right)\left(\frac{dx_0}{d\rho_1}\frac{dx_0}{d\rho_2} + \frac{dy_0}{d\rho_1}\frac{dy_0}{d\rho_2} + \frac{dz_0}{d\rho_1}\frac{dz_0}{d\rho_2}\right) \\ -&\left(X_0 \frac{d^2x_0}{d\rho_1 d\rho_2} + Y_0 \frac{d^2y_0}{d\rho_1 d\rho_2} + Z_0 \frac{d^2z_0}{d\rho_1 d\rho_2}\right)\left[\left(\frac{dx_0}{d\rho_2}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{d\rho_2}\right)^2 + \left(\frac{dz_0}{d\rho_2}\right)^2\right] \end{aligned} \right\} = 0.$$

Or on tire des équations (2)

$$(7°)\qquad \left\{ \begin{array}{ll} x_0 \dfrac{dx_0}{d\rho_1} = \dfrac{\rho_1(a^2+\rho_2)}{b_1^2 c_1^2}, & x_0 \dfrac{d^2x_0}{d\rho_1 d\rho_2} = \dfrac{\rho_1}{2 b_1^2 c_1^2}, \\ x_0 \dfrac{dx_0}{d\rho_2} = \dfrac{\rho_1^2 - a^4}{2 b_1^2 c_1^2}, & X_0 \dfrac{1}{2 a_1^2 b_1^2 c_1^2} \dfrac{\rho_1}{y_0 z_0} (\rho_1^2 + A\rho_2 + b^2 c^2). \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

On constate immédiatement que

$$\frac{dx_0}{d\rho_1}\frac{dx_0}{d\rho_2} + \frac{dy_0}{d\rho_1}\frac{dy_0}{d\rho_2} + \frac{dz_0}{d\rho_1}\frac{dz_0}{d\rho_2} = 0,$$

ce qui est d'ailleurs visible *à priori;* et l'égalité (6°), à vérifier, devient, après la substitution des valeurs (7°) et quelques réductions immédiates,

$$(8°)\qquad a_1^2 b_1^2 c_1^2 (\rho_1^2 - \rho_2^2) = 0.$$

Or la supposition $\rho_1^2 = \rho_2^2$ donne des points doubles de la surface $\Delta$.

Ainsi les rayons du système ne peuvent pas être des tangentes principales de la surface $\Delta$; et, par conséquent, les courbes touchées sur cette surface par les rayons du système ne peuvent pas être des lignes de courbure de $\Delta$.

Nous avons donc cette proposition :

THÉORÈME VI. — *Les rayons du système forment une série de développables déterminées par les tangentes aux courbes $\rho_1 = const.$; ces courbes, intersections de la surface $\Delta$ avec les ellipsoïdes homofocaux $\rho_1 = const.$, sont des lignes de courbure pour les ellipsoïdes $(\rho_1)$; elles seront d'une certaine espèce quand il s'agira de la nappe supérieure de $\Delta$, et d'une autre espèce quand on passera à la nappe inférieure; mais elles ne sont pas des lignes de courbure pour la surface $\Delta$.*

*Les rayons du système ne sont jamais des tangentes principales pour la surface $\Delta$.*

**15.** Les surfaces développables, engendrées par les rayons du système, sont osculatrices à des courbes gauches du quatrième ordre, intersection de deux surfaces homofocales du second ordre, telles que

$$\rho_1 = r \quad \text{et} \quad \rho_3 = -r,$$

$r$ étant une constante. Ces surfaces développables sont du huitième ordre et de douzième classe; elles possèdent donc les propriétés générales appartenant à cette variété de développables, propriétés signalées par MM. Chasles, Cayley, Salmon (*Comptes rendus*, t. LIV; 1862, etc.).

Cependant il n'est pas sans intérêt de chercher, dans le cas actuel, les équations, soit ponctuelles, soit tangentielles de ces surfaces développables, qui présentent ici des singularités qu'elles n'ont pas dans le cas général.

Cherchons d'abord les *équations tangentielles*.

Le plan osculateur en $(x_0, y_0, z_0)$ à la courbe $\rho_1 = r$, touchée par les rayons du système, est le plan focal correspondant au foyer $f_0$, et, d'après l'équation (23, 1°), ses coordonnées $u, v, w$ seront, après avoir fait $\rho_1 = r$,

$$(35) \qquad u = -x_0 \frac{\rho_2 + a^2}{r^2 - a^4}, \quad v = -y_0 \frac{\rho_2 + b^2}{r^2 - b^4}, \quad w = -z_0 \frac{\rho_2 + c^2}{r^2 - c^4};$$

on a, en outre,

$$(35\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} b_1^2c_1^2x_0^2 &= (r^2-a^4)(a^2+\rho_2),\\ c_1^2a_1^2y_0^2 &= (r^2-b^4)(b^2+\rho_2),\\ a_1^2b_1^2z_0^2 &= (r^2-c^4)(c^2+\rho_2).\end{aligned}\right.$$

On obtiendra les équations de la développable en éliminant $\rho_2$, $x_0$, $y_0$, $z_0$ entre ces six équations. Remplaçons d'abord, dans les équations (35), $x_0, y_0, z_0$ par leurs valeurs (35 *bis*), et posons, pour un instant,

$$(1^\circ)\qquad U=(r^2-a^4)u^2,\quad V=(r^2-b^4)v^2,\quad W=(r^2-c^4)w^2,$$

il vient

$$(2^\circ)\qquad \left\{\begin{aligned} a_1^2b_1^2c_1^2U &= a_1^2(\rho_2^3+3a^2\rho_2^2+3a^4\rho_2+a^6),\\ a_1^2b_1^2c_1^2V &= b_1^2(\rho_2^3+3b^2\rho_2^2+3b^4\rho_2+b^6),\\ a_1^2b_1^2c_1^2W &= c_1^2(\rho_2^3+3c^2\rho_2^2+3c^4\rho_2+c^6);\end{aligned}\right.$$

il s'agit d'éliminer $\rho_2$ entre les trois équations (2°).

Ajoutons les équations (2°); ajoutons-les encore après les avoir respectivement multipliées par A, B, C, puis par $b^2c^2$, $c^2a^2$, $a^2b^2$; nous les remplacerons alors par le système suivant, relations (28), n° [15] :

$$(3^\circ)\qquad \left\{\begin{aligned} -3\rho_2 &= U+V+W+e,\\ 3\rho_2^2 &= AU+BV+CW+g,\\ -\rho_2^3 &= b^2c^2U+c^2a^2V+a^2b^2W+h.\end{aligned}\right.$$

En désignant, pour un instant, par M, N, P les seconds membres des équations (3°), on a

$$-3\rho_2=M,\quad 3\rho_2^2=N,\quad -\rho_2^3=P;$$

d'où l'on conclut

$$\rho_2=-\frac{M}{3},\quad \rho_2=-\frac{N}{M},\quad \rho_2=-\frac{3P}{N};$$

ce qui donne les égalités de rapports

$$(4^\circ)\qquad \frac{M}{3} = \frac{N}{M} = \frac{3P}{N};$$

d'où résultent les trois équations

$$(4^\circ\ bis)\qquad M^2 - 3N = 0, \quad MN - 9P = 0, \quad N^2 - 3MP = 0.$$

En remplaçant M, N, P et U, V, W par leurs valeurs, on voit que *la développable exige, pour être définie complétement, sans solutions étrangères, les trois équations tangentielles* ($4^\circ$).

Ces équations nous montrent que la développable est de douzième classe.

*Remarque.* — Si l'on veut étudier plus complétement cette développable, il sera préférable de conserver $\rho_2$ comme variable indépendante, et de définir les coordonnées d'un quelconque de ses plans tangents par les équations

$$(36)\qquad b_1^2c_1^2u^2 = \frac{(a^2+\rho_2)^3}{r^2-a^4}, \quad c_1^2a_1^2v^2 = \frac{(b^2+\rho_2)^3}{r^2-b^4}, \quad a_1^2b_1^2w^2 = \frac{(c^2+\rho_2)^3}{(r^2-c^4}.$$

Cherchons, en second lieu, l'*équation ponctuelle* de cette développable.

Les équations d'un rayon touchant la courbe $\rho_1 = r$ seront données par les équations (1) et (2), où l'on introduira l'hypothèse $\rho_1 = r$; on a ainsi

$$(37)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \dfrac{\lambda x_0}{a^2+\rho_2}, \\ y = y_0 + \dfrac{\lambda y_0}{b^2+\rho_2}, \\ z = z_0 + \dfrac{\lambda z_0}{c^2+\rho_2}; \end{cases}$$

$$(37\ bis)\qquad \begin{cases} b_1^2c_1^2x_0^2 = (r^2-a^4)(a^2+\rho_2), \\ c_1^2a_1^2y_0^2 = (r^2-b^4)(b^2+\rho_2), \\ a_1^2b_1^2z_0^2 = (r^2-c^4)(c^2+\rho_2). \end{cases}$$

L'équation de la développable engendrée s'obtiendra en éliminant $x_0$, $y_0$, $z_0$, $\lambda$, $\rho_2$ entre ces six équations.

Si l'on pose $\lambda + \rho_2 = \mu$, les équations (37) donnent

$$x_0 = \frac{a^2 + \rho_2}{a^2 + \mu} x, \quad y_0 = \frac{b^2 + \rho_2}{b^2 + \mu} y, \quad z_0 = \frac{c^2 + \rho_2}{c^2 + \mu} z;$$

substituons ces valeurs dans les équations (37 *bis*), il vient

$$(1^\circ) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(a^2 + \mu)^2 + (a^2 + \rho_2)\, X = 0, \\ &(b^2 + \mu)^2 + (b^2 + \rho_2)\, Y = 0, \\ &(c^2 + \mu)^2 + (c^2 + \rho_2)\, Z = 0; \end{aligned} \right.$$

en posant pour un instant

$$(2^\circ) \qquad X = \frac{b_1^2 c_1^2}{a^4 - r^2} x^2, \quad Y = \frac{c_1^2 a_1^2}{b^4 - r^2} y^2, \quad Z = \frac{a_1^2 b_1^2}{c^4 - r^2} z^2.$$

Des équations (1°) on déduit, en éliminant $\rho_2$,

$$(3^\circ) \qquad \frac{(a^2 + \mu)^2 + a^2 X}{X} = \frac{(b^2 + \mu)^2 + b^2 Y}{Y} = \frac{(c^2 + \mu)^2 + c^2 Z}{Z};$$

on conclut de là, en comparant ces rapports,

$$\begin{aligned} &\mu^2 (Z - Y) + 2\mu (b^2 Z - c^2 Y) + b^4 Z - c^4 Y + a_1^2 YZ = 0, \\ &\mu^2 (X - Z) + 2\mu (c^2 X - a^2 Z) + c^4 X - a^4 Z + b_1^2 ZX = 0. \end{aligned}$$

L'élimination de $\mu$ est maintenant facile; si l'on remplace X, Y, Z par leurs valeurs (2°) et qu'on pose

$$(38) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Phi = {} & a_1^4 (a^4 - r^2) y^2 z^2 + b_1^4 (b^4 - r^2) z^2 x^2 \\ & + c_1^4 (c^4 - r^2) x^2 y^2 - K \left( \frac{A x^2}{a^4 - r^2} + \frac{B y^2}{b^4 - r^2} + \frac{C z^2}{c^4 - r^2} \right), \\ \Psi = {} & a^2 a_1^4 (a^4 - r^2) y^2 z^2 + b^2 b_1^4 (b^4 - r^2) z^2 x^2 \\ & + c^2 c_1^4 (c^4 - r^2) x^2 y^2 - K \left( \frac{b^2 c^2 x^2}{a^4 - r^2} + \frac{c^2 a^2 y^2}{b^4 - r^2} + \frac{a^2 b^2 z^2}{c^4 - r} \right), \\ P = {} & K \left( \frac{x^2}{a^4 - r^2} + \frac{y^2}{b^4 - r^2} + \frac{z^2}{c^4 - r^2} \right), \end{aligned} \right.$$

où

$$K = (a^4 - r^2)(b^4 - r^2)(c^4 - r^2),$$

l'*équation de la surface développable* est

$$(39) \qquad \Phi^2 + 4P\Psi = 0.$$

Nous devons encore remarquer que les coordonnées d'un point quelconque de la surface développable s'expriment en fonction des deux paramètres arbitraires $\mu$ et $\rho_2$ par les formules suivantes :

$$(40) \quad y^2 = \frac{r^2 - a^4}{b_1^2 c_1^2} \frac{(a^2 + \mu)^2}{a^2 + \rho_2}, \quad x^2 = \frac{r^2 - b^4}{c_1^2 a_1^2} \frac{(b^2 + \mu)^2}{b^2 + \rho_2}, \quad z^2 = \frac{r^2 - c^4}{a_1^2 b_1^2} \frac{(c^2 + \mu)^2}{c^2 + \rho_2}.$$

Ces dernières formules résultent des égalités (1°) et (2°).

L'équation (39) met en évidence plusieurs propriétés de cette développable, qui est du huitième ordre et de la douzième classe.

1° L'origine, c'est-à-dire le centre de l'ellipsoïde donné, est un *point quadruple* quadriplanaire *isolé;* car les quatre plans tangents en ce point sont imaginaires.

2° Le cône des directions asymptotiques, ou cône directeur de la surface développable, est

$$(41) \quad a_1^4(a^4 - r^2)y^2z^2 + b_1^4(b^4 - r^2)z^2x^2 + c_1^4(c^4 - r^2)x^2y^2 = 0;$$

lorsqu'on fait varier $r$, c'est-à-dire lorsqu'on change l'arête de rebroussement de la développable, les cônes (41) passent constamment par les trois axes $Ox$, $Oy$, $Oz$, qui sont des arêtes doubles, et par les quatre droites imaginaires

$$(42) \qquad \frac{Ax^2}{a_1^2} = \frac{By^2}{b_1^2} = \frac{Cz^2}{c_1^2}.$$

Ces quatre directions ont un rôle particulier dans le système de rayons; remarquons de suite que, si l'on considère une de ces directions, par exemple

$$+\frac{a_1}{\sqrt{A}}, \quad +\frac{b_1}{\sqrt{B}}, \quad +\frac{c_1}{\sqrt{C}},$$

il y a une *infinité de rayons* parallèles à cette direction; tous ces rayons sont situés dans le plan

$$(43) \qquad a_1 x\sqrt{A} + b_1 y\sqrt{B} + c_1 z\sqrt{C} = 0.$$

De là nous concluons :

THÉORÈME VII. — *Les surfaces développables, engendrées par les rayons du système touchant les courbes déterminées sur la surface* $\Delta$ *par les ellipsoïdes* $\rho_1 = \text{const.}$, *sont des développables du huitième ordre et de douzième classe; elles possèdent, au centre* O *de la surface* $\Delta$, *un point quadruple isolé quadriplanaire. Ces développables constituent un premier groupement naturel des rayons du système.*

*Les cônes directeurs de ces développables ont les axes* $Ox$, $Oy$, $Oz$ *pour droites doubles, et, en outre, passent tous par les quatre droites fixes imaginaires*

$$(42) \qquad \frac{Ax^2}{a_1^2} = \frac{By^2}{b_1^2} = \frac{Cz^2}{c_1^2}.$$

*Surface focale* $\Sigma$.

**16.** Pour les foyers $f_1$, lesquels appartiennent à la surface que nous avons nommée $\Sigma$, on a (théorème III), n° [**9**],

$$\rho_1 d\rho_1 = \frac{F + \rho_2 E}{2D} d\rho_2 \quad \text{ou} \quad \frac{2\rho_1 d\rho_1}{(\rho_1^2+\rho_2^2)(\rho_1^2+g)+2\rho_2(e\rho_1^2+h)} = \frac{d\rho_2}{\rho_2^3+e\rho_2^2+g\rho_2+h},$$

dont l'intégrale est

$$(44) \qquad \varphi(\rho_1, \rho_2) = \rho_1^2 - \rho_2^2 + \frac{D}{\rho_2 + \text{const.}} = 0.$$

Si à cette équation (44) on joint les équations (18), n° **7**, on aura, par l'élimination de $\rho_1$ et $\rho_2$, deux équations en $x_1$, $y_1$, $z_1$, qui détermineront une courbe tracée sur la surface focale $\Sigma$; désignons cette courbe par $C_\sigma$.

Pour la courbe $C_\sigma$, il y a un rayon infiniment voisin de R qui rencontre R (aux infiniment petits du second ordre près), et, par conséquent, lorsque le rayon R se déplace pour venir coïncider avec ce rayon infiniment voisin, il le fait en touchant la courbe $C_\sigma$; réciproquement, si le rayon R se déplace en touchant une courbe tracée sur la surface $\Sigma$, on devra avoir $\varphi(\rho_1, \rho_2) = 0$, puisque alors il doit rencontrer le rayon infiniment voisin.

Le plan osculateur en $(x_1, y_1, z_1)$ à la courbe $C_\sigma$, touchée par les rayons du système, est le plan focal correspondant au foyer $f_1$, et, d'après l'équation (23) (2°), ses coordonnées sont

$$(45)\quad u = \frac{x_0(\rho_1^2 + A\rho_2 + b^2c^2)}{E},\quad v = \frac{y_0(\rho_1^2 + B\rho_2 + c^2a^2)}{E},\quad w = \frac{z_0(\rho_1^2 + C\rho_2 + a^2b^2)}{E},$$

$x_0, y_0, z_0$ ayant toujours les valeurs (2), n° **2**; seulement $\rho_1$ et $\rho_2$ sont ici liées par la relation (44).

Si l'on désigne par $k$ la valeur de la constante arbitraire qui entre dans l'équation (44), qu'on ait égard aux valeurs (2), à la relation (44), et qu'on pose

$$(46)\qquad m = \frac{k-e}{k-a^2},\quad n = \frac{k-e}{k-b^2},\quad p = \frac{k-e}{k-c^2},$$

on trouve, après l'élimination de $\rho_1$ et $\rho_2$, entre (4), (44) et (45) :

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} &b_1^2 pw^2 - c_1^2 n v^2 = 1,\\ &c_1^2 mu^2 - a_1^2 pw^2 = 1,\\ &a_1^2 nv^2 - b_1^2 mu^2 = 1.\end{aligned}\right.\qquad \text{d'où}\quad mu^2 + nv^2 + pw^2 = 0,$$

Les équations (47), qui forment un système de *deux équations distinctes*, sont les équations de la développable engendrée par les rayons du système qui touchent la courbe $C_\sigma$.

Cette surface est de quatrième classe et de huitième ordre; les quatre équations (47) définissent ses quatre lignes nodales.

Pour déterminer l'arête de rebroussement, c'est-à-dire la courbe $C_\sigma$, je me servirai des formules que j'ai établies dans mon *Mémoire sur la détermination de l'arête de rebroussement d'une surface développable définie par ses équations tangentielles* (*Journal de Mathématiques pures* *et appliquées*, année 1872, p. 187); on trouve ainsi, pour les coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point quelconque de l'arête de rebroussement,

$$(48)\qquad \begin{cases} x = -m^2 b_1^2 c_1^2 u^3, \\ y = -n^2 c_1^2 a_1^2 v^3, \\ z = -p^2 a_1^2 b_1^2 w^3; \end{cases}$$

$k$ est une constante arbitraire déterminant une courbe individuelle $C_\sigma$ et la surface développable osculatrice correspondante; $m$, $n$, $p$ sont définis par les égalités (46); les variables $u$, $v$, $w$ sont liées par les équations (47), qui forment un système de deux équations distinctes.

Pour obtenir le lieu des courbes $C_\sigma$, c'est-à-dire la seconde surface focale $\Sigma$, il suffit d'éliminer $m$, $n$, $p$, $u$, $v$, $w$, $k$ entre les huit équations (46), (47), (48); le calcul n'offre pas de difficultés sérieuses, et l'on arrive bien ainsi, comme nous l'avons fait, à l'équation de la surface focale $\Sigma$, que nous retrouverons plus loin par une méthode beaucoup plus simple.

**17.** Nous résumerons dans la proposition suivante les propriétés fondamentales établies dans ce premier paragraphe :

Théorème VIII. — *Le système de rayons que nous étudions admet deux surfaces focales distinctes : $\Delta$ (première surface focale) et $\Sigma$ (seconde surface focale).* (Théorème I, n° 7.)

*Considérons un rayon quelconque* (R) *du système et ses deux foyers $f_0$ et $f_1$, qui sont les points où il touche respectivement les deux surfaces focales $\Delta$ et $\Sigma$; les rayons du système touchent, sur la surface $\Delta$, les courbes définies par l'équation*

$$d\rho_1 = 0 \quad ou \quad \rho_1 = \text{const.};$$

*et, sur la surface $\Sigma$, les courbes définies par l'équation*

$$\rho_1 d\rho_1 = \frac{F+\rho_2 E}{D} d\rho_2, \quad ou \quad \rho_1^2 - \rho_2^2 + \frac{D}{\rho_2 + \text{const.}} = 0.$$

*Le plan focal correspondant au foyer $f_0$ touche la surface focale $\Sigma$ en $f_1$ et est osculateur en $f_0$ à la courbe que les rayons du système* *touchent sur $\Delta$ et qui passe par $f_0$; le plan focal correspondant au foyer $f_1$ touche la surface focale $\Delta$ en $f_0$ et est osculateur en $f_1$ à la courbe que les rayons du système touchent sur $\Sigma$ et qui passe par $f_1$.* (Théorème III, n° **9**.)

*Les surfaces développables engendrées par les rayons du système touchant les courbes déterminées sur la surface $\Delta$ par les surfaces* $\rho_1 = \text{const.}$ *sont des développables du huitième ordre et de douzième classe* (théorème VII, n° **15**); *les plans tangents à cette développable touchent en même temps la seconde surface focale $\Sigma$.*

*Les surfaces développables engendrées par les rayons du système touchant les courbes déterminées sur la surface $\Sigma$ par les surfaces* $\rho_1^2 - \rho_2^2 + \dfrac{D}{\rho_2 + \text{const.}} = 0$ *sont des développables du huitième ordre et de quatrième classe* (n° **16**); *les plans tangents à cette développable touchent en même temps la première surface focale $\Delta$. Les quatre lignes nodales de ces dernières surfaces sont dans les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$* [équations (47)].

Ajoutons cette remarque que :

*Les rayons du système étudié ne peuvent pas être les normales à une même surface.*

Cette proposition se démontre immédiatement et de plusieurs manières.

## § II. — Détermination des surfaces focales. Discussion.

**18.** Les droites qui composent le système de rayons que nous étudions sont définies par les équations

$$(1)\quad \begin{cases} x = x_0 + \lambda \dfrac{x_0}{a^2 + \rho_2}, \\ y = y_0 + \lambda \dfrac{y_0}{b^2 + \rho_2}, \\ z = z_0 + \lambda \dfrac{z_0}{c^2 + \rho_2}; \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} b_1^2 c_1^2 x_0^2 = (\rho_1^2 - a^4)(a^2 + \rho_2), \\ c_1^2 a_1^2 y_0^2 = (\rho_1^2 - b^4)(b^2 + \rho_2), \\ a_1^2 b_1^2 z_0^2 = (\rho_1^2 - c^4)(c^2 + \rho_2); \end{cases}$$

$x_0, y_0, z_0$ sont les coordonnées du point où le rayon touche la surface $\Delta$, ou première *surface focale;* c'est le premier foyer $f_0$.

Cherchons d'abord les rayons qui passent par un point $(x', y', z')$ arbitrairement donné; pour cela, nous déterminerons les cônes ayant pour sommet commun le point donné et qui se coupent suivant les rayons cherchés.

Les équations d'un rayon peuvent s'écrire

$$(3)\quad \begin{cases} x = x' + \mu\alpha, \\ y = y' + \mu\beta, \\ z = z' + \mu\gamma; \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad (3\ bis)\quad \begin{cases} \gamma y - \beta z = \gamma y' - \beta z', \\ \alpha z - \gamma x = \alpha z' - \gamma x', \\ \beta x - \alpha y = \beta x' - \alpha y'. \end{cases}$$

La droite (3) appartient d'abord au cône du complexe ayant son sommet au point $(x', y', z')$, c'est-à-dire, d'après l'équation (4), [[n° 4]], au cône

$$(4)\quad \begin{cases} (y'z - z'y)^2 + (z'x - x'z)^2 + (x'y - y'x)^2 \\ \qquad = A(x - x')^2 + B(y - y')^2 + C(z - z')^2. \end{cases}$$

En remplaçant $x, y, z$ par leurs valeurs (3), cette dernière équation deviendra

$$(5)\quad (\gamma y' - \beta z')^2 + (\alpha z' - \gamma x')^2 + (\beta x' - \alpha y')^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2.$$

Les équations (3 *bis*), qui représentent le rayon (1), devront être vérifiées par les valeurs (1) de $x, y, z$, quel que soit $\lambda$, ce qui donne

$$(1^\circ)\quad \begin{cases} \gamma y_0 - \beta z_0 = \gamma y' - \beta z', \\ \alpha z_0 - \gamma x_0 = \alpha z' - \gamma x', \\ \beta x_0 - \alpha y_0 = \beta x' - \alpha y'; \end{cases} \qquad (2^\circ)\quad \frac{x_0}{\alpha(a^2+\rho_2)} = \frac{y_0}{\beta(b^2+\rho_2)} = \frac{z_0}{\gamma(c^2+\rho_2)} = \theta;$$

en substituant les valeurs (2°) de $x_0, y_0, z_0$ dans les égalités (1°), nous obtenons

$$(3^\circ)\quad \begin{cases} a_1^2\beta\gamma.\theta = \gamma y' - \beta z', \\ b_1^2\gamma\alpha.\theta = \alpha z' - \gamma x', \\ c_1^2\alpha\beta.\theta = \beta x' - \alpha y'. \end{cases}$$

Si l'on multiplie ces dernières équations par $x', y', z'$ et qu'on ajoute, on a la seconde équation suivante entre $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ :

$$(6) \qquad a_1^2 x'\beta\gamma + b_1^2 y'\gamma\alpha + c_1^2 z'\alpha\beta = 0.$$

Ainsi :

THÉORÈME IX. — *Les rayons du système menés par le point* $(x', y', z')$ *arbitrairement choisi sont définis par les deux équations*

$$(7) \quad \begin{cases} a_1^2 x'\beta\gamma + b_1^2 y'\gamma\alpha + c_1^2 z'\alpha\beta = 0, \\ (\gamma y' - \beta z')^2 + (\alpha z' - \gamma x')^2 + (\beta x' - \alpha y')^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2, \end{cases}$$

*et les équations du rayon sont*

$$(7\ bis) \quad \begin{cases} x = x' + \mu\alpha, \\ y = y' + \mu\beta, \\ z = z' + \mu\gamma; \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} \gamma y - \beta z = \gamma y' - \beta z', \\ \alpha z - \gamma x = \alpha z' - \gamma x', \\ \beta x - \alpha y = \beta x' - \alpha y', \end{cases}$$

$\mu$ *étant une constante arbitraire.*

*En remplaçant* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *par les valeurs déduites des équations* (7 *bis*), *les équations* (7) *s'écriront*

$$(8) \quad \begin{cases} a_1^2 x'(y - y')(z - z') + b_1^2 y'(z - z')(x - x') \\ \qquad\qquad + c_1^2 z'(x - x')(y - y') = 0, \\ (y'z - z'y)^2 + (z'x - x'z)^2 + (x'y - y'x)^2 \\ \qquad = A(x - x')^2 + B(y - y')^2 + C(z - z')^2. \end{cases}$$

*Les rayons du système passant par le point* $(x', y', z')$ *sont les intersections des deux cônes* (8) *ayant leur sommet en ce point. La seconde des équations* (8) *représente le cône du complexe ayant son sommet au point* $(x', y', z')$; *la première des équations* (8) *représente le cône sur lequel sont les normales menées du point* $(x', y', z')$ *à l'ellipsoïde* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, *ou encore le cône sur lequel sont situées les droites qui, passant par le point* $(x', y', z')$, *sont en même temps perpendiculaires à leurs conjuguées par rapport à ce même ellipsoïde.*

*Remarque.* — Le point $(x', y', z')$ étant donné, les inconnues $\alpha$, $\beta$, $\gamma$

seront données par les équations (7); la quantité $\theta$ aura pour valeur

$$(9)\qquad \theta^2(a_1^4\beta^2\gamma^2 + b_1^4\gamma^2\alpha^2 + c_1^4\alpha^2\beta^2) = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2;$$

les quantités $\rho_1$ et $\rho_2$, correspondant au rayon $(\alpha, \beta, \gamma)$, seront fournies par les équations

$$(10)\qquad \begin{cases} \rho_2(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2) = -(Aa^2\alpha^2 + Bb^2\beta^2 + Cc^2\gamma^2), \\ \rho_1^2(a_1^4\beta^2\gamma^2 + b_1^4\gamma^2\alpha^2 + c_1^4\alpha^2\beta^2) \\ \quad = a_1^4a^4\beta^2\gamma^2 + b_1^4b^4\gamma^2\alpha^2 + c_1^4c^4\alpha^2\beta^2. \end{cases}$$

Les coordonnées du foyer $f_0$ seront alors

$$(11)\qquad \frac{x_0}{\alpha(a^2+\rho_2)} = \frac{y_0}{\beta(b^2+\rho_2)} = \frac{z_0}{\gamma(c^2+\rho_2)} = \theta;$$

celles du foyer $f_1$ et des points limites seront ensuite fournies par les équations (18) et (31) du premier paragraphe.

**19.** Cherchons, en second lieu, les rayons du système qui se trouvent dans un plan donné $(u', v', w')$.

Nous pouvons écrire les *équations tangentielles* d'une droite quelconque située dans le plan donné $(u', v', w')$ sous la forme suivante :

$$(12)\qquad \frac{u-u'}{\alpha'} = \frac{v-v'}{\beta'} = \frac{w-w'}{\gamma'},$$

et si l'on pose

$$(13)\qquad U = v'\gamma' - w'\beta',\quad V = w'\alpha' - u'\gamma',\quad W = u'\beta' - v'\alpha',$$

les *équations ponctuelles* de cette même droite seront

$$(12\ bis)\qquad \begin{cases} Vz - Wy = \alpha', \\ Wx - Uz = \beta', \\ Uy - Vx = \gamma'. \end{cases}$$

Écrivons que cette droite est un rayon, c'est-à-dire que les équations (12 *bis*) sont vérifiées, quel que soit $\lambda$, par les valeurs (1) de $x, y, z$; on a

$$(1^\circ)\quad \begin{cases} Vz_0 - Wy_0 = \alpha', \\ Wx_0 - Uz_0 = \beta', \\ Uy_0 - Vx_0 = \gamma'; \end{cases} \qquad (2^\circ)\quad \frac{x_0}{U(a^2+\rho_2)} = \frac{y_0}{V(b^2+\rho_2)} = \frac{z_0}{W(c^2+\rho_2)} = \varepsilon.$$

En transportant les valeurs (2°) dans les égalités (1°), il vient

$$(3^\circ)\quad \begin{cases} \varepsilon a_1^2 VW = -\alpha', \\ \varepsilon b_1^2 WU = -\beta', \\ \varepsilon c_1^2 UV = -\gamma'; \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad (4^\circ)\quad \begin{cases} \varepsilon^2 b_1^2 c_1^2 U^2 VW = \beta'\gamma', \\ \varepsilon^2 c_1^2 a_1^2 UV^2 W = \gamma'\alpha', \\ \varepsilon^2 a_1^2 b_1^2 UVW^2 = \alpha'\beta'. \end{cases}$$

Ajoutons les équations (4°) respectivement multipliées par $a_1^2 u'$, $b_1^2 v'$, $c_1^2 w'$, nous trouvons

$$(14)\qquad a_1^2 u'\beta'\gamma' + b_1^2 v'\alpha'\gamma' + c_1^2 w'\alpha'\beta' = 0;$$

c'est là une première relation que doivent vérifier les quantités $\alpha', \beta', \gamma'$.

D'ailleurs la droite doit toucher la conique ($\Gamma$) du complexe située dans le plan ($u', v', w'$); on a donc, d'après l'équation (3), [[n° 3]],

$$(15)\qquad \begin{cases} A(v'w - w'v)^2 + B(w'u - u'w)^2 + C(u'v - v'u)^2 \\ \quad = (u - u')^2 + (v - v')^2 + (w - w')^2. \end{cases}$$

On peut introduire, dans cette équation (15), les quantités $\alpha', \beta', \gamma'$, en y remplaçant $u, v, w$ par les valeurs (12); on trouve ainsi

$$(16)\quad A(v'\gamma' - w'\beta')^2 + B(w'\alpha' - u'\gamma')^2 + C(u'\beta' - v'\alpha')^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2.$$

On a donc cette seconde proposition :

THÉORÈME X. — *Les rayons du système situés dans le plan ($u', v', w'$) arbitrairement choisis sont définis par les deux équations*

$$(17)\quad \begin{cases} a_1^2 u'\beta'\gamma' + b_1^2 v'\gamma'\alpha' + c_1^2 w'\alpha'\beta' = 0, \\ A(v'\gamma' - w'\beta')^2 + B(w'\alpha' - u'\gamma')^2 + C(u'\beta' - v'\alpha')^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2, \end{cases}$$

*et les équations du rayon sont*

$$(18)\qquad \frac{u-u'}{\alpha'}=\frac{v-v'}{\beta'}=\frac{w-w'}{\gamma'}\quad \text{(équations tangentielles)},$$

$$(18\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} Vz-Wy&=\alpha',\\ Wx-Uz&=\beta',\\ Uy-Vx&=\gamma',\end{aligned}\right\}\quad \text{(équations ponctuelles)},$$

U, V, W *étant définis par les égalités* (13).

*En remplaçant* $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ *par leurs valeurs* (18), *les équations* (17) *s'écriront*

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &a_1^2u'(v-v')(w-w')+b_1^2v'(w-w')(u-u')\\ &\qquad\qquad\qquad +c_1^2w'(u-u')(v-v')=0,\\ &A(v'w-w'v)^2+B(w'u-u'w)^2+C(u'v-v'u)^2\\ &\quad=(u-u')^2+(v-v')^2+(w-w')^2.\end{aligned}\right.$$

*Les rayons du système situés dans le plan donné* $(u', v', w')$ *sont les tangentes communes aux deux coniques* (19). *La seconde des équations* (19) *représente la conique du complexe située dans le plan* $(u', v', w')$; *la première de ces équations définit la conique que doivent toucher toutes les droites situées dans le plan* $(u', v', w')$, *qui sont en même temps perpendiculaires à leurs conjuguées par rapport à l'ellipsoïde* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$.

*Remarque.* — Le plan $(u', v', w')$ étant donné, les inconnues $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ seront déterminées par les équations (17); la quantité $\varepsilon$ sera donnée par l'équation

$$(20)\qquad \varepsilon^2(a_1^4V^2W^2+b_1^4W^2U^2+c_1^4U^2V^2)=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2,$$

où U, V, W ont les valeurs (13).

Les paramètres $\rho_1$ et $\rho_2$, correspondant au rayon $(\alpha', \beta', \gamma')$, seront fournis par les relations

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} &\rho_2(AU^2+BV^2+CW^2)+a^2AU^2+b^2BV^2+c^2CW^2=0,\\ &\rho_1^2(a_1^4V^2W^2+b_1^4W^2U^2+c_1^4U^2V^2)\\ &\quad=a^4a_1^4V^2W^2+b^4b_1^4W^2U^2+c^4c_1^4U^2V^2;\end{aligned}\right.$$

les coordonnées du foyer $f_0$ seront alors

$$(22)\qquad \frac{x_0}{U(a^2+\rho_2)} = \frac{y_0}{V(b^2+\rho_2)} = \frac{z_0}{W(c^2+\rho_2)};$$

les formules (18) et (31) du premier paragraphe donneront ensuite les coordonnées du second foyer et celles des points limites.

**20.** Les équations (7) et (17) mettent en évidence cette double proposition :

Théorème XI. — *Par un point arbitrairement choisi passent quatre rayons du système; dans un plan arbitrairement choisi se trouvent quatre rayons du système. Le système des rayons en question est donc du quatrième ordre et de la quatrième classe.*

Il importe maintenant de discuter la situation de ces rayons suivant la position du point d'où ils sont issus ou du plan qui les contient.

1° *Rayons passant par un point donné.*

**21.** Les directions $(\alpha, \beta, \gamma)$ des rayons passant par le point donné $(x', y', z')$ sont déterminées par les deux équations (théorème IX, n° **18**)

$$(23)\qquad \begin{cases} a_1^2 x'\beta\gamma + b_1^2 y'\gamma\alpha + c_1^2 z'\alpha\beta = 0, \\ \alpha^2(y'^2+z'^2-A) + \beta^2(z'^2+x'^2-B) + \gamma^2(x'^2+y'^2-C) \\ \qquad\qquad -2y'z'\beta\gamma - 2z'x'\gamma\alpha - 2x'y'\alpha\beta = 0. \end{cases}$$

Pour discuter les solutions que fournissent les équations (23), nous assimilerons ces deux équations, homogènes en $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, à celles de deux coniques; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ seront les coordonnées variables. Remarquons de suite que la seconde des équations (23) n'est autre que l'ensemble des termes du second degré de l'équation du cône (C) du complexe n° [[6]], où l'on mettrait $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ au lieu de $x, y, z$, et $x', y', z'$ au lieu de $x_0, y_0, z_0$.

L'équation générale des coniques passant par les points communs aux coniques (23) est

$$(24)\quad \begin{cases} \alpha^2(y'^2 + z'^2 - A) + \beta^2(z'^2 + x'^2 - B) + \gamma^2(x'^2 + y'^2 - C) \\ \quad -2(y'z' + \lambda a_1^2 x')\beta\gamma - 2(z'x' + \lambda b_1^2 y')\gamma\alpha - 2(x'y' + \lambda c_1^2 z')\alpha\beta = 0, \end{cases}$$

et l'équation en $\lambda$ correspondante est

$$\begin{vmatrix} y'^2 + z'^2 - A & -(x'y' + \lambda c_1^2 z') & -(x'z' + \lambda b_1^2 y') \\ -(y'x' + \lambda c_1^2 z') & z'^2 + x'^2 - B & -(y'z' + \lambda a_1^2 x') \\ -(z'x' + \lambda b_1^2 y') & -(y'z' + \lambda a_1^2 x') & x'^2 + y'^2 - c \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant et supprimant les accents de $x'$, $y'$, $z'$,

$$(25)\qquad 2a_1^2 b_1^2 c_1^2 xyz\lambda^3 + \Theta\lambda^2 + \Delta = 0,$$

après avoir posé

$$(26)\quad \begin{cases} \Theta = a_1^4 y^2 z^2 + b_1^4 z^2 x^2 + c_1^4 x^2 y^2 - (A a_1^4 x^2 + B b_1^4 y^2 + C c_1^4 z^2), \\ \Delta = (x^2 + y^2 + z^2)(A x^2 + B y^2 + C z^2) \\ \qquad - [A(B + C)x^2 + B(C + A)y^2 + C(A + B)z^2] + ABC. \end{cases}$$

Nous poserons encore

$$(27)\qquad \Sigma = \Theta^3 + 27 a_1^4 b_1^4 c_1^4 x^2 y^2 z^2 \Delta.$$

Toute la discussion repose sur la nature des racines de l'équation en $\lambda$.

**22.** Avant d'aborder l'examen des différents cas, nous devons faire plusieurs remarques.

*Remarque I.* — Lorsque $\lambda = 0$ est une racine de l'équation (25), l'équation (24), qui représente le système des sécantes communes aux deux coniques (23), se réduit à la seconde des équations (23); or le premier membre de cette équation (23) n'est autre que l'ensemble des termes du second degré de l'équation du cône du complexe, et cet ensemble de termes représente :

Un cône proprement dit, si $(x, y, z)$ n'est pas un point de la surface $\Delta$;

Un système de deux plans distincts, si $(x, y, z)$ est un point de la surface $\Delta$;

Un système de deux plans coïncidents, si $(x, y, z)$ est un point double de $\Delta$.

Il résulte de là que, pour $\lambda = 0$, l'équation (24) ne représentera jamais un système de deux droites coïncidentes, à moins que le point $(x, y, z)$ ne soit un point double de la surface $\Delta$.

*Remarque II.* — La courbe du seizième ordre

$$\Theta = 0, \quad \Delta = 0$$

est imaginaire, sauf aux points doubles réels de $\Delta$.

*Remarque III.* — La surface $\Sigma$, dont l'équation est

$$\Sigma = \Theta^3 + 27 a_1^4 b_1^4 c_1^4 x^2 y^2 z^2 \Delta = 0, \tag{28}$$

et qui doit jouer un rôle important, puisqu'elle est la deuxième surface focale du système, comme nous allons le voir, possède un grand nombre de propriétés; nous énoncerons de suite les suivantes :

THÉORÈME XII. — *La surface $\Sigma$ est du douzième ordre et de douzième classe.*

*L'origine O est un point sextuple pour lequel l'équation du cône tangent est*

$$a_1(A a_1 x^2)^{\frac{1}{3}} + b_1(B b_1 y^2)^{\frac{1}{3}} + c_1(C c_1 z^2)^{\frac{1}{3}} = 0. \tag{29}$$

*Le cône des directions asymptotiques se compose de trois cônes confondus avec le cône*

$$a_1^4 y^2 z^2 + b_1^4 z^2 x^2 + c_1^4 x^2 y^2 = 0. \tag{30}$$

*La surface $\Sigma$ touche la surface $\Delta$ suivant la courbe* (imaginaire)

$$\Theta = 0, \quad \Delta = 0,$$

*et les tangentes inflexionnelles de $\Delta$ (ou asymptotes de l'indicatrice) aux différents points de cette courbe sont également des tangentes inflexionnelles pour $\Sigma$.*

*Les quatre courbes planes (la dernière est à l'infini)*

$$(31)\qquad \begin{cases} x = 0, \\ \Theta = 0, \end{cases} \begin{cases} y = 0, \\ \Theta = 0, \end{cases} \begin{cases} z = 0, \\ \Theta = 0, \end{cases} \begin{cases} t = 0, \\ \Theta = 0 \end{cases}$$

*sont des courbes doubles pour la surface $\Sigma$, et les tangentes proprement dites à la surface en chacun des points de la courbe considérée sont dans le plan même de la courbe.*

*Le plan polaire d'un point quelconque $(x, y, z)$, par rapport à la surface $\Sigma$, passe toujours par le point où les plans polaires de $(x, y, z)$, par rapport aux surfaces $\Theta$ et $\Delta$, se rencontrent avec le plan polaire du même point $(x, y, z)$ par rapport au tétraèdre $(x=0, y=0, z=0, t=0)$, $t = 0$ représentant le plan de l'infini.*

*Les coordonnées d'un point quelconque de la surface $\Sigma$ sont données, en fonction des deux paramètres arbitraires $\rho_1$ et $\rho_2$, par les formules* (nº 7)

$$(32)\qquad \begin{cases} x = -\dfrac{x_0(\rho_1^2 - a^4)(\rho_1^2 + A\rho_2 + b^2c^2)}{(a^2 + \rho_2)E}, \\[2ex] y = -\dfrac{y_0(\rho_1^2 - b^4)(\rho_1^2 + B\rho_2 + c^2a^2)}{(b^2 + \rho_2)E}, \\[2ex] z = -\dfrac{z_0(\rho_1^2 - c^4)(\rho_1^2 + C\rho_2 + a^2b^2)}{(c^2 + \rho_2)E}, \end{cases}$$

*où*

$$\begin{cases} b_1^2 c_1^2 x_0^2 = (\rho_1^2 - a^4)(a^2 + \rho_2), \\ c_1^2 a_1^2 y_0^2 = (\rho_1^2 - b^4)(b^2 + \rho_2), \\ a_1^2 b_1^2 z_0^2 = (\rho_1^2 - c^4)(c^2 + \rho_2), \\ E = \rho_2(\rho_1^2 + g) + e\rho_1^2 + h. \end{cases}$$

*Le plan tangent en ce point est déterminé par l'équation* (théorème III)

$$(33)\qquad xx_0\frac{a^2 + \rho_2}{\rho_1^2 - a^4} + yy_0\frac{b^2 + \rho_2}{\rho_1^2 - b^4} + zz_0\frac{c^2 + \rho_2}{\rho_1^2 - c^4} + 1 = 0.$$

Toutes les parties de cette proposition s'établissent aisément; pour plusieurs d'entre elles, il suffit d'écrire les équations du plan polaire et de la quadrique polaire d'un point par rapport à la surface $\Sigma$.

**23.** Nous pouvons passer maintenant à l'examen des différents cas qui peuvent se présenter d'après la nature des racines de l'équation (25).

PREMIER CAS : $\Delta.\Sigma > 0$.

L'équation (25) en $\lambda$ ayant alors ses trois racines réelles, les coniques (23) se coupent en quatre points réels ou en quatre points imaginaires.

DEUXIÈME CAS : $\Delta.\Sigma > 0$.

L'équation (25) en $\lambda$ ayant une seule racine réelle, les coniques (23) se coupent en deux points réels et deux points imaginaires.

Par conséquent :

THÉORÈME XIII. — *Si* $\Delta.\Sigma < 0$, *les quatre rayons passant par le point* $(x, y, z)$ *sont ou tous quatre réels ou tous quatre imaginaires; si* $\Delta.\Sigma > 0$, *parmi les quatre rayons passant par le point* $(x, y, z)$, *deux sont réels et les deux autres imaginaires.*

TROISIÈME CAS : $\Delta.\Sigma = 0$.

L'équation (25) en $\lambda$ admet alors une racine double, et les deux coniques (23) sont ou simplement tangentes ou doublement tangentes, suivant que le système (24) des sécantes communes correspondant à la racine double se compose de deux droites distinctes ou de deux droites coïncidentes.

Le cas actuel donne lieu à deux hypothèses :

1° $\Delta = 0$. — L'équation (25) a deux racines nulles; les deux coniques (23) sont donc tangentes, et elles le sont en un seul point, car le système des sécantes (24) se compose de deux droites distinctes (remarque I, n° **22**). Ainsi :

THÉORÈME XIV. — *Parmi les quatre rayons qui sont issus de chaque point* M *de la surface* $\Delta$, *il y en a deux qui se confondent avec celui qui touche la surface* $\Delta$ *en* M; *les deux autres rayons sont distincts entre eux et distincts du premier, ils touchent la nappe de* $\Delta$ *sur laquelle ne se trouve pas le point* M; *ils sont donc réels ou imaginaires, suivant que le point* M *appartient à la nappe supérieure ou à la nappe inférieure.*

*La surface* $\Delta$ *est la* PREMIÈRE SURFACE FOCALE *du système de rayons.*

*Pour les points de la surface* $\Delta$, *le cône du complexe se réduit à deux plans dont l'intersection est précisément le double rayon touchant* $\Delta$ *en ce point*, n° [[**9**]].

2° $\Sigma = 0$. — L'équation (25) a encore deux racines égales, et l'équation (24) représente, en général, deux droites distinctes; ainsi, parmi les rayons issus du point $(x, y, z)$, il y en a deux qui coïncident. Le cône du complexe, ayant son sommet au point $(x, y, z)$, touche la surface $\Delta$ en un certain point; car les quatre rayons issus d'un point appartiennent au cône du complexe ayant son sommet en ce point, et ce sont les seules génératrices du cône qui touchent $\Delta$; or, si deux de ces génératrices viennent se confondre, le cône deviendra évidemment tangent au point où cette double droite touche $\Delta$.

Si l'on exprime que l'équation (24) représente deux droites confondues, on obtient alors un système de relations équivalant à deux équations distinctes, qui définissent une courbe tracée sur la surface $\Sigma$; le cône du complexe, ayant son sommet en un quelconque des points de cette courbe, touche la surface $\Delta$ en deux points. Ainsi :

THÉORÈME XV. — *La surface* $\Sigma$ *est le lieu des points d'où partent deux rayons confondus; elle est donc la* SECONDE SURFACE FOCALE *du système de rayons.*

*Mais cette dernière surface a, par rapport au* COMPLEXE, *un rôle différent de celui de la première; car, pour les points de* $\Sigma$, *les cônes du complexe sont des cônes proprement dits; ces cônes touchent alors la surface* $\Delta$ *en un point. Il y a, en outre, sur la surface* $\Sigma$ *une courbe lieu des sommets des cônes du complexe qui touchent en deux points la surface* $\Delta$.

### QUATRIÈME CAS : $\Delta = 0$, $\Theta = 0$.

L'équation (25) admet alors trois racines nulles; les deux coniques (23) ont trois de leurs points d'intersection confondus, et trois seulement d'après la remarque I, n° **22**. Pour les points de la courbe ($\Delta = 0$, $\Theta = 0$), trois des rayons issus coïncident et le quatrième est distinct; en ces points, le triple rayon est une tangente inflexionnelle pour les surfaces $\Delta$ et $\Sigma$.

En effet, les coordonnées $x_0, y_0, z_0$ d'un point quelconque de la surface $\Delta$ sont, n° [[**11**]],

$$b_1^2 c_1^2 x_0^2 = (\rho_1^2 - a^4)(a^2 + \rho_2),$$
$$c_1^2 a_1^2 y_0^2 = (\rho_1^2 - b^4)(b^2 + \rho_2),$$
$$a_1^2 b_1^2 z_0^2 = (\rho_1^2 - c^4)(c^2 + \rho_2),$$

et si l'on substitue ces valeurs dans l'expression (26) de $\Theta$, on trouve

$$\Theta_0 = -(\mathrm{F} + \rho_2 \mathrm{E}); \tag{34}$$

or ceci est précisément le coefficient de $\lambda^2$ dans l'équation (33) du n° [[**13**]]. De là résulte la propriété énoncée. On constate encore, à l'aide de la formule (18), 3°, n° **7**, que les deux foyers coïncident. Donc :

Théorème XVI. — *La courbe (imaginaire)* $\Delta = 0$, $\Theta = 0$ *est le lieu des points pour lesquels trois des rayons issus coïncident; elle est aussi le lieu des points pour lesquels les rayons sont des tangentes inflexionnelles pour les deux surfaces* $\Delta$ *et* $\Sigma$. *Le cône du complexe, ayant son sommet en un de ces points, se réduit à deux plans distincts.*

**24.** Il nous reste maintenant à étudier les *points singuliers* du système de rayons, c'est-à-dire la distribution des rayons correspondant aux points remarquables des surfaces focales.

Les formules établies précédemment donnent immédiatement la réponse à cette question; pour abréger, nous supprimerons les détails de ce calcul, qui n'offre pas la plus légère difficulté; nous nous contenterons d'énoncer les résultats auxquels il conduit.

Théorème XVII. — 1° *Lorsque le point* $\mathrm{M}(x, y, z)$ *se trouve sur une des courbes doubles (à distance finie)*

$$\begin{cases} x = 0, \\ \Theta = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ \Theta = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0, \\ \Theta = 0 \end{cases}$$

*de la surface* $\Sigma$, *parmi les rayons issus de ce point, trois se confondent avec une des tangentes menées de ce point à l'ellipse section de la surface* $\Delta$ *par le plan de la courbe double; le quatrième rayon est la seconde tangente à cette même ellipse.*

*Les points limites du rayon correspondant à la solution triple coïncident respectivement avec les foyers relatifs à ce rayon.*

*Le cône du complexe ayant pour sommet le point* M *touche la surface* $\Delta$ *au point où elle est touchée par le triple rayon; le plan tangent est perpendiculaire au plan de symétrie qui renferme la courbe double considérée.*

2° *Pour les points situés sur la courbe double plane à l'infini* ($t = 0$, $\Theta = 0$) *de la surface* $\Sigma$, *les quatre rayons issus d'un de ces points sont à l'infini et situés dans les plans asymptotes du cylindre du complexe correspondant au point considéré; trois de ces rayons se trouvent dans le plan asymptote, qui est en même temps tangent au cône* ($x^2 + y^2 + z^2 = 0$) *des directions asymptotiques de la sphère.*

3° *Si l'on considère un point à l'infini sur une direction quelconque* ($\alpha_0$, $\beta_0$, $\gamma_0$), *parmi les rayons issus de ce point, deux sont toujours à l'infini; les deux autres sont à distance finie situés dans le plan*

$$\frac{a_1^2 x}{\cos\alpha_0} + \frac{b_1^2 y}{\cos\beta_0} + \frac{c_1^2 z}{\cos\gamma_0} = 0,$$

*et touchent la sphère*

$$x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{A}\cos^2\alpha_0 + \mathrm{B}\cos^2\beta_0 + \mathrm{C}\cos^2\gamma_0.$$

4° *Pour chacun des points doubles, à distance finie, de la surface* $\Delta$ (*lesquels points doubles sont situés sur les courbes doubles à distance finie de la surface* $\Sigma$), *il y a une infinité de rayons du système issus de ce point; ces rayons sont situés dans un même plan, qui touche le cône tangent à la surface* $\Delta$ *au point double considéré.*

5° *Pour chacun des points doubles à l'infini sur* $\Delta$ [*lesquels appartiennent à la courbe double* ($t = 0$, $\Theta = 0$) *de* $\Sigma$] *et dont les directions sont les intersections des deux cônes*

$$(35)\quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 0, \\ \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{C}z^2 = 0, \end{cases} \quad \textit{ou} \quad (35\ \textit{bis})\quad \frac{x^2}{a_1^2} = \frac{y^2}{b_1^2} = \frac{z^2}{c_1^2},$$

*il y a une infinité de rayons du système issus de ce point; ces rayons sont situés dans un même plan, qui touche le cône* ($x^2 + y^2 + z^2 = 0$)

*suivant la direction considérée. Les droites* (35 *bis*) *appartiennent également au cône des directions asymptotiques de la surface* $\Sigma$, *savoir :*

$$a_1^4 y^2 z^2 + b_1^4 z^2 x^2 + c_1^4 x^2 y^2 = 0, \tag{36}$$

*et le cône* (36) *touche le premier des cônes* (35) *suivant les quatre droites* (35 *bis*).

6° *Pour chacun des points à l'infini situés sur les directions asymptotiques communes aux surfaces* $\Delta$ *et* $\Sigma$ *et distinctes des précédentes, lesquelles directions sont les intersections des deux cônes*

$$(37)\ \begin{cases} Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0, \\ a_1^4 y^2 z^2 + b_1^4 z^2 x^2 + c_1^4 x^2 y^2 = 0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad (37\ bis)\ \frac{Ax^2}{a_1^2} = \frac{By^2}{b_1^2} = \frac{Cz^2}{c_1^2},$$

*il y a une infinité de rayons du système issus de ce point; ces rayons sont situés dans un même plan, qui touche le cône* ($Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$) *suivant la direction considérée. Les droites* (37 *bis*) *appartiennent également au cône tangent à la surface* $\Sigma$ *en son point sextuple, savoir :*

$$a_1(Aa_1 x^2)^{\frac{1}{3}} + b_1(Bb_1 y^2)^{\frac{1}{3}} + c_1(Cc_1 z^2)^{\frac{1}{3}} = 0, \tag{38}$$

*et le cône* (38) *touche le premier des cônes* (37) *suivant les quatre droites* (37 *bis*).

7° *Pour le point sextuple de* $\Sigma$, *il y a une infinité de rayons issus de ce point; ces rayons forment le cône du second ordre* ($Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$).

*Remarquons que les deux cônes* (35) *constituent le cône des directions asymptotiques de la surface* $\Delta$.

8° *Pour les points à l'infini sur les axes* $Ox$, $Oy$, $Oz$, *il y a une infinité de rayons issus de chacun de ces points; ces rayons forment un cylindre de révolution.*

*Ainsi, pour le point à l'infini sur* $Ox$, *les rayons forment le cylindre* $y^2 + z^2 - A = 0$, *dont la trace est le cercle section de la surface* $\Delta$ *par le plan* $yOz$.

*2° Rayons situés dans un plan donné.*

**25.** On a vu, n° **19**, que les rayons $(\alpha', \beta', \gamma')$, situés dans un plan donné $(u', v', w')$, sont déterminés par les deux équations

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} & a_1^2 u'\beta'\gamma' + b_1^2 v'\gamma'\alpha' + c_1^2 w'\alpha'\beta' = 0,\\ & \alpha'^2(Bw'^2 + Cv'^2 - 1) + \beta'^2(Cu'^2 + Aw'^2 - 1)\\ & \quad + \gamma'^2(Av'^2 + Bu'^2 - 1) - 2Av'w'\beta'\gamma'\\ & \qquad - 2Bw'u'\gamma'\alpha' - 2Cu'v'\alpha'\beta' = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour discuter les solutions fournies par les équations (39), nous assimilerons ces deux équations, homogènes en $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, à celles de deux coniques; $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ seront les coordonnées variables.

L'équation générale des coniques passant par les points communs aux coniques (39) est

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} & \alpha'^2(Bw'^2 + Cv'^2 - 1) + \beta'^2(Cu'^2 + Aw'^2 - 1)\\ & \quad + \gamma'^2(Av'^2 + Bu'^2 - 1) - 2(Av'w' + \lambda a_1^2 u')\beta'\gamma'\\ & \quad - 2(Bw'u' + \lambda b_1^2 v')\gamma'\alpha' - 2(Cu'v' + \lambda c_1^2 w')\alpha'\beta' = 0, \end{aligned}\right.$$

et l'équation en $\lambda$ correspondante sera, après avoir supprimé les accents de $u'$, $v'$, $w'$,

$$\begin{vmatrix} Bw^2 + Cv^2 - 1 & -(Cuv + \lambda c_1^2 w) & -(Bwu + \lambda b_1^2 v)\\ -(Bvu + \lambda c_1^2 w) & Cu^2 + Aw^2 - 1 & -(Avw + \lambda a_1^2 u)\\ -(Bwu + \lambda b_1^2 v) & -(Avw + \lambda a_1^2 u) & Av^2 + Bu^2 - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$(41)\qquad 2a_1^2 b_1^2 c_1^2 uvw\lambda^3 + \Theta_1\lambda^2 + \Delta_1 = 0.$$

Nous avons posé

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} & \Theta_1 = Aa_1^4 v^2 w^2 + Bb_1^4 w^2 u^2 + Cc_1^4 u^2 v^2 - (a_1^4 u^2 + b_1^4 v^2 + c_1^4 w^2),\\ & \Delta_1 = (u^2 + v^2 + w^2)(BCu^2 + CAv^2 + ABw^2)\\ & \qquad - [(B + C)u^2 + (C + A)v^2 + (A + B)w^2] + 1, \end{aligned}\right.$$

et nous poserons encore

$$(43) \qquad \Sigma_1 = \Theta_1^3 + 27 a_1^4 b_1^4 c_1^4 u^2 v^2 w^2 \Delta_1.$$

On a vu, n° [[22]], que $\Delta_1 = 0$ est l'équation tangentielle de la surface $\Delta$; c'est l'enveloppe des plans pour lesquels les coniques $(\Gamma)$ du COMPLEXE se réduisent à deux points, et la surface $\Delta$ est le lieu de ces points.

**26.** Avant d'aborder ces discussions, nous ferons plusieurs remarques.

*Remarque I.* — Lorsque $\lambda = 0$ est une racine de l'équation (41), l'équation (40), qui représente le système des sécantes communes aux deux coniques (39), se réduit à la seconde des équations (39), laquelle n'est autre que la conique $(\Gamma)$ du *complexe* n° [[15]], si l'on y remplace $\alpha', \beta', \gamma'$ par les différences $u - u', v - v', w - w'$. Or cet ensemble de termes représente :

Une conique proprement dite, si le plan $(u', v', w')$ ne touche pas la surface $\Delta_1$ (ou $\Delta$);

Un système de deux points distincts, si le plan $(u', v', w')$ touche la surface $\Delta_1$;

Deux points coïncidents, si le plan $(u', v', w')$ est un plan tangent double de $\Delta_1$.

Il résulte de là que, pour $\lambda = 0$, l'équation (40) ne représentera jamais deux droites coïncidentes, à moins que $(u', v', w')$ ne soit un plan tangent double de $\Delta_1$.

*Remarque II.* — La surface $\Sigma_1$, dont l'équation est

$$(43) \qquad \Sigma_1 = \Theta_1^3 + 27 a_1^4 b_1^4 c_1^4 u^2 v^2 w^2 \Delta_1 = 0,$$

et qui n'est autre que la seconde surface focale $\Sigma$, comme nous le verrons plus loin, possède les propriétés suivantes :

THÉORÈME XVIII. — *La surface $\Sigma_1$, qui n'est autre que la seconde surface focale $\Sigma$, est de douzième classe.*

*Le plan de l'infini est un plan sextuple pour lequel la courbe de contact est*

$$(44) \qquad a_1 (a_1 u^2)^{\frac{1}{3}} + b_1 (b_1 v^2)^{\frac{1}{3}} + c_1 (c_1 w^2)^{\frac{1}{3}} = 0.$$

*Les équations tangentielles du cône, touchant la surface* $\Sigma_1$ (*ou* $\Sigma$) *en son point sextuple à l'origine* O, *sont*

$$(45)\qquad r=0,\quad \mathrm{A}a_1^4 v^2 w^2 + \mathrm{B}b_1^4 w^2 u^2 + \mathrm{C}c_1^4 u^2 v^2 = 0.$$

*La surface* $\Sigma_1$ (*ou* $\Sigma$) *touche la surface* $\Delta_1$ (*ou* $\Delta$) *suivant la courbe de contact avec* $\Delta_1$ *de la développable circonscrite aux deux surfaces* $\Theta_1 = 0$, $\Delta_1 = 0$.

*Les trois cylindres*

$$(46)\quad \left\{\begin{array}{l} u=0,\\ \Theta_1=0,\end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l} v=0,\\ \Theta_1=0,\end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l} w=0,\\ \Theta_1=0\end{array}\right.\quad \text{et le cône}\quad \left\{\begin{array}{l} r=0,\\ \Theta_1=0\end{array}\right.$$

*sont des cylindres circonscrits doubles pour la surface* $\Sigma_1$; *la courbe de contact avec la surface* $\Sigma_1$ *de chaque plan tangent se réduit à deux points confondus à l'infini sur la direction des génératrices du cylindre; pour le cône, la courbe de contact avec la surface* $\Sigma_1$ *de chaque plan tangent se réduit à deux points confondus avec l'origine; c'est le cône* (45) *tangent au point sextuple.*

*Le point polaire d'un plan quelconque* $(u, v, w)$, *par rapport à la surface* $\Sigma_1$, *est toujours dans le plan qui passe par les points polaires du même plan* $(u, v, w)$ *par rapport aux surfaces* $\Theta_1$, $\Delta_1$, *et au tétraèdre* $(u=0,\ v=0,\ w=0,\ r=0)$.

*Les coordonnées d'un plan tangent quelconque à la surface* $\Sigma_1$ *sont données en fonction des paramètres* $\rho_1$ *et* $\rho_2$ *par les formules* (théorème III)

$$(47)\quad \left\{\begin{array}{l} u = -x_0\dfrac{a^2+\rho_2}{\rho_1^2-a^4},\\[2mm] v = -y_0\dfrac{b^2+\rho_2}{\rho_1^2-b^4},\\[2mm] w = -z_0\dfrac{c^2+\rho_2}{\rho_1^2-c^4},\end{array}\right.\quad \text{où}\quad \left\{\begin{array}{l} b_1^2c_1^2x_0^2 = (\rho_1^2-a^4)(a^2+\rho_2),\\ c_2^2a_1^2y_0^2 = (\rho_1^2-b^4)(b^2+\rho_2),\\ a_1^2b_1^2z_0^2 = (\rho_1^2-c^4)(c^2+\rho_2).\end{array}\right.$$

*Les coordonnées du point de contact seront fournies par les formules* (18), *n*° **7**.

**27.** Examinons maintenant les différents cas qui peuvent se présenter d'après la nature des racines de l'équation (41).

PREMIER CAS : $\Delta_1 . \Sigma_1 < 0$.

L'équation (41) en $\lambda$ ayant ses trois racines réelles, les deux coniques (39) se coupent en quatre points réels ou en quatre points imaginaires.

DEUXIÈME CAS : $\Delta_1 . \Sigma_1 > 0$.

L'équation (41) ayant une seule racine réelle, les deux coniques (39) se coupent en deux points réels et deux points imaginaires.

Par conséquent :

THÉORÈME XIX. — *Si $\Delta_1 . \Sigma_1 < 0$, les quatre rayons situés dans le plan $(u, v, w)$ seront ou tous quatre réels ou tous quatre imaginaires; si $\Delta_1 . \Sigma_1 > 0$, parmi les quatre rayons, situés dans le plan $(u, v, w)$, deux seront réels et les deux autres imaginaires.*

TROISIÈME CAS : $\Delta_1 . \Sigma_1 = 0$.

L'équation (41) admet alors une racine double, et les deux coniques (39) seront ou simplement tangentes, ou doublement tangentes, suivant que le système (40) des sécantes communes se compose de deux droites distinctes ou de deux droites coïncidentes.

Le cas actuel comprend deux hypothèses :

1° $\Delta_1 = 0$. — L'équation (41) a deux racines nulles, les coniques (39) sont donc tangentes; d'ailleurs elles le sont en un seul point, car, d'après la remarque I, n° **26**, le système (40) des sécantes communes se compose de deux droites distinctes. Ainsi :

THÉORÈME XX. — *Dans chaque plan tangent à la surface $\Delta_1$, qui n'est autre que la surface $\Delta$, il y a deux rayons confondus avec celui qui la touche au point de contact du plan tangent; les deux autres rayons sont distincts entre eux et distincts du premier; ils touchent la nappe de $\Delta$, que ne touche pas le plan considéré; ils sont donc réels ou imaginaires, suivant que ce plan touche la nappe inférieure ou la nappe supérieure de $\Delta$.*

*Pour les plans tangents à la surface $\Delta$, la conique $(\Gamma)$ du* COMPLEXE *se réduit à deux points situés aux points où le double rayon rencontre* $\Delta$.

2° $\Sigma_1 = 0$. — L'équation en $\lambda$ (41) admet encore deux racines égales, et l'équation (40) représente, en général, deux droites distinctes; donc deux des rayons situés dans le plan considéré viennent coïncider; la conique du *complexe*, située dans ce plan, est une conique proprement dite, et elle est osculatrice en un point de la surface $\Delta$. En effet, les quatre rayons situés dans ce plan touchent la conique $\Gamma$ aux points où cette dernière touche la section de la surface $\Delta$ par le plan considéré; or, si deux de ces tangentes viennent à coïncider, quatre des points d'intersection de la conique $\Gamma$ avec la surface $\Delta$ viennent se confondre avec le point où cette double droite touche $\Delta$. Le plan en question est donc osculateur en ce point à la courbe touchée sur $\Delta$ par le double rayon, et il doit toucher la surface $\Sigma$, puisqu'il est le plan focal du rayon (théorème III). La surface $\Sigma_1$ n'est donc autre que la surface $\Sigma$.

Pour qu'il y ait deux couples de rayons confondus, il faut écrire que l'équation (40) représente deux droites confondues; on obtient ainsi un système équivalant à deux relations distinctes qui définissent une surface développable.

De là :

Théorème XXI. — *La surface* $\Sigma_1$, *qui n'est autre que la surface* $\Sigma$, *est l'enveloppe des plans dans lesquels deux rayons du système viennent coïncider; la conique* ($\Gamma$) *du complexe, située dans un de ces plans, est osculatrice en un point de la surface* $\Delta$, *le contact est du troisième ordre; les coniques du complexe, situées dans ces plans, sont des coniques proprement dites. Il y a en outre une développable circonscrite à la surface* $\Sigma$, *dont les plans renferment des coniques du complexe bi-osculatrices à la surface* $\Delta$.

Quatrième cas : $\Delta_1 = 0$, $\Theta_1 = 0$.

L'équation (41) admet alors trois racines nulles; les coniques (39) ont trois de leurs points d'intersection confondus, et trois seulement; donc :

Théorème XXII. — *La développable* ($\Delta_1 = 0$, $\Theta_1 = 0$) *est l'enve-*

*loppe des plans pour lesquels trois des rayons qui y sont contenus viennent coïncider, et trois seulement. Les coniques du complexe, situées dans ces plans, se réduisent à deux points distincts.*

**28.** Il nous reste à étudier les *plans singuliers* du système des rayons, c'est-à-dire la distribution des rayons correspondant aux plans remarquables des surfaces focales.

Les calculs n'offrant aucune difficulté, nous abrégerons en ne faisant qu'énoncer les résultats qu'on obtient.

THÉORÈME XXIII. — *Lorsque le plan* $(u, v, w)$ *touche un des cylindres doubles*

$$\begin{cases} u = 0, \\ \Theta_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} v = 0, \\ \Theta_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} w = 0, \\ \Theta_1 = 0, \end{cases}$$

*de la surface* $\Sigma$, *parmi les quatre rayons situés dans ce plan, trois se confondent avec une parallèle aux génératrices du cylindre; cette droite rencontre le cercle section de la surface* $\Delta$ *par le plan de symétrie perpendiculaire au cylindre; le quatrième rayon, également parallèle aux génératrices du cylindre, passe par le point où le plan* $(u, v, w)$ *rencontre encore le cercle ci-dessus désigné. La conique* $(\Gamma)$ *du complexe passe par le premier de ces points.*

*Le premier foyer coïncide avec le point où le triple rayon rencontre le cercle; le second foyer est à l'infini sur la génératrice de contact du plan* $(u, v, w)$ *avec le cylindre double; les points limites sont à l'infini.*

2° *Pour chacun des plans tangents doubles de la surface* $\Delta$, *lesquels sont aussi des plans doubles de la surface* $\Sigma$, *il y a une infinité de rayons de système situés dans ce plan; ces rayons sont tous issus du point où le plan considéré touche le cercle section de la surface* $\Delta$, *par le plan de symétrie perpendiculaire au plan tangent double.*

3° *Pour le plan sextuple de* $\Sigma$, *il y a une infinité de rayons du système situés dans ce plan; ces rayons enveloppent le cercle imaginaire de l'infini* $(u^2 + v^2 + w^2 = 0)$; *la surface* $\Delta$ *est touchée suivant ce cercle par le cône asymptote d'une sphère concentrique.*

4° *Pour les plans touchant le cône double* $(r = 0, \Theta_1 = 0)$ *de la surface* $\Sigma$ *(lequel cône est le cône tangent à* $\Sigma$ *en son point sextuple), les* *quatre rayons du système, situés dans un de ces plans, passent par l'origine; trois d'entre eux se confondent avec une des intersections de ce plan avec le cône*

$$(48) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0;$$

*l'autre rayon est la seconde intersection.*

5° *Si l'on considère un plan quelconque passant par l'origine, parmi les rayons situés dans ce plan, deux sont issus de l'origine et appartiennent au cône* (48); *les deux autres sont parallèles.*

6° *Pour les plans passant par l'origine et définis par les équations*

$$(49) \qquad \frac{u^2}{a_1^2} = \frac{v^2}{b_1^2} = \frac{w^2}{c_1^2},$$

*lesquels plans touchent à la fois les cônes des directions asymptotiques des surfaces* $\Delta$ *et* $\Sigma$, *savoir :*

$$(50) \qquad \frac{u^2}{A} = \frac{v^2}{B} = \frac{w^2}{C} = 0, \quad (a_1^2 u)^{\frac{2}{3}} + (b_1^2 v)^{\frac{2}{3}} + (c_1^2 w)^{\frac{2}{3}} = 0,$$

*il y a une infinité de rayons du système; et si l'on considère le plan* $(+a_1, +b_1, +c_1)$ *par exemple, tous ces rayons sont parallèles à la direction* $\frac{x}{a_1} = \frac{y}{b_1} = \frac{z}{c_1}$.

7° *Pour les plans touchant à la fois les cônes des directions asymptotiques de la surface* $\Delta$, *savoir :*

$$(51) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = 0, \quad \frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} + \frac{w^2}{C} = 0,$$

*il y a une infinité de rayons situés dans le plan considéré et parallèles à l'une des directions*

$$\frac{Ax^2}{a_1^2} = \frac{By^2}{b_1^2} = \frac{Cz^2}{c_1^2}.$$

On retrouve ainsi plusieurs des propriétés énoncées dans le théorème XVII.

**29.** Nous terminerons cette discussion par une remarque intéressante relative aux surfaces $\Delta$, $\Delta_1$, $\Theta$, $\Theta_1$ $\Sigma$, $\Sigma_1$, qui jouent un rôle important dans toute cette étude.

THÉORÈME XXIV. — *Si l'on considère les surfaces*

$$(52)\quad \begin{cases} \Delta = (x^2 + y^2 + z^2)(A x^2 + B y^2 + C z^2) \\ \qquad - [A(B + C)x^2 + B(C + A)y^2 + C(A + B)z^2] + ABC, \\ \Delta_1 = (u^2 + v^2 + w^2)(BCu^2 + CAv^2 + ABw^2) \\ \qquad - [(B + C)u^2 + (C + A)v^2 + (A + B)w^2] + 1, \end{cases}$$

$$(53)\quad \begin{cases} \Theta = a_1^4 y^2 z^2 + b_1^4 z^2 x^2 + c_1^4 x^2 y^2 - (A a_1^4 x^2 + B b_1^4 y^2 + C c_1^4 z^2), \\ \Theta_1 = A a_1^4 v^2 w^2 + B b_1^4 w^2 u^2 + C c_1^4 u^2 v^2 - (a_1^4 u^2 + b_1^4 v^2 + c_1^4 w^2), \end{cases}$$

$$(54)\quad \begin{cases} \Sigma = \Theta^3 + 27 a_1^4 b_1^4 c_1^4 x^2 y^2 z^2 \Delta, \\ \Sigma_1 = \Theta_1^3 + 27 a_1^4 b_1^4 c_1^4 u^2 v^2 w^2 \Delta_1, \end{cases}$$

*on remarque que si l'on pose*

$$(55)\qquad \begin{cases} u = \rho x \sqrt{A}, \\ v = \rho y \sqrt{B}, \quad \text{où} \quad \rho^2 = \frac{1}{ABC}, \\ w = \rho z \sqrt{C}, \end{cases}$$

*on a identiquement, eu égard aux relations* (55),

$$(56)\qquad \Delta_1 = \rho^2 . \Delta, \quad \Theta_1 = \rho^2 . \Theta, \quad \Sigma_1 = \rho^6 . \Sigma.$$

*D'ailleurs les équations* (55) *définissent le plan polaire* $(u, v, w)$ *du point* $(x, y, z)$ *par rapport à l'*ELLIPSOÏDE DIRECTEUR

$$(57)\qquad x^2 \sqrt{A} + y^2 \sqrt{B} + z^2 \sqrt{C} = \sqrt{ABC}.$$

*Les surfaces* $\Delta$ *et* $\Delta_1$, $\Theta$ *et* $\Theta_1$, $\Sigma$ *et* $\Sigma_1$ *sont donc polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à l'ellipsoïde* (57).

*Comme les surfaces* $\Delta$ *et* $\Delta_1$ *sont identiques, il en résulte qu'une des* *nappes de la surface* $\Delta$ *est la polaire réciproque de l'autre par rapport à cet ellipsoïde* (c'est une propriété connue).

*La même propriété a lieu pour la surface* $\Sigma$.

**30.** On appelle *rayon double*, dans un système d'ordre $m$, un rayon tel, que d'un quelconque de ses points on ne peut que $(m-2)$ rayons distincts du rayon considéré.

On constate très-aisément que :

*Le système de rayons étudié ne possède pas de* RAYONS DOUBLES.

**31.** Une droite passant par un point $(x', y', z')$ et de direction $(\alpha, \beta, \gamma)$ sera représentée par les équations

$$(58)\quad \begin{cases} \gamma y - \beta z = \lambda, \\ \alpha z - \gamma x = \mu, \\ \beta x - \alpha y = \nu, \end{cases} \quad \text{où} \quad (59)\quad \begin{cases} \lambda = \gamma y' - \beta z', \\ \mu = \alpha z' - \gamma x', \\ \nu = \beta x' - \alpha y', \end{cases}$$

$x$, $y$, $z$ étant les coordonnées variables.

La droite peut être définie par les *six quantités* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$, entre lesquelles on a la relation unique

$$(60)\qquad \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0;$$

ce sont, d'après Plücker, les *coordonnées* de la droite.

On voit alors, par les équations (7), n° **18**, que :

*Les six coordonnées* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ *d'un rayon quelconque du système étudié seront liées par les* TROIS *relations*

$$(61)\qquad \begin{cases} \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0, \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2, \\ a^2\alpha\lambda + b^2\beta\mu + c^2\gamma\nu = 0. \end{cases}$$

Ceci permet d'étudier, à un autre point de vue, ce système de rayons.

Nous nous contenterons d'énoncer les propositions suivantes, très-faciles à démontrer :

THÉORÈME XXV. — *Le nombre des rayons du système rencontrant deux droites fixes est égal à huit.*

*La surface engendrée par les rayons du système, s'appuyant sur une droite fixe donnée* $D_1$, *est une surface réglée du huitième ordre; la droite fixe* $D_1$ *est une droite quadruple pour la surface; tout plan passant par* $D_1$ *coupe la surface suivant quatre autres droites.*