JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. MOLINS

De la détermination, sous forme intégrable, des équations des courbes dont le rayon de courbure et le rayon de torsion sont liés par une relation donnée quelconque

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 19 (1874), p. 425-451.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1874_2_19__425_0>

De la détermination, sous forme intégrable, des équations des courbes dont le rayon de courbure et le rayon de torsion sont liés par une relation donnée quelconque;

PAR M. H. MOLINS.

---

1. Nous nous proposons de montrer que, par un choix convenable de la variable indépendante, on peut toujours ramener aux quadratures la détermination des courbes dont les rayons de courbure et de torsion sont des fonctions données de cette variable; et cette recherche comprendra celle des courbes dont les deux rayons sont liés par une relation donnée quelconque, car à cette relation on n'aura qu'à joindre une autre relation, prise arbitrairement entre ces rayons et la variable indépendante, ce qui déterminera le rayon de courbure et le rayon de torsion en fonction de la même variable.

Considérons une courbe quelconque rapportée à trois axes rectangulaires, et désignons par ε son angle de contingence, par ω son angle de torsion, par ρ son rayon de courbure et par r son rayon de torsion. Les quantités ε et ω sont données par les formules suivantes :

$$\varepsilon = \sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{\rho^2} ds^5 = dx(d^2y\, d^3z - d^2z\, d^3y) &+ dy(d^2z\, d^3x - d^2x\, d^3z)\\ &+ dz(d^2x\, d^3y - d^2y\, d^3x).\end{aligned}$$

Nous supposerons d'abord que l'on prend l'arc s pour variable indépendante; posons

$$\frac{dx}{ds} = u,\quad \frac{dy}{ds} = v,\quad \frac{dz}{ds} = w;$$

les formules précédentes deviennent

$$(1)\qquad \frac{\varepsilon}{ds} = \sqrt{\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dw}{ds}\right)^2},$$

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\rho^2}\frac{\omega}{ds} &= u\left(\frac{dv}{ds}\frac{d^2w}{ds^2} - \frac{dw}{ds}\frac{d^2v}{ds^2}\right) \\ &\quad + v\left(\frac{dw}{ds}\frac{d^2u}{ds^2} - \frac{du}{ds}\frac{d^2w}{ds^2}\right) + w\left(\frac{du}{ds}\frac{d^2v}{ds^2} - \frac{dv}{ds}\frac{d^2u}{ds^2}\right). \end{aligned} \right.$$

2. Les trois quantités u, v, w étant liées par la relation

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1,$$

on peut les exprimer en fonctions de deux nouvelles variables θ et ζ, comme il suit :

$$u = \cos\theta \sin\zeta, \quad v = \sin\theta \sin\zeta, \quad w = \cos\zeta.$$

On en déduit $\operatorname{tang}\theta = \frac{v}{u} = \frac{dy}{dx}$, de sorte que θ est l'angle formé avec le plan xz par le plan conduit suivant la tangente de la courbe parallèlement à l'axe des z; quant à l'angle ζ, c'est l'angle que fait la même tangente avec l'axe des z. La différentiation de u, v, w donne ensuite

$$\begin{aligned} du &= -\sin\theta \sin\zeta\, d\theta + \cos\theta \cos\zeta\, d\zeta, \\ dv &= \cos\theta \sin\zeta\, d\theta + \sin\theta \cos\zeta\, d\zeta, \\ dw &= -\sin\zeta\, d\zeta, \\ d^2u &= -\cos\theta \sin\zeta\, d\theta^2 - 2\sin\theta \cos\zeta\, d\theta\, d\zeta \\ &\quad - \sin\theta \sin\zeta\, d^2\theta - \cos\theta \sin\zeta\, d\zeta^2 + \cos\theta \cos\zeta\, d^2\zeta, \\ d^2v &= -\sin\theta \sin\zeta\, d\theta^2 + 2\cos\theta \cos\zeta\, d\theta\, d\zeta \\ &\quad + \cos\theta \sin\zeta\, d^2\theta - \sin\theta \sin\zeta\, d\zeta^2 + \sin\theta \cos\zeta\, d^2\zeta, \\ d^2w &= -\cos\zeta\, d\zeta^2 - \sin\zeta\, d^2\zeta. \end{aligned}$$

On trouve alors

$$du^2 + dv^2 + dw^2 = d\zeta^2 + \sin^2\zeta\, d\theta^2;$$

par suite, en remplaçant $\frac{\varepsilon}{ds}$ par $\frac{1}{\rho}$ dans la formule (1),

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho^2} = \frac{d\zeta^2}{ds^2} + \sin^2\zeta \frac{d\theta^2}{ds^2}.$$

3. Quant à la formule (2), elle peut se mettre sous la forme

$$(4) \quad \frac{1}{\rho^2}\frac{\omega}{ds} = \left(v\frac{dw}{ds} - w\frac{dv}{ds}\right)\frac{d^2u}{ds^2} + \left(w\frac{du}{ds} - u\frac{dw}{ds}\right)\frac{d^2v}{ds^2} + \left(u\frac{dv}{ds} - v\frac{du}{ds}\right)\frac{d^2w}{ds^2}.$$

Or on obtient

$$\begin{aligned}
v\frac{dw}{ds} - w\frac{dv}{ds} &= -\sin\theta\sin^2\zeta\frac{d\zeta}{ds} - \cos\zeta\left(\cos\theta\sin\zeta\frac{d\theta}{ds} + \sin\theta\cos\zeta\frac{d\zeta}{ds}\right)\\
&= -\sin\theta\frac{d\zeta}{ds} - \cos\theta\sin\zeta\cos\zeta\frac{d\theta}{ds},\\
w\frac{du}{ds} - u\frac{dw}{ds} &= \cos\theta\sin^2\zeta\frac{d\zeta}{ds} + \cos\zeta\left(-\sin\theta\sin\zeta\frac{d\theta}{ds} + \cos\theta\cos\zeta\frac{d\zeta}{ds}\right)\\
&= \cos\theta\frac{d\zeta}{ds} - \sin\theta\sin\zeta\cos\zeta\frac{d\theta}{ds},\\
u\frac{dv}{ds} - v\frac{du}{ds} &= \cos\theta\sin\zeta\left(\cos\theta\sin\zeta\frac{d\theta}{ds} + \sin\theta\cos\zeta\frac{d\zeta}{ds}\right)\\
&\quad - \sin\theta\sin\zeta\left(-\sin\theta\sin\zeta\frac{d\theta}{ds} + \cos\theta\cos\zeta\frac{d\zeta}{ds}\right) = \sin^2\zeta\frac{d\theta}{ds},
\end{aligned}$$

expressions qui, jointes à celles de $\frac{d^2u}{ds^2}$, $\frac{d^2v}{ds^2}$, $\frac{d^2w}{ds^2}$, font prendre au second membre de la formule (4) la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&\left(\cos\theta\sin\zeta\frac{d\theta^2}{ds^2} + 2\sin\theta\cos\zeta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\zeta}{ds} + \sin\theta\sin\zeta\frac{d^2\theta}{ds^2}\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \cos\theta\sin\zeta\frac{d\zeta^2}{ds^2} - \cos\theta\cos\zeta\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)\\
&\times\left(\sin\theta\frac{d\zeta}{ds} + \cos\theta\sin\zeta\cos\zeta\frac{d\theta}{ds}\right)\\
&+\left(-\sin\theta\sin\zeta\frac{d\theta^2}{ds^2} + 2\cos\theta\cos\zeta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\zeta}{ds} + \cos\theta\sin\zeta\frac{d^2\theta}{ds^2}\right.\\
&\qquad\qquad \left. - \sin\theta\sin\zeta\frac{d\zeta^2}{ds^2} + \sin\theta\cos\zeta\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)\\
&\times\left(\cos\theta\frac{d\zeta}{ds} - \sin\theta\sin\zeta\cos\zeta\frac{d\theta}{ds}\right) - \left(\cos\zeta\frac{d\zeta^2}{ds^2} + \sin\zeta\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)\sin^2\zeta\frac{d\theta}{ds},
\end{aligned}$$

ou bien, toutes réductions faites,

$$2\cos\zeta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\zeta^2}{ds^2}+\sin\zeta\frac{d\zeta}{ds}\frac{d^2\theta}{ds^2}+\sin^2\zeta\cos\zeta\frac{d\theta^3}{ds^3}-\sin\zeta\frac{d\theta}{ds}\frac{d^2\zeta}{ds^2}.$$

La formule (4) elle-même devient

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\omega}{ds}=2\cos\zeta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\zeta^2}{ds^2}+\sin\zeta\frac{d\zeta}{ds}\frac{d^2\theta}{ds^2}+\sin^2\zeta\cos\zeta\frac{d\theta^3}{ds^3}-\sin\zeta\frac{d\theta}{ds}\frac{d^2\zeta}{ds^2}$$

ou bien

$$(5)\qquad \frac{\omega}{ds}=\rho^2\frac{d\theta}{ds}\left(2\cos\zeta\frac{d\zeta^2}{ds^2}+\sin\zeta\frac{d\zeta}{ds}\frac{\frac{d^2\theta}{ds^2}}{\frac{d\theta}{ds}}+\sin^2\zeta\cos\zeta\frac{d\theta^2}{ds^2}-\sin\zeta\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right).$$

Or la formule (3) donne

$$(6)\qquad \frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{\rho\sin\zeta}\sqrt{1-\rho^2\frac{d\zeta^2}{ds^2}},$$

d'où

$$\frac{d^2\theta}{ds^2}=-\frac{1}{\rho^2\sin^2\zeta}\sqrt{1-\rho^2\frac{d\zeta^2}{ds^2}}\left(\rho\cos\zeta\frac{d\zeta}{ds}+\sin\zeta\frac{d\rho}{ds}\right)-\frac{\frac{d\zeta}{ds}\left(\rho\frac{d^2\zeta}{ds^2}+\frac{d\rho}{ds}\frac{d\zeta}{ds}\right)}{\sin\zeta\sqrt{1-\rho^2\frac{d\zeta^2}{ds^2}}}.$$

En substituant ces expressions dans la formule (5), on trouve

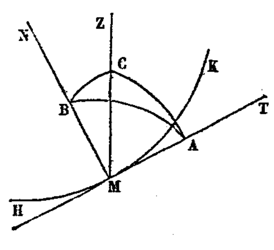
$$\begin{aligned}\frac{\omega}{ds}&=\frac{\rho}{\sin\zeta}\sqrt{1-\rho^2\frac{d\zeta^2}{ds^2}}\left[\frac{1}{\rho^2}\cos\zeta-\frac{1}{\rho}\sin\zeta\left(\rho\frac{d^2\zeta}{ds^2}+\frac{d\zeta}{ds}\frac{d\rho}{ds}\right)\right.\\&\qquad\left.-\frac{\rho\sin\zeta\frac{d\zeta^2}{ds^2}\left(\rho\frac{d^2\zeta}{ds^2}+\frac{d\rho}{ds}\frac{d\zeta}{ds}\right)}{1-\rho^2\frac{d\zeta^2}{ds^2}}\right]\\&=\frac{1}{\rho}\sqrt{1-\rho^2\frac{d\zeta^2}{ds^2}}\left[\cot\zeta-\frac{\rho\left(\rho\frac{d^2\zeta}{ds^2}+\frac{d\zeta}{ds}\frac{d\rho}{ds}\right)}{1-\rho^2\frac{d^2\zeta}{ds^2}}\right]\\&=\frac{1}{\rho\sqrt{1-\rho^2\frac{d\zeta^2}{ds^2}}}\left[\left(1-\rho^2\frac{d\zeta^2}{ds^2}\right)\cot\zeta-\rho\left(\rho\frac{d^2\zeta}{ds^2}+\frac{d\zeta}{ds}\frac{d\rho}{ds}\right)\right].\end{aligned}$$

Remplaçant enfin $\frac{\omega}{ds}$ par $\frac{1}{r}$, il vient

$$(7)\qquad \frac{\rho}{r} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2\frac{d\zeta^2}{ds^2}}}\left[\left(1-\rho^2\frac{d\zeta^2}{ds^2}\right)\cot\zeta - \rho\left(\rho\frac{d^2\zeta}{ds^2}+\frac{d\zeta}{ds}\frac{d\rho}{ds}\right)\right].$$

Si ρ et r étaient donnés en fonction de s, l'équation (7), qui suppose que s a servi de variable indépendante, serait une équation différentielle du second ordre à deux variables s et ζ, dont l'intégrale ferait connaître la quantité ζ; et, quant à la quantité θ, sa détermination se ramènerait à une quadrature, au moyen de l'équation (6). Mais il importe de changer de variable indépendante, en prenant pour nouvelle variable la quantité ζ, c'est-à-dire l'angle que fait la tangente de la courbe cherchée avec l'axe des z, et en admettant que ρ et r sont des fonctions données de ζ. Nous déterminerons ensuite θ et, par suite, x, y, z en fonction de ζ, ce qui fera connaître les courbes qui répondent aux expressions de ρ et r; d'ailleurs l'une des deux relations qui lient ρ et r à ζ pourra être remplacée par une relation, prise arbitrairement entre ρ et r, de sorte que nous aurons obtenu les courbes dont le rayon de courbure et le rayon de torsion sont liés par une relation donnée quelconque.

4. Soient HK une quelconque des courbes cherchées, MT la tangente en un point M, pris arbitrairement sur cette courbe, MN la nor-



male principale, MZ une parallèle menée par le point M à l'axe des z. Considérons un triangle sphérique ABC tracé sur une sphère ayant pour centre le point M et pour rayon l'unité; il vient

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

ou bien, puisque $c = \frac{\pi}{2}$ et $b = \zeta$,

$$\cos a = \sin \zeta \cos A.$$

Mais a étant l'angle que fait le rayon de courbure avec l'axe des z, et $\cos\zeta$ étant égal à $\frac{dz}{ds}$, on a par une formule connue

$$\cos a = \frac{\rho}{ds} d \cos\zeta.$$

Égalant ces deux expressions de $\cos a$, et remplaçant $d\cos\zeta$ par $-\sin\zeta\, d\zeta$, on trouve

$$\cos A = -\rho \frac{d\zeta}{ds}, \tag{8}$$

ce qui montre que la quantité $-\rho\frac{d\zeta}{ds}$ est la valeur du cosinus de l'angle que fait le plan osculateur AMB de la courbe HK avec le plan AMC mené par la tangente MT parallèlement à l'axe des z. D'ailleurs la normale principale MN étant perpendiculaire à la droite MT, intersection de ces deux plans, on voit que cet angle A est le même que l'angle formé par le rayon de courbure avec le plan AMC, lequel est tangent en M au cylindre passant par la courbe HK et dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z.

5. La relation (8) donne

$$\sqrt{1 - \rho^2 \frac{d\zeta^2}{ds^2}} = \sin A, \quad \rho \frac{d^2\zeta}{ds^2} + \frac{d\rho}{ds}\frac{d\zeta}{ds} = -\frac{d\cos A}{ds};$$

par suite l'équation (7) devient

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1}{\sin A}\left(\sin^2 A \cot\zeta + \rho\frac{d\cos A}{ds}\right),$$

ou bien

$$(9) \qquad \frac{\rho}{r} = \sin A \cot\zeta + \frac{\rho}{\sin A}\frac{d\cos A}{ds}.$$

Mais, puisque la quantité ζ sert maintenant de variable indépendante, on posera

$$\frac{d\cos A}{ds} = \frac{d\cos A}{d\zeta}\frac{d\zeta}{ds},$$

ou bien, en vertu de la formule $\frac{d\zeta}{ds} = -\frac{1}{\rho}\cos A$,

$$\frac{d\cos A}{ds} = -\frac{1}{\rho}\cos A\,\frac{d\cos A}{d\zeta} = \frac{1}{\rho}\sin A\,\frac{d\sin A}{d\zeta}.$$

La relation (9) prendra dès lors la forme

$$(10) \qquad \frac{d\sin A}{d\zeta} + \sin A\cot\zeta = \frac{\rho}{r};$$

et comme ρ et r sont, par hypothèse, des fonctions données de ζ, on voit que l'équation (10) est une équation différentielle linéaire du premier ordre, à deux variables ζ et $\sin A$, dont l'intégrale est

$$\sin A = e^{-\int\cot\zeta d\zeta}\left[C + \int\frac{\rho}{r}e^{\int\cot\zeta d\zeta}d\zeta\right],$$

C étant une constante arbitraire, ou bien, en remarquant que

$$e^{\int\cos\zeta d\zeta} = e^{l\sin\zeta} = \sin\zeta,$$

$$(11) \qquad \sin A = \frac{1}{\sin\zeta}\left[C + \int\frac{\rho}{r}\sin\zeta\,d\zeta\right].$$

6. L'angle A se trouvant déterminé, l'angle θ s'ensuivra, car l'équation (6) donne

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin A}{\rho\sin\zeta},$$

ou bien, en posant $\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{d\zeta}\frac{d\zeta}{ds} = -\frac{1}{\rho}\cos A\,\frac{d\theta}{d\zeta}$,

$$-\frac{1}{\rho}\cos A\,\frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{\sin A}{\rho\sin\zeta},$$

d'où

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = -\frac{\operatorname{tang} A}{\sin\zeta}. \tag{12}$$

On a donc, en désignant par θ_0 une nouvelle constante arbitraire,

$$\theta - \theta_0 = -\int \frac{\operatorname{tang} A}{\sin\zeta}\, d\zeta, \tag{13}$$

formule où tang A devra être remplacé par sa valeur en fonction de ζ, déduite de la formule (11).

On remarquera que, d'après les formules (11) et (13), les valeurs de A et θ ne dépendent que du rapport $\frac{\rho}{r}$, quelles que soient les valeurs de ρ et r en fonction de ζ.

7. La valeur de θ, substituée dans les expressions de u, v, w, fera connaître les quantités $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, qu'on remplacera par les expressions suivantes :

$$\frac{dx}{ds} = -\frac{\cos A}{\rho}\frac{dx}{d\zeta},\quad \frac{dy}{ds} = -\frac{\cos A}{\rho}\frac{dy}{d\zeta},\quad \frac{dz}{ds} = -\frac{\cos A}{\rho}\frac{dz}{d\zeta};$$

on aura

$$\frac{dx}{d\zeta} = -\frac{\rho}{\cos A}\cos\theta\sin\zeta,$$

$$\frac{dy}{d\zeta} = -\frac{\rho}{\cos A}\sin\theta\sin\zeta,$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{\rho}{\cos A}\cos\zeta,$$

d'où, en représentant par x_0, y_0, z_0 trois nouvelles constantes arbitraires,

$$\left\{\begin{aligned} x - x_0 &= -\int \frac{\rho}{\cos A}\cos\theta\sin\zeta\, d\zeta,\\ y - y_0 &= -\int \frac{\rho}{\cos A}\sin\theta\sin\zeta\, d\zeta,\\ z - z_0 &= -\int \frac{\rho}{\cos A}\cos\zeta\, d\zeta. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Ces équations, donnant les valeurs de x, y, z en fonction de la variable indépendante ζ, déterminent une quelconque des courbes cherchées.

8. On remarquera que, si l'on pose $\int \frac{\tang A}{\sin\zeta} d\zeta = F(\zeta)$, la formule (13) donne

$$\theta - \theta_0 + F(\zeta) = 0,$$

ce qui est l'équation, en coordonnées polaires sphériques, de l'indicatrice de la courbe dont il s'agit. Considérons, en effet, une sphère d'un rayon égal à l'unité, qui aurait pour centre l'origine des coordonnées, et, de ce centre, imaginons que l'on mène des parallèles aux diverses tangentes de la courbe : le lieu des points où ces parallèles rencontrent la surface de la sphère est ce qu'on nomme l'*indicatrice sphérique*. Or, en prenant pour pôle le point où la partie positive de l'axe des z rencontre cette surface, et pour axe polaire le grand cercle déterminé par le plan xz, il est clair que θ est l'angle polaire et ζ le rayon vecteur d'un point quelconque de l'indicatrice.

9. Appliquons ce qui précède à l'examen de quelques cas remarquables.

En premier lieu, déterminons $\frac{\rho}{r}$ en fonction de ζ par la condition qu'on ait

$$\operatorname{tang} A = p \sin\zeta,$$

p étant une constante donnée; la formule (13) devient

$$\theta = \theta_0 - p\zeta.$$

Les valeurs de $\sin A$ et $\cos A$ en fonction de ζ sont alors

$$\sin A = \frac{p\sin\zeta}{\sqrt{1+p^2\sin^2\zeta}}, \quad \cos A = \frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2\zeta}},$$

et il vient, en vertu de la formule (11),

$$\frac{p\sin^2\zeta}{\sqrt{1+p^2\sin^2\zeta}} = C + \int \frac{\rho}{r}\sin\zeta\, d\zeta,$$

d'où l'on déduit par la différentiation

$$\frac{\rho}{r} = \frac{p \cos\zeta (2 + p^2 \sin^2\zeta)}{(1 + p^2 \sin^2\zeta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais il importe de remarquer que cette valeur de $\frac{\rho}{r}$ ne donne, en effet, $\tang A = p \sin\zeta$, qu'en supposant que la constante C reçoive une valeur particulière. Or on a

$$\sin A = \frac{1}{\sin\zeta}\left[C + \int \frac{p \sin\zeta \cos\zeta (2 + p^2 \sin^2\zeta)}{(1 + p^2 \sin^2\zeta)^{\frac{3}{2}}} d\zeta\right],$$

ou bien, en effectuant l'intégration indiquée au second membre,

$$\sin A = \frac{1}{\sin\zeta}\left[C + \frac{p \sin^2\zeta}{\sqrt{1 + p^2 \sin^2\zeta}}\right],$$

et l'on voit qu'il faut faire $C = 0$ pour qu'on ait $\sin A = \frac{p \sin\zeta}{\sqrt{1 + p^2 \sin^2\zeta}}$.

Maintenant les formules (14) deviennent, en y mettant pour θ et $\cos A$ leurs valeurs,

$$x - x_0 = -\int \rho \sin\zeta \cos(\theta_0 - p\zeta)\sqrt{1 + p^2 \sin^2\zeta}\, d\zeta,$$
$$y - y_0 = -\int \rho \sin\zeta \sin(\theta_0 - p\zeta)\sqrt{1 + p^2 \sin^2\zeta}\, d\zeta,$$
$$z - z_0 = -\int \rho \cos\zeta \sqrt{1 + p^2 \sin^2\zeta}\, d\zeta.$$

La quantité ρ restant une fonction indéterminée de ζ, il est permis de poser $\rho = k \cos A$, k étant une constante particulière, ou bien

$$\rho = \frac{k}{\sqrt{1 + p^2 \sin^2\zeta}},$$

d'où

$$p^2 \cos^2\zeta = 1 + p^2 - \frac{k^2}{\rho^2};$$

l'expression de $\frac{\rho}{r}$ devient

$$\frac{\rho}{r} = \left(1 + \frac{\rho^2}{k^2}\right)\sqrt{(1 + p^2)\frac{\rho^2}{k^2} - 1}.$$

Telle est, dans ce cas, la relation qui lie ρ et r. On remarquera que ρ est compris entre k et $\frac{k}{\sqrt{1+p^2}}$; en outre, r ne devenant infini que pour la valeur $\rho = \frac{k}{\sqrt{1+p^2}}$, on en conclut que la courbe est nécessairement à double courbure. En mettant pour ρ sa valeur en fonction de ζ, on obtient

$$x - x_0 = -k\int \sin\zeta \cos(\theta_0 - p\zeta)\, d\zeta,$$
$$y - y_0 = -k\int \sin\zeta \sin(\theta_0 - p\zeta)\, d\zeta,$$
$$z - z_0 = -k\sin\zeta,$$

et, en effectuant les intégrations,

$$x - x_0 = \frac{k}{2(1-p)}\cos[(1-p)\zeta + \theta_0] + \frac{k}{2(1+p)}\cos[(1+p)\zeta - \theta_0],$$
$$y - y_0 = \frac{k}{2(1-p)}\sin[(1-p)\zeta + \theta_0] - \frac{k}{2(1+p)}\sin[(1+p)\zeta - \theta_0],$$
$$z - z_0 = -k\sin\zeta.$$

On voit d'abord que les valeurs de $x - x_0$ et $y - y_0$ ne changent pas quand on change p en $-p$, pourvu qu'on change en même temps ζ en $-\zeta$, ce qui est permis, puisque ζ sert d'indéterminée; mais $z - z_0$ change de signe sans changer de valeur numérique. Donc la courbe répondant à une même valeur de p, prise avec le double signe $\pm$, est symétrique par rapport au plan mené par le point (x_0, y_0, z_0) parallèlement au plan xy. Des formules précédentes on déduit

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{k^2}{4(1-p)^2} + \frac{k^2}{4(1+p)^2} + \frac{k^2}{2(1-p^2)}\cos^2\zeta,$$

ou bien, en remplaçant $\cos 2\zeta$ par $1 - 2\sin^2\zeta = 1 - \frac{2}{k^2}(z - z_0)^2$,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \frac{(z - z_0)^2}{1 - p^2} = \frac{k^2}{(1 - p^2)^2}:$$

ce qui montre que la courbe qui répond à la question est située sur un ellipsoïde de révolution ou sur un hyperboloïde de révolution à une nappe, suivant que p est moindre ou plus grand que l'unité. Cette surface a d'ailleurs pour centre le point (x_0, y_0, z_0), et son axe est parallèle à l'axe des z.

Quant à l'arc s de la courbe, il est déterminé par la formule (8), qui donne $1 = -k\frac{d\zeta}{ds}$. On en déduit, en remplaçant $d\zeta$ par sa valeur en fonction de z et dz,

$$ds = \frac{k\,dz}{\sqrt{k^2 - (z - z_0)^2}},$$

puis, en intégrant et supposant que l'arc s commence au point pour lequel $z = z_0$,

$$s = k \arcsin \frac{z - z_0}{k}.$$

On voit donc que l'arc indéfini s s'exprime exactement au moyen d'un arc de cercle.

Transportons l'origine des coordonnées au point (x_0, y_0, z_0), et, pour ne pas changer les notations, continuons à désigner par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de la courbe; si nous prenons en outre pour nouveau plan des xz le plan passant par l'axe des z et faisant avec l'ancien un angle égal à θ_0, ce qui revient à faire $\theta_0 = 0$, les trois équations qui déterminent ces coordonnées deviennent

$$\begin{aligned}
x &= \frac{k}{2(1-p)}\cos(1-p)\zeta + \frac{k}{2(1+p)}\cos(1+p)\zeta,\\
y &= \frac{k}{2(1-p)}\sin(1-p)\zeta - \frac{k}{2(1+p)}\sin(1+p)\zeta,\\
z &= -k\sin\zeta.
\end{aligned}$$

Admettons que p soit positif, et soit d'abord $p < 1$. Posons

$$\frac{k}{2(1-p)} = R - R', \quad \frac{k}{2(1+p)} = R', \quad (1-p)\zeta = \varphi,$$

d'où l'on déduit

$$R = \frac{k}{1-p^2}, \quad \frac{R - R'}{R'} = \frac{1+p}{1-p}, \quad \frac{R}{R'} = \frac{2}{1-p},$$

$$(1+p)\zeta = \frac{1+p}{1-p}\varphi = \frac{R-R'}{R'}\varphi.$$

Les expressions de x et y se présentent sous cette forme :

$$x = (R - R')\cos\varphi + R'\cos\frac{R - R'}{R'}\varphi,$$

$$y = (R - R')\sin\varphi - R'\sin\frac{R - R'}{R'}\varphi,$$

et l'on reconnaît que la projection de la courbe sur le plan xy ou sur le plan du plus grand parallèle de l'ellipsoïde de révolution qui la contient est une épicycloïde intérieure engendrée par un point d'une circonférence mobile de rayon R' qui roulerait sur une circonférence fixe de rayon R. Ce cercle fixe n'est autre chose que le plus grand parallèle, en vertu de la formule $R = \frac{k}{1 - p^2}$, et l'angle φ est l'angle que fait la ligne des centres des deux cercles avec l'axe des x. Appelons ψ l'angle que fait la même ligne des centres avec le rayon du cercle mobile aboutissant au point générateur de l'épicycloïde : on a évidemment $\psi = \frac{R}{R'}\varphi = \frac{2\varphi}{1-p}$; et, en mettant pour φ sa valeur en fonction de ζ, on obtient cette relation très-simple $\psi = 2\zeta$.

On remarquera que, si $p = 0$, on a $\frac{R}{R'} = 2$ et $y = 0$; l'ellipsoïde se change en une sphère, et la courbe devient un grand cercle de cette sphère.

Lorsque $p = \frac{1}{2}$, on a $\frac{R}{R'} = 4$, et l'épicycloïde, projection de la courbe sur le plan xy, a pour équation $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$, R étant alors égal à $\frac{4}{3}k$.

Quelle que soit la valeur de p, si elle est commensurable, celle du rapport $\frac{R}{R'}$ l'est aussi, et l'épicycloïde est une courbe algébrique qui revient à son point de départ après s'être reproduite un certain nombre de fois. La courbe elle-même qui répond à la question est une courbe algébrique; et, comme sa projection sur le plan xy ne change pas si p est remplacé par $-p$ et ζ par $-\zeta$, on voit que cette courbe se compose d'un nombre limité de courbes identiques, entièrement fermées et situées sur un même ellipsoïde de révolution. Ces courbes identiques se réunissent deux à deux par une série de points de rebroussement situés sur le plus grand parallèle de l'ellipsoïde; la longueur de chacune d'elles se trouve être indépendante de la valeur de p et égale à la circonférence de rayon k, car elle est visiblement égale à $4\int_0^k \frac{dz}{\sqrt{k^2-z^2}} = 2\pi k$.

Soit, en second lieu, $k > 1$. On changera k en $-k$ dans les formules qui donnent x, y, z en fonction de ζ, ce qui est permis, puisque cela revient à changer le sens dans lequel on compte les coordonnées positives; on aura

$$\begin{aligned}
x &= \frac{k}{2(p-1)}\cos(1-p)\zeta - \frac{k}{2(1+p)}\cos(1+p)\zeta,\\
y &= \frac{k}{2(p-1)}\sin(1-p)\zeta + \frac{k}{2(1+p)}\sin(1+p)\zeta,\\
z &= k\sin\zeta.
\end{aligned}$$

On posera ensuite $\frac{k}{2(p-1)} = R + R'$, $\frac{k}{2(p+1)} = R'$, $(1-p)\zeta = \varphi$, d'où l'on déduit

$$R = \frac{k}{p^2-1},\quad \frac{R+R'}{R'} = \frac{p+1}{p-1},\quad \frac{R}{R'} = \frac{2}{p-1},$$
$$(1+p)\zeta = -\frac{p+1}{p-1}\varphi = -\frac{R+R'}{R'}\varphi.$$

Les expressions de x et y deviennent

$$\begin{aligned}
x &= (R+R')\cos\varphi - R'\cos\frac{R+R'}{R'}\varphi,\\
y &= (R+R')\sin\varphi - R'\sin\frac{R+R'}{R'}\varphi,
\end{aligned}$$

ce qui montre que la projection de la courbe sur le plan xy est une épicycloïde extérieure engendrée par un point d'une circonférence de rayon R' qui roulerait sur une circonférence fixe de rayon R. On trouvera d'ailleurs $\psi = \frac{R}{R'}\varphi = \frac{2\varphi}{p-1} = -2\zeta$; la courbe est encore algébrique si p est commensurable.

On remarquera que, dans la même hypothèse, l'indicatrice sphérique de cette courbe est une courbe algébrique dont l'arc indéfini s'exprime par une fonction elliptique de deuxième espèce. Désignons, en effet, par x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de cette indicatrice, et par σ son arc, compté à partir d'une origine arbitraire; on a évidemment

$$x' = \cos\theta \sin\zeta, \quad y' = \sin\theta \sin\zeta, \quad z' = \cos\zeta,$$

et l'on en déduit

$$d\sigma^2 = d\zeta^2 + \sin^2\zeta \, d\theta^2.$$

Mais on a aussi $\theta = \theta_0 - p\zeta$, qui est l'équation en coordonnées polaires sphériques de cette courbe, ou plus simplement $\theta = -p\zeta = -\frac{m}{n}\zeta$, en posant $p = \frac{m}{n}$ et admettant que θ s'annule en même temps que ζ. Il vient donc

$$x' = \cos\frac{m}{n}\zeta \sin\zeta, \quad y' = -\sin\frac{m}{n}\zeta \sin\zeta, \quad z' = \cos\zeta,$$

équations qui déterminent une courbe algébrique. On a en outre

$$d\theta = -\frac{m}{n}d\zeta,$$

par suite

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2}\sin^2\zeta}\, d\zeta = \sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2}}\sqrt{1 - \frac{m^2}{m^2+n^2}\cos^2\zeta}\, d\zeta,$$

d'où, en faisant $\zeta = \frac{\pi}{2} + \xi$ et supposant que l'arc σ commence au point pour lequel $\zeta = \frac{\pi}{2}$ ou $\xi = 0$,

$$\sigma = \sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2}} \int_0^{\xi} \sqrt{1 - \frac{m^2}{m^2+n^2}\sin^2\zeta}\, d\xi;$$

ce qui fait voir que l'arc σ s'exprime par une fonction elliptique de deuxième espèce dont le module est $\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$ ou $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$. Réciproquement, toute fonction elliptique de deuxième espèce dont le module sera de la forme $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$, p étant un nombre commensurable quelconque, pourra être représentée par l'arc d'une des courbes algébriques dont il s'agit. L'équation $\theta = -p\zeta$ montre d'ailleurs que ces courbes sont telles que le rayon vecteur ζ de chacun de leurs points est proportionnel à l'angle polaire correspondant θ.

10. Nous signalerons, à cette occasion, une autre courbe algébrique à double courbure, dont l'arc indéfini s'exprime par la fonction elliptique de deuxième espèce. Prenons les trois équations

$$dx = k\cos p\zeta \sin\zeta\, d\zeta, \quad dy = k\sin p\zeta \sin\zeta\, d\zeta, \quad dz = h\cos\zeta\, d\zeta,$$

où h et k désignent deux constantes quelconques, et p un nombre commensurable. En intégrant il vient

$$\frac{x-x_0}{k} = \frac{1}{2(p-1)}\cos(p-1)\zeta - \frac{1}{2(p+1)}\cos(p+1)\zeta,$$
$$\frac{y-y_0}{k} = \frac{1}{2(p-1)}\sin(p-1)\zeta - \frac{1}{2(p+1)}\sin(p+1)\zeta,$$
$$\frac{z-z_0}{h} = \sin\zeta,$$

formules qui déterminent une courbe algébrique dont les divers points répondent aux valeurs attribuées à la variable indépendante ζ. On en déduit

$$\left(\frac{x-x_0}{k}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{k}\right)^2 = \frac{1}{4(p-1)^2} + \frac{1}{4(p+1)^2} - \frac{1}{2(p^2-1)}\cos 2\zeta,$$

ou bien, en remplaçant $\cos 2\zeta$ par $1 - 2\sin^2\zeta = 1 - 2\left(\frac{z-z_0}{h}\right)^2$,

$$\left(\frac{x-x_0}{k}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{k}\right)^2 + \frac{1}{1-p^2}\left(\frac{z-z_0}{h}\right)^2 = \frac{1}{(1-p^2)^2},$$

équation d'un ellipsoïde de révolution ou d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, selon que p est moindre ou plus grand que l'unité. La courbe est donc située sur l'une ou l'autre de ces surfaces. Or on trouve pour l'expression de ds^2

$$ds^2 = (k^2\sin^2\zeta + h^2\cos^2\zeta)\,d\zeta^2 = h^2\left(1 - \frac{h^2-k^2}{h^2}\sin^2\zeta\right)d\zeta^2;$$

par suite

$$s = h\int\sqrt{1 - \frac{h^2 - k^2}{h^2}\sin^2\zeta}\,d\zeta;$$

ce qui montre que, si $\frac{k}{h} < 1$, l'arc indéfini de la courbe s'exprime par une fonction elliptique de deuxième espèce, ayant pour module $\sqrt{1 - \frac{k^2}{h^2}}$.

11. Un second cas à examiner est celui où l'on poserait

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\cos 2\zeta}{a\sin\zeta},$$

a étant une constante donnée. On a alors $\int\frac{\rho}{r}\sin\zeta\,d\zeta = \frac{1}{2a}\sin 2\zeta + C$, par suite

$$\sin A = \frac{1}{\sin\zeta}\left(\frac{1}{2a}\sin 2\zeta + C\right).$$

En faisant $C = 0$, on a simplement

$$\sin A = \frac{1}{a}\cos\zeta, \quad \text{d'où} \quad \tang A = \frac{\cos\zeta}{\sqrt{a^2 - \cos^2\zeta}}.$$

La formule (13) devient

$$\begin{aligned}\theta - \theta_0 &= -\int\frac{\cos\zeta\,d\zeta}{\sin\zeta\sqrt{a^2 - \cos^2\zeta}}\\ &= -\int\frac{\cos\zeta\frac{d\zeta}{\sin^2\zeta}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{\sin\zeta}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\arcsin\frac{\sqrt{1-a^2}}{\sin\zeta},\end{aligned}$$

et l'on en déduit, en faisant $\theta_0 = 0$, admettant que a soit moindre que l'unité, et posant $\sqrt{1 - a^2} = a'$,

$$a'\theta = \arcsin\frac{a'}{\sin\zeta},$$

ou bien

$$\sin\zeta = \frac{a'}{\sin a'\theta}.$$

Cette expression de $\sin\zeta$ conduit aux suivantes :

$$\cos\zeta = \frac{\sqrt{\sin^2 a'\theta - a'^2}}{\sin a'\theta}, \quad \cos A = \frac{a'\cos a'\theta}{a\sin a'\theta}, \quad d\zeta = -\frac{a'^2\cos a'\theta\, d\theta}{\sin a'\theta\sqrt{\sin^2 a'\theta - a'^2}},$$

et, en les substituant dans les équations (14), on obtient

$$x - x_0 = aa'^2\int\frac{\rho\cos\theta\, d\theta}{\sin a'\theta\sqrt{\sin^2 a'\theta - a'^2}},$$
$$y - y_0 = aa'^2\int\frac{\rho\sin\theta\, d\theta}{\sin a'\theta\sqrt{\sin^2 a'\theta - a'^2}},$$
$$z - z_0 = aa'\int\frac{\rho\, d\theta}{\sin a'\theta}.$$

Ce sont là les formules qui détermineront la courbe cherchée, après y avoir remplacé ρ par une fonction de θ qu'on se donnera à volonté. Mais ce que nous voulons surtout faire remarquer, c'est que, lorsque a' est une fraction commensurable, l'indicatrice sphérique, dont l'équation est $\sin\zeta = \frac{a'}{\sin a'\theta}$, est une courbe algébrique dont l'arc indéfini s'exprime par la fonction elliptique de première espèce.

Chaque point M de cette indicatrice se trouve déterminé, sur la sphère qui la contient, par son rayon vecteur ζ et son angle polaire θ. Or, pour $\theta = 1$, le rapport $\frac{a'}{\sin a'\theta}$ devient $\frac{a'}{\sin a'}$, quantité plus grande que l'unité; et pour $\theta = \frac{\pi}{2a'}$, il est égal à a' qui est moindre que l'unité. Donc il existe une valeur de θ comprise entre 1 et $\frac{\pi}{2a'}$ et que je nomme θ_1, pour laquelle ce rapport sera égal à l'unité, et puisque $\sin\zeta = \frac{a'}{\sin a'\theta}$, on doit rejeter les valeurs de θ comprises entre zéro et θ_1, mais admettre celles comprises entre θ_1 et $\frac{\pi}{2a'}$. A chacune de ces dernières valeurs de θ répondront deux valeurs de ζ supplémentaires, et par conséquent deux points de l'indicatrice, ce qui montre que cette courbe est symétrique par rapport au grand cercle perpendiculaire à l'axe des z. Soit ζ_0 un arc moindre que $\frac{\pi}{2}$ et tel qu'on ait $\sin\zeta_0 = a'$: aux valeurs de θ

comprises entre θ_1 et $\frac{\pi}{2a'}$ correspondront des valeurs de ζ comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et ζ_0, ou bien entre $\frac{\pi}{2}$ et $\pi - \zeta_0$. Quant aux valeurs de θ comprises entre $\frac{\pi}{2a'}$ et $\frac{\pi}{a'} - \theta_1$, elles redonneront les mêmes valeurs de ζ; et comme ζ a la même valeur pour $\theta = \frac{\pi}{2a'} + \lambda$ et $\theta = \frac{\pi}{2a'} - \lambda$, il s'ensuit que l'indicatrice est symétrique par rapport au grand cercle passant par l'axe des z, que détermine la valeur $\theta = \frac{\pi}{2a'}$. Cette courbe est entièrement fermée, et elle coupe le grand cercle perpendiculaire à l'axe des z en deux points déterminés par les valeurs $\theta = \theta_1$, $\theta = \frac{\pi}{a'} - \theta_1$; il est d'ailleurs facile de reconnaître que les tangentes en ces deux points sont perpendiculaires au plan de ce cercle, et qu'aux deux points répondant aux valeurs $\zeta = \zeta_0$, $\zeta = \pi - \zeta_0$ les tangentes sont parallèles à ce même plan. On verrait encore que les valeurs de θ supérieures à $\frac{\pi}{a'} - \theta_1$ donneraient une série de courbes égales à la première, mais situées différemment sur la sphère qui les contient; le nombre de ces courbes serait limité si a' était commensurable.

Désignons par $d\sigma$ l'élément de l'indicatrice : en différentiant l'équation de cette courbe, on obtient

$$d\theta = -\frac{\cos\zeta\, d\zeta}{\sin\zeta\sqrt{\sin^2\zeta - a'^2}},$$

valeur qui, substituée dans la formule

$$d\sigma = \sqrt{d\zeta^2 + \sin^2\zeta\, d\theta^2},$$

donne

$$d\sigma = \frac{a\, d\zeta}{\sqrt{\sin^2\zeta - a'^2}}.$$

Transformons cette expression de $d\sigma$ en posant

$$\sin\zeta = \frac{a'}{\sqrt{\cos^2\varphi + a'^2\sin^2\varphi}},$$

et remarquons que l'on a : 1° $\varphi = 0$ pour la valeur $\zeta = \zeta_0$ qui rend $\sin\zeta$ égal à a'; 2° $\varphi = \frac{\pi}{2}$ pour $\zeta = \frac{\pi}{2}$; en sorte que, si ζ varie de ζ_0 à $\frac{\pi}{2}$, φ variera de o à $\frac{\pi}{2}$.

On trouve

$$\cos\zeta = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + a'^2\sin^2\varphi}}, \quad \sqrt{\sin^2\zeta - a'^2} = \frac{aa'\sin\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + a'^2\sin^2\varphi}};$$

$$\cos\zeta\, d\zeta = \frac{a^2 a' \sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{(\cos^2\varphi + a'^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}, \quad d\zeta = \frac{aa'\sin\varphi d\varphi}{\cos^2\varphi + a'^2\sin^2\varphi};$$

par suite on a, pour la transformée de $d\sigma$,

$$d\sigma = \frac{a d\varphi}{\sqrt{1 - a^2\sin^2\varphi}}.$$

Il vient donc, en supposant que l'arc σ soit compté à partir du point pour lequel $\varphi = 0$,

$$\sigma = a\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a^2\sin^2\varphi}};$$

ce qui montre que la valeur de ρ, au facteur a près, est égale à une fonction elliptique de première espèce, dont le module est cette même quantité a. Si l'on se donne réciproquement une fonction elliptique de première espèce $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a^2\sin^2\varphi}}$, on pourra la représenter par l'arc d'une des courbes algébriques que nous considérons, pourvu que le complément du module a soit une fraction rationnelle $\frac{p}{q}$, ou que ce module soit de la forme $\sqrt{1 - \frac{p^2}{q^2}}$.

Pour démontrer que, dans ce cas, les courbes sont algébriques, posons $\frac{p\theta}{q} = \theta'$. L'équation d'une quelconque de ces courbes devient

$$\sin\theta' = \frac{a'}{\sin\zeta}, \quad \text{d'où} \quad \cos\theta' = \frac{\sqrt{\sin^2\zeta - a'^2}}{\sin\zeta}.$$

Or la relation $\frac{p\theta}{q} = \theta'$ donne

$$\operatorname{tang} p\theta = \operatorname{tang} q\theta';$$

et, comme p et q sont des entiers positifs, si l'on exprime $\operatorname{tang} p\theta$ et $\operatorname{tang} q\theta'$ en fonction rationnelle de $\operatorname{tang}\theta$, $\operatorname{tang}\theta'$, on obtient l'équation

$$\frac{p \operatorname{tang}\theta - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\operatorname{tang}^3\theta + \ldots}{1 - \frac{p(p-1)}{1.2}\operatorname{tang}^2\theta + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4}\operatorname{tang}^4\theta - \ldots} = \frac{q \operatorname{tang}\theta' - \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\operatorname{tang}^3\theta' + \ldots}{1 - \frac{q(q-1)}{1.2}\operatorname{tang}^2\theta' + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3.4}\operatorname{tang}^4\theta' - \ldots};$$

où les numérateurs et les dénominateurs des deux membres sont composés d'un nombre fini de termes. Appelons x', y', z' les coordonnées rectilignes d'un point quelconque de la courbe, il vient

$$x' = \cos\theta \sin\zeta, \quad y' = \sin\theta \sin\zeta, \quad z' = \cos\zeta,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{y'}{x'}, \quad \sin\zeta = \sqrt{1 - z'^2},$$

$$\sin\theta' = \frac{a'}{\sqrt{1 - z'^2}}, \quad \cos\theta' = \sqrt{\frac{1 - a'^2 - z'^2}{1 - z'^2}}, \quad \operatorname{tang}\theta' = \frac{a'}{\sqrt{1 - a'^2 - z'^2}}.$$

En remplaçant $\operatorname{tang}\theta$ et $\operatorname{tang}\theta'$ par leurs valeurs en fonction de x', y', z' dans la relation qui lie entre elles ces deux quantités, et remarquant que $a'q = p$, on obtient l'équation

$$\frac{y'}{x'} \frac{1 - \frac{(p-1)(p-2)}{1.2.3}\frac{y'^2}{x'^2} + \ldots}{1 - \frac{p(p-1)}{1.2}\frac{y'^2}{x'^2} + \ldots} = \frac{1}{\sqrt{1 - a'^2 - z'^2}} \frac{1 - \frac{(q-1)(q-2)}{1.2.3}\frac{a'^2}{1 - a'^2 - z'^2} + \ldots}{1 - \frac{q(q-1)}{1.2}\frac{a'^2}{1 - a'^2 - z'^2} + \ldots}.$$

En y joignant l'équation $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, c'est-à-dire celle de la sphère sur laquelle la courbe est située, on reconnaît que cette courbe est algébrique, puisqu'elle est représentée par ces deux équations.

10. Supposons enfin que l'on ait $\frac{\rho}{r} = k$, k étant une constante quelconque.

On sait que, dans ce cas, la courbe est une hélice, ainsi que l'a démontré, le premier, M. Bertrand à l'aide d'ingénieuses considérations géométriques (*Journal de Mathématiques*, I[re] série, t. XIII, p. 423), et l'on connaît aussi les démonstrations analytiques qu'en ont données ensuite MM. Serret et Puiseux (*Journal de Mathématiques*, I[re] série, t. XVI, p. 193 et 208). Or on peut arriver promptement au même résultat au moyen des formules (10), (11) et (12), auxquelles on joindra la suivante :

$$(15) \qquad \frac{d\cos A}{d\zeta} = -\operatorname{tang} A \frac{d\sin A}{d\zeta} = -\operatorname{tang} A \left(\frac{\rho}{r} - \sin A \cot\zeta\right),$$

qu'on déduit de l'expression de $\frac{d\sin A}{d\zeta}$ donnée par l'équation (10) ; et l'on obtiendra, en outre, les coordonnées d'un point quelconque de la courbe en fonction de ζ par de simples quadratures.

D'abord $\frac{\rho}{r}$ étant constant, l'équation (11) donne

$$(16) \qquad \frac{\rho}{r}\cos\zeta + \sin A \sin\zeta = C.$$

En second lieu, considérons les deux quantités

$$\cos\theta\left(\frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta \sin A\right) + \sin\theta\cos A,$$
$$\sin\theta\left(\frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta \sin A\right) - \cos\theta\cos A.$$

Il est aisé de reconnaître que leurs dérivées par rapport à ζ sont nulles. En effet : 1° si l'on prend la dérivée de la première quantité, en mettant pour $\frac{d\sin A}{d\zeta}$, $\frac{d\cos A}{d\zeta}$, $\frac{d\theta}{d\zeta}$ leurs valeurs déterminées par les formules (10), (15) et (12), savoir :

$$\frac{d\sin A}{d\zeta} = \frac{\rho}{r} - \sin A\cot\zeta, \quad \frac{d\cos A}{d\zeta} = -\operatorname{tang} A\left(\frac{\rho}{r} - \sin A \cot\zeta\right),$$
$$\frac{d\theta}{d\zeta} = -\frac{\operatorname{tang} A}{\sin\zeta},$$

on trouve pour cette dérivée

$$\frac{\sin\theta \operatorname{tang} A}{\sin\zeta}\left(\frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta \sin A\right)$$
$$+ \cos\theta\left[\frac{\rho}{r}\cos\zeta + \sin\zeta \sin A - \cos\zeta\left(\frac{\rho}{r} - \sin A \cot\zeta\right)\right]$$
$$- \sin\theta \operatorname{tang} A\left(\frac{\rho}{r} - \sin A \cot\zeta\right) - \frac{\cos\theta \sin A}{\sin\zeta};$$

2° on trouve de même pour la dérivée de la deuxième quantité

$$-\frac{\cos\theta \operatorname{tang} A}{\sin\zeta}\left(\frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta \sin A\right)$$
$$+ \sin\theta\left[\frac{\rho}{r}\cos\zeta + \sin\zeta \sin A - \cos\zeta\left(\frac{\rho}{r} - \sin A \cot\zeta\right)\right]$$
$$+ \cos\theta \operatorname{tang} A\left(\frac{\rho}{r} - \sin A \cot\zeta\right) - \frac{\sin\theta \sin A}{\sin\zeta};$$

et l'on vérifie que, dans ces deux résultats, les termes se détruisent mutuellement. Il vient donc, en désignant par C′ et C″ deux nouvelles constantes,

$$(17) \qquad \cos\theta\left(\frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta \sin A\right) + \sin\theta \cos A = C',$$

$$(18) \qquad \sin\theta\left(\frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta \sin A\right) - \cos\theta \cos A = C''.$$

On remarquera d'ailleurs que, si l'on ajoute les trois équations (16). (17) et (18), après les avoir élevées au carré, on obtient

$$(19) \qquad C^2 + C'^2 + C''^2 = 1 + \frac{\rho^2}{r^2},$$

ce qui montre que, des trois constantes C, C′, C″, deux seulement restent arbitraires.

Cela posé, on a, en désignant par α, β, γ les angles que fait la tangente de la courbe avec les axes coordonnés,

$$\cos\alpha = \cos\theta \sin\zeta, \quad \cos\beta = \sin\theta \sin\zeta, \quad \cos\gamma = \cos\zeta.$$

Si l'on multiplie les premiers membres des équations (16), (17) et (18) respectivement par $\cos\zeta$, $\cos\theta\sin\zeta$, $\sin\theta\sin\zeta$, et qu'on ajoute les produits, on trouve pour somme $\frac{\rho}{r}$. Donc on a aussi

$$C'\cos\alpha + C''\cos\beta + C\cos\gamma = \frac{\rho}{r},$$

ou bien, en posant $\cos\alpha' = \frac{C'}{\sqrt{C^2+C'^2+C''^2}}$, $\cos\beta' = \frac{C''}{\sqrt{C^2+C'^2+C''^2}}$, $\cos\gamma' = \frac{C}{\sqrt{C^2+C'^2+C''^2}}$, et ayant égard à la formule (19),

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = \frac{\frac{\rho}{r}}{\sqrt{1+\frac{\rho^2}{r^2}}},$$

ce qui prouve que la tangente de la courbe fait un angle constant avec la direction déterminée par les trois angles α', β', γ', c'est-à-dire que cette courbe est une hélice qui coupe, sous un angle constant, les génératrices d'un cylindre parallèle à cette même direction.

Réciproquement, si la courbe est une hélice, le rapport $\frac{\rho}{r}$ est constant; car, si l'on prend l'axe des z parallèle aux génératrices du cylindre sur lequel l'hélice est tracée, l'angle ζ sera constant, et l'on aura $d\zeta = 0$; par suite $\frac{\rho}{r}$ sera aussi constant, puisque l'équation (7) devient $\frac{\rho}{r} = \cot\zeta$.

Cherchons maintenant les équations de la courbe dans l'hypothèse d'axes rectangulaires quelconques. Si l'on multiplie l'équation (17) par $\cos\theta$ et l'équation (18) par $\sin\theta$, puis qu'on ajoute les produits, on obtient

$$C'\cos\theta + C''\sin\theta = \frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta\sin A,$$

ou bien, en mettant pour $\sin A$ sa valeur donnée par la formule (11),

$$C'\cos\theta + C''\sin\theta = \frac{1}{\sin\zeta}\left(\frac{\rho}{r} - C\cos\zeta\right),$$

équation qui détermine l'angle θ en fonction de ζ. Mais il vaut mieux se servir des expressions suivantes, tirées des mêmes équations (17) et (18),

$$\cos\theta = \frac{C'\left(\frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta\sin A\right) - C''\cos A}{\left(\frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta\sin A\right)^2 + \cos^2 A},$$

$$\sin\theta = \frac{C'\cos A + C''\left(\frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta\sin A\right)}{\left(\frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta\sin A\right)^2 + \cos^2 A}.$$

Si l'on met pour $\sin A$ et $\cos A$ leurs valeurs, on trouve, pour le dénominateur commun,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta\sin A\right)^2 + \cos^2 A \\
&= \frac{1}{\sin^2\zeta}\left[\left(\frac{\rho}{r} - C\cos\zeta\right)^2 + \sin^2\zeta - \left(C - \frac{\rho}{r}\cos\zeta\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{\sin^2\zeta}\left(\frac{\rho^2}{r^2}\sin^2\zeta - C^2\sin^2\zeta + \sin^2\zeta\right) \\
&= 1 + \frac{\rho^2}{r^2} - C^2 \\
&= C'^2 + C''^2;
\end{aligned}$$

par suite,

$$\cos\theta\sin\zeta = \frac{C'\left(\frac{\rho}{r} - C\cos\zeta\right) - C''\sqrt{\sin^2\zeta - \left(C - \frac{\rho}{r}\cos\zeta\right)^2}}{C'^2 + C''^2},$$

$$\sin\theta\sin\zeta = \frac{C''\left(\frac{\rho}{r} - C\cos\zeta\right) + C'\sqrt{\sin^2\zeta - \left(C - \frac{\rho}{r}\cos\zeta\right)^2}}{C'^2 + C''^2}.$$

Il ne reste plus qu'à porter dans les équations (14) les valeurs de

$\cos A$, $\cos\theta \sin\zeta$, $\sin\theta \sin\zeta$, ce qui donne

$$(20)\left\{\begin{aligned} x - x_0 &= -\frac{1}{C'^2+C''^2}\int\left[\frac{C'\left(\frac{\rho}{r} - C\cos\zeta\right)}{\sqrt{\sin^2\zeta - \left(C - \frac{\rho}{r}\cos\zeta\right)^2}} - C''\right]\rho\sin\zeta\, d\zeta,\\ y - y_0 &= -\frac{1}{C'^2+C''^2}\int\left[\frac{C''\left(\frac{\rho}{r} - C\cos\zeta\right)}{\sqrt{\sin^2\zeta - \left(C - \frac{\rho}{r}\cos\zeta\right)^2}} + C'\right]\rho\sin\zeta\, d\zeta,\\ z - z_0 &= -\int\frac{\rho\sin\zeta\cos\zeta\, d\zeta}{\sqrt{\sin^2\zeta - \left(C - \frac{\rho}{r}\cos\zeta\right)^2}}. \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, $\frac{\rho}{r}$ devra être remplacé par k, et ρ par sa valeur en fonction de ζ, qui est censée connue. Elles donnent les valeurs de x, y, z en fonction de ζ, en supposant qu'on ait déterminé les intégrales qui y sont contenues; par où l'on voit que la détermination des équations de la courbe cherchée est ramenée à ne dépendre que de simples quadratures.

Supposons ρ constant, ce qui exige que r le soit aussi, puisque $\frac{\rho}{r} = k$. Prenons pour axe des x une parallèle aux génératrices du cylindre sur lequel l'hélice est tracée : on aura

$$\cos\alpha' = 1, \quad \cos\beta' = 0, \quad \cos\gamma' = 0,$$

par suite,

$$C' = \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{r^2}}, \quad C'' = 0, \quad C = 0.$$

Les expressions de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ deviennent

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -\frac{\rho^2}{C'r}\int\frac{\sin\zeta\, d\zeta}{\sqrt{1 - C'^2\cos^2\zeta}} = \frac{\rho^2}{C'^2 r}\arcsin(C'\cos\zeta),\\ y - y_0 &= \frac{\rho}{C'}\cos\zeta,\\ z - z_0 &= -\rho\int\frac{\sin\zeta\cos\zeta\, d\zeta}{\sqrt{1 - C'^2\cos^2\zeta}} = -\frac{\rho}{C'^2}\sqrt{1 - C'^2\cos^2\zeta}; \end{aligned}$$

et, en faisant la somme des carrés des deux dernières formules, on obtient

$$(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \frac{\rho^2}{C'^4},$$

ce qui démontre que le cylindre dont les génératrices sont coupées par l'hélice sous un angle constant est un cylindre de révolution dont le rayon de la base est $\frac{\rho}{C'^2}$ ou $\frac{\rho}{1 + \frac{\rho^2}{r^2}}$. C'est M. Puiseux qui, le premier, a traité le cas où les rayons des deux courbures sont constants, et a fait voir que la courbe est une hélice tracée sur un cylindre de révolution (*Journal de Mathématiques*, Ire série, t. VII, p. 65).

On remarquera encore le cas particulier où $r = \infty$, ρ étant une fonction quelconque de ζ. On a alors $\frac{\rho}{r} = 0$, $C^2 + C'^2 + C''^2 = 1$, et les formules (20) deviennent

$$\begin{aligned}
x - x_0 &= \frac{CC'}{C'^2 + C''^2} \int \frac{\rho \cos\zeta \sin\zeta\, d\zeta}{\sqrt{\sin^2\zeta - C^2}} + \frac{C''}{C'^2 + C''^2} \int \rho \sin\zeta\, d\zeta, \\
y - y_0 &= \frac{CC''}{C'^2 + C''^2} \int \frac{\rho \cos\zeta \sin\zeta\, d\zeta}{\sqrt{\sin^2\zeta - C^2}} - \frac{C'}{C'^2 + C''^2} \int \rho \sin\zeta\, d\zeta, \\
z - z_0 &= - \int \frac{\rho \cos\zeta \sin\zeta\, d\zeta}{\sqrt{\sin^2\zeta - C^2}}.
\end{aligned}$$

Or ces équations, multipliées respectivement par C', C'', C, et ajoutées ensuite, conduisent à l'équation d'un plan, savoir :

$$C'(x - x_0) + C''(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

On vérifie donc que la courbe est plane lorsque le rayon de torsion est infini.

FIN DU TOME DIX-NEUVIÈME (2e SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.