JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

CAMILLE JORDAN

Mémoire sur les formes bilinéaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 19 (1874), p. 35-54.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1874_2_19__35_0>

MÉMOIRE SUR LES FORMES BILINÉAIRES;

PAR M. CAMILLE JORDAN.

Nous résoudrons dans ce Mémoire les problèmes suivants :

1° Étant donné un polynôme bilinéaire

$$P = \Sigma A_{\alpha\beta}\, x_\alpha y_\beta, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n, \quad \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

le ramener à une forme canonique simple par des substitutions orthogonales opérées, les unes sur les variables $x_1, \ldots, x_n$, les autres sur les variables $y_1, \ldots, y_n$.

2° Ramener P à une forme simple par des substitutions linéaires quelconques, mais opérées simultanément sur les deux séries de variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$.

3° Ramener simultanément à une forme simple deux polynômes bilinéaires P et Q, par des substitutions linéaires quelconques, opérées isolément sur les deux séries de variables.

Le premier de ces problèmes n'a pas encore été abordé à notre connaissance; le deuxième a déjà été traité (dans le cas où n est pair), par M. Kronecker (*Monatsbericht*, 15 octobre 1866), et le troisième par M. Weierstrass (*Ibid.*, 18 mai 1868); mais les solutions données par les éminents géomètres de Berlin sont incomplètes, en ce qu'ils ont laissé de côté certains cas exceptionnels, qui ne manquent pas d'intérêt. Leur analyse est en outre assez difficile à suivre, surtout celle de M. Weierstrass.

Nous pensons donc satisfaire les géomètres en exposant, pour la solution de ces questions, une méthode nouvelle très-simple, et ne comportant plus aucun cas d'exception.

Nous terminerons ce Mémoire en montrant que le troisième problème, borné aux limites où l'avait considéré M. Weierstrass, est identique à celui de la réduction des substitutions linéaires à leur forme canonique.

1. Soit

$$P = \Sigma A_{\alpha\beta}\, x_\alpha y_\beta, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n, \quad \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

un polynôme linéaire par rapport à chacune des deux séries de variables $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$. Si l'on opère sur cette fonction une double substitution linéaire

$$(1) \qquad x_\rho = a_{\rho 1}\xi_1 + a_{\rho 2}\xi_2 + \ldots + a_{\rho n}\xi_n,$$

$$(2) \qquad y_\rho = b_{\rho 1}\eta_1 + b_{\rho 2}\eta_2 + \ldots + b_{\rho n}\eta_n,$$

ce polynôme prendra la forme

$$\Sigma \mathcal{A}_{\alpha\beta}\, \xi_\alpha \eta_\beta,$$

analogue à la précédente. On pourra d'ailleurs disposer des coefficients des substitutions (1) et (2), de manière à simplifier cette expression en annulant quelques-uns des coefficients $\mathcal{A}$.

Supposons d'abord que le déterminant formé avec les coefficients $A_{\alpha\beta}$, que nous appellerons pour abréger le *déterminant* de P, ne soit pas nul. On pourra poser

$$x_\rho = \xi_\rho, \quad A_{\rho 1} y_1 + \ldots + A_{\rho n} y_n = \eta_\rho,$$

et P prendra la forme canonique

$$(3) \qquad \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \ldots + \xi_n \eta_n.$$

Si le déterminant de P était nul, les fonctions $\eta_1, \ldots, \eta_n$ calculées comme ci-dessus, étant liées par une ou plusieurs relations linéaires, ne seraient plus des indéterminées distinctes. Admettons, pour fixer les idées, que les fonctions $\eta_1, \ldots, \eta_m$ soient distinctes, mais que les suivantes soient liées à celles-ci par des relations linéaires. Substituant dans P les valeurs de $\eta_{m+1}, \ldots$, tirées de ces relations, P prendra la forme

$$(4) \qquad P = \xi_1 \eta_1 + \ldots + \xi_m \eta_m,$$

$\xi_1, \ldots, \xi_m$ étant des fonctions de la forme

$$\xi_\rho = x_\rho + c_\rho x_{m+1} + d_\rho x_{m+2} + \ldots,$$

qu'on pourra prendre pour variables indépendantes au lieu de $x_1, \ldots, x_m$.

Nous obtenons ainsi dans tous les cas une forme réduite où chaque variable ne figure que dans un seul rectangle, et dans laquelle tous les coefficients sont égaux à l'unité. Il est clair d'ailleurs que deux réduites correspondant à différentes valeurs du nombre m ne peuvent être transformées l'une dans l'autre; car ces fonctions diffèrent par le nombre des variables distinctes dont elles dépendent.

Nous remarquons enfin qu'il existe une infinité de manières de ramener P à sa forme canonique. En effet, si P est de la forme (4), par exemple, on pourra, sans altérer cette forme, poser

$$\xi_\rho = a_{\rho 1} \xi'_1 + \ldots + a_{\rho m} \xi'_m,$$

pourvu qu'on opère en même temps sur $\eta_1, \ldots, \eta_m$ la substitution *adjointe* définie par les relations

$$\eta'_\rho = a_{1\rho} \eta_1 + \ldots + a_{m\rho} \eta_m.$$

2. Premier problème. Imposons-nous maintenant la condition que les substitutions (1) et (2) soient orthogonales. La réduction de P à une forme plus simple dépend, comme on va le voir, de la solution du problème suivant :

Trouver les maxima et minima de P, *lorsque les variables* x, y *restent assujetties aux relations*

$$(5) \qquad x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1, \quad y_1^2 + \ldots + y_n^2 = 1.$$

On aura, pour déterminer ces maxima,

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 = dP = {} & (A_{11} y_1 + A_{12} y_2 + \ldots) dx_1 + \ldots \\ & + (A_{11} x_1 + A_{21} x_2 + \ldots) dy_1 + \ldots, \end{aligned} \right.$$

équation qui doit avoir lieu pour toutes les valeurs de $dx_1, \ldots, dy_1, \ldots,$

qui satisfont aux relations

$$(7) \qquad x_1\,dx_1 + \ldots + x_n\,dx_n = 0, \quad y_1\,dy_1 + \ldots + y_n\,dy_n = 0.$$

L'équation (6) sera donc une combinaison des équations (7), et l'on aura, par suite,

$$(8)\ A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \ldots = \lambda x_1, \ldots, \quad A_{n1}y_1 + A_{n2}y_2 + \ldots = \lambda x_n,$$
$$(9)\ A_{11}x_1 + A_{21}x_2 + \ldots = \mu y_1, \ldots, \quad A_{1n}x_1 + A_{2n}x_2 + \ldots = \mu y_n.$$

En vertu des équations (8), le maximum cherché de P sera égal à

$$\begin{aligned}&(A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \ldots)x_1 + \ldots \\ &+ (A_{n1}y_1 + A_{n2}y_2 + \ldots)x_n = \lambda(x_1^2 + \ldots + x_n^2) = \lambda.\end{aligned}$$

On verra de même que ce maximum est égal à μ en vertu des équations (9); on aura donc $\lambda = \mu$.

Cette inconnue sera d'ailleurs déterminée par la condition que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \ldots & A_{11} & A_{12} & \ldots \\ 0 & -\lambda & \ldots & A_{21} & A_{22} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{11} & A_{21} & \ldots & -\lambda & 0 & \ldots \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & 0 & -\lambda & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

des équations (8) et (9) se réduise à zéro.

L'équation $D = 0$, que nous venons d'obtenir, a ses coefficients invariables pour toute transformation orthogonale effectuée sur l'une ou l'autre des deux séries d'indices $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$; car une semblable transformation n'altère pas la forme des équations (5). D'ailleurs cette équation ne contient que des puissances paires de λ. Considérons en effet un terme quelconque de D; soit m le nombre des facteurs de ce terme qui sont empruntés au déterminant partiel

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots \\ A_{21} & A_{22} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

Ce terme contiendra $n - m$ autres facteurs appartenant aux n premières lignes de D, qui seront égaux chacun à $-\lambda$; il contiendra en outre $n - m$ autres facteurs $-\lambda$, appartenant aux n dernières colonnes de D. Il contiendra donc λ à la puissance $2(n - m)$.

3. Soit λ_1 une des racines de $D = 0$. Les équations (8) et (9) feront connaître en général les rapports des quantités correspondantes $x_1, \ldots, y_n$. On achèvera de les déterminer au signe près en employant l'une ou l'autre des équations (5). Même dans le cas exceptionnel où il subsisterait quelque indétermination dans le choix de ces quantités, on pourra obtenir sans difficulté un système de solutions

$$x_1 = a_{11}, \quad \ldots, \quad x_n = a_{n1}, \quad y_1 = b_{11}, \quad \ldots, \quad y_n = b_{n1}.$$

Cela posé, $a_{11}, \ldots, a_{n1}, b_{11}, \ldots, b_{n1}$ satisfaisant aux équations (5), on sait qu'on pourra déterminer deux substitutions orthogonales de la forme

$$(10) \quad \begin{cases} \xi_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{n1}x_n, \ldots, & \xi_n = a_{1n}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \\ \eta_1 = b_{11}y_1 + \ldots + b_{n1}y_n, \ldots, & \eta_n = b_{1n}y_1 + \ldots + b_{nn}y_n, \end{cases}$$

$a_{12}, \ldots, a_{nn}, b_{12}, \ldots, b_{nn}$ étant des coefficients convenablement choisis. Substituant dans l'expression des nouvelles variables les valeurs $x_1 = a_{11}, \ldots, y_n = b_{n1}$, on voit que P sera maximum pour $\xi_1 = \eta_1 = 1$, $\xi_2 = \ldots = \eta_n = 0$.

Or soit $\Sigma \mathcal{A}_{\alpha\beta}\xi_\alpha\eta_\beta$ ce que devient P rapporté à ces nouvelles variables; on aura, pour déterminer les valeurs de ces variables correspondant au maximum, les relations

$$\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1, \quad \eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2 = 1,$$
$$\mathcal{A}_{11}\eta_1 + \mathcal{A}_{12}\eta_2 + \ldots = \lambda_1\xi_1, \ldots, \quad \mathcal{A}_{n1}\eta_1 + \mathcal{A}_{n2}\eta_2 + \ldots = \lambda_1\xi_n,$$
$$\mathcal{A}_{11}\xi_1 + \mathcal{A}_{21}\xi_2 + \ldots = \lambda_1\eta_1, \ldots, \quad \mathcal{A}_{1n}\xi_1 + \mathcal{A}_{2n}\xi_2 + \ldots = \lambda_1\eta_n,$$

analogues à (5), (8), (9). Et pour qu'elles soient satisfaites pour $\xi_1 = \eta_1 = 1$, $\xi_2 = \ldots = \eta_n = 0$, il faudra qu'on ait

$$\mathcal{A}_{11} = \lambda_1, \quad \mathcal{A}_{12} = \ldots = \mathcal{A}_{1n} = \mathcal{A}_{21} = \ldots = \mathcal{A}_{2n} = 0;$$

donc P se réduira à la forme

$$\lambda_1 \xi_1 \eta_1 + P_1,$$

P_1 étant indépendant de ξ_1 et de η_1.

Opérant sur P_1 comme sur P, on pourra le mettre sous la forme $\lambda_2\xi_2\eta_2 + P_2$, P_2 ne dépendant plus que de ξ_2, η_2; et, poursuivant ainsi, on arrivera à mettre P sous la forme canonique

$$P = \lambda_1 \xi_1 \eta_1 + \lambda_2\xi_2\eta_2 + \ldots + \lambda_n\xi_n\eta_n.$$

4. L'équation $D = 0$ devient alors

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \ldots & \lambda_1 & 0 & \ldots \\ 0 & -\lambda & \ldots & 0 & \lambda_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1 & 0 & \ldots & -\lambda & 0 & \ldots \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 & -\lambda & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = (\lambda^2 - \lambda_1^2)\ldots(\lambda^2 - \lambda_2^n),$$

ce qui permet de calculer *a priori* les coefficients de la forme canonique, en résolvant l'équation caractéristique $D = 0$.

On peut également, lorsque cette équation a ses racines inégales, calculer *a priori* les coefficients de la substitution

$$(11) \qquad \xi_\rho = c_{1\rho} x_1 + \ldots + c_{n\rho} x_n, \quad \eta_\rho = d_{1\rho} y_1 + \ldots + d_{n\rho} y_n,$$

nécessaire pour opérer la réduction à la forme canonique. En effet, soit λ_ρ une de ces racines. On aura, pour déterminer les valeurs correspondantes de $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $\eta_1, \ldots, \eta_n$, les relations

$$\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1, \quad \eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2 = 1,$$
$$\lambda_1 \eta_1 = \lambda_\rho \xi_1, \ldots, \lambda_n \eta_n = \lambda_\rho \xi_n,$$
$$\lambda_1 \xi_1 = \lambda_\rho \eta_1, \ldots, \lambda_n \xi_n = \lambda_\rho \eta_n;$$

d'où

$$\eta_\sigma = \xi_\sigma = 0, \quad \text{si } \sigma \gtrless \rho,$$

et, par suite,

$$\xi_\rho = \eta_\rho = \pm 1.$$

Les équations (11), résolues par rapport aux x et aux y, donneront les valeurs correspondantes de $x_1,\ldots, x_n, y_1,\ldots, y_n$, à savoir :

$$x_1 = \pm c_{1\rho},\ldots, x_n = \pm c_{n\rho}, \quad y_1 = \pm d_{1\rho},\ldots, y_n = \pm d_{n\rho}.$$

Si donc on calcule directement les valeurs de $x_1,\ldots, y_n$, correspondant à $\lambda = \mu = \lambda_\rho$, en partant des équations (5), (8), (9), on obtiendra par là les coefficients $c_{1\rho},\ldots, d_{n\rho}$, au signe près, lequel peut être choisi à volonté.

5. Deuxième problème. — Examinons maintenant le cas où les deux systèmes de variables $x_1,\ldots, x_n, y_1,\ldots, y_n$ sont assujettis à éprouver la même substitution.

Soit P_1 ce que devient P lorsqu'on y change $x_1,\ldots, x_n$ en $y_1,\ldots, y_n$, et réciproquement. Posons

$$P + P_1 = 2\Pi, \quad P - P_1 = 2\Pi_1, \quad \text{d'où} \quad P = \Pi + \Pi_1.$$

La fonction P sera ainsi décomposée en la somme de deux autres, l'une Π, symétrique par rapport aux deux systèmes de variables, l'autre Π_1, qui change de signe lorsqu'on permute ces deux systèmes.

Effectuons une même substitution S sur ces deux systèmes de variables ; il est clair qu'après cette opération comme avant Π restera symétrique par rapport aux deux systèmes de variables, tandis que Π_1 changera de signe si l'on permute les deux systèmes. Si donc P' est la transformée de P par la substitution en question, les deux portions dont elle se compose seront respectivement Π' et Π'_1, transformées de Π et de Π_1.

Cela posé, soit Ψ la forme quadratique en $x_1,\ldots, x_n$, que l'on obtient en posant $y_1 = x_1,\ldots, y_n = x_n$ dans Π. On pourra, par une substitution convenable,

$$x_1 = f_1(\xi_1,\ldots,\xi_n),\ldots, \quad x_n = f_n(\xi_1,\ldots,\xi_n),$$

réduire Ψ à une somme de carrés, telle que

$$\Psi = \xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2 \quad (m \overline{\gtrless} n).$$

Et il est clair qu'en soumettant Π à la substitution

$$x_1 = f_1(\xi_1,\ldots,\xi_n),\ldots,\quad x_n = f_n(\xi_1,\ldots,\xi_n),$$
$$y_1 = f_1(\eta_1,\ldots,\eta_n),\ldots,\quad y_n = f_n(\eta_1,\ldots,\eta_n),$$

on le mettra sous la forme

$$\Pi = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_m\eta_m. \tag{12}$$

Quant à Π_1, qui doit changer de signe en y remplaçant $\xi_1,\ldots,\xi_n$ par $\eta_1,\ldots,\eta_n$ et réciproquement, il sera de la forme

$$\Pi_1 = \Sigma A_{\alpha\beta}(\xi_\alpha\eta_\beta - \xi_\beta\eta_\alpha)\quad \begin{pmatrix}\alpha = 1, 2,\ldots, n\\ \beta = 1, 2,\ldots, \alpha - 1\end{pmatrix}.$$

Cherchons maintenant à simplifier cette expression par une nouvelle substitution opérée sur les deux systèmes de variables, et choisie de telle façon qu'elle n'altère pas la forme canonique (12), déjà trouvée pour Π.

6. Supposons, pour embrasser à la fois dans notre analyse tous les cas qui peuvent se présenter, que l'on ait $m < n$, et considérons ceux des coefficients $A_{\alpha\beta}$, où les indices α et β sont supérieurs à m.

Admettons que l'un d'entre eux, $A_{n,n-1}$ par exemple, soit différent de zéro. Prenons pour variables, au lieu de $\xi_n, \xi_{n-1}, \eta_n, \eta_{n-1}$, les suivantes :

$$\Xi_1 = \sum_\alpha A_{\alpha,n-1}\xi_\alpha,\quad \Xi_2 = \frac{1}{A_{n,n-1}}\sum_\beta A_{n\beta}\xi_\beta,$$
$$H_1 = \sum_\alpha A_{\alpha,n-1}\eta_\alpha,\quad H_2 = \frac{1}{A_{n,n-1}}\sum_\beta A_{n\beta}\eta_\beta,$$

La forme de Π ne sera pas changée, et Π_1 prendra la forme

$$\Pi_1 = (\Xi_1 H_2 - \Xi_2 H_1) + \Pi'_1,$$

Π'_1 étant une fonction analogue à Π_1, mais ne contenant plus que les variables $\xi_1,\ldots,\xi_{n-2}, \eta_1,\ldots,\eta_{n-2}$.

Soit

$$\Pi'_1 = \Sigma A'_{\alpha\beta}(\xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha) \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, n-2 \\ \beta = 1, \ldots, \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

Si l'on a $A'_{\alpha\beta} \gtrless 0$ pour des valeurs de α et de β supérieures à m, on opérera sur Π'_1 comme sur Π_1. Continuant ce procédé de réduction, autant que faire se pourra, on finira par mettre Π_1 sous la forme

$$\Pi_1 = (\Xi_1 H_2 - \Xi_2 H_1) + \ldots + (\Xi_{2p-1} H_{2p} - \Xi_{2p} H_{2p-1}) + \Pi_2,$$

Π_2 étant de la forme

$$\Pi_2 = \Sigma B_{\alpha\beta}(\xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha) \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, n-2p \\ \beta = 1, \ldots, \alpha - 1 \end{pmatrix},$$

et les coefficients $B_{\alpha\beta}$ étant nuls, toutes les fois qu'on aura simultanément $\alpha > m$, $\beta > m$.

7. Considérons maintenant ceux des coefficients $B_{\alpha\beta}$ dans lesquels on a $\alpha > m$, $\beta \overline{\gtrless} m$. Supposons, pour plus de généralité, que l'un d'entre eux, par exemple $B_{n-2p,m}$, soit différent de zéro. Posons

$$D = \sqrt{B^2_{n-2p,1} + \ldots + B^2_{n-2p,m}}.$$

On sait qu'on pourra déterminer une substitution orthogonale

$$\xi'_1 = \varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_m), \ldots, \quad X_1 = \xi'_m = \varphi_m(\xi_1, \ldots, \xi_m),$$

où la fonction X_1 soit précisément égale à $\frac{B_{n-2p,1}\xi_1 + \ldots + B_{n-2p,m}\xi_m}{D}$.

Opérons cette substitution sur $\xi_1, \ldots, \xi_m$, et opérons en même temps une substitution toute pareille

$$\eta'_1 = \varphi_1(\eta_1, \ldots, \eta_m), \ldots, \quad Y_1 = \eta'_m = \varphi_m(\eta_1, \ldots, \eta_m)$$

sur les variables η. La fonction Π deviendra

$$\xi'_1 \eta'_1 + \ldots + \xi'_{m-1}\eta'_{m-1} + X_1 Y_1,$$

tandis que Π_2 prendra la forme

$$\Pi_2 = \mathrm{D}(\xi_{n-2p}\eta'_m - \xi'_m\eta_{n-2p}) + \sum_\beta \mathrm{B}'_{\alpha\beta}(\xi'_\alpha\eta'_\beta - \xi'_\beta\eta'_\alpha) \begin{pmatrix}\alpha = 1,\ldots, n-2p-1\\ \beta = 1,\ldots,\alpha-1\end{pmatrix},$$

ou en posant

$$\mathrm{X}_2 = \mathrm{D}\xi_{n-2p} + \sum_\alpha \mathrm{B}'_{\alpha m}\xi'_\alpha - \sum_\beta \mathrm{B}'_{m\beta}\xi'_\beta,$$

$$\mathrm{Y}_2 = \mathrm{D}\eta_{n-2p} + \sum_\alpha \mathrm{B}'_{\alpha m}\eta'_\alpha - \sum_\beta \mathrm{B}'_{m\beta}\eta'_\beta,$$

$$\Pi_2 = \mathrm{X}_2\mathrm{Y}_1 - \mathrm{X}_1\mathrm{Y}_2 + \Pi'_2,$$

Π'_2 étant une fonction analogue à Π_2, mais ne contenant plus les variables X_1, X_2, Y_1, Y_2.

Si Π'_2 renferme des termes qui contiennent les variables $\xi'_{m+1},\ldots,$ ξ'_{n-2p-1}, et dont les coefficients ne soient pas nuls, on le réduira de la même manière qu'il vient d'être fait pour Π_2; et, continuant ainsi aussi longtemps que ce sera possible, on pourra donner à Π et Π_2 les formes suivantes :

$$\Pi = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_{m-q}\eta_{m-q} + \mathrm{X}_1\mathrm{Y}_1 + \mathrm{X}_3\mathrm{Y}_3 + \ldots + \mathrm{X}_{2q-1}\mathrm{Y}_{2q-1},$$

$$\Pi_2 = \Pi_3 + (\mathrm{X}_2\mathrm{Y}_1 - \mathrm{X}_1\mathrm{Y}_2) + (\mathrm{X}_4\mathrm{Y}_3 - \mathrm{X}_3\mathrm{Y}_4) + \ldots + (\mathrm{X}_{2q}\mathrm{Y}_{2q-1} - \mathrm{X}_{2q-1}\mathrm{Y}_{2q}),$$

Π_3 étant une fonction analogue à Π_2, mais ne contenant plus que les variables $\xi_1,\ldots,\xi_{m-q}$, $\eta_1,\ldots,\eta_{m-q}$.

8. Soit

$$\Pi_3 = \sum_{\alpha\beta} \mathrm{C}_{\alpha\beta}(\xi_\alpha\eta_\beta - \xi_\beta\eta_\alpha) \quad \begin{pmatrix}\alpha = 1,\ldots, m-q\\ \beta = 1,\ldots, \alpha-1\end{pmatrix},$$

et supposons que l'un des coefficients $\mathrm{C}_{\alpha\beta}$, par exemple C_{21}, soit $\lessgtr 0$. Posons

$$\mathrm{D} = \sqrt{\mathrm{C}^2_{21} + \ldots + \mathrm{C}^2_{m-q,1}}.$$

On pourra déterminer une substitution orthogonale

$$x_2 = \xi'_2 = f_2(\xi_2,\ldots,\xi_{m-q}),\ldots,\quad \xi'_{m-q} = f_{m-q}(\xi_2,\ldots,\xi_{m-q}),$$

dans laquelle x_2 soit égal à $\frac{1}{\mathrm{D}}(\mathrm{C}_{21}\xi_2 + \ldots + \mathrm{C}_{m-q,1}\xi_{m-q})$. Si l'on opère cette substitution sur les ξ, en opérant en même temps une substitution semblable sur les η, la forme de Π ne sera pas changée, mais Π_2 deviendra égal à

$$D(x_2\eta_1 - y_2\xi_1) + \sum_\alpha C'_{\alpha 2}(\xi'_\alpha y_2 - \eta'_\alpha x_2) + \Pi'_3,$$

Π'_3 étant une fonction analogue à Π_3, mais ne dépendant que de $\xi'_3, \ldots, \xi'_{m-q}, \eta'_3, \ldots, \eta'_{m-q}$.

Soit maintenant

$$\Delta_1 = \sqrt{D^2 + C'^2_{32} + \ldots + C'^2_{m-q,2}},$$

on pourra déterminer une substitution orthogonale

$$x_1 = \xi'_1 = \varphi_1(\xi_1, \xi'_3, \ldots,), \quad \xi''_3 = \varphi_3(\xi_1, \xi'_3, \ldots), \ldots,$$

où x_1 soit égal à $\frac{1}{\Delta_1}(D\xi_1 - C'_{32}\xi'_3 - \ldots)$

Effectuant cette substitution en même temps qu'une substitution semblable sur la seconde série de variables, il viendra

$$\Pi = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \xi''_3 \eta''_3 + \ldots + X_1 Y_1 + \ldots$$

et

$$\Pi_3 = \Delta_1(x_2 y_1 - y_1 x_2) + \Pi''_3,$$

Π''_3 étant analogue à Π_3, mais ne contenant plus x_1, x_2, y_1, y_2.

Si Π''_3 ne se réduit pas à zéro, on pourra le traiter comme Π_3, de manière à donner à Π et Π_3 les formes suivantes :

$$\Pi = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + \xi_5 \eta_5 + \ldots + X_1 Y_1 + \ldots,$$
$$\Pi_3 = \Delta_1(x_2 y_1 - x_1 y_2) + \Delta_2(x_4 y_3 - x_3 y_4) + \Pi'''_3,$$

Π'''_3 ne dépendant que de $\xi_5, \eta_5, \ldots$.

Poursuivant ces réductions jusqu'à la fin, on voit que la fonction $P = \Pi + \Pi_1$ pourra se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}P = {} & [x_1 y_1 + x_2 y_2 + \Delta_1(x_2 y_1 - x_1 y_2)] + \ldots \\ & + [x_{2\mu-1} y_{2\mu-1} + x_{2\mu} y_{2\mu} + \Delta_\mu(x_{2\mu} y_{2\mu-1} - x_{2\mu-1} y_{2\mu})] + \xi_{2\mu+1}\eta_{2\mu+1} + \ldots \\ & + \xi_{m-q-2\mu}\eta_{m-q-2\mu} + [X_1 Y_1 + X_2 Y_1 - X_1 Y_2] + \ldots \\ & + [X_{2q-1} Y_{2q-1} + X_{2q} Y_{2q-1} - X_{2q-1} Y_{2q}] + [\Xi_1 H_2 - \Xi_2 H_1] + \ldots \\ & + [\Xi_{2p-1} H_{2p} - \Xi_{2p} H_{2p-1}].\end{aligned}$$

On voit ainsi que, dans tous les cas, P est exprimé par une somme de fonctions partielles dont aucune ne contient plus de quatre variables.

Le nombre total des variables contenues dans cette forme canonique est égal à $2m + 2q + 4p$. Ce nombre sera en général égal à $2n$, mais il pourra être moindre dans certains cas particuliers.

9. Troisième problème. Cherchons maintenant à quelle forme canonique on pourra ramener un système de deux polynômes bilinéaires

$$P = \Sigma A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta, \quad Q = \Sigma B_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta.$$

Nous commencerons par choisir les variables x, y de telle sorte, que P se trouve réduit à sa forme canonique

$$P = x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m.$$

Pour embrasser dans notre analyse tous les cas particuliers, nous supposerons $m < n$, et nous admettrons que Q renferme dans son expression l'une au moins des variables $x_{m+1}, \ldots, x_n, y_{m+1}, \ldots, y_n$, qui ne figurent pas dans P, par exemple x_ρ.

On aura

$$Q = Y x_\rho + Q_1,$$

Y étant une fonction linéaire de $y_1, \ldots, y_n$ et Q_1 étant indépendant de x_ρ.

Si Y contient quelqu'une des variables $y_{m+1}, \ldots, y_m$, on pourra la prendre pour variable indépendante à la place de l'une de ces dernières; on aura alors, en mettant en évidence ceux des termes de Q_1 qui contiennent Y,

$$Q = Y x_\rho + \varphi Y + R,$$

φ étant une fonction linéaire des x autres que x_ρ; et, prenant pour variable indépendante $x_\rho + \varphi = X$, au lieu de x_ρ,

$$Q = XY + R,$$

et le problème sera réduit à ramener à une forme simple P et R, qui ne contiennent plus les variables X et Y.

10. Admettons maintenant que Y se réduise à une fonction de $y_1, \ldots, y_m$ seulement. On pourra supposer qu'il se réduit à y_1 : en effet on peut, sans altérer la forme de P, prendre pour variables indépendantes, au lieu de $y_1, \ldots, y_m$, des fonctions quelconques de ces variables, pourvu qu'on opère en même temps la substitution adjointe sur les variables $x_1, \ldots, x_m$.

Soit donc $Y = y_1$; mettant en évidence dans Q les termes qui contiennent y_1 et x_1, il viendra

$$Q = x_\rho y_1 + X_1 y_1 + x_1 Y_1 + R_1,$$

X_1 étant une fonction linéaire des x, sauf x_ρ, et Y_1 une fonction linéaire des y, sauf y_1.

11. Si Y_1 est nul, on prendra $X = x_\rho + X_1$ pour variable indépendante à la place de x_ρ, et l'on aura

$$Q = X y_1 + R_1, \quad P = x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m = x_1 y_1 + P_1.$$

Il ne restera plus qu'à réduire simultanément les deux fonctions P_1 et R_1, qui ne contiennent plus les variables X_1, x_1, y_1.

12. Supposons en second lieu que Y_1 ne soit pas nul et contienne les variables $y_{m+1}, \ldots, y_n$. On pourra le prendre pour variable indépendante. Cela fait, mettons en évidence ceux des termes de R_1 qui le contiennent; on aura

$$Q = x_\rho y_1 + X_1 y_1 + (x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m) Y_1 + R'_1.$$

Posons maintenant

$$x_1 = x'_1 - a_2 x_2 - \ldots - a_m x_m, \quad y_2 = y'_2 + a_2 y_1, \ldots, \quad y_m = y'_m + a_m y_1,$$

et, la substitution faite, supprimons les accents des nouvelles variables, pour ne pas compliquer les notations. La forme de P n'aura pas changé et Q sera devenu (en y mettant en évidence les termes en y_1)

$$Q = x_\rho y_1 + X'_1 y_1 + x_1 Y_1 + R''_1;$$

(X'_1 étant une nouvelle fonction de $x_2, \ldots, x_m$), ou, en prenant pour variable $X = x_\rho + X'_1$,

$$Q = X y_1 + x_1 Y_1 + R''_1,$$

il ne restera plus qu'à réduire P_1 et R''_1, qui ne contiennent plus les variables X_1 Y_1, x_1 y_1.

13. Supposons enfin que Y_1 ne soit pas nul, mais ne contienne que $y_2, \ldots, y_m$. On pourra supposer qu'il se réduit à y_2, car on peut, sans altérer la forme de P, prendre pour variables des fonctions quelconques de $y_2, \ldots, y_m$, pourvu qu'on opère un changement de variables correspondant sur $x_2, \ldots, x_m$.

Mettons en évidence dans Q les termes en y_2 et en x_2. On aura

$$Q = x_\rho y_1 + X_1 y_1 + x_1 y_2 + X_2 y_2 + x_2 Y_2 + R_2,$$

X_2 étant une fonction linéaire des x, sauf x_ρ et x_1, et Y_2 une fonction linéaire des y, sauf y_1 et y_2.

14. Si Y_2 est identiquement nul, on pourra faire disparaître X_2 par un changement de variables. Soit, en effet,

$$X_2 = a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m.$$

Posons

$$x_1 = x'_1 - X_2, \quad y_2 = y'_2 + a_2 y_1, \ldots, \quad y_m = y'_m + a_m y_1,$$

et, la substitution faite, effaçons les accents des nouvelles variables. La forme de P n'aura pas changé, et Q aura pris la forme

$$Q = x_\rho y_1 + X'_1 y_1 + x_1 y_2 + R_2 = X y_1 + x_1 y_2 + R'_2,$$

en posant $x_\rho + X'_1 = X$.

Il ne restera plus qu'à ramener à une forme simple

$$P_2 = P - x_1 y_1 - x_2 y_2 \quad \text{et} \quad R'_2,$$

qui ne contiennent plus les variables X, x_1, y_1, x_2, y_2.

15. Si Y_2 n'est pas nul et contient l'une des variables $y_{m+1},\ldots, y_m$, on le prendra pour variable indépendante, et, mettant en évidence ceux des termes de R_2 qui le contiennent, on aura

$$Q = x_\rho y_1 + X_1 y_1 + x_1 y_2 + X_2 y_2 + x_2 Y_2 + X_3 Y_2 + R'_2,$$

et, par une suite de changements de variables opérés comme tout à l'heure, on fera disparaître successivement les termes $X_3 Y_2$, $X_2 y_2$, $X_1 y_1$, de manière à ramener Q à la forme

$$Q = X y_1 + x_1 y_2 + x_2 Y_2 + R''_2,$$

et il ne restera plus qu'à ramener à une forme simple P_2 et R''_2, qui ne contiennent plus les variables X, Y_2, $x_1 y_1$, $x_2 y_2$.

16. Si Y_2 n'est pas nul, mais ne contient pas les variables $y_{m+1},\ldots, y_n$, on pourra supposer qu'il se réduit à y_3. Poursuivant ainsi, on voit qu'on aura en général

$$Q = \mathfrak{B} + R_k,$$

$\mathfrak{B}$ étant de l'une des formes suivantes :

$$\mathfrak{B} = XY,$$
$$\mathfrak{B} = X y_1 + x_1 y_2 + \ldots + x_{k-1} y_k,$$
$$\mathfrak{B} = X y_1 + x_1 y_2 + \ldots + x_{k-1} y_k + x_k Y,$$

où X, Y sont des variables non contenues dans P, et R_k une fonction qui ne contient plus X, x_k, $x_1, \ldots, y_1, \ldots, y_k$, et qui ne contiendra pas non plus Y, si Y figure dans l'expression de B.

On a d'ailleurs

$$P = x_1 y_1 + \ldots + x_k y_k + P_k,$$

et l'on n'aura plus qu'à ramener simultanément P_k et R_k à une forme simple.

17. Si R_k contient encore des variables qui ne figurent pas dans P_k, on pourra raisonner sur ces deux fonctions comme sur P et Q et obtenir un nouveau degré de réduction. On pourra donc enfin décomposer P et Q en une somme de parties

$$P = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \ldots + \mathcal{P},$$
$$Q = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 + \ldots + \mathcal{Q}$$

telles : 1° que chaque variable ne figure que dans un seul des couples de fonctions partielles, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$; $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2, \ldots$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$; 2° que l'une quelconque $\mathcal{A}_\rho$ des fonctions $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$ soit nulle ou de la forme

$$(13) \qquad \mathcal{A}_\rho = x_\mu y_\mu + \ldots + x_\nu y_\nu,$$

et la fonction correspondante $\mathcal{B}_\rho$ de l'une des formes suivantes :

$$(14) \qquad X y_\mu + x_\mu y_{\mu+1} + \ldots + x_{\nu-1} y_\nu + x_\nu Y,$$

$$(15) \qquad X y_\mu + x_\mu y_{\mu+1} + \ldots + x_{\nu-1} y_\nu,$$

$$(16) \qquad x_\mu y_{\mu+1} + \ldots + x_{\nu-1} y_\nu + x_\nu Y,$$

ou plus simplement, si $\mathcal{A}_\rho = 0$, de la forme

$$(17) \qquad \mathcal{B}_\rho = XY,$$

(X et Y étant des variables qui ne figurent pas dans P); 3° que $\mathcal{Q}$ ne contienne plus aucune variable autre que celles $x_{l+1}, y_{l+1}, \ldots, x_m, y_m$

qui figurent dans l'expression de $\mathcal{P}$,

$$\mathcal{P} = x_{l+1}y_{l+1} + \ldots + x_m y_m.$$

18. Toute la question se trouve ainsi ramenée à simplifier l'expression des fonctions restantes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ à $2(m-l)$ variables.

Pour y arriver, considérons la fonction $\mathcal{S} = \omega\mathcal{P} + \mathcal{Q}$, ω étant une constante que nous déterminerons par la condition que le déterminant de $\mathcal{S}$ soit égal à zéro. Cette condition donnera pour ω une équation de degré $(m-l)$, qui d'ailleurs ne sera pas identique, car le coefficient du terme en ω^{m-l} sera le déterminant de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire l'unité. Il est d'ailleurs évident que tous les coefficients de l'équation seront des invariants.

Changeons de variables, de manière à ramener $\mathcal{S}$ à sa forme canonique. Il viendra

$$\mathcal{S} = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_\lambda\eta_\lambda, \quad \lambda < m-l.$$

D'ailleurs $\mathcal{P}$ contient $2(m-l)$ variables distinctes. Il contiendra donc dans son expression les variables qui ne figurent pas dans $\mathcal{Q}$.

Raisonnant sur $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ comme tout à l'heure sur P et Q, on pourra poser

$$\mathcal{S} = \mathcal{A}'_1 + \mathcal{A}'_2 + \ldots + \mathcal{S}',$$
$$\mathcal{P} = \mathcal{B}'_1 + \mathcal{B}'_2 + \ldots + \mathcal{P}',$$

$\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_2, \ldots, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2, \ldots$, ayant des formes analogues à celles de $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{B}_1, \ldots$. Seulement, le déterminant de $\mathcal{P}$ n'étant pas nul, $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2, \ldots$ ne pourront être de la forme (15) ni de la forme (16). Par la même raison, le déterminant de $\mathcal{P}'$ ne sera pas nul.

On aura, par suite,

$$\mathcal{Q} = \mathcal{S} - \omega\mathcal{P} = (\mathcal{A}'_1 - \omega\mathcal{B}'_1) + \ldots + \mathcal{Q}',$$

en posant, pour abréger, $\mathcal{S}' - \omega\mathcal{P}' = \mathcal{Q}'$.

Soit maintenant

$$\mathcal{S}' = \omega'\mathcal{P}' + \mathcal{Q}',$$

ω' étant choisi de telle sorte que le déterminant de $\mathcal{S}'$ soit nul; on obtiendra de même

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{B}''_1 + \ldots + \mathfrak{P}'',$$
$$\mathfrak{Q}' = (\mathfrak{A}''_1 - \omega'\mathfrak{B}''_1) + \ldots + \mathfrak{Q}'',$$

et enfin

$$P = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{B}'_1 + \ldots + \mathfrak{B}''_1 + \ldots,$$
$$Q = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \ldots + (\mathfrak{A}'_1 - \omega\mathfrak{B}'_1) + \ldots + (\mathfrak{A}''_1 - \omega'\mathfrak{B}''_1) + \ldots.$$

On voit d'ailleurs sans difficulté que ω, ω',... seront les diverses racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le déterminant de $\omega\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$.

19. Les deux fonctions P et Q étant ramenées simultanément à la forme canonique que nous venons d'établir, formons le déterminant de l'expression $\omega P + Q$. On verra immédiatement que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il s'annule identiquement, quel que soit ω, est que l'une des fonctions $\mathfrak{B}_1$ $\mathfrak{B}_2$,... soit de la forme (15) ou (16). Si $k+1$ de ces fonctions appartiennent à l'une ou à l'autre de ces deux formes, non-seulement le déterminant de $\omega P + Q$, mais ses mineurs d'ordre k s'annuleront.

20. M. Weierstrass, en traitant ce problème par une autre méthode, s'est borné au cas où le déterminant de $\omega P + Q$ n'est pas identiquement nul. Nous allons montrer que, dans ce cas, le problème se ramène identiquement à celui de la réduction des substitutions linéaires à leur forme canonique, question dont nous avons donné ailleurs la solution.

Soient ω et ω' deux constantes quelconques, telles que les polynômes

$$\mathfrak{P} = \omega P + Q, \quad \mathfrak{Q} = \omega' P + Q$$

aient leurs déterminants différents de zéro. On exprimera aisément P et Q en fonction de $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$. Reste à assigner une forme simple à ces deux derniers polynômes.

Nous choisirons d'abord les variables indépendantes, de manière à ramener $\mathfrak{P}$ à sa forme canonique

$$\mathfrak{P} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Quant à $\mathfrak{Q}$, il sera de la forme

$$\mathfrak{Q} = x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n,$$

$f_1, \ldots, f_n$ étant des fonctions linéaires de $y_1, \ldots, y_n$, dont le déterminant n'est pas nul.

On voit qu'on passera de $\mathfrak{P}$ à $\mathfrak{Q}$ en opérant sur les y la substitution

$$S = | y_1, \ldots, y_n, \quad f_1, \ldots, f_n |,$$

que nous appellerons la *substitution correspondante* à $\mathfrak{Q}$.

Soit maintenant T une substitution quelconque

$$| x_1, \ldots, x_n, \quad a_1 x_1 + b_1 x_2 + \ldots, \quad a_n x_1 + b_n x_2 + \ldots |,$$

opérée sur les variables $x_1, \ldots, x_n$. Cette substitution, étant effectuée sur $\mathfrak{Q}$, le transforme en

$$\mathfrak{Q}_1 = x_1 (a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n) + x_2 (b_2 f_1 + \ldots + b_n f_n + \ldots) + \ldots,$$

et la substitution correspondante sera évidemment égale à SU, U désignant la substitution

$$| y_1, y_2, \ldots, \quad a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n, \quad b_1 y_1 + \ldots + b_n y_n, \ldots |.$$

Soit V une autre substitution quelconque,

$$| y_1, \ldots, y_n, \quad \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2 + \ldots, \quad \alpha_n y_1 + \beta_n y_2 + \ldots |,$$

opérée sur les y. En effectuant sur $\mathfrak{Q}_1$, on la transformera en un polynôme $\mathfrak{Q}_2$, correspondant à la substitution VSU.

Effectuons les mêmes transformations sur $\mathfrak{P}$; la substitution correspondante à $\mathfrak{P}$ se réduisant à l'unité, la substitution correspondante au polynôme transformé $\mathfrak{P}_2$ sera simplement VU.

Supposons maintenant que les transformations opérées sur les variables $x_1, \ldots, x_n$, et $y_1, \ldots, y_n$ soient choisies de telle sorte, qu'elles n'altèrent pas la forme de φ; on aura

$$\varphi_2 = \varphi, \quad \text{d'où} \quad VU = 1 \quad \text{et} \quad V = U^{-1}.$$

Par suite, la substitution correspondante à φ_2 sera $U^{-1}SU$.

Si maintenant on dispose de la substitution arbitraire U pour réduire la transformée $U^{-1}SU$ à sa forme canonique, φ_2 sera le polynôme réduit que nous cherchons.