JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CAMILLE JORDAN

Mémoire sur la réduction et la transformation des systèmes quadratiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 19 (1874), p. 397-422.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1874_2_19__397_0>

Mémoire sur la réduction et la transformation des systèmes quadratiques;

PAR M. CAMILLE JORDAN.

Dans le paragraphe I de ce Mémoire, nous donnons une méthode pour réduire à une forme canonique un système de deux fonctions quadratiques.

Nous montrons ensuite (§ II) que, pour que deux semblables systèmes soient équivalents, il faut et il suffit que leurs réduites soient identiques.

Il reste à déterminer, dans le cas de l'équivalence, toutes les substitutions qui transforment ces systèmes l'un dans l'autre. L'une d'elles est fournie immédiatement par le procédé même de la réduction. Pour obtenir les autres, il suffit de déterminer toutes les substitutions qui transforment l'un des systèmes en lui-même.

Nous résolvons ce problème dans le paragraphe III, en montrant que toutes ces substitutions résultent de la combinaison de certaines substitutions simples, que nous déterminons *a priori*.

I. — *Réduction des systèmes quadratiques.*

1. Soit P une fonction quadratique de $m+n$ variables $x_1, \ldots, x_m$; $y_1, \ldots, y_n$; on aura évidemment

$$P = Q_x + B_{xy} + Q_y,$$

Q_x étant quadratique par rapport aux x, Q_y quadratique par rapport aux y, et B_{xy} bilinéaire par rapport aux x et aux y.

Cela posé, nous pouvons établir les deux propositions suivantes :

2. Lemme I. — *Si Q_x se réduit à zéro, on pourra, par une substitution convenable, où les y seront remplacés par des fonctions des y seulement, mettre* P *sous la forme*

$$x_1 y_1 + \ldots + x_k y_k + Q_1, \tag{1}$$

Q_1 étant une fonction quadratique de $y_{k+1}, \ldots, y_n$ seulement.

Soit en effet

$$B_{xy} = x_1 Y_1 + \ldots + x_m Y_m,$$

$Y_1, \ldots, Y_m$ étant des fonctions linéaires des y. Admettons que $Y_1, \ldots, Y_k$ soient des fonctions indépendantes, mais qu'on ait au contraire pour $\rho > k$

$$Y_\rho = a_{\rho 1} Y_1 + \ldots + a_{\rho k} Y_k.$$

On aura

$$B_{xy} = (x_1 + a_{k+1,1} x_{k+1} + \ldots + a_{m1} x_m) Y_1 + \ldots$$
$$+ (x_k + a_{k+1,k} x_{k+1} + \ldots + a_{mk} x_m) Y_k.$$

Soient $Y'_{k+1}, \ldots, Y'_n$ des fonctions quelconques des y, qui jointes à $Y_1, \ldots, Y_k$ forment un système de n fonctions indépendantes. Effectuons sur les y la substitution

$$| \, Y_1, \ldots, Y_k, Y'_{k+1}, \ldots, Y'_n \quad y_1, \ldots, y_n \, |;$$

P prendra la forme

$$(x_1 + a_{k+1,1} x_{k+1} + \ldots) y_1 + \ldots + (x_k + a_{k+1,k} x_{k+1} + \ldots) y_k + Q'_y,$$

où Q'_y est une fonction quadratique des y, que l'on peut mettre sous la forme

$$y_1 f_1 + \ldots + y_k f_k + Q_1,$$

Q_1 ne dépendant plus que de $y_{k+1}, \ldots, y_m$.

Effectuons maintenant la substitution

$$\left| \begin{array}{ll} x_1 & x_1 - a_{k+1,1} x_{k+1} - \ldots - f_1 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k & x_k - a_{k+1,k} x_{k+1} - \ldots - f_k \end{array} \right|; \tag{2}$$

P se trouvera réduit à (1).

3. Lemme II. — *Si, Q_x n'étant pas identiquement nul, son déterminant Δ diffère de zéro, on pourra faire disparaître les termes bilinéaires B_{xy} par une substitution de la forme*

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m & x_m + a_{m1}y_1 + \ldots + a_{mn}y_n \end{vmatrix},$$

où les coefficients a seront entièrement déterminés.

Soit en effet

$$B_{xy} = y_1\varphi_1 + \ldots + y_n\varphi_n,$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ étant des fonctions linéaires des x. Effectuons la substitution (3); P prendra la forme

$$Q_x + B'_{xy} + Q'_y,$$

la portion bilinéaire B'_{xy} étant égale à

$$\left(a_{11}\frac{\partial Q_x}{\partial x_1} + \ldots + a_{m1}\frac{\partial Q_x}{\partial x_m} + \varphi_1\right)y_1 + \ldots + \left(a_{1n}\frac{\partial Q_x}{\partial x_1} + \ldots + a_{mn}\frac{\partial Q_x}{\partial x_m} + \varphi_n\right)y_n.$$

Elle s'annulera identiquement si l'on a

$$(4)\qquad \begin{cases} a_{11}\dfrac{\partial Q_x}{\partial x_1} + \ldots + a_{m1}\dfrac{\partial Q_x}{\partial x_m} + \varphi_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\dfrac{\partial Q_x}{\partial x_1} + \ldots + a_{mn}\dfrac{\partial Q_x}{\partial x_m} + \varphi_n = 0. \end{cases}$$

Si dans la première de ces équations on égale séparément à zéro les coefficients de $x_1, \ldots, x_m$, on aura entre les coefficients $a_{11}, \ldots, a_{m1}$ un système de m équations linéaires ayant Δ pour déterminant; on pourra donc les calculer sans difficulté. Les équations suivantes détermineront de même $a_{12}, \ldots, a_{m2}, \ldots; a_{1n}, \ldots, a_{mn}$.

4. Corollaire. — *Toute fonction quadratique peut être ramenée à la*

forme suivante :

$$A_1 x_1^2 + \ldots + A_\alpha x_\alpha^2 + B_1 x_{\alpha+1} x_{\alpha+2} + \ldots + B_\mu x_{\alpha+2\mu-1} x_{\alpha+2\mu},$$

où chaque variable ne figure que dans un seul terme.

Considérons en effet la fonction de p variables $P = f(x_1, \ldots, x_p)$. Si elle contient un terme en x_1^2, par exemple, tel que $A_1 x_1^2$, on pourra (lemme II) la ramener à la forme $A_1 x_1^2 + Q$, où Q ne dépend plus de x_1. Si elle ne contient que des rectangles, soit $B x_1 x_2$ l'un d'eux. On pourra (lemme I) la réduire à la forme $B x_1 x_2 + Q$, où Q ne dépend plus de x_1, x_2. Dans l'un et l'autre cas, on n'aura plus qu'à réduire Q (s'il n'est pas nul) par la répétition du même procédé.

5. *Remarque I.* — On peut réduire P à une somme de carrés (en introduisant des imaginaires); car $A_1 x_1^2$ se change en x_1^2 par la substitution

$$\left| \; x_1 \quad \frac{x_1}{\sqrt{A}} \; \right|,$$

et $B x_1 x_2$ se réduit à $x_1^2 + x_2^2$ par la substitution

$$\left| \; x_1, x_2 \quad \frac{x_1 + i x_2}{B}, \; x_1 - i x_2 \; \right|.$$

6. *Remarque II.* — Soit

$$| \; X_1, \ldots, X_p \quad x_1, \ldots, x_p \; |$$

une substitution qui ramène P à une somme de carrés, telle que $x_1^2 + \ldots + x_q^2$. Revenant aux variables primitives, on aura évidemment

$$P = X_1^2 + \ldots + X_q^2;$$

si $q < p$, on voit par là que P ne dépend en réalité que des q variables $X_1, \ldots, X_q$; mais son déterminant par rapport à ces variables sera égal à l'unité.

Soient d'ailleurs $\xi_1, \ldots, \xi_q$ des fonctions linéaires quelconques de $X_1, \ldots, X_q$; remplaçant $X_1, \ldots, X_q$ par leurs valeurs en fonction de $\xi_1, \ldots, \xi_q$, on aura P exprimé en fonction des q variables ξ, et son déterminant par rapport à ces variables, étant égal, comme on sait, au carré du déterminant des équations qui lient les X aux ξ, sera $\gtrless 0$.

On peut donc choisir les variables indépendantes de telle sorte que P ne contienne dans son expression que celles dont il dépend en réalité; et cela fait, son déterminant par rapport à ces variables sera $\gtrless 0$.

7. Théorème. *Deux fonctions quadratiques quelconques* P, P′ *peuvent être ramenées simultanément à la forme suivante :*

$$(6)\quad P = \mathcal{A}_x^\alpha + \mathcal{A}_y^\beta + \ldots + \mathcal{B}_z^\gamma + \mathcal{B}_u^\delta + \ldots + \mathcal{C}_v^\varepsilon + \ldots + \mathcal{C}_w^\zeta + \ldots,$$

$$(7)\quad P' = \mathcal{B}_x^\alpha + \mathcal{B}_y^\beta + \ldots + \mathcal{C}_z^\gamma + \mathcal{C}_u^\delta + \ldots + \mathcal{B}_v^\varepsilon + \ldots + \mathcal{B}_w^\zeta - \lambda_1 \mathcal{C}_w^\zeta + \ldots,$$

les $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ *étant des expressions de la forme*

$$\mathcal{A}_x^\alpha = \sum_{\rho=1}^{\rho=\alpha} x_{2\rho-1} x_{2\rho}, \qquad \mathcal{B}_x^\alpha = \sum_{\rho=1}^{\rho=\alpha} x_{2\rho} x_{2\rho+1}, \qquad \mathcal{C}_z^\gamma = \sum_{\rho=1}^{\rho=\gamma} z_{2\rho-1} z_{2\rho} + z_{2\gamma+1}^2,$$

et $\lambda_1, \ldots$ *des constantes* $\lessgtr 0$.

Ce théorème est évident pour les fonctions d'une seule variable, et nous allons établir que, s'il est vrai jusqu'à $r - 1$ variables, il le sera pour r variables.

8. Supposons d'abord que l'une au moins des deux fonctions données P et P′ ait son déterminant nul; nous avons vu (6) qu'on peut mettre ces fonctions sous la forme

$$P = F(\xi_1, \ldots, \xi_q), \quad P' = F'(\xi'_1, \ldots, \xi'_{q'}),$$

les ξ et les ξ' étant des fonctions linéaires des variables, choisies de telle sorte que le déterminant de P par rapport aux ξ, et celui de P′ par rapport aux ξ', soient $\gtrless 0$.

Admettons, pour plus de généralité, que le faisceau des fonctions linéaires $c_1\xi_1 + \ldots + c_q\xi_q$ formées avec $\xi_1, \ldots, \xi_q$ ait des fonctions communes avec le faisceau $c'_1\xi'_1 + \ldots + c'_{q'}\xi'_{q'}$ formé des fonctions linéaires des ξ'. Ces fonctions communes pourront s'exprimer linéairement par un certain nombre d'entre elles $f_1, \ldots, f_\mu$, qui seront indépendantes.

Prenons maintenant pour variables : 1° les fonctions $f_1, \ldots, f_\mu$; 2° des fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_{q-\mu}$ de $\xi_1, \ldots, \xi_q$, formant avec les f un système de q fonctions indépendantes; 3° des fonctions $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_{q'-\mu}$ de $\xi'_1, \ldots, \xi'_{q'}$, formant avec les f un système de q' fonctions indépendantes; il viendra

$$\mathrm{P} = \mathrm{F}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{q-\mu}, f_1, \ldots, f_\mu), \quad \mathrm{P}' = \mathrm{F}'(\varphi'_1, \ldots, \varphi'_{q'-\mu}, f_1 \ldots, f_\mu).$$

Cela posé, divers cas seront à distinguer.

9. Si $q = q' = \mu$, le système P, P' ne dépendra que des variables $f_1, \ldots, f_\mu$; mais le nombre de ces variables est $< r$; car l'une au moins des deux fonctions P, P', par exemple P, ayant son déterminant nul, le nombre q des variables distinctes dont elle dépend est moindre que r. Donc le théorème sera vrai par hypothèse.

10. Supposons, au contraire, qu'une au moins des deux quantités $q - \mu$, $q' - \mu$ soit > 0. On aura

$$\mathrm{P} = \mathrm{Q}_\varphi + \mathrm{B}_{\varphi f} + \mathrm{Q}_f, \quad \mathrm{P}' = \mathrm{Q}'_{\varphi'} + \mathrm{B}'_{\varphi' f} + \mathrm{Q}'_f,$$

Q_φ désignant une fonction quadratique par rapport aux φ, $\mathrm{B}_{\varphi f}$ une fonction bilinéaire par rapport aux φ et aux f, etc.

Si Q_φ n'est pas identiquement nul, on pourra le réduire à une somme de carrés $v_1^2 + w_1^2 + \ldots$, puis faire disparaître dans l'expression $\mathrm{B}_{\varphi f} + \mathrm{Q}_f$ les termes qui contiennent $v_1, w_1, \ldots$ (lemme II). Il viendra alors

$$\mathrm{P} = v_1^2 + w_1^2 + \ldots + \mathrm{P}_1 = \mathfrak{S}_v^0 + \mathfrak{S}_w^0 + \ldots + \mathrm{P}_1,$$

P_1 et P' ne contenant plus les variables $v_1, w_1, \ldots$.

On a d'ailleurs

$$\mathfrak{B}_v^0 = 0, \ \mathfrak{B}_w^0 = 0, \ldots,$$

d'où

$$\mathrm{P}' = \mathfrak{B}_v^0 + \mathfrak{B}_w^0 + \ldots + \mathrm{P}';$$

et l'on voit que, pour ramener P et P' aux formes (6) et (7), il suffira d'y ramener P_1 et P', où le nombre des variables est diminué.

Si $\mathrm{Q}_{\varphi'}$ n'est pas identiquement nul, on raisonnera de même.

11. Supposons donc $Q_\varphi = 0$, $Q_{\varphi'} = 0$. On aura

$$P = B_{\varphi f} + Q_f = \varphi_1 F_1 + \ldots + \varphi_{q-\mu} F_{q-\mu} + Q_f,$$
$$P' = B'_{\varphi' f} + Q'_f = \varphi'_1 F'_1 + \ldots + \varphi'_{q'-\mu} F'_{q'-\mu} + Q'_f,$$

$F_1, \ldots, F'_{q'-\mu}$ étant des fonctions linéaires des f.

Le déterminant de P par rapport aux quantités f et φ étant $\gtrless 0$, les fonctions $F_1, \ldots, F_{q-\mu}$ seront indépendantes les unes des autres. Il en est de même des fonctions $F'_1, \ldots, F'_{q'-\mu}$; mais il pourra se faire que les deux faisceaux

$$c_1 F_1 + \ldots + c_{q-\mu} F_{q-\mu} \quad \text{et} \quad c'_1 F'_1 + \ldots + c'_{q'-\mu} F'_{q'-\mu}$$

aient des fonctions communes. Dans ce cas, que nous traiterons en premier lieu, ces fonctions communes pourront s'exprimer linéairement au moyen d'un certain nombre ν d'entre elles, $x_2, y_2, \ldots$.

Cela posé, prenons pour variables au lieu des f: 1° les fonctions $x_2, y_2, \ldots$; 2° d'autres fonctions linéaires des F, telles que $U, \ldots$, formant avec x_2, $y_2, \ldots$ un système de $q - \mu$ fonctions indépendantes; 3° d'autres fonctions des F', telles que $U', \ldots$, formant avec x_2, y_2 un système de $q' - \mu$ fonctions indépendantes; 4° d'autres fonctions des f, telles que $V, \ldots$, formant avec les précédentes un système de μ fonctions indépendantes. Il viendra

$$B_{\varphi f} = \psi_1 x_2 + \psi_2 y_2 + \ldots + \psi_{\nu+1} U + \ldots$$
$$B'_{\varphi' f} = \psi'_1 x_2 + \psi'_2 y_2 + \ldots + \psi'_{\nu+1} U' + \ldots,$$

$\psi_1, \psi_2, \ldots$ étant des fonctions linéaires des φ, indépendantes entre elles (sans quoi le nombre des variables distinctes dont P dépend serait moindre qu'on ne l'a supposé) et $\psi'_1, \psi'_2, \ldots$ des fonctions des φ', indépendantes entre elles.

D'autre part Q_f et Q'_f pourront se mettre sous la forme

$$Q_f = x_2 L_1 + y_2 L_2 + \ldots + Q,$$
$$Q'_f = x_2 L'_1 + y_2 L'_2 + \ldots + Q',$$

où Q, Q' ne contiennent plus x_2, $y_2, \ldots$.

Prenons maintenant pour variables, au lieu des φ, les suivantes :

$$x_1 = \psi_1 + L_1, \quad y_1 = \psi_2 + L_2, \ldots, \quad \psi_{\nu+1}, \ldots,$$
$$x_3 = \psi'_1 + L'_1, \quad y_3 = \psi'_2 + L'_2, \ldots, \quad \psi'_{\nu+1}, \ldots;$$

il viendra

$$P = x_1 x_2 + y_1 y_2 + \ldots + Q = \mathfrak{A}'_x + \mathfrak{A}'_y + \ldots + Q,$$
$$P' = x_2 x_3 + y_2 y_3 + \ldots + Q' = \mathfrak{B}'_x + \mathfrak{B}'_y + \ldots + Q',$$

et il ne restera plus qu'à réduire Q et Q', qui ne contiennent plus les variables $x, y, \ldots$.

12. Passons au cas où les fonctions F et F' sont toutes indépendantes. En prenant pour variables, au lieu des f, les fonctions F, F', et d'autres fonctions linéaires $V_1, V_2, \ldots$ des f, qui forment avec les F, F' un système de μ fonctions indépendantes, on pourra écrire

$$(8) \qquad \begin{cases} P = \varphi_1 F_1 + \ldots + \varphi_{q-\mu} F_{q-\mu} + O_F + Q_{F'} + B_{F'V} + Q_V, \\ P' = \varphi'_1 F'_1 + \ldots + \varphi'_{q'-\mu} F'_{q'-\mu} + O'_{F'} + Q'_F + B'_{FV} + Q'_V, \end{cases}$$

où O_F est une fonction quadratique des variables F, F', V, dont tous les termes contiennent en facteur une des variables F; $Q_{F'}$ une fonction quadratique des F'; $B_{F'V}$ une fonction bilinéaire par rapport aux F' et aux V, etc.

Cela posé, profitons de l'indétermination qui existe dans le choix des variables V pour ramener les deux fonctions Q_V, Q'_V à des formes réduites analogues à (6) et (7). Les nouvelles variables seront en général de trois sortes :

1° Des variables $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ qui figurent dans Q_V et non dans Q'_V;

2° Des variables $v'_1, v'_2, \ldots, v'_{\nu'}$ qui figurent dans Q'_V et non dans Q_V;

3° Des variables $w_1, w_2, \ldots$ qui figurent à la fois dans les deux fonctions.

D'après la forme des expressions réduites (6) et (7), on voit que le déterminant de Q_V par rapport aux variables v et w dont il dépend sera $\gtrless 0$; de même pour le déterminant de Q'_V par rapport aux v' et aux w.

Cela posé, il sera aisé d'achever la réduction de P, P' en simplifiant les expressions (8).

En effet, en accroissant les variables v, w de multiples des variables F', on pourra les faire disparaître (lemme II) de l'expression $B_{F'V}$, laquelle se réduira à une fonction $B_{F'v'}$ bilinéaire par rapport aux F' et aux v'. Puis on réduira de même B'_{FV} à une fonction B'_{Fv} bilinéaire par rapport aux F et aux v.

Cela fait, B'_{Fv} sera de la forme $u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots$, $u_1, u_2, \ldots$ étant des fonctions linéaires des F; et ces fonctions seront indépendantes, car ce sont les dérivées de P' par rapport à $v_1, v_2, \ldots$ et l'on sait que le déterminant de P par rapport aux variables qui y figurent n'est pas nul. Soient $t_1, \ldots, t_{q-\mu-\nu}$ d'autres fonctions des F formant avec les u un système de $q-\mu$ fonctions indépendantes; on prendra les u et les t pour variables à la place des F. Q'_F deviendra une fonction quadratique des u et des t; on en fera disparaître les u (lemme I) en accroissant les v de multiples convenables des u et des t; puis en modifiant, s'il y a lieu, le choix des t, on ramènera Q'_F à une somme de carrés, telle que $t_1^2 + \ldots + t_\alpha^2$. On modifiera de même le choix des variables F' et V' de telle sorte que $B_{F'v'}$ se réduise à la forme $u'_1 v'_1 + \ldots + u'_{\nu'} v'_{\nu'}$ et $Q_{F'}$ à la forme $t'^2_1 + \ldots + t'^2_{\alpha'}$.

Cela posé, $\varphi_1 F_1 + \ldots + \varphi_{q-\mu} F_\mu$ prendra la forme

$$y_1 u_1 + y_2 u_2 + \ldots + y_\nu u_\nu + Z_1 t_1 + \ldots + Z_{q-\mu-\nu} t_{q-\mu-\nu},$$

où les y, Z sont des fonctions linéaires de $\varphi_1, \ldots, \varphi_{q-\mu}$. Ces fonctions seront distinctes; sans quoi l'on pourrait réduire le nombre des variables indépendantes qui figurent dans P; d'autre part O_F prendra la forme

$$O_F = L_1 u_1 + L_2 u_2 + \ldots + M_1 t_1 + \ldots,$$

où les L, M sont des fonctions linéaires des variables t, u, v, v', w.

Prenons maintenant pour variables, au lieu de $\varphi_1, \ldots, \varphi_{q-\mu}$, les suivantes : $y_1, y_2, \ldots, z_1 = Z_1 + L_1, \ldots$; P se trouvera ramené à la forme

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} P = {} & y_1 u_1 + \ldots + y_\nu u_\nu + z_1 t_1 + \ldots + z_{q-\mu-\nu} t_{q-\mu-\nu} + t'^2_1 + \ldots + t'^2_{\alpha'} \\ & + u'_1 v'_1 + \ldots + u'_{\nu'} v'_{\nu'} + Q_V. \end{aligned} \right.$$

De même, en modifiant convenablement les variables φ', on mettra P'

sous la forme

$$(10)\quad \begin{cases} P' = y'_1 u'_1 + \ldots + y'_{\nu'} u'_{\nu'} + z'_1 t'_1 + \ldots + z'_{q'-\mu-\nu'} t'_{q'-\mu-\nu'} + t_1^2 + \ldots + t_\alpha^2 \\ \qquad + u_1 v_1 + \ldots + u_\nu v_\nu + Q'_\nu. \end{cases}$$

D'ailleurs P' doit dépendre de toutes les variables, à l'exception de $q - \mu$ d'entre elles; et comme il ne contient ni les $y_1, \ldots, y_\nu$, ni les $z_1, \ldots, z_{q-\mu-\nu}$, il devra contenir tous les t. On aura donc $\alpha = q - \mu - \nu$, et de même $\alpha' = q' - \mu - \nu'$.

Cela posé, substituons pour Q_ν et Q'_ν leurs expressions réduites; on voit immédiatement, en groupant convenablement les termes, que les expressions (9) et (10) ne se distingueront plus de celles des formes (6) et (7) que par la notation.

13. Il reste à traiter le cas où P et P' ont leur déterminant différent de zéro.

Considérons dans ce cas la forme $P' + \lambda P$, où λ est un coefficient arbitraire. En nous imposant la condition que $P' + \lambda P$ ait zéro pour déterminant, nous obtiendrons une équation du degré r en λ dont le premier terme a pour coefficient le déterminant de P. On pourra donc toujours y satisfaire.

Le coefficient λ ayant été ainsi choisi, on pourra ramener les fonctions P et $P' + \lambda P$ à leur forme réduite du genre indiqué au théorème. D'ailleurs P dépendant de toutes les variables ne pourra contenir dans son expression de termes des espèces $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. On aura donc simplement

$$P = \mathcal{C}_\nu^\varepsilon + \ldots + \mathcal{C}_w^\zeta + \ldots,$$

$$P' + \lambda P = \mathcal{B}_\nu^\varepsilon + \ldots + \mathcal{B}_w^\zeta - \lambda_1 \mathcal{C}_w^\zeta + \ldots;$$

d'où

$$P' = \mathcal{B}_\nu^\varepsilon - \lambda \mathcal{C}_\nu^\varepsilon + \ldots + \mathcal{B}_w^\zeta - (\lambda_1 + \lambda)\mathcal{C}_w^\zeta + \ldots,$$

ce qui achève de prouver le théorème.

II. — *Équivalence des systèmes.*

14. Deux systèmes de deux formes P et P′, Q et Q′ sont *équivalents*, s'ils peuvent être transformés l'un dans l'autre par une substitution convenable.

Théorème. — *Deux systèmes réduits*

$$(11)\quad \begin{cases} P = \mathcal{A}_x^\alpha + \ldots + \mathcal{B}_z^\gamma + \ldots + \mathcal{C}_v^\varepsilon + \ldots + \mathcal{C}_w^\zeta + \ldots, \\ P' = \mathcal{B}_x^\alpha + \ldots + \mathcal{C}_z^\gamma + \ldots + \mathcal{B}_v^\varepsilon + \ldots + \mathcal{B}_w^\zeta - \lambda_1 \mathcal{C}_w^\zeta \ldots \end{cases}$$

et

$$(12)\quad \begin{cases} Q = \mathcal{A}_{x'}^{\alpha'} + \ldots + \mathcal{B}_{z'}^{\gamma'} + \ldots + \mathcal{C}_{v'}^{\varepsilon'} + \ldots + \mathcal{C}_{w'}^{\zeta'} + \ldots, \\ Q' = \mathcal{B}_{x'}^{\alpha'} + \ldots + \mathcal{C}_{z'}^{\gamma'} + \ldots + \mathcal{B}_{v'}^{\varepsilon'} + \ldots + \mathcal{B}_{w'}^{\zeta'} - \lambda'_1 \mathcal{C}_{w'}^{\zeta'} + \ldots \end{cases}$$

ne peuvent être équivalents si l'on n'a pas à la fois

$$\alpha = \alpha', \ldots, \quad \gamma = \gamma', \ldots, \quad \varepsilon = \varepsilon', \quad \lambda_1 = \lambda'_1, \ldots$$

Nous supposerons le théorème démontré pour les systèmes contenant moins de variables que les proposés (il est évident pour une seule variable).

15. Si dans la substitution S, qui, par hypothèse, transforme Q, Q′ en P, P′, on met en évidence les termes qui contiennent les premiers indices des suites telles que x et v, on pourra écrire

$$(13)\qquad S = \begin{vmatrix} \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_\rho & a_\rho x_1 + \ldots + a'_\rho v_1 + \ldots + X_\rho \\ z'_\rho & b_\rho x_1 + \ldots + b'_\rho v_1 + \ldots + Z_\rho \\ v'_\rho & c_\rho x_1 + \ldots + c'_\rho v_1 + \ldots + V_\rho \\ w'_\rho & d_\rho x_1 + \ldots + d'_\rho v_1 + \ldots + W_\rho \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix},$$

X_ρ, Z_ρ, V_ρ, W_ρ,... étant des fonctions des variables $x_2, \ldots$, $z_1, \ldots$, $v_2, \ldots$, $w_1, \ldots$, qui figurent seules dans l'expression de P′.

D'ailleurs tous ceux des coefficients a, b, c, d,..., a', b', c', d',..., qui figurent dans les expressions qui succèdent à $x'_2,\ldots,$ $z'_1,\ldots,$ $v'_2,\ldots,$ $w'_1,\ldots,$ seront égaux à zéro.

On a en effet

$$Q' = F(x'_2,\ldots,\ z'_1,\ldots,\ v'_2,\ldots,\ w'_1,\ldots),$$

F étant une fonction quadratique dont le déterminant n'est pas nul; et si l'on pose pour abréger

$$\Pi = F(X_2,\ldots,\ Z_1,\ldots,\ V_2,\ldots,\ W_1,\ldots)$$

la substitution S transformera Q' en

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\Pi + x_1\left(a_2\frac{\partial\Pi}{\partial X_2}+\ldots+b_1\frac{\partial\Pi}{\partial Z_1}+\ldots+c_2\frac{\partial\Pi}{\partial V_2}+\ldots+d_1\frac{\partial\Pi}{\partial W_1}+\ldots\right)+\ldots\\ &+v_1\left(a'_2\frac{\partial\Pi}{\partial X_2}+\ldots+b'_1\frac{\partial\Pi}{\partial Z_1}+\ldots+c'_2\frac{\partial\Pi}{\partial V_2}+\ldots+d'_1\frac{\partial\Pi}{\partial W_1}+\ldots\right)+\ldots+R,\end{aligned}\right.$$

où R est quadratique en $x_1,\ldots,$ $v_1,\ldots.$

Cette transformée n'étant autre que P', les termes en $x_1,\ldots,$ $v_1,\ldots$ devront disparaître, et la transformée se réduira à Π. D'ailleurs cette transformée doit dépendre du même nombre de variables distinctes que Q'. Donc $X_2,\ldots,$ $Z_1,\ldots,$ $V_2,\ldots,$ $W_1,\ldots,$ seront des fonctions indépendantes. Il en sera de même des fonctions $\frac{\partial\Pi}{\partial X_2},\ldots,$ $\frac{\partial\Pi}{\partial Z_1},\ldots,$ $\frac{\partial\Pi}{\partial V_2},\ldots,$ $\frac{\partial\Pi}{\partial W_1},\ldots,$ puisque le déterminant de F n'est pas nul. Donc les coefficients de $x_1,\ldots,$ $v_1,\ldots,$ dans l'expression (14), ne pourront s'annuler que si tous les coefficients $a_2,\ldots,$ $b_1,\ldots$ s'annulent.

16. Soit maintenant, pour abréger,

$$A = a_1 x_1 + \ldots + a'_1 v_1 + \ldots,\qquad C = c_1 x_1 + \ldots + c'_1 v_1 + \ldots\ldots$$

Le déterminant de S, qui n'est pas nul, est divisible par celui des fonctions A, C,.... Donc ces fonctions sont indépendantes.

Cela posé, opérons la substitution S sur la fonction Q. Les termes en $x_1,\ldots,$ $v_1,\ldots,$ contenus dans le résultat, seront les suivants :

$$(15)\qquad AX_2 + \ldots + CV_2 + \ldots.$$

La transformée se confondant avec P, ces termes doivent se réduire à $x_1 x_2 + \ldots + v_1 v_2 + \ldots$. On en conclut que $X_2, \ldots, V_2, \ldots$ ne dépendent que de $x_2, \ldots, v_2, \ldots$. Soient, en effet, t une autre variable quelconque, $m, \ldots, n, \ldots$ les coefficients qui la multiplient respectivement dans les expressions $X_2, \ldots, V_2, \ldots$. Le coefficient de t dans l'expression (15) sera $(Am + \ldots + Cn + \ldots)$, et ne pourra s'annuler identiquement que si $m = 0, \ldots, n = 0, \ldots$, puisque $A, \ldots, C, \ldots$ sont des fonctions indépendantes.

17. Cela posé, soient $[P]$, $[P']$, $[X_3], \ldots, [Z_1], \ldots, [V_3], \ldots, [W_1], \ldots$ ce que deviennent les fonctions $P, P', \ldots, X_3, \ldots, Z_1, \ldots, V_3, \ldots, W_1, \ldots$, en y posant $x_2 = 0, \ldots, v_2 = 0, \ldots$, $[Q]$ et $[Q']$ ce que deviennent Q et Q′ pour $x'_2 = 0, \ldots, v'_2 = 0, \ldots$. Pour que la substitution S transforme Q et Q′ en P et P′, il faudra évidemment que la substitution

$$[S] = | x'_3, \ldots, z'_1, \ldots, v'_3, \ldots, w'_1, \ldots \quad [X_3], \ldots, [Z_1], \ldots, [V_3], \ldots, [W_1], \ldots |$$

transforme $[Q]$ et $[Q']$ en $[P]$ et $[P']$; mais les deux fonctions $[Q]$ et $[Q']$ forment un système réduit analogue au système Q, Q′, sauf que le nombre des variables s'y trouve diminué de deux x', de deux v',.... De même $[P]$ et $[P']$ forment un système réduit analogue à P, P′. Ces deux systèmes sont équivalents; mais ils ne peuvent l'être, par hypothèse, que si l'on a

$$\alpha - 1 = \alpha' - 1, \ldots, \quad \gamma = \gamma', \ldots, \quad \varepsilon - 1 = \varepsilon' - 1, \ldots, \quad \lambda_1 = \lambda'_1, \ldots.$$

On en déduit $\alpha = \alpha'$, $\varepsilon = \varepsilon', \ldots$, ce qui démontre le théorème.

18. L'analyse précédente repose sur l'hypothèse que P contient des variables $x_1, \ldots, v_1, \ldots$ qui ne figurent pas dans P′; mais un raisonnement tout à fait analogue s'appliquerait au cas où P′ contiendrait des variables qui ne figurent pas dans P. On raisonnerait encore de même si l'une des fonctions Q, Q′ contenait des variables qui ne figurent pas dans l'autre.

Reste à considérer le cas où chacune des quatre fonctions P, P′, Q, Q′ contiendrait toutes les variables. On aurait alors simplement

$$P = \mathcal{E}_x^\alpha + \mathcal{E}_y^\beta + \ldots, \quad P' = \mathcal{B}_x^\alpha - \lambda_1 \mathcal{E}_x^\alpha + \mathcal{B}_y^\beta - \lambda_2 \mathcal{E}_y^\beta + \ldots,$$
$$Q = \mathcal{E}_{x'}^{\alpha'} + \mathcal{E}_{y'}^{\beta'} + \ldots, \quad Q' = \mathcal{B}_{x'}^{\alpha'} - \lambda'_1 \mathcal{E}_{x'}^{\alpha'} + \mathcal{B}_{y'}^{\beta'} - \lambda'_2 \mathcal{E}_{y'}^{\beta'} + \ldots;$$

mais, dans ce cas, les deux systèmes

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}, \quad \mathrm{P}'+\lambda_1\mathrm{P}=\mathcal{B}_x^\alpha+\mathcal{B}_y^\beta-(\lambda_2-\lambda_1)\mathcal{C}_y^\beta+\ldots,\\ &\mathrm{Q}, \quad \mathrm{Q}'+\lambda_1\mathrm{Q}=\mathcal{B}_{x'}^{\alpha'}-(\lambda'_1-\lambda_1)\mathcal{C}_{x'}^{\alpha'}+\mathcal{B}_{y'}^{\beta'}-(\lambda'_2-\lambda_1)\mathcal{C}_{y'}^{\beta'}+\ldots\end{aligned}$$

seront équivalents; mais ils sont réduits, et $\mathrm{P}'+\lambda_1\mathrm{P}$ ne contient pas x_1 : on aura donc, d'après ce qui précède,

$$\alpha=\alpha', \quad \beta=\beta',\ldots, \quad \lambda'_1-\lambda_1=0, \quad \lambda_2-\lambda_1=\lambda'_2-\lambda_1,\ldots,$$

d'où

$$\lambda'_1=\lambda_1, \quad \lambda'_2=\lambda_2,\ldots,$$

ce qui démontre le théorème.

19. Pour juger si deux systèmes Σ, Σ' sont équivalents, il suffira donc de les réduire chacun de son côté. Si les deux réduites sont différentes, il n'y aura pas d'équivalence. Si, au contraire, elles sont identiques, soient S et T les substitutions qui réduisent respectivement les deux systèmes : il est clair qu'on passera de l'un à l'autre par la substitution $\mathrm{ST}^{-1}=\mathrm{U}$.

On obtiendra d'ailleurs évidemment toutes les substitutions qui transforment Σ' en Σ, en combinant la substitution U que nous venons de trouver avec les substitutions qui transforment Σ en lui-même. Pour déterminer commodément ces dernières substitutions, il convient de ramener d'abord le système Σ à sa forme réduite.

III. — *Transformation d'un système en lui-même.*

20. Problème. — *Déterminer toutes les substitutions qui transforment en lui-même le système réduit*

$$\begin{aligned}\mathrm{P}&=\mathcal{A}_x^\alpha+\mathcal{A}_y^\beta+\ldots+\mathcal{B}_z^\gamma+\ldots+\mathcal{C}_u^\delta+\ldots+\mathcal{C}_v^\varepsilon+\ldots,\\ \mathrm{P}'&=\mathcal{B}_x^\alpha+\mathcal{B}_y^\beta+\ldots+\mathcal{C}_z^\gamma+\ldots+\mathcal{B}_u^\delta+\ldots+\mathcal{B}_v^\varepsilon-\lambda_1\mathcal{C}_v^\varepsilon+\ldots.\end{aligned}$$

Nous allons déterminer, *a priori*, certaines substitutions simples qui n'altèrent pas le système; nous démontrerons ensuite que toutes les substitutions qui jouissent de cette propriété s'obtiennent par la combinaison de celles-là.

21. 1° *Substitutions qui n'altèrent que les variables x.* — Leur forme sera la suivante :

$$(16)\qquad \left| \, x_1, x_2, \ldots, x_{2\alpha+1} \quad ax_1, a^{-1}x_2, \ldots, ax_{2\alpha+1} \, \right|,$$

où a est une constante arbitraire.

On pourra opérer des substitutions analogues sur les variables des séries analogues $y, \ldots$.

22. 2° *Substitutions qui n'altèrent que les variables d'une des séries $z, \ldots, u, \ldots, v, \ldots$.*

Elles se réduisent à la forme

$$(17)\qquad \left| \, z_1, \ldots, z_{2\gamma+1} \quad -z_1, \ldots, -z_{2\gamma+1} \, \right|.$$

23. 3° *Substitutions qui altèrent les indices de deux des séries $x, y, \ldots$.*

Considérons, par exemple, les deux séries x et y.

Le procédé suivant fournira les substitutions simples.

Accroissons l'une des variables extrêmes $x_1, y_1, x_{2\alpha+1}, y_{2\beta+1}$ d'un multiple de l'une des variables de l'autre série. On introduira dans l'une des fonctions $\mathcal{A}_x^\alpha + \mathcal{A}_y^\beta$, $\mathcal{B}_x^\alpha + \mathcal{B}_y^\beta$ un terme étranger, que l'on fera disparaître en modifiant une seconde variable. Cela fera, en général, paraître dans la seconde fonction un nouveau terme, que l'on détruira de même, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à modifier une autre des variables extrêmes. Alors l'opération sera achevée, et aura une substitution inaltérante. Chacune des substitutions ainsi obtenues rentre dans l'un des six types suivants :

$$(18)\qquad \left| \begin{array}{ll} x_1, y_{2\rho+2}, x_3, \ldots & x_1 + ay_{2\rho+1}, y_{2\rho+2} - ax_2, x_3 + ay_{2\rho+3} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots, x_{2\alpha+1} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_{2\alpha+1} + ay_{2\rho+2\alpha+1} \end{array} \right|,$$

$$(19)\qquad \left| \, x_1, y_{2\rho-1}, \ldots, x_{2\alpha+1} \quad x_1 + ay_{2\rho}, y_{2\rho-1} - ax_2, \ldots, x_{2\alpha+1} + ay_{2\rho-2\alpha} \, \right|,$$

$$(20)\qquad \left| \, x_1, y_{2\rho-1}, \ldots, y_1 \quad x_1 + ay_{2\rho}, y_{2\rho-1} - ax_2, \ldots, y_1 - ax_{2\rho} \, \right|,$$

$$(21)\qquad \left|\begin{array}{ll} y_1,\ x_{2\rho+2},\dots & y_1 + ax_{2\rho+1},\ x_{2\rho+2} - ay_2,\dots \\ \dots,\ y_{2\beta+1} & \dots\dots\dots\dots,\ y_{2\beta+1} + ax_{2\rho+2\beta+1} \end{array}\right|,$$

$$(22)\qquad \left|\begin{array}{ll} y_1,\ x_{2\rho-1},\dots & y_1 + ax_{2\rho},\ x_{2\rho-1} - ay_2,\dots \\ \dots,\ y_{2\beta+1} & \dots\dots\dots\ y_{2\beta+1} + ax_{2\rho-2\beta} \end{array}\right|,$$

$$(23)\qquad \left|\begin{array}{ll} x_{2\alpha+1},\ y_{2\rho+1},\dots & x_{2\alpha+1} + ay_{2\rho},\ y_{2\rho+1} - ax_{2\alpha},\dots \\ \dots,\ y_{2\beta+1} & \dots\dots\dots\dots,\ y_{2\beta+1} - ax_{2\rho+2\alpha-2\beta} \end{array}\right|.$$

Dans chacune de ces substitutions, a est un coefficient arbitraire; ρ est un entier nul ou positif, mais qui doit être déterminé de telle sorte que les indices des variables x, y soient tous positifs et, respectivement, $< 2\alpha + 2$, $< 2\beta + 2$.

24. Voyons combien nous obtiendrons de substitutions simples distinctes.

Soit d'abord $\alpha > \beta$. Les types (18) et (19) devront être rejetés. Dans le type (20), il faudra poser $\rho > 0$, $\rho \leqq \beta$, d'où β solutions. Dans le type (21), $\rho \geqq 0 \leqq \alpha - \beta$, d'où $\alpha - \beta + 1$ solutions. Dans le type (22), $\rho \leqq \alpha > \beta$, d'où $\alpha - \beta$ solutions. Dans le type (23), $\rho > 0 \leqq \beta$, d'où β solutions. On aura donc en tout $2\alpha + 1$ substitutions simples. On en aurait de même $2\beta + 1$, si α était $< \beta$.

Si $\alpha = \beta$, on en aura une de plus. Elle s'obtiendra en posant $\rho = 0$ dans le type (18).

25. 4° *Substitutions qui altèrent les variables d'une des séries x, y,...,* (telle que x) *et d'une des séries z,...,* (telle que z).

On les trouvera par le même procédé. Considérons d'abord celles qui n'altèrent pas la variable $z_{2\gamma+1}$. Elles appartiendront à trois types, identiques aux types (18), (19), (20), sauf le remplacement de y, β par z, γ.

Pour obtenir les autres, changeons $z_{2\gamma+1}$ en $z_{2\gamma+1} + ax_{2\rho}$, ρ étant > 0 et $\leqq \alpha$. On introduira par là dans l'expression $\mathcal{A}_x^\alpha + \mathcal{B}_z^\gamma$ le terme $\tau = ax_{2\rho}z_{2\gamma}$ et dans l'expression $\mathcal{B}_x^\alpha + \mathcal{C}_z^\gamma$ les termes $\tau_1 = a^2x_{2\rho}^2$, $\tau_2 = 2ax_{2\rho}z_{2\gamma+1}$.

Le terme τ_2 disparaît par la substitution

$$\left|\begin{array}{ll} x_{2\rho+1},\ z_{2\gamma},\dots & x_{2\rho+1} - 2az_{2\gamma+1},\ z_{2\gamma} + 2ax_{2\rho+2},\dots \\ \dots,\ x_{2\alpha+1} & \dots\dots\dots\dots\dots,\ x_{2\alpha+1} - 2az_{2\gamma+2\rho-2\alpha+1} \end{array}\right|.$$

D'ailleurs, pour qu'il n'y entre pas d'indices négatifs, il faudra que l'on ait $\rho \overline{\gtrless} \alpha - \gamma$: nous discuterons tout à l'heure cette condition.

La substitution ci-dessus accroît d'ailleurs le terme τ de la quantité $\tau_3 = 2a^2 x_{2\rho} x_{2\rho+2}$. On détruira ce nouveau terme τ_3 par la substitution

$$| \ x_{2\rho+1} \quad x_{2\rho+1} - 2a^2 x_{2\rho} \ |$$

laquelle introduira en revanche dans $\mathfrak{B}_x^\alpha + \mathfrak{C}_z^\gamma$ un terme $-2\tau_1$, qui, joint à τ_1, donnera $-\tau_1$.

On détruira ensuite τ par la substitution

$$| \ x_{2\rho-1}, z_{2\gamma-1}, \ldots \quad x_{2\rho-1} - a z_{2\gamma}, \ z_{2\gamma-1} + a x_{2\rho-2}, \ldots \ |,$$

où la dernière variable altérée sera x_1 ou z_1, suivant qu'on aura $\rho \overline{\gtrless} \gamma$ ou $\rho > \gamma$.

Enfin $-\tau_1$ disparaîtra à son tour par la substitution

$$| \ x_{2\rho+1}, x_{2\rho-1}, \ldots \quad x_{2\rho+1} + a^2 x_{2\rho}, \ x_{2\rho-1} - a^2 x_{2\rho+2}, \ldots \ |,$$

ou la dernière variable altérée sera x_1 ou $x_{2\alpha+1}$, suivant qu'on aura $2\rho \overline{\gtrless} \alpha$ ou $2\rho > \alpha$.

Le produit de toutes les substitutions précédentes sera la substitution simple cherchée.

26. Voyons combien nous aurons de substitutions simples distinctes.

Soit d'abord $\alpha > \gamma$. Les types (18) et (19) sont à rejeter. Le type (20) en donne γ, et le dernier type que nous venons de trouver en donne $\gamma + 1$; total $2\gamma + 1$ substitutions distinctes.

Si $\alpha \overline{\gtrless} \gamma$, les types (18) et (19) donneront respectivement $\gamma - \alpha + 1$ et $\gamma - \alpha$ substitutions; le type (20) en donnera α, et le dernier type α : total $2\gamma + 1$.

27. 5° *Substitutions qui altèrent les variables d'une des séries* $x, y, \ldots$ (telle que x), *et d'une des séries* $u, \ldots$ (telle que u).

Le système des deux fonctions $\mathfrak{A}_x^\alpha + \mathfrak{C}_u^\delta$, $\mathfrak{B}_x^\alpha + \mathfrak{B}_u^\delta$ se change en $\mathfrak{B}_x^\alpha + \mathfrak{C}_u^\delta$, $\mathfrak{A}_x^\alpha + \mathfrak{B}_u^\delta$ par la substitution

$$S = | \ x_1, \ldots, x_{2\alpha+1} \quad x_{2\alpha+1}, \ldots, x_1 \ |.$$

Or les substitutions qui n'altèrent pas ce dernier système ne diffèrent de celles qu'on vient de trouver que par le changement de z, γ en u, δ.

Soient T_1, T_2,.. ces substitutions. Les substitutions qui n'altèrent pas $\mathcal{A}_x^\alpha + \mathcal{C}_u^\delta$, $\mathcal{B}_x^\alpha + \mathcal{B}_u^\delta$ seront ST_1S^{-1}, ST_2S^{-1},....

28. 6° *Substitutions qui altèrent les variables d'une des séries x, y,... (telle que x), et d'une des séries v,...* (telle que v).

Leur recherche se ramène également à la question précédente. En effet, la substitution

$$\Theta_\rho = \begin{vmatrix} x_{2\rho+1}, x_{2\rho+2},\ldots & x_{2\rho+1} - \lambda_1 x_{2\rho-1}, x_{2\rho+2} + \lambda_1 x_{2\rho},\ldots \\ \ldots, x_{2\alpha+1} & \ldots\ldots\ldots\ldots, x_{2\alpha+1} - \lambda_1 x_{2\alpha-1} \end{vmatrix},$$

transforme $\mathcal{A}_x^\alpha$, $\mathcal{B}_x^\alpha$ en $\mathcal{A}_x^\alpha$, $\mathcal{B}_x^\alpha - \lambda_1 x_{2\rho-1} x_{2\rho}$. Par suite, la substitution

$$\Theta = \Theta_1 \Theta_2 \ldots \Theta_\alpha$$

transformera $\mathcal{A}_x^\alpha$, $\mathcal{B}_x^\alpha$ en $\mathcal{A}_x^\alpha$ et $\mathcal{B}_x^\alpha - \lambda_1 \mathcal{A}_x^\alpha$, et ΘS les transformera en $\mathcal{B}_x^\alpha$, $\mathcal{A}_x^\alpha - \lambda_1 \mathcal{B}_x^\alpha$. Cela posé, nous savons déterminer (**25** et **26**) les substitutions simples T_1, T_2,..., qui transforment en elles-mêmes les fonctions $\mathcal{A}_x^\alpha + \mathcal{B}_v^\iota$, $\mathcal{B}_x^\alpha + \mathcal{C}_v^\iota$. Ces substitutions se confondent évidemment avec celles qui transforment en lui-même le système $\mathcal{B}_x^\alpha + \mathcal{C}_v^\iota$ et $\mathcal{A}_x^\alpha - \lambda_1 \mathcal{B}_x^\alpha + \mathcal{B}_v^\iota - \lambda_1 \mathcal{C}_v^\iota = \mathcal{B}_x^\alpha + \mathcal{B}_v^\iota - \lambda_1(\mathcal{B}_x^\alpha + \mathcal{C}_v^\iota)$, et les substitutions qui transforment $\mathcal{A}_x^\alpha + \mathcal{C}_v^\iota$ et $\mathcal{B}_x^\alpha + \mathcal{B}_v^\iota - \lambda_1 \mathcal{C}_v^\iota$ en elles-mêmes seront respectivement

$$\Theta S . T_1 (\Theta S)^{-1}, \quad \Theta S . T_2 (\Theta S)^{-1}, \ldots$$

29. 7° *Substitutions qui altèrent les variables de deux des séries u,....*

Cherchons les substitutions simples qui n'altèrent pas les fonctions

$$\mathcal{B}_u^\delta + \mathcal{B}_t^\mu, \quad \mathcal{C}_u^\delta + \mathcal{C}_t^\mu.$$

Soit pour fixer les idées $\delta \overline{\gtrless} \mu$. On aura, en premier lieu, δ substitutions simples qui n'altèrent pas $t_{2\mu+1}$ et $u_{2\delta+1}$. Elles sont de la forme suivante :

$$| u_1, t_{2\rho-1},\ldots, t_1 \quad u_1 + at_{2\rho}, t_{2\rho-1} - au_2,\ldots, t_1 - au_{2\rho} |,$$

où ρ peut varier de 1 à δ.

30. Les autres substitutions simples altèrent toutes la variable $u_{2\delta+1}$ et s'obtiennent comme il suit :

Remplaçons $u_{2\delta+1}$ par $u_{2\delta+1}+at_{2\rho}$, nous aurons introduit dans la première fonction le terme $\tau=at_{2\rho}u_{2\delta}$, et dans la seconde les termes $\tau_1=a^2t_{2\rho}^2$, $\tau_2=2at_{2\rho}\,u_{2\delta+1}$.

On détruira τ_2 par la substitution

$$| \; t_{2\rho-1}, u_{2\delta}, \ldots, t_1 \quad t_{2\rho-1}-2au_{2\delta+1}, u_{2\delta}+2at_{2\rho-2}, \ldots, t_1-2au_{2\delta-2\rho+3} \; |;$$

on aura d'ailleurs les conditions $\rho>0$, $2\delta-2\rho+3>0$, nécessaires pour éviter les indices négatifs.

Cette substitution accroîtra d'ailleurs τ de la quantité $\tau_3=2a^2t_{2\rho}t_{2\rho-2}$, qu'on fera disparaître par la substitution

$$| \; t_{2\rho-1} \quad t_{2\rho-1}-2a^2t_{2\rho} \; |,$$

laquelle changera d'ailleurs $\Theta_u^\delta+\Theta_t^\mu+\tau_1$ en $\Theta_u^\delta+\Theta_t^\mu-\tau_1$.

31. Proposons-nous maintenant de faire disparaître le terme τ.

Si $\delta+\rho \overline{\overline{<}} \mu$, on y parviendra immédiatement par la substitution

$$| \; t_{2\rho+1}, u_{2\delta-1}, \ldots, u_1 \quad t_{2\rho+1}-au_{2\delta}, u_{2\delta-1}+at_{2\rho+2}, \ldots, u_1+at_{2\delta+2\rho} \; |,$$

sinon l'on emploiera la substitution

$$| \; t_{2\rho+1}, u_{2\delta-1}, \ldots, t_{2\mu+1} \quad t_{2\rho+1}-au_{2\delta}, u_{2\delta-1}+at_{2\rho+2}, \ldots, t_{2\mu+1}-au_{2\sigma} \; |,$$

en posant, pour abréger,

$$\delta+\rho-\mu=\sigma.$$

Cette substitution introduira dans la seconde fonction les termes $a^2u_{2\sigma}^2$ et $-2au_{2\sigma}t_{2\mu+1}$.

On fera disparaître ce dernier terme par la substitution

$$| \; u_{2\sigma-1}, t_{2\mu}, \ldots, u_1 \quad u_{2\sigma-1}+2at_{2\mu+1}, t_{2\mu}-2au_{2\sigma-2}, \ldots, u_1+2at_{2\mu-2\sigma+3} \; |.$$

Cette substitution n'introduira aucun nouveau terme si

$$2\rho+2\sigma-2\mu-2$$

est nul ou négatif; sinon posons $\sigma'=\sigma-(\mu+1-\rho)$. Le terme $-a^2t_{2\rho}^2$ sera changé en $-a^2(t_{2\rho}-2au_{2\sigma'})^2=-a^2t_{2\rho}^2-4a^4u_{2\sigma'}^2+4a^3t_{2\rho}u_{2\sigma'}$.

Si l'on a $2\rho + 2\sigma' - 2 < 2\mu + 1$, ce dernier terme disparaîtra par la substitution

$$\left| u_{2\sigma'-1},\ t_{2\rho+1}\ \ldots,\ u_1 \quad u_{2\sigma'-1} - 4a^3 t_{2\rho},\ t_{2\rho+1} + 4a^3 u_{2\sigma'-2},\ldots,\ u_1 - 4a^3 t_{2\rho+2\sigma'-2} \right|.$$

Dans le cas contraire, nous poserons $\sigma'' = \sigma'(\mu + 1 - \rho)$, et nous emploierons la substitution

$$\left| u_{2\sigma'-1},\ t_{2\rho+1},\ldots,\ t_{2\mu+1} \quad u_{2\sigma'-1} - 4a^3 t_{2\rho},\ t_{2\rho+1} + 4a^3 u_{2\sigma'-2},\ldots,\ t_{2\mu+1} + 4a^3 u_{2\sigma''} \right|,$$

laquelle introduira, dans la seconde fonction, les deux nouveaux termes $16a^6 u_{2\sigma''}^2$ et $8a^3 u_{2\sigma''} t_{2\mu+1}$.

Ce dernier terme disparaîtra par la substitution

$$\left| u_{2\sigma''-1},\ t_{2\mu},\ldots,\ u_1 \quad u_{2\sigma''-1} - 8a^3 t_{2\mu+1},\ t_{2\mu} + 8a^3 u_{2\sigma''-2},\ldots,\ u_1 - 8a^3 t_{2\mu-2\sigma''+3} \right|,$$

laquelle n'introduira aucun nouveau terme, si $2\rho + 2\sigma'' - 2\mu - 2$ est nul ou négatif. Sinon, posons $\sigma''' = \sigma'' - (\mu + 1 - \rho)$; $-a^2 t_{2\rho}^2$ sera changé en $-a^2(t_{2\rho} + 8a^3 u_{2\sigma'''})^2$ et donnera, par suite, deux nouveaux termes $-64a^8 u_{2\sigma'''}^2$ et $-16a^5 u_{2\sigma'''} t_{2\rho}$.

On fera disparaître ce dernier terme par le même procédé que tout à l'heure, et ainsi de suite. On arrivera enfin à transformer $\mathcal{B}_u^\delta + \mathcal{B}_t^\mu$ en lui-même, et $\mathcal{C}_u^\delta + \mathcal{C}_t^\mu$ en

$$\mathcal{C}_u^\delta + \mathcal{C}_t^\mu - a^2 t_{2\rho}^2 + a^2 u_{2\sigma}^2 - 4a^4 u_{2\sigma'}^2 + 16a^6 u_{2\sigma''}^2 - 64a^8 u_{2\sigma'''}^2 + \ldots,$$

$\sigma, \sigma', \sigma'', \ldots$ étant les divers termes positifs de la suite

$$\delta + \rho - \mu,\ \delta + \rho - \mu - (\mu + 1 - \rho),\ \delta + \rho - \mu - 2(\mu + 1 - \rho), \ldots.$$

32. Cherchons maintenant à opérer sur les u une substitution qui fasse disparaître la série des termes

$$a^2 u_{2\sigma}^2 - 4a^4 u_{2\sigma'}^2 + 16a^6 u_{2\sigma''}^2 - 64a^8 u_{2\sigma'''}^2 + \ldots.$$

Cette question n'est évidemment qu'un cas particulier de la suivante :

Étant données les deux fonctions $\mathcal{B}_u^\delta$ et $\mathcal{C}_u^\delta + \mathrm{F}$, où F est une fonction de la forme

$$\mathrm{F} = \mathrm{A}_{\delta\delta} u_{2\delta}^2 + \ldots + \mathrm{A}_{mn} u_{2m} u_{2n} + \ldots,$$

où les indices m et n, variables d'un terme au suivant, satisfont à l'inégalité

$$m + n \overline{\gtrless} 2\delta,$$

trouver une substitution qui fasse disparaître les termes $A_{\delta\delta} u_{2\delta}^2 + \dots$.

On peut construire aisément cette substitution par une formule récurrente.

Supposons, en effet, que nous soyons parvenu à faire disparaître tous ceux des termes considérés dans lesquels la somme $m + n$ dépasse une certaine limite k.

Soit $A_{mn} u_{2m} u_{2n}$ l'un des termes restants, dans lesquels $m + n = k$. On pourra le détruire par la substitution

$$| \; u_{2n-1}, \; u_{2m+1}, \dots \quad u_{2n-1} - A_{mn} u_{2m}, \; u_{2m+1} + A_{mn} u_{2n-2}, \dots \; |.$$

Si $k \overline{\gtrless} \delta + 1$, la dernière variable altérée par cette substitution sera u_1, et le terme $A_{mn} u_{2m} u_{2n}$ disparaîtra sans être remplacé. On pourra détruire de même les suivants.

Soit, au contraire, $m + n > \delta + 1$. On devra, pour éviter les indices négatifs, s'arrêter à la variable $u_{2\delta+1}$, qui sera remplacée par

$$u_{2\delta+1} + A_{mn} u_{2k-2\delta-2}.$$

Cela posé, soit $A_{m'n'} u_{2m'} u_{2n'}$ un autre terme, où l'on ait

$$m' + n' = m + n = k.$$

On pourra le faire disparaître de même, mais en accroissant encore $u_{2\delta+1}$ de la quantité $A_{m'n'} u_{2k-2\delta-2}$: de même pour tous les termes analogues. Les autres termes n'auront pas été altérés. Donc, en posant, pour abréger, $A_{mn} + A_{m'n'} + \dots = a$, $\mathcal{E}_u^\delta + F$ aura été changé en

$$\mathcal{E}_u^\delta + (u_{2\delta+1} + a u_{2k-2\delta-2})^2 - u_{2\delta+1}^2 + \dots = \mathcal{E}_u^\delta + 2 a u_{2\delta+1} u_{2k-2\delta-2} + F_1,$$

F_1 étant une fonction analogue à F, mais ne contenant plus que des termes pour lesquels $m + n < k$.

On peut d'ailleurs faire disparaître le terme $2 a u_{2\delta+1} u_{2k-2\delta-2}$ par la substitution

$$| \; u_{2k-2\delta-1}, \; u_{2\delta}, \dots, u_1, \quad u_{2k-2\delta-1} - 2 a u_{2\delta+1}, \; u_{2\delta} + 2 a u_{2k-2\delta-2}, \dots, \; u_1 - u_{4\delta-2k+3} \; |.$$

Cette substitution pourra altérer quelques-unes des variables qui figurent dans F_1; mais elle les accroîtra de fonctions de variables d'indice moindre (car, k étant au plus égal à 2δ, on a $2\delta > 2k - 2\delta - 2$). Donc, après la transformation, F_1 sera changé en une fonction de même forme, qu'il sera aisé de calculer et pour tous les termes de laquelle on aura encore $m + n < k$.

On fera de même disparaître de F_1 les termes où la somme des indices est maximum, et ainsi de suite.

33. Par un procédé analogue, on fera disparaître le terme $-a^2 t_{2\rho}^2$: il ne restera plus qu'à faire le produit de toutes les substitutions partielles que nous venons de définir pour obtenir la substitution simple que nous cherchions; et l'on voit aisément qu'elle remplacera $u_{2\delta+1}$ par $u_{2\delta+1} + at_{2\rho} + f$, où f est une fonction linéaire de $t_{2\rho-2}, \ldots, t_2, u_{2\delta}, \ldots, u_2$.

Si $\delta < \mu$, posant successivement $\rho = 1, 2, \ldots, \delta + 1$, nous obtiendrons $\delta + 1$ substitutions évidemment distinctes, et contenant chacune une constante arbitraire. En les joignant aux δ substitutions du n° **29**, on aura en tout $2\delta + 1$.

Si $\delta = \mu$, on ne pourra donner à ρ que les valeurs $1, 2, \ldots, \delta$. Mais il existe une autre substitution simple spéciale à ce cas. On peut, en effet, opérer sur $u_{2\delta+1}$, $t_{2\delta+1}$ une substitution orthogonale, à la charge d'opérer en même temps son inverse sur $u_{2\delta}$, $t_{2\delta}$, la substitution initiale sur $u_{2\delta-1}$, $t_{2\delta-1}$, etc.

34. 8° *Substitutions qui altèrent les variables de deux séries $z, \ldots$ ou de deux séries $v, \ldots$, dans lesquelles le coefficient λ ait la même valeur.*

Elles se trouvent par un procédé identique au précédent. Il est clair, en effet, que les substitutions qui transforment en elles-mêmes les deux fonctions

$$\mathfrak{S}_{\nu}^{\varepsilon} + \mathfrak{S}_{\nu'}^{\varepsilon'} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}_{\nu}^{\varepsilon} - \lambda_1 \mathfrak{S}_{\nu}^{\varepsilon} + \mathfrak{B}_{\nu'}^{\varepsilon'} - \lambda_1 \mathfrak{S}_{\nu'}^{\varepsilon'},$$

par exemple, seront les mêmes qui transforment en elles-mêmes les deux fonctions

$$\mathfrak{S}_{\nu}^{\varepsilon} + \mathfrak{S}_{\nu'}^{\varepsilon'} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}_{\nu}^{\varepsilon} + \mathfrak{B}_{\nu'}^{\varepsilon'}.$$

35. Il nous reste à établir que toute substitution qui transforme en elles-mêmes les deux fonctions quadratiques P et P′ résulte de la combinaison des substitutions simples que nous avons trouvées ci-dessus.

Nous admettrons d'abord que cette proposition soit vraie pour les fonctions qui contiennent moins de variables que les proposées.

Soit, pour fixer les idées,

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= \mathcal{A}_x^\alpha + \mathcal{B}_z^\gamma + \mathcal{C}_{v_1}^{\varepsilon_1} + \mathcal{C}_w^\zeta, \\ \mathrm{P}' &= \mathcal{B}_x^\alpha + \mathcal{C}_z^\gamma + \mathcal{B}_v^\varepsilon + \mathcal{B}_w^\zeta - \lambda_1 \mathcal{C}_w^\zeta, \end{aligned}$$

et soit S une substitution qui transforme P et P′ en elles-mêmes.

On a vu (nos **15** et **16**) : 1° que la substitution S doit remplacer les variables $x_2, \ldots, z_1, \ldots, v_2, \ldots, w_1, \ldots$, que P′ contient, par des fonctions de ces seules variables; 2° qu'elle remplace x_2, v_2 par des fonctions de x_2 et v_2 seulement.

On aura donc

$$\mathrm{S} = \left| \begin{array}{lll} x_1, v_1, & f(x_1, \ldots, w_{2\zeta+1}), & f'(x_1, \ldots, w_{2\zeta+1}) \\ x_2, v_2, & \varphi(x_2, v_2), & \varphi'(x_2, v_2) \\ x_3, \ldots, & [\mathrm{X}_3] + \psi(x_2, v_2), \ldots, & \\ z_1, \ldots, & [\mathrm{Z}_1] + \psi'(x_2, v_2), \ldots, & \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right|,$$

$[\mathrm{X}_3], \ldots, [\mathrm{Z}_1], \ldots$ étant des fonctions des variables $x_3, \ldots, z_1, \ldots, v_3, \ldots, w_1, \ldots$ seulement.

Cela posé, soient [P], [P′] ce que deviennent P et P′ en y posant $x_2 = v_2 = 0$; pour que S transforme P et P′ en elles-mêmes, il faudra évidemment que la substitution

$$[\mathrm{S}] = \left| \begin{array}{llll} x_3, & \ldots & [\mathrm{X}_3], & \ldots \\ z_1, & \ldots & [\mathrm{Z}_1], & \ldots \\ \ldots, & \ldots & \ldots\ldots, & \ldots \end{array} \right|$$

transforme [P] et [P′] en elles-mêmes.

Donc, par hypothèse, [S] résultera d'un certain nombre de substitutions simples formées pour le système [P], [P′] de la manière que nous avons indiquée.

Or, si l'on se reporte à la loi de formation des substitutions simples, on voit que celles qui sont relatives au système [P], [P′] dérivent de celles relatives au système P, P′ de la même manière que [S] dérive de S, c'est-à-dire par la suppression des indices x_1, v_1, x_2, v_2. En effet, cela est évident pour chacune des substitutions partielles dont le produit forme chaque substitution simple.

Soient donc [T], [T′],... les substitutions simples relatives au système [P], [P′]; T, T′,... celles relatives au système P, P′, dont elles dérivent; S_1 une substitution formée avec T, T′,..., de la même manière que [S] l'est avec [T], [T′]. La substitution S_1 sera évidemment de la forme

$$S_1 = \left|\begin{array}{ll} x_1, v_1 & f_1(x_1,\ldots, w_{2\zeta+1}), f'_1(x_1,\ldots, w_{2\zeta+1}) \\ x_2, v_2 & \varphi_1(x_2, v_2), \varphi'_1(x_2, v_2) \\ x_3, \ldots & [X_3] + \psi_1(x_2, v_2),\ldots \\ z_1, \ldots & [Z_1] + \psi'_1(x_2, v_2),\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right|,$$

et l'on aura évidemment

$$S = S_1 S_2,$$

S_2 étant une substitution de la forme

$$S_2 = \left|\begin{array}{ll} x_1, v_1 & f_2(x_1,\ldots, w_{2\zeta+1}), f'_2(x_1,\ldots, w_{2\zeta+1}) \\ x_2, v_2 & \varphi_2(x_2, v_2), \varphi'_2(x_2, v_2) \\ x_3, \ldots & x_3 + \psi_2(x_2, v_2),\ldots \\ z_1, \ldots & z_1 + \psi'_2(x_2, v_2),\ldots \\ v_3, \ldots & v_3 + \psi''_2(x_2, v_2),\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right|$$

et qui transformera encore P, P′ en elles-mêmes.

36. Or on a

$$P' = x_2 x_3 + v_2 v_3 + F(x_4,\ldots, z_1,\ldots, v_4,\ldots, w_1,\ldots),$$

F étant une fonction de déterminant $\gtrless 0$. Si l'on effectue sur P′ la substitution S_2, les termes de la transformée où x_2, y_2 se trouveront multipliés par $x_4, \ldots, z_1, \ldots, v_4, \ldots, w_1, \ldots$ seront

$$\ldots + \frac{\partial F}{\partial x_4} \psi'_2 + \ldots,$$

et ne pourront s'annuler (ce qui doit être), que si ψ'_2 et ses analogues sont identiquement nulles, les fonctions $\frac{\partial F}{\partial x_4}, \cdots$ étant distinctes.

Cela posé, les termes de la transformée de P' qui contiennent x_2, v_2 seront $\varphi_2(x_3 + \psi_2) + \varphi'_2(v_3 + \psi''_2)$, et comme ils doivent se réduire à $x_2 x_3 + v_2 v_3$, on aura $\varphi_2 = x_2$, $\varphi'_2 = v_2$. En outre, pour qu'il n'y ait pas de terme en x_2^2 ni en v_2^2, il faudra que ψ_2 soit indépendant de x_2, et ψ''_2 indépendant de v_2.

Par suite, en supprimant dans l'écriture les variables que S_2 n'altère pas, on aura simplement

$$S_2 = \left| \begin{matrix} x_1, v_1 & f_2, f'_2 \\ x_3, v_3 & x_3 + a v_2, v_3 + b x_2 \end{matrix} \right|.$$

37. Or, parmi nos substitutions simples, il s'en trouve toujours une T, de même forme que S_2 et qui remplace v_3 par $v_3 + b x_2$. Si, par exemple, α et ε sont > 1, ce sera la suivante :

$$T = | \; x_1, v_3, x_3, v_1 \quad x_1 - b v_4, v_3 + b x_2, x_3 - b v_2, v_1 + b x_4 \; |.$$

Cela posé, on aura

$$S_2 = TS_3,$$

S_3 étant une nouvelle substitution de même forme que S_2, mais qui laisse v_3 invariable. D'ailleurs S_3 ne doit pas altérer P'; il faut pour cela que S_3 laisse x_3 invariable. D'autre part, S_3 ne doit pas altérer P. On doit donc avoir

$$f_2 x_2 + f'_2 y_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

d'où

$$f_2 = x_1 + c y_2, \quad f'_2 = y_1 - c y_2.$$

Mais alors S_3 est une de nos substitutions simples ; et $S = S_1 TS_3$ sera un produit de substitutions simples, ce qu'il fallait démontrer.

38. La démonstration qui précède suppose qu'il existe des variables des espèces x ou v, autrement dit, que P′ a son déterminant nul. Si P avait son déterminant nul, on raisonnerait d'une manière analogue.

Reste le cas où P et P′ auraient leur déterminant $\gtrless 0$. Ils seraient alors de la forme

$$\begin{aligned} P &= \mathcal{C}_w^\zeta + \mathcal{C}_{w'}^{\zeta'} + \ldots \\ P' &= \mathfrak{B}_w^\zeta - \lambda \mathcal{C}_w^\zeta + \mathfrak{B}_{w'}^{\zeta'} - \lambda' \mathcal{C}_{w'}^{\zeta'} + \ldots \end{aligned}$$

et l'on pourrait raisonner sur les fonctions P et $P' + \lambda P$, cette dernière ayant son déterminant nul.

39. On peut donc toujours ramener la démonstration du théorème à la même démonstration pour un moindre nombre de variables, jusqu'au moment où l'une des fonctions considérées, P′ par exemple, se réduira identiquement à zéro. L'autre se réduira à une somme de carrés et les substitutions qui la transforment en elles-mêmes seront orthogonales. Or on sait qu'une substitution orthogonale quelconque résulte de substitutions orthogonales partielles opérées chacune sur deux variables seulement; mais ce sont là des substitutions simples. Le théorème est donc vérifié.

Juin 1874.