JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. DARBOUX

Mémoire sur la théorie algébrique des formes quadratiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 19 (1874), p. 347-396.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1874_2_19__347_0>

Mémoire sur la théorie algébrique des formes quadratiques;

PAR M. G. DARBOUX.

Considérons une forme quadratique homogène à n variables

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

que nous écrirons aussi de la manière suivante :

$$\sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j,$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$ de i et de j. Nous supposerons, suivant l'usage, $a_{ji} = a_{ij}$; par suite un terme rectangle se trouvera deux fois dans la somme précédente avec le même coefficient, et l'expression développée de la forme sera

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \ldots + a_{nn} x_n^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + \ldots.$$

Le polynôme

$$(1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sera dit l'*invariant* ou le *déterminant* de la forme, et nous désignerons par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ les invariants des formes qu'on obtient en annulant dans la forme proposée successivement x_n, puis x_n, x_{n-1} puis x_n, x_{n-1}, $x_{n-2}, \ldots$ On aura ainsi

$$(2) \qquad \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,n-i} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n-i,1} & \ldots & a_{n-i,n-i} \end{vmatrix}.$$

Cela posé, réduisons, par les procédés connus, f à une somme de carrés de la forme suivante :

$$f = \varepsilon_1(x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n)^2 + \varepsilon_2(x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_n x_n)^2 + \ldots \\ + \varepsilon_{n-1}(x_{n-1} + \lambda_n x_n)^2 + \varepsilon_n x_n^2;$$

on trouvera, comme l'a prouvé M. Hermite,

$$\varepsilon_1 = \Delta_{n-1}, \ldots, \quad \varepsilon_{n-i} = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}, \quad \varepsilon_n = \frac{\Delta}{\Delta_1},$$

et par suite on aura

$$(3) \qquad f = \Delta_{n-1} X_1^2 + \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}} X_2^2 + \ldots + \frac{\Delta}{\Delta_1} X_n^2,$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant des fonctions linéaires des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il résulte de cette décomposition de f que le nombre des carrés positifs de la forme est égal à celui des permanences de la suite

$$(4) \qquad \Delta, \ \Delta_1, \ \Delta_2, \ldots, \ \Delta_{n-1}, \ 1;$$

quant aux fonctions linéaires X_i, elles ont été mises sous la forme de déterminants par divers géomètres et notamment par M. Weierstrass. Nous ne donnerons pas l'expression de ces fonctions, parce qu'elle résultera, comme cas particulier, des formules que nous établirons dans la suite de ce travail.

La décomposition en carrés qui précède peut devenir impossible si l'une des quantités Δ_i est nulle, et d'ailleurs elle est très-particulière. Nous nous proposerons d'abord de donner, et sous diverses formes, la décomposition en carrés la plus générale d'une forme quadratique. La résolution complète de cette question se rattache à l'étude d'une série de formes quadratiques dérivées de la forme f et contenant plusieurs groupes de variables. Comme elles jouent un rôle essentiel dans toutes les recherches relatives aux formes quadratiques, quelques-unes d'entre elles ont déjà été employées, et elles se présentent d'ailleurs de la manière la plus naturelle dans l'application de l'Analyse à l'étude des coniques et des quadriques. La suite de ce travail montrera, nous l'espérons, tout l'avantage qu'il y a à les introduire nettement et à en étudier d'une manière générale les propriétés les plus importantes.

I.

Définissons la fonction Φ_p par la relation suivante:

$$
(5) \qquad \Phi_p = \begin{vmatrix}
a_{11} & \ldots & a_{1n} & X_1^1 & X_1^2 & \ldots & X_1^p \\
a_{21} & \ldots & a_{2n} & X_2^1 & X_2^2 & \ldots & X_2^p \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & \ldots & a_{nn} & X_n^1 & X_n^2 & \ldots & X_n^p \\
X_1^1 & \ldots & X_n^1 & 0 & & & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
X_1^p & \ldots & X_n^p & 0 & & & 0
\end{vmatrix}.
$$

La fonction Φ_p contient p séries de variables

$$X_1^i,\ \ldots,\ X_n^i,\quad i = 1, 2, 3, \ldots, p,$$

et elle est quadratique par rapport à chacune de ces séries. Ajoutons qu'elle est une fonction homogène et du degré $n-p$ des coefficients a_{ij} de la forme fondamentale; car elle est une fonction *linéaire* des mineurs du $p^{ième}$ ordre de l'invariant

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \ldots & a_{1n} \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & \ldots & a_{nn}
\end{vmatrix},
$$

que nous désignerons par Φ_0 pour conserver la symétrie dans les notations.

La première de ces fonctions

$$
(6) \qquad \Phi_1 = \begin{vmatrix}
a_{11} & \ldots & a_{1n} & X_1^1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & \ldots & a_{nn} & X_n^1 \\
X_1^1 & \ldots & X_n^1 & 0
\end{vmatrix}
$$

est au signe près la fonction adjointe de Gauss. En la développant, on peut écrire

$$
(7) \qquad -\Phi_1 = \sum \frac{\partial \Phi_0}{\partial a_{ij}} X_i^1 X_j^1,
$$

et l'on a de même d'une manière générale

$$(8)\qquad -\Phi_{p+1} = \sum \frac{\partial \Phi_p}{\partial a_{ij}} X_i^{p+1} X_j^{p+1}.$$

La forme Φ_n se réduit évidemment à

$$(9)\qquad \Phi_n = (-1)^n \begin{vmatrix} X_1^1 & \dots & X_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ X_n^1 & \dots & X_n^n \end{vmatrix}^2.$$

D'ailleurs l'indice p de Φ_p ne peut dépasser n, car pour $p > n$ le déterminant Φ_p s'annule identiquement. On obtient donc seulement une suite de $n+1$ fonctions

$$\Phi_0,\ \Phi_1,\ \dots,\ \Phi_n,$$

des degrés n, $n-1, \dots, 1, 0$ par rapport aux coefficients de la forme f et contenant $0, 1, 2, \dots, n$ séries de variables.

Quand il sera nécessaire d'indiquer les systèmes d'arbitraires qui figurent dans les fonctions Φ_p, on représentera chacune des séries de variables de la manière suivante :

$$X_1^i,\ X_2^i,\ \dots,\ X_n^i.$$

Chaque série sera distinguée par l'indice supérieur et l'on emploiera la notation suivante :

$$(10)\qquad \begin{Bmatrix} X^1 & X^2 & \dots & X^p \\ Y^1 & Y^2 & \dots & Y^p \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & X_1^1 & \dots & X_1^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & X_n^1 & \dots & X_n^p \\ Y_1^1 & \dots & Y_n^1 & 0 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ Y_1^p & \dots & Y_n^p & 0 & & 0 \end{vmatrix},$$

qui s'applique, comme l'on voit, à des fonctions plus générales qu'on pourrait appeler les polaires des formes Φ_p. On aura alors

$$(11)\qquad \Phi_p = \begin{Bmatrix} X^1 & \dots & X^p \\ X^1 & \dots & X^p \end{Bmatrix}.$$

Un théorème bien connu, concernant les mineurs du premier ordre d'un déterminant, nous donnera la relation

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\left\{\begin{matrix} X^1 & \ldots & X^{p-1} & X^p \\ Y^1 & \ldots & Y^{p-1} & Y^p \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} X^1 & \ldots & X^{p-1} & X^{p+1} \\ Y^1 & \ldots & Y^{p-1} & Y^{p+1} \end{matrix}\right\} \\ -&\left\{\begin{matrix} X^1 & \ldots & X^{p-1} & X^{p+1} \\ Y^1 & \ldots & Y^{p-1} & Y^p \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} X^1 & \ldots & X^{p-1} & X^p \\ Y^1 & \ldots & Y^{p-1} & Y^{p+1} \end{matrix}\right\} \\ =&\left\{\begin{matrix} X^1 & \ldots & X^{p-1} \\ Y^1 & \ldots & Y^{p-1} \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} X^1 & \ldots & X^{p-1} & X^p & X^{p+1} \\ Y^1 & \ldots & Y^{p-1} & Y^p & Y^{p+1} \end{matrix}\right\}, \end{aligned}\right.$$

qui servira de base principale à nos recherches.

II.

Voyons d'abord ce que deviennent les formes précédentes quand on soumet les variables x_i à une substitution linéaire. Nous supposerons qu'alors les variables $X_1^i, X_2^i, \ldots, X_n^i$ seront transformées par la substitution inverse, de telle manière que la fonction

$$X_1^i x_1 + X_2^i x_2 + \ldots + X_n^i x_n$$

se reproduise identiquement après une transformation quelconque.

Cette définition étant admise, il est facile d'établir que les fonctions Φ_p se reproduiront, multipliées par le carré du déterminant de la substitution.

Pour le prouver, introduisons la forme auxiliaire

$$\begin{aligned} F = f(x_1 x_2 \ldots x_n) &+ 2t_1(X_1^1 x_1 + \ldots + X_n^1 x_n) + \ldots \\ &+ 2t_p(X_1^p x_1 + \ldots + X_n^p x_n), \end{aligned}$$

à $n+p$ variables $x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_p$, où les X_α^i sont regardés comme des coefficients. L'invariant de F sera précisément Φ_p.

Cela posé, effectuons dans F la double substitution définie par les formules

$$x_i = \sum_j \alpha_{ij} x'_j \text{ au déterminant } \delta, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$
$$t_q = t'_q, \quad q = 1, 2, 3, \ldots, p.$$

Le déterminant de l'ensemble de ces substitutions sera δ. Appelons F′ ce que devient F par cette substitution. Son invariant sera, cela est évident, la nouvelle valeur Φ'_p de Φ_p et comme, d'après un théorème connu, cet invariant se reproduit multiplié par le carré du déterminant de la substitution, on aura

$$\Phi'_p = \delta^2 \Phi_p.$$

Donc *les fonctions Φ_p sont des contrevariants qui se reproduisent multipliés par le carré du déterminant de la substitution.*

III.

On peut établir la propriété générale suivante des fonctions Φ_p :

Le nombre des carrés positifs de la forme f est égal à celui des variations de signes que présente la suite $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$, quelles que soient les valeurs des arbitraires X_i^r qui figurent dans les formes Φ_p.

Pour démontrer cette proposition, nous allons mettre en évidence une décomposition en carrés de la forme f. A cet effet, nous désignons par

$$X_1, X_2, \ldots, X_n,$$

sans indice supérieur les demi-dérivées de f par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On sait que f peut se représenter par la formule

$$(13) \qquad \Phi_0 f = - \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & X_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & X_n \\ X_1 & \ldots & X_n & 0 \end{vmatrix},$$

qui n'est autre chose que l'équation bien connue de Gauss, relative à la forme adjointe. Du reste, on vérifie immédiatement cette formule en retranchant de la dernière colonne du déterminant qui figure dans le second membre les n premières multipliées respectivement par $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Cela posé, partons de l'identité

$$(14)\quad \begin{Bmatrix} X^1 & \ldots & X^n X \\ X^1 & \ldots & X^n X \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & X_1^1 & \ldots & X_1^n & X_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & X_n^1 & \ldots & X_n^n & X_n \\ X_1^1 & \ldots & X_n^1 & 0 & & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & & \\ X_1^n & \ldots & X_n^n & 0 & & & 0 \\ X_1 & \ldots & X_n & 0 & & & 0 \end{vmatrix} = 0$$

et appliquons successivement la formule (12). En posant

$$(15)\quad \begin{cases} \Phi_p = \begin{Bmatrix} X^1 & \ldots & X^p \\ X^1 & \ldots & X^p \end{Bmatrix}, \quad R_p = \begin{Bmatrix} X^1 & \ldots & X^{n-p} X \\ X^1 & \ldots & X^{n-p} X \end{Bmatrix}, \\ \qquad\qquad A_p = \begin{Bmatrix} X^1 & \ldots & X^{n-p} X \\ X^1 & \ldots & X^{n-p} X^{n-p+1} \end{Bmatrix}, \end{cases}$$

on déduira de cette formule la suivante :

$$R_p \Phi_{n-p+1} - A_p^2 = R_{p-1} \Phi_{n-p}.$$

En donnant à p diverses valeurs, nous obtenons le tableau suivant :

$$\begin{aligned} R_1 \Phi_n \quad &- A_1^2 = 0, \\ R_2 \Phi_{n-1} \quad &- A_2^2 = R_1 \Phi_{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_p \Phi_{n-p+1} &- A_p^2 = R_{p-1} \Phi_{n-p}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_n \Phi_1 \quad &- A_n^2 = R_{n-1} \Phi_0. \end{aligned}$$

Dans la première de ces égalités, le second membre est nul, en vertu de la formule (14). Ajoutons la formule (13)

$$f \Phi_0 = - R_n,$$

et nous aurons un système d'identités propre à faire connaître R_1, $R_2, \ldots, R_n$, f qui sont des fonctions quadratiques au moyen de A_1,

$A_2, \ldots, A_n$ qui sont des fonctions linéaires des demi-dérivées de la forme f. Nous obtenons ainsi

$$R_1 = \frac{A_1^2}{\Phi_n}, \quad \frac{R_2}{\Phi_{n-2}} = \frac{A_1^2}{\Phi_n \Phi_{n-1}} + \frac{A_2^2}{\Phi_{n-1}\Phi_{n-2}} \cdots,$$

en général

$$(16) \qquad \frac{R_p}{\Phi_{n-p}} = \frac{A_1^2}{\Phi_n \Phi_{n-1}} + \frac{A_2^2}{\Phi_{n-1}\Phi_{n-2}} + \ldots + \frac{A_p^2}{\Phi_{n-p+1}\Phi_{n-p}},$$

et enfin

$$(17) \qquad f = -\frac{A_1^2}{\Phi_n \Phi_{n-1}} - \frac{A_2^2}{\Phi_{n-1}\Phi_{n-2}} - \ldots - \frac{A_{n-1}^2}{\Phi_2 \Phi_1} - \frac{A_n^2}{\Phi_1 \Phi_0}:$$

c'est la décomposition en carrés cherchée. On voit qu'il y a autant de carrés positifs que de variations de signes dans la suite

$$\Phi_0, \ \Phi_1, \ldots, \ \Phi_n,$$

et ainsi se trouve établie la proposition que nous avions en vue.

D'après les équations (15), on a

$$A_p = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & X_1^1 & \ldots & X_1^{n-p} X_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & X_n^1 & \ldots & X_n^{n-p} X_n \\ X_1^1 & \ldots & X_n^1 & 0 & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & \\ X_1^{n-p} & \ldots & X_n^{n-p} & 0 & & 0 \\ X_1^{n-p+1} & \ldots & X_n^{n-p+1} & 0 & & 0 \end{vmatrix}.$$

Si de la dernière colonne on retranche les n premières multipliées respectivement par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on trouve

$$A_p = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & X_1^1 & \ldots & X_1^{n-p} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & X_n^1 & \ldots & X_n^{n-p} & 0 \\ X_1^1 & \ldots & X_n^1 & 0 & \ldots & 0 & U_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & U_2 \\ X_1^{n-p+1} & \ldots & X_n^{n-p+1} & 0 & \ldots & 0 & U_{n-p+1} \end{vmatrix},$$

en posant

$$U_i = X_1^i x_1 + X_2^i x_2 + \ldots + X_n^i x_n.$$

On voit, en développant suivant les éléments de la dernière colonne, que A_p est de la forme

$$(18) \qquad A_p = b_{p1} U_1 + \ldots + b_{p,n-p+1} U_{n-p+1};$$

si donc on effectue sur la forme f la substitution définie par les formules

$$(19) \qquad U_1 = x'_1, \ldots, \quad U_n = x'_n,$$

A_n ne contiendra que x'_1; A_{n-1} que x'_1, x'_2; A_{n-p} que $x'_1, \ldots, x'_p$. On retrouve ainsi, après la substitution (19), la décomposition en carrés particulière dont il a été question au début de ce travail. Cette remarque met en évidence ce fait essentiel que *nous avons ici la décomposition en carrés la plus générale de notre forme*, car il est clair que cette décomposition, la plus générale, peut toujours s'obtenir d'abord en effectuant sur les variables x_i une substitution arbitraire telle que celle qui a été définie par les équations (19), puis en appliquant le procédé de Gauss que nous avons d'abord rappelé.

IV.

Nous allons maintenant étudier plus complétement les fonctions Φ_p et en particulier discuter d'une manière précise les conditions de possibilité de la décomposition en carrés donnée par la formule (17).

Nous avons vu que la fraction Φ_p, qui contient p systèmes de variables

$$X_1^1, \ldots, X_n^1, \ldots, \quad X_1^p, \ldots, X_n^p,$$

peut être considérée comme une forme quadratique des variables de chaque système. La remarque suivante indique une propriété essentielle des fonctions Φ_p considérées sous ce point de vue.

Par suite même de l'équation de définition, il est clair que Φ_p ne changera pas si l'on remplace les variables de l'un des systèmes X_1^p,

X_n^p par exemple, par les suivantes :

$$X_1^p + \lambda_1 X_1^{p-1} + \ldots + \lambda_{p-1} X_1^1,$$
$$X_1^p + \lambda_1 X_1^{p-1} + \ldots + \lambda_{p-1} X_2^2.$$

Cela revient en effet à ajouter à la dernière ligne et à la dernière colonne du déterminant Φ_p d'autres lignes et d'autres colonnes multipliées par $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}$. Il suit de là que Φ_p, considérée comme fonction des seules variables X_α^p, n'est pas une forme quadratique générale et ne dépend au fond que de $n - p + 1$ fonctions linéaires de ces variables. C'est en effet ce que montre la formule (16). R_p n'est autre chose que la fonction Φ_{n-p+1}, dans laquelle on a remplacé la dernière série d'arbitraires par $X_1, X_2, \ldots, X_n$, et l'on voit que R_p, considérée comme fonction de ces seules variables, se réduit bien à une somme de p carrés et ne dépend par conséquent que de p fonctions linéaires de ces variables.

Les fonctions Φ_p nous conduisent aussi à une classification des formes quadratiques. Nous nous appuierons sur la proposition suivante : *La fonction Φ_p ne peut être identiquement nulle que si tous les mineurs d'ordre p du déterminant de la forme sont nuls, et alors toutes les fonctions précédentes $\Phi_{p-1}, \ldots, \Phi_0$ sont aussi identiquement nulles.*

En effet, si une forme quadratique $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ est identiquement nulle, il en est de même de ses dérivées, et par suite de la polaire

$$y_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + y_m \frac{\partial F}{\partial x_m}.$$

Appliquant cette remarque aux différentes séries de variables que contient la forme Φ_p, nous voyons qu'elle sera identiquement nulle en même temps que la suivante :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & X_1^1 & \ldots & X_1^p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & X_n^1 & \ldots & X_n^p \\ Y_1^1 & \ldots & Y_n^1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_1^p & \ldots & Y_n^p & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Or on peut maintenant disposer des variables X, Y en leur donnant les valeurs o, 1, -1, de telle manière que cette forme se réduise à l'un quelconque des mineurs d'ordre p de l'invariant. Il faut donc que tous ces mineurs soient nuls, ce qui démontre la première partie de la proposition.

D'ailleurs, si tous les mineurs d'ordre p sont nuls, il en est de même de tous les mineurs d'ordre $p-q$, et la forme Φ_{p-q}, qui est une fonction linéaire de ces mineurs, sera identiquement nulle.

Ce premier point étant établi, on peut démontrer que, *si pour un certain système de valeurs des variables Φ_p n'est pas nul, on pourra toujours choisir les nouvelles variables qui entrent dans Φ_{p+1}, de telle manière que cette nouvelle forme ne soit pas nulle.*

En effet, d'après l'équation (8), on a

$$\Phi_{p+1} = -\sum \frac{\partial \Phi_p}{\partial a_{ij}} X_i^{p+1} X_j^{p+1}.$$

Si donc Φ_{p+1} est nulle, quelles que soient les nouvelles variables, on aura

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial a_{ij}} = 0.$$

Toutes les dérivées de Φ_p, par rapport aux coefficients a_{ij}, étant nulles, et Φ_p étant une fonction homogène de ces coefficients, Φ_p devrait aussi être nulle, ce qui est contraire aux hypothèses faites. On pourra donc toujours choisir les X_α^{p+1} de telle manière, que Φ_{p+1} ne soit pas nulle. En continuant ces raisonnements, on obtient la proposition suivante :

Quand une des fonctions Φ_p ne sera pas nulle, on pourra toujours disposer des nouvelles arbitraires entrant dans les formes suivantes, de telle manière que $\Phi_{p+1}, \Phi_{p+2}, \ldots, \Phi_n$ ne soient pas nulles.

Ces propositions préliminaires étant admises, considérons une forme f pour laquelle, tous les mineurs du $p-1^{ième}$ ordre de l'invariant étant nuls, ceux de l'ordre p ne le sont pas tous. On pourra, d'après ce qui précède, disposer des arbitraires contenues dans les formes Φ, de telle manière que $\Phi_p, \Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_n$ soient différentes de zéro; mais Φ_0,

Φ_1, Φ_{p-1} seront identiquement nulles. Examinons ce que devient alors notre décomposition en carrés.

La formule (16) nous donnera

$$(20) \qquad \frac{\mathrm{R}_{n-p}}{\Phi_p} = \frac{\mathrm{A}_{n-p}^2}{\Phi_p \Phi_{p+1}} + \frac{\mathrm{A}_{n-p-1}^2}{\Phi_{p+1} \Phi_{p+2}} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_1^2}{\Phi_{n-1} \Phi_n}.$$

On a

$$(21) \qquad \mathrm{R}_{n-p} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & \mathrm{X}_1^1 & \ldots & \mathrm{X}_1^p & \mathrm{X}_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & \mathrm{X}_n^1 & \ldots & \mathrm{X}_n^p & \mathrm{X}_n \\ \mathrm{X}_1^1 & \ldots & \mathrm{X}_n^1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{X}_1^p & \ldots & \mathrm{X}_n^p & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \mathrm{X}_1 & \ldots & \mathrm{X}_n & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{vmatrix},$$

Multiplions les n premières colonnes par $-x_1$, $-x_2$, $-x_n$; ajoutons-les à la dernière, et opérons de même pour les lignes. Nous trouverons

$$(22) \quad \mathrm{R}_{n-p} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & \mathrm{X}_1^1 & \mathrm{X}_1^p & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & \mathrm{X}_n^1 & \mathrm{X}_n^p & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \mathrm{X}'_1 & \ldots & \mathrm{X}'_n & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & -\mathrm{U}_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \mathrm{X}_1^p & \ldots & \mathrm{X}_n^p & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & -\mathrm{U}_p \\ 0 & \ldots & 0 & -\mathrm{U}_1 & -\mathrm{U}_2 & \ldots\ -\mathrm{U}_p & -f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{vmatrix}.$$

U_1, U_2,..., U_p étant des fonctions linéaires qui disparaîtront dans le développement; car leurs coefficients sont des fonctions linéaires des mineurs d'ordre $p-1$; il reste donc

$$(23) \qquad \mathrm{R}_{n-p} = -\Phi_p f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

et, par suite, en substituant dans la formule (20),

$$(24) \qquad f(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{\mathrm{A}_1^2}{\Phi_n \Phi_{n-1}} - \frac{\mathrm{A}_2^2}{\Phi_{n-1}\Phi_{n-2}} - \ldots - \frac{\mathrm{A}_{n-p}^2}{\Phi_{p+1}\Phi_p}.$$

Ainsi la forme se réduit, dans le cas qui nous occupe, à une somme de

$n - p$ carrés, et par conséquent ne dépend, au fond, que de $n - p$ variables, fonctions linéaires des n premières.

Il est facile de montrer qu'elle ne peut dépendre d'un moindre nombre de variables; car, si l'on pouvait l'exprimer en fonction de $n - p - q$ variables $y_1, \ldots, y_{n-p-q}$, alors, en effectuant une substitution et exprimant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en fonction linéaire de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-p-q}$ et de $p + q$ autres variables, tous les coefficients des termes où devraient figurer ces autres variables seraient nuls; il y aurait donc dans le déterminant de la forme $p + q$ lignes dont tous les éléments seraient nuls, et par suite tous les mineurs d'ordre $p + q - 1$ de ce déterminant seraient nuls; la forme Φ_p, qui est une fonction linéaire des mineurs d'ordre p, serait donc identiquement nulle. Or cette forme, étant identiquement nulle après la substitution, devrait l'être avec les variables primitives, ce qui est contraire aux hypothèses adoptées.

Nous obtenons ainsi une classification très-remarquable et très-simple des formes quadratiques d'après la considération de la suite Φ_0, $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$. Il y aura n classes de formes. Pour la classe zéro, composée des formes les plus générales, Φ_0 ne sera pas nulle; pour la $p^{ième}$ classe, les p premières fonctions $\Phi_0, \ldots, \Phi_{p-1}$ seront identiquement nulles sans que Φ_p le soit. Les formes de la $p^{ième}$ classe ne dépendent que de $n - p$ variables. Remarquons, de plus, que, dans ce cas, la suite

$$\Phi_p, \Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_n,$$

réduite à $n + 1 - p$ fonctions, conserve la propriété d'indiquer par le nombre de ses variations celui des carrés positifs de la forme.

V.

Arrêtons-nous un instant à la classification que nous venons de faire, afin de bien marquer les caractères essentiels des différentes classes que nous venons de distinguer.

Si l'on considère le système suivant d'équations du premier degré :

$$(25) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} f'_{x_1} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = 0, \\ \frac{1}{2} f'_{x_2} = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{1}{2} f'_{x_n} = a_{n1} x_1 \qquad\qquad + \ldots + a_{nn} x_n = 0, \end{array} \right.$$

à chaque classe de formes correspondront des propriétés particulières des solutions. Pour les formes générales, le déterminant Φ_0 n'étant pas nul, les équations précédentes ne donneront que la solution inadmissible en coordonnées homogènes $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$; mais, pour la $p^{ième}$ classe, les équations précédentes se réduiront à $n - p$ distinctes. Cela résulte de la théorie bien connue des équations du premier degré. Par exemple, si le mineur

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,n-p} \\ a_{21} & \ldots & \ldots & a_{2\,n-p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n-p,1} & \ldots & \ldots & a_{n-p,n-p} \end{vmatrix}$$

d'ordre p n'est pas nul, on pourra des $n - p$ premières équations tirer $x_1, x_2, \ldots, x_{n-p}$ en fonction de $x_{n-p+1}, \ldots, x_n$, et, en portant ces valeurs dans les dernières équations, les premiers membres de ces équations deviendront des fonctions linéaires des mineurs d'ordre $p - 1$, tous nuls par hypothèse, et par conséquent ces équations seront identiquement satisfaites. Il suit de là qu'il y aura p systèmes de solutions des équations précédentes

$$(26) \qquad \begin{cases} x_1 = u_1^1, \ldots, x_n = u_n^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_1 = u_1^p, \ldots, x_n = u_n^p, \end{cases}$$

linéairement indépendants, au moyen desquels le système le plus général de solutions se composera de la manière suivante :

$$(27) \qquad \begin{cases} x_1 = \lambda^1 u_1^1 + \lambda^2 u_1^2 + \ldots + \lambda^p u_1^p = v_1, \\ x_2 = \lambda^1 u_2^1 + \lambda^2 u_2^2 + \ldots + \lambda^p u_2^p = v_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \lambda^1 u_n^1 \qquad\quad + \ldots + \lambda^p u_n^p = v_n, \end{cases}$$

$\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^p$ étant des arbitraires quelconques. D'ailleurs, tous les systèmes $v_1, \ldots, v_n$, donnés par les formules précédentes et satisfaisant aux équations (25), possèdent de nombreuses propriétés.

1° On a identiquement

$$f'_{v_1}, \quad f'_{v_2} = 0, \ldots, f'_{v_n} = 0,$$

et, par suite,

$$v_1 f'_{x_1} + \ldots + v_n f'_{x_n} = x_1 f'_{v_1} + \ldots + x_n f'_{v_n} = 0.$$

L'identité précédente constitue une relation linéaire identique entre les n dérivées $f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n}$. Il y a donc autant de relations de ce genre qu'il y a de systèmes $v_1, \ldots, v_n$ linéairement indépendants, ce qui donne les p équations suivantes :

$$(28) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_1^1 f'_{x_1} + \ldots + u_n^1 f'_{x_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_1^p f'_{x_1} + \ldots + u_n^p f'_{x_n} = 0. \end{array} \right.$$

Réciproquement, toute relation identique entre les dérivées

$$\alpha'_1 f'_{x_1} + \ldots + \alpha'_n f'_{x_n} = 0$$

entraîne les équations

$$f'_{\alpha'_1}(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) = 0, \quad f_{\alpha'_2} = 0, \quad f'_{\alpha'_n} = 0,$$

ce qui montre que $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ forment un système de solutions des équations (25). Il n'y a donc pas d'autres relations entre les dérivées que les équations (28) et leurs combinaisons linéaires.

Ainsi, il y a p relations linéaires distinctes entre les dérivées d'une forme de la $p^{\text{ième}}$ classe.

2° On a identiquement

$$\begin{aligned} & f(x_1 + v_1 \ldots x_n + v_n) \\ & \quad = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + x_1 f'_{v_1} + \ldots + x_n f'_{v_n} + f(v_1, v_2, \ldots, v_n), \end{aligned}$$

et comme

$$f'_{v_1} = 0, \ldots, \quad f'_{v_n} = 0, \quad 2f(v_1, \ldots, v_n) = v_1 f'_{v_1} + \ldots + v_n f'_{v_n} = 0,$$

il suit que l'on aura

$$(29) \qquad f(x_1 + v_1 \ldots x_n + v_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Cette équation est importante, car on peut toujours disposer des arbitraires $\lambda^1,\ldots, \lambda^p$ contenues dans $v,\ldots, v_n$, de manière à annuler p des variables $x_1 + v_1,\ldots, x_n + v_n$.

En effet, tous les déterminants qu'on peut former en prenant p colonnes dans le système suivant :

$$\begin{vmatrix} u_1^1 & \ldots & u_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^p & \ldots & u_n^p \end{vmatrix},$$

ne sont pas nuls, sans quoi les p systèmes de solutions u_α^i ne seraient pas linéairement indépendants. Supposons, par exemple, que celui qu'on obtient en prenant les p premières colonnes ne soit pas nul. Alors on pourra déterminer $\lambda^1,\ldots, \lambda^p$ par les équations

$$x_1 + v_1 = 0,\ldots,\quad x_p + v_p = 0;$$

$\lambda^1,\ldots, \lambda^p$ deviendront des fonctions linéaires de $x_1,\ldots, x_p$, et l'on aura, en vertu de l'équation (29),

$$f(x_1, x_2,\ldots, x_n) = f(0, 0,\ldots, 0, x_{p+1} + v'_{p+1} + \ldots + x_n + v'_n),$$

où $v'_{p+1},\ldots, v'_n$ sont des fonctions linéaires de $x_1,\ldots, x_p$. La forme ne dépendra plus que de $n - p$ variables; et comme il n'y a aucune relation entre les dérivées $f'_{x_{p+1}},\ldots, f'_{x_n}$, il sera facile de reconnaître qu'on ne pourrait faire dépendre la forme d'un nombre moindre de variables.

En résumé, chacune des propriétés suivantes caractérise les formes de la $p^{ième}$ classe :

1° Tous les mineurs d'ordre $p - 1$ de l'invariant sont nuls, mais non tous ceux d'ordre p.

2° Il y a p relations distinctes entre les dérivées de la forme.

3° La forme Φ_{p-1} est identiquement nulle, mais non la forme Φ_p.

4° La forme ne dépend que de $n - p$ fonctions linéaires des variables.

5° Il y a p systèmes de solutions linéairement indépendants des équations qu'on obtient en égalant à zéro les dérivées de la forme.

On peut établir d'autres propriétés en s'appuyant sur la transformation suivante, dont sont susceptibles les formes Φ_p.

Multiplions la fonction

$$\Phi_p = \begin{vmatrix} X^1 & \ldots & X^p \\ X^1 & \ldots & X^p \end{vmatrix},$$

deux fois successivement par le déterminant H,

$$H = \begin{vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_1^n & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ x_n^1 & \ldots & x_n^n & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

du même nombre de lignes et où les quantités x_α^i sont quelconques. En posant

$$2\alpha_{ij} = x_1^i f'_{x_1^j} + x_2^i f'_{x_2^j} + \ldots + x_n^i f'_{x_n^j},$$

$$U_j^i = X_1^i x_1^j + \ldots + X_n^i x_n^j,$$

nous trouvons

$$\Phi_p H^2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} & U_1^1 & \ldots & U_1^p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} & U_n^1 & \ldots & U_n^p \\ U_1^1 & \ldots & U_n^1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ U_1^p & \ldots & U_n^p & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Supposons que les p systèmes de variables x_1^1, x_n^1, $x_1^2, \ldots$, x_n^2, x_1^p, x_n^p soient ceux qui annulent les dérivées, alors on aura

$$\alpha_{ij} = 0,$$

toutes les fois que l'un des indices i, j sera égal ou inférieur à p, et il restera

$$(30)\quad \Phi_p H^2 = (-1)^p \begin{vmatrix} U_1^1 & \ldots & U_1^p \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ U_p^1 & \ldots & U_p^p \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} \alpha_{p+1,\,p+1} & \ldots & \alpha_{p+1,\,n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{n,\,p+1} & \ldots & \alpha_{n,\,n} \end{vmatrix}.$$

Ainsi, dans le cas des formes quadratiques de la $p^{ième}$ classe, la première fonction qui ne s'annule pas, Φ_p, devient le carré parfait d'un déterminant du $p^{ième}$ ordre.

Les éléments U_1^1, U_p^1 de ce déterminant étant égalés à zéro, les équations

$$U_1^1 = 0, \ldots, \quad U_p^1 = 0,$$

deviennent, quand on y remplace X_α^1 par f'_{x_α}, les p relations distinctes qui existent entre les dérivées.

Ajoutons, en terminant cet article, une curieuse remarque. La formule (13) de Gauss, relative à la forme adjointe, est susceptible de généralisation, et a son analogue pour chaque classe de formes quadratiques dans l'équation (23).

Mais on peut étendre cette équation à un autre point de vue, en considérant un cas qui se présente très-fréquemment, celui d'une forme quadratique de n variables, $x_1, \ldots, x_n$, entre lesquelles on établit p relations :

$$(31)\quad \left\{ \begin{array}{l} X_1^1 x_1 + \ldots + X_n^1 x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_1^p x_1 + \ldots + X_n^p x_n = 0. \end{array} \right.$$

On pourrait alors, en exprimant, au moyen de ces équations, p variables en fonction des autres, ramener la forme à ne dépendre que des $n-p$ autres; mais la symétrie serait détruite, et il vaudra mieux opérer comme il suit :

Dans la formule (22) la quantité désignée par U_i est

$$U_i = X_1^i x_1 + \ldots + X_n^i x_n.$$

Par conséquent, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, en prenant pour les X_α^i les coefficients qui figurent dans les équations (31), U_1, U_p

sont identiquement nuls, et l'on a encore

$$R_{n-p} = -f\Phi_p.$$

La formule (24) s'appliquera donc et donnera la décomposition de la forme en une somme de $n - p$ carrés. On aura ainsi évité l'élimination de p variables, ce qui, en Géométrie analytique particulièrement, peut offrir de grands avantages.

VI.

Les remarques précédentes vont nous permettre d'établir, en toute rigueur, un théorème relatif aux formes quadratiques, qui a reçu les applications les plus importantes, mais dont la démonstration n'a pas été, je crois, présentée jusqu'ici d'une manière complète.

Soit $f(x_1, \ldots, x_n)$ une forme quadratique dont les coefficients sont des fonctions réelles et continues de λ. Si, pour deux valeurs λ_0, λ_1 de λ, la forme n'a pas le même nombre de carrés positifs, si la différence entre le nombre des carrés positifs de la forme dans les deux cas est égale à k, je dis que l'équation en λ, qu'on obtient en égalant l'invariant de la forme à zéro, admet au moins k racines réelles égales ou inégales, comprises entre λ_0 et λ_1.

Pour démontrer cette proposition, formons la suite

$$\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$$

des fonctions Φ. Quelles que soient les valeurs des arbitraires contenues dans ces fonctions, pourvu qu'aucune des fonctions ne soit nulle, le nombre des variations de la suite indique le nombre des carrés de la forme. Pour les besoins de la démonstration, nous pourrons donc supposer qu'on change ces arbitraires toutes les fois que cela sera nécessaire, car le nombre des variations de la suite ne dépend aucunement de leurs valeurs particulières.

Supposons que λ varie de λ_0 à λ_1. Le nombre des variations de la suite ne pourra changer que si λ passe par des valeurs annulant soit des fonctions intermédiaires, soit la fonction Φ_0. Si, pour une valeur λ' de λ, une ou plusieurs fonctions intermédiaires s'annulent, je dis que le nombre des variations ne pourra changer. En effet, au lieu de considérer la suite précédente pour les valeurs de λ, voisines de λ', changeons les arbitraires X_α^i de telle manière qu'aucune des fonctions ne s'annule plus pour $\lambda = \lambda'$, ce qui est toujours possible, puisque la première ne s'annule pas (art. IV). Alors on aura substitué à la suite précédente une nouvelle suite dont le nombre des variations indique aussi le nombre des carrés positifs de la forme, et dans cette nouvelle suite aucune fonction ne s'annulant pour $\lambda = \lambda'$, le nombre des variations ne changera pas quand λ passera de $\lambda' - \varepsilon$ à $\lambda' + \varepsilon$, ε étant suffisamment petit. Donc le nombre des carrés positifs de la forme et par conséquent le nombre de variations de la suite primitive ne peut changer, quand une ou plusieurs fonctions intermédiaires s'annulent pour une valeur de λ.

Supposons maintenant que, pour $\lambda = \lambda''$, Φ_0 s'annule, et que les fonctions $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{p-1}$ s'annulent en même temps, c'est-à-dire supposons que tous les mineurs d'ordre $p-1$ de Φ_0 soient nuls, sans que tous ceux d'ordre p le soient, pour $\lambda = \lambda''$. Dans ces conditions, on pourra (art. IV) changer les arbitraires de telle manière, que $\Phi_p, \Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_n$ ne s'annulent pas pour $\lambda = \lambda''$, et, par conséquent, aussi pour toutes les valeurs de λ comprises entre $\lambda'' - \varepsilon$ et $\lambda'' + \varepsilon$, ε étant suffisamment petit. Alors, quand λ aura passé de $\lambda'' - \varepsilon$ à $\lambda'' + \varepsilon$, les seules fonctions

$$\Phi_0, \ldots, \quad \Phi_{p-1}$$

se seront annulées, et, par conséquent, la nouvelle suite aura gagné ou perdu *au plus p* variations. Il en sera de même de la suite proposée, qui admet le même nombre de variations que la précédente pour les deux valeurs $\lambda'' + \varepsilon$, $\lambda'' - \varepsilon$.

Or il est facile de reconnaître que λ'' est une racine de l'équation $\Phi_0 = 0$ d'ordre au moins égal à p, car la dérivée $q^{ième}$ de Φ_0 par rapport à λ est évidemment une fonction linéaire des mineurs de Φ_0 d'ordres égaux ou inférieurs à q, et, par conséquent, elle s'annulera pour $\lambda = \lambda''$, tant que q sera inférieur à p, puisque tous les mineurs de Φ_0 sont nuls jusqu'à ceux de l'ordre $p-1$ inclusivement. Ainsi λ'' est une racine de d'ordre de multiplicité au moins à p. Le nombre des variations perdues ou gagnées par la suite des fonctions Φ est donc au plus égal à l'ordre de multiplicité de cette racine. Ainsi

Le nombre des carrés positifs de la forme ne peut changer que si λ passe par une racine de l'équation obtenue en égalant l'invariant à zéro, et dans ce cas le nombre des carrés positifs de la forme ne peut varier d'une quantité supérieure à l'ordre de multiplicité de la racine considérée.

C'est le théorème qu'il s'agissait d'établir; mais il donne lieu à une remarque essentielle : c'est que, dans son énoncé, on pourrait entendre par ordre de multiplicité d'une racine, non plus le nombre des dérivées, mais le nombre des fonctions $\Phi_0, \ldots, \Phi_n$ qu'annule cette racine, quels que soient les arbitraires figurant dans ces fonctions. Ainsi une racine multiple pourra être considérée comme simple si elle n'annule pas tous les mineurs du premier ordre; comme double si, annulant tous les mineurs du premier ordre, elle n'annule pas tous ceux du second et ainsi de suite.

Faisons quelques applications de ce théorème. Soit d'abord la forme quadratique

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2).$$

L'équation qu'on obtient en égalant l'invariant à zéro a été traitée d'abord par Cauchy, puis par une foule de géomètres : MM. Borchardt, Sylvester, etc. On déduit la réalité de ses racines du théorème que nous venons d'établir.

En effet, il est évident et il est d'ailleurs facile de reconnaître par les signes de la suite des fonctions Φ que, pour λ suffisamment grand, la forme précédente a le même nombre de carrés positifs que la suivante :

$$-\lambda(x_1^2 + \ldots + x_n^2).$$

Donc pour λ très-grand négatif il y aura n carrés positifs; pour λ infini positif il n'y aura plus de carré positif. Le nombre des carrés positifs varie donc de n à zéro quand λ varie de $-\infty$ à $+\infty$. L'équation en λ aura donc au moins n racines réelles, et comme elle est du degré n on voit qu'elle n'a pas de racine imaginaire. De plus, si elle a des racines multiples, une racine d'ordre p devra annuler tous les mineurs d'ordre $p - 1$ de l'invariant. La méthode de M. Sylvester seule permet de démontrer ce dernier point et d'écarter la difficulté relative aux racines multiples, qui se présente dans les méthodes de Cauchy et de M. Borchardt.

Considérons encore la forme

$$f(x_1,\ldots,x_n) - \lambda\varphi(x_1,\ldots,x_n) - \lambda^2\psi(x_1,\ldots,x_n),$$

où nous supposons que les deux formes f et ψ soient définies positives, c'est-à-dire soient des sommes de n carrés positifs. En substituant $-\infty$, 0, $+\infty$, on trouve 0, n, 0 carrés positifs. L'équation de degré $2n$ qu'on obtient en égalant l'invariant à zéro aura donc $2n$ racines réelles, n positives et n négatives.

Soient

$$\varphi(x,y) = 0, \qquad \psi(x,y) = 0$$

deux équations algébriques en x, y que, pour plus de simplicité, nous supposerons du même degré en y et que nous écrirons

$$\varphi(y) = 0, \qquad f(y) = 0.$$

Des recherches de MM. Hermite et Cayley résulte la règle suivante pour former l'équation finale en x, résultat de l'élimination de y.

Formons le quotient

$$\frac{\varphi(y)\,f(y_1) - \varphi(y_1)\,f(y)}{y - y_1},$$

et après la division introduisons les puissances 0, y^0, y_1^0 dans les termes qui ne contiennent pas y ou y_1. Puis remplaçons $y^0, y^1,\ldots, y^{n-1}$; $y_1^0, y_1^1,\ldots, y_1^{n-1}$ par la même série de variables $z_0, z_1,\ldots, z_{n-1}$. On obtiendra ainsi, à la place d'une fonction des deux indéterminées y, y_1, une forme quadratique des n variables $z_0, z_1,\ldots, z_{n-1}$. Le déterminant de cette forme sera la résultante cherchée.

Or la forme quadratique ayant ses coefficients fonctions de x, si, en substituant deux nombres x_0, x_1 à la place de x on trouve une différence k entre le nombre des carrés positifs de la forme pour $x = x_0$ et pour $x = x_1$, on conclura que l'invariant de la forme, c'est-à-dire l'équation finale en x, a au moins k racines réelles comprises entre x_0 et x_1. Si en particulier on substitue $-\infty$, $+\infty$ à la place de x, on pourra ainsi obtenir une limite inférieure du nombre dés valeurs réelles de x.

Pour examiner quel est le nombre des carrés positifs de la forme lorsque x est très-grand, on pourra se borner en général à conserver les termes qui contiennent la plus haute puissance de x. C'est la règle que nous avons déjà suivie plus haut et qu'il est bien facile de justifier.

Soit en effet

$$f = x^m A + x^{m-p} B + \ldots$$

la forme quadratique ordonnée suivant les puissances de x; A, B sont des formes quadratiques, et nous supposerons, ce qui est suffisant pour le but que nous voulons atteindre, que A ait son déterminant de zéro et appartienne par conséquent à la classe des formes quadratiques fonctions de n variables distinctes. Posons $x = \frac{1}{x'}$, on aura

$$f = x^m (A + Bx'^p + \ldots).$$

La forme $A + Ax'^p + \ldots$ aura, pour x' suffisamment petit, le même nombre de carrés positifs que A, et par conséquent f aura pour x suffisamment grand le même nombre de carrés positifs que Ax^m, ce qu'il fallait démontrer.

Nous avons eu l'idée d'appliquer la méthode précédente à la démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations et de prouver par une méthode qui nous paraît tout à fait nouvelle que l'équation algébrique

$$f(x) = 0,$$

à coefficients réels ou imaginaires, admet une racine de la forme $a + b\sqrt{-1}$.

Et d'abord il est clair qu'il suffira de démontrer la proposition pour une équation à coefficients réels; car à toute équation de la forme

$$A + B\sqrt{-1} = 0$$

on peut substituer la suivante :

$$A^2 + B^2 = 0.$$

On peut d'ailleurs écarter les équations de degré impair. Il suffit donc de traiter le cas d'une équation à coefficients réels et de degré pair m.

A cet effet, remplaçons dans l'équation proposée x par $x(1+\sqrt{h})$ et $x(1-\sqrt{h})$. Il suffira de démontrer que les deux équations

$$f[x(1+\sqrt{h})] = 0, \quad f[x(1-\sqrt{h})] = 0$$

sont vérifiées par des valeurs réelles de x et de h, c'est-à-dire que l'équation finale en x que l'on obtient en éliminant h entre ces équations a des racines réelles. Nous ferons remarquer que x est la demi-somme de deux racines.

Donnons aux équations qui précèdent la forme suivante :

$$\varpi(h) = f(x + x\sqrt{h}) + f(x - x\sqrt{h}) = 0,$$
$$\psi(h) = \frac{\sqrt{h}}{x}[f(x + x\sqrt{h}) - f(x - x\sqrt{h})] = 0.$$

Il est facile de reconnaître que $\varpi(h)$, $\psi(h)$ sont des fonctions rationnelles de h d'ordre $\frac{m}{2}$ et que le résultat de l'élimination de h entre ces deux équations donnera l'équation aux demi-sommes des racines non débarrassée des racines de la proposée. Il suffira de démontrer que cette équation a des racines réelles. Formons suivant la règle indiquée le quotient

$$\text{(M)} \qquad \frac{\varpi(h)\,\psi(h_1) - \psi(h)\,\varpi(h_1)}{h - h_1},$$

et après la division remplaçons les puissances de h, h_1 par de nouvelles variables, comme il a été indiqué. Les coefficients de la forme quadratique ainsi obtenus sont des fonctions de x du degré $2m-1$. Comme nous voulons reconnaître la variation du nombre de carrés positifs de cette forme, quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$, variation qui donne une limite inférieure du nombre des racines réelles, il suffira, d'après ce que nous avons vu, de chercher la forme quadratique qui forme le coefficient de x^{2m-1} dans le quotient précédent. Dans $\varpi(h)$, les termes de degré le plus élevé en x sont

$$x^m[(1+\sqrt{h})^m + (1-\sqrt{h})^m].$$

Dans $\psi(h)$, ils sont

$$x^{m-1}\sqrt{h}\left[(1+\sqrt{h})^m - (1-\sqrt{h})^m\right];$$

c'est donc du quotient

$$(\mathrm{M}')\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{h-h_1}x^{2m-1}\left[(1+\sqrt{h})^m+(1-\sqrt{h})^m\right]\sqrt{h_1}\left[(1+\sqrt{h_1})^m-(1-\sqrt{h_1})^m\right]\\ -\dfrac{1}{h-h_1}x^{2m-1}\left[(1+\sqrt{h_1})^m+(1-\sqrt{h_1})^m\right]\sqrt{h}\left[(1+\sqrt{h})^m-(1-\sqrt{h})^m\right]\end{array}\right.$$

que proviendra le coefficient de x^{2m-1} dans l'expression (M). Remplaçant ensuite h^0, h^1, h^2, $h^{\frac{m}{2}-1}$ par z_0, z_1, $z_{\frac{m}{2}-1}$, on aura la forme quadratique A, qu'on peut substituer à la proposée pour les valeurs très-grandes de x. Cette forme quadratique a d'ailleurs son déterminant différent de zéro; car les deux équations en h

$$(1+\sqrt{h})^m + (1-\sqrt{h})^m = 0,$$
$$\sqrt{h}(1+\sqrt{h})^m - \sqrt{h}(1-\sqrt{h})^m = 0,$$

au moyen desquelles elle est formée, n'ont aucune racine commune, et par conséquent le déterminant de la forme quadratique qu'on forme avec elles d'après la méthode exposée plus haut est différent de zéro.

Effectuons maintenant la division indiquée dans l'expression (M'); nous aurons, en groupant deux à deux les quatre termes du numérateur,

$$-2x^{2m-1}\sum_p(1+\sqrt{h})^{m-p}(1+\sqrt{h_1})^{m-p}(1-\sqrt{h})^{p-1}(1-\sqrt{h_1})^{p-1},$$
$$-2x^{2m-1}\sum_p(1-\sqrt{h})^{m-p}(1+\sqrt{h_1})^{m-p}(1+\sqrt{h})^{p-1}(1-\sqrt{h_1})^{p-1},$$

et, en ajoutant et réunissant les termes,

$$\begin{array}{l}-2x^{2m-1}\Sigma\left[(1+\sqrt{h})^{m-p}(1-\sqrt{h})^{p-1}+(1-\sqrt{h})^{m-p}(1+\sqrt{h})^{p-1}\right]\\ \qquad\times\left[(1+\sqrt{h_1})^{m-p}(1-\sqrt{h_1})^{p-1}+(1-\sqrt{h_1})^{m-p}(1+\sqrt{h_1})^{p-1}\right],\end{array}$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs de p depuis 1 jusqu'à $\frac{m}{2}$. Les expressions entre crochets sont des fonctions rationnelles semblables de h, h_1 d'ordre $\frac{m}{2}-1$ en h, h_1. Quand on remplacera les puissances par des indéterminées $z_0,\ldots, z_{\frac{m}{2}-1}$, elles deviendront des linéaires de ces indéterminées, et l'on aura la forme quadratique

$$-2x^{2m-1}\left[X_1^2+X_2^2+\ldots+X_{\frac{m}{2}}^2\right].$$

Quand x variera de $-\infty$ à $+\infty$, on voit que le nombre des carrés positifs aura varié de $\frac{m}{2}$; donc l'équation aux demi-sommes des racines aura au moins $\frac{m}{2}$ racines réelles, ce qui démontre la proposition que nous avions en vue.

VIII.

Les fonctions Φ_p prennent des formes remarquables quand, à la place des arbitraires X_α^i, on met en évidence d'autres variables, en remplaçant une ou plusieurs séries de ces arbitraires par les expressions suivantes:

$$X_\alpha^i=\frac{1}{2}\frac{d}{dx_\alpha^i}f(x_1^\alpha\ldots x_n^\alpha)\,i=1,2,\ldots,n.$$

Pour ne pas donner trop d'étendue à ce travail, nous examinerons seulement le cas où la substitution précédente est étendue à tous les systèmes de variables X_i^α.

Soit alors

$$(32)\qquad \left\{\begin{matrix} X^1 & \ldots & X^p \\ Y^1 & \ldots & Y^p\end{matrix}\right\}=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & X_1^1 & \ldots & X_1^p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & X_n^1 & \ldots & X_n^p \\ Y_1^1 & \ldots & Y_n^1 & 0 & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & \\ Y_1^p & \ldots & Y_n^p & 0 & & 0\end{vmatrix}$$

et posons

$$(33)\qquad X_i^\alpha = \frac{1}{2}\frac{df}{dx_i^\alpha} f(x_1^\alpha \dots x_n^\alpha),\quad Y_i^\alpha = \frac{1}{2}\frac{d}{dy_i^\alpha} f(y_1^\alpha \dots y_n^\alpha).$$

En retranchant des éléments de la $n+q^{ième}$ colonne ceux des n premières multipliés par $x_1^q, \dots, x_n^q$, et opérant de même pour les lignes, on trouvera sans difficulté

$$\begin{Bmatrix} X^1 & \dots & X^p \\ Y^1 & \dots & Y^p \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -(x^1 y^1) & \dots & -(x^p y^1) \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ -(x^1 y^p) & \dots & -(x^p y^p) \end{vmatrix},$$

où l'on désigne par $(x^\alpha y^\beta)$ l'expression

$$(34)\qquad (x^\alpha y^\beta) = \frac{1}{2} x_1^\alpha \frac{df}{dy_1^\beta} + \frac{1}{2} x_2^\alpha \frac{df}{dy_2^\beta} + \dots + \frac{1}{2} x_n^\alpha \frac{df}{dy_n^\beta}.$$

On a évidemment

$$(35)\qquad (x^\alpha x^\alpha) = f(x_1^\alpha \dots x_n^\alpha).$$

D'après cela, si l'on adopte la notation nouvelle

$$(36)\qquad \begin{bmatrix} x^1 & \dots & x^p \\ y^1 & \dots & y^p \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} (x^1 y^1) & \dots & (x^p y^1) \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots \\ (x^1 y^p) & \dots & (x^p y^p) \end{vmatrix},$$

on aura

$$(37)\qquad \begin{Bmatrix} X^1 & \dots & X^p \\ Y^1 & \dots & Y^p \end{Bmatrix} = (-1)^p \Phi_0 \begin{bmatrix} x^1 & \dots & x^p \\ y^1 & \dots & y^p \end{bmatrix}.$$

Alors aux fonctions Φ_p définies plus haut correspondent des fonctions Ψ_p définies par la formule

$$(38)\qquad \Psi_p = \begin{bmatrix} x^1 & \dots & x^p \\ x^1 & \dots & x^p \end{bmatrix},$$

et l'on a

$$\Phi_p = (-1)^p \Phi_0 \Psi_p; \tag{39}$$

d'où il suit que le nombre des variations de la suite $\Phi_0, \ldots, \Phi_n$ est égal à celui des permanences de la suite

$$1, \quad \Psi_1, \ldots, \quad \Psi_n. \tag{40}$$

On peut aussi exprimer uniquement, au moyen des fonctions Ψ_p, la décomposition la plus générale d'une forme quadratique. Posons, en effet,

$$\left\{ \begin{array}{ll} A_1 = \begin{bmatrix} x \\ x^1 \end{bmatrix}, \ldots, & A_p = \begin{bmatrix} x & x^1 & \ldots & x^{p-1} \\ x^1 & x^2 & \ldots & x^p \end{bmatrix}, \\ \Psi_p = \begin{bmatrix} x^1 & \ldots & x^p \\ x_1 & \ldots & x^p \end{bmatrix}, & R_p = \begin{bmatrix} x^1 & \ldots & x^p & x \\ x^1 & \ldots & x^p & x \end{bmatrix}, \end{array} \right. \tag{41}$$

en considérant les x_i^α comme des arbitraires et le système $x(x_1, \ldots, x_n)$ comme contenant seul les variables. Alors A_p sera une fonction linéaire des variables, et l'on établira sans difficulté les équations suivantes :

$$\frac{R_p}{\Psi_p} = \frac{A_{p+1}^2}{\Psi_p \Psi_{p+1}} + \ldots + \frac{A_n^2}{\Psi_{n+2} \Psi_n} \tag{42}$$

et

$$f = \frac{A_1^2}{\Psi_1} + \frac{A_2^2}{\Psi_1 \Psi_2} + \ldots + \frac{A_n^2}{\Psi_{n-1} \Psi_n}. \tag{43}$$

Cette décomposition en carrés n'est qu'une transformation de celle qui a été donnée à l'article III. La relation entre les fonctions Φ et Ψ est d'une grande importance en Géométrie analytique; mais nous nous contenterons des indications qui précèdent, et nous passerons à l'examen d'une autre question, laissant même de côté pour le moment l'examen des décompositions qui correspondent à un système de fonctions Φ ou Ψ, lorsque quelques-unes de ces fonctions sont nulles pour certaines valeurs des arbitraires qu'elles renferment.

VIII.

Après avoir étudié une seule forme quadratique, examinons les questions relatives à deux formes considérées simultanément (*). On sait qu'en général deux formes quadratiques peuvent être transformées en deux sommes composées des mêmes carrés. Nous allons reprendre dans tous ses détails l'étude de cette importante question, et nous examinerons aussi les cas où cette décomposition cesse d'être possible.

Soient

$$f = \Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j, \quad \varphi = \Sigma\Sigma b_{ij} x_i x_j$$

les deux formes proposées. Posons

$$\mathrm{F} = f + \lambda\varphi, \quad \mathrm{X}_i = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{F}}{dx_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},$$

(*) On pourra consulter pour l'étude de cette question les travaux suivants :

SYLVESTER. — *Enumeration of the contacts of lines and surfaces of the second order; on the relation between the minor determinants of linearly équivalent quadratic functions.* (*Phil. Magaz.*, p. 116, 295, 415; 1851.)

WEIERSTRASS. — *Ueber ein Theorem die homogenen Functionen d. 2ten grades betreffend, nebst Anwend, auf d. Theorie d. kleinen Schwingungen.* (*Comptes rendus de l'Académie de Berlin*, p. 207; 1858.)

WEIERSTRASS. — *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen.* (Même Recueil, p. 310; 1868.)

KRONECKER. — *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen.* (Même volume, p. 239.)

KRONECKER. — *Ueber Schaaren von quadratischen Formen.* (Même Recueil, janvier et mars, 1874.)

PAINVIN (L.). — *Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre.* (*Nouvelles Annales*, 1868.)

CAMILLE JORDAN. — *Mémoire sur les formes bilinéaires.* (*Comptes rendus*, et p. 35 de ce volume.)

Les recherches que nous publions actuellement ont été présentées à la Société mathématique dans la séance du 11 mars 1874; elles avaient été, quelque temps auparavant, le 28 février, communiquées avec de grands détails à la Société Philomathique.

on aura identiquement, en vertu d'une formule déjà démontrée (p. 352),

$$(44)\quad f+\lambda\varphi = \mathrm{F} = -\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & \dots & a_{1n}+\lambda b_{1n} & \mathrm{X}_1 \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ a_{n1}+\lambda b_{n1} & \dots & a_{nn}+\lambda b_{nn} & \mathrm{X}_n \\ \mathrm{X}_1 & \dots & \mathrm{X}_n & 0 \end{vmatrix},$$

$\Delta(\lambda)$ désignant le déterminant de la forme F,

$$(45)\qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & \dots & a_{1n}+\lambda b_{1n} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1}+\lambda b_{n1} & \dots & a_{nn}+\lambda b_{nn} \end{vmatrix}$$

du degré n en λ dans le cas général. Dans l'équation (44), considérons $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ comme des arbitraires particulières; le second membre sera ainsi une fraction rationnelle de λ que nous pourrons décomposer en fractions simples. Soit λ_i une quelconque des racines supposées inégales de l'équation $\Delta(\lambda) = 0$; nous aurons

$$(46)\quad f+\lambda\varphi = -\sum \frac{1}{\Delta'(\lambda_i)(\lambda-\lambda_i)}\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda_i b_{11} & \dots & a_{1n}+\lambda_i b_{1n} & \mathrm{X}_1 \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ a_{n1}+\lambda_i b_{n1} & \dots & a_{nn}+\lambda_i b_{nn} & \mathrm{X}_n \\ \mathrm{X}_1 & \dots & \mathrm{X}_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Les déterminants qui figurent dans le second membre sont tous des carrés parfaits; car ils sont égaux à la fonction adjointe dans laquelle on a remplacé par λ une racine λ_i de l'invariant, et l'on sait que, lorsque le déterminant d'une forme quadratique est nul, la fonction adjointe devient un carré parfait. On a donc

$$(47)\qquad f+\lambda\varphi = \sum \frac{\mathrm{U}_i^2}{(\lambda-\lambda_i)\Delta'(\lambda_i)},$$

où les U_i sont de la forme

$$(47)'\qquad \mathrm{U}_i = \mathrm{A}_{i1}\mathrm{X}_1 + \dots + \mathrm{A}_{in}\mathrm{X}_i,$$

$\mathrm{A}_{i1}, \dots, \mathrm{A}_{in}$ étant des fonctions de λ_i.

Or, si dans l'équation (46), qui est une identité, on remplace maintenant les X_i par leurs expressions $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)$, on obtient une expression nouvelle des déterminants qui figurent dans le second membre. Si l'on multiplie les n premières lignes par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qu'on les retranche de la dernière, et qu'on opère de même sur les colonnes, les déterminants conservent leur forme; mais X_i est remplacé par $(\lambda-\lambda_i)\frac{\partial\varphi}{2\partial x_i}$. Effectuons cette substitution dans la formule (47)', on aura

$$U_i=(\lambda-\lambda_i)\left(A_{i1}\frac{\partial\varphi}{2\partial x_1}+\ldots+A_{in}\frac{\partial\varphi}{2\partial x_n}\right)=(\lambda-\lambda_i)V_i,$$

V_i ne contenant plus λ, et, par suite,

$$f+\lambda\varphi=\sum\frac{V_i^2(\lambda_i-\lambda)}{\Delta'(\lambda_i)},$$

ce qui donne, en égalant les coefficients de λ et les termes constants,

$$f=\sum\frac{V_i^2\lambda_i}{\Delta'(\lambda_i)},\quad \varphi=+\sum\frac{V_i^2}{\Delta'(\lambda_i)}. \tag{48}$$

C'est la réduction des deux formes à des sommes composées des mêmes carrés.

Remarquons qu'en vertu de l'identité

$$\begin{Bmatrix} X \\ X \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} X \\ \alpha \end{Bmatrix}^2=\begin{Bmatrix} X & \alpha \\ X & \alpha \end{Bmatrix}\Delta$$

on a

$$U_i^2=\begin{Bmatrix} X \\ \alpha \end{Bmatrix}^2:\begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{Bmatrix},$$

ce qui donne une expression très-générale des fonctions U_i, et par suite des V_i.

La méthode précédente est en défaut dans plusieurs cas : 1° si le déterminant de φ est nul, le coefficient de λ^n dans $\Delta(\lambda)$ sera nul, et $\Delta(\lambda)$ ne sera pas du degré n. On peut toujours éviter cette difficulté et d'autres analogues qui se présenteront dans la suite, en substituant aux formes f, φ des fonctions linéaires,

$$mf+n\varphi, \quad m'f+n'\varphi$$

de ces deux formes; 2° si l'équation $\Delta(\lambda)=0$ a des racines multiples; 3° si elle est identiquement vérifiée, quel que soit λ. Nous allons étudier successivement ces cas exceptionnels.

IX.

Commençons par examiner le cas où l'équation en λ a des racines multiples. Reprenons l'équation

$$(49)\quad F(X_1,\dots,X_n,\lambda)=f+\lambda\varphi=-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & \dots & a_{n1}+\lambda b_{n1} & X_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}+\lambda b_{1n} & \dots & a_{nn}+\lambda b_{nn} & X_n \\ X_1 & \dots & X_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Soit $\lambda=\lambda_i$ une racine multiple : d'après un théorème dû à Lagrange, on sait que l'ensemble des fractions simples correspondant à la racine multiple λ_i sera le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement de

$$(\mathrm{A})\qquad \frac{F(X_1,\dots,X_n,\lambda_i+h)}{\lambda-\lambda_i-h},$$

suivant les puissances de h. Or on a, d'après l'équation (17),

$$F(X_1,\dots,X_n,\lambda_i+h)=-\frac{A_1^2}{\Phi_n\Phi_{n-1}}-\frac{A_2^2}{\Phi_{n-1}\Phi_{n-2}}-\dots-\frac{A_n^2}{\Phi_1\Phi_0},$$

$A_1, A_2,\dots, A_n$, étant des fonctions linéaires de $X_1,\dots, X_n$ définies par les formules (15). En substituant cette expression de F dans (A) nous serons conduit à chercher le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement d'une suite de terme tels que

$$(\mathrm{B})\qquad -\frac{A_{n-p+1}^2}{\Phi_{p-1}\Phi_p}\,\frac{1}{\lambda-\lambda_i-h}.$$

Supposons que le facteur $\lambda - \lambda_i$ entre au degré α_0 dans $\Phi_0 = \Delta$, α_1 dans Φ_1, α_p dans $\Phi_p, \ldots$, je dis qu'on a nécessairement $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 \ldots$. En effet, si, *quelles que soient les arbitraires de* Φ_1, $\lambda - \lambda_i$ entre au degré α_1 dans Φ_1, tous les mineurs du premier ordre de Φ_0 contiendront en facteur $(\lambda - \lambda_i)^{\alpha_1}$, et la dérivée de Φ_0, qui est une fonction linéaire de ces mineurs, admettra $(\lambda - \lambda_i)^{\alpha_1}$ comme facteur; donc Φ_0 admettra $(\lambda - \lambda_i)$ avec un exposant α_0 supérieur à α_1. On démontrerait de même que α_1 est plus grand que α_2, etc. Posons

$$\alpha_0 - \alpha_1 = e_1, \ldots, \alpha_{k-1} - \alpha_k = e_k, \ldots.$$

Quand on remplacera $\lambda - \lambda_i$ par h, les fonctions Φ_p, Φ_{p-1}, qui dépendent linéairement des mineurs d'ordre $p, p-1$, contiendront en facteur $h^{\alpha_p} h^{\alpha_{p-1}}$, et l'on pourra poser

$$\Phi_p = h^{\alpha_p} \Delta_p, \quad \Phi_{p-1} = h^{\alpha_{p-1}} \Delta_{p-1},$$

Δ_p, Δ_{p-1} étant des fonctions de h, de λ_i et des arbitraires qui figurent dans la décomposition en carrés. Ces fonctions Δ_p, Δ_{p-1} ne contiendront plus h en facteur, si l'on ne fait aucune hypothèse particulière sur ces arbitraires.

Quant à Δ_{n-p+1}, son expression développée est

$$\begin{vmatrix}
a_{11} + (\lambda_i + h) b_{11} & \ldots & \ldots & X_1^1 & \ldots & X_1^p \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1n} + (\lambda_i + h) b_{1n} & \ldots & \ldots & X_n^1 & \ldots & X_n^p \\
X_1^1 & \ldots & X_n^1 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
X_1^{p-1} & \ldots & X_n^{p-1} & 0 & \ldots & 0 \\
X_1 & \ldots & X_n & 0 & \ldots & 0
\end{vmatrix}.$$

Retranchons de la dernière ligne les n premières multipliées par x_1, $x_2, \ldots, x_n$, cette dernière sera remplacée par la suivante :

$$\frac{1}{2}(\lambda - \lambda_i - h)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \quad \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_i - h)\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, \quad U_1, \ldots, U_p,$$

car $X_1 = \frac{1}{2}\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots,$ $U_1, U_2, \dots, U_p$ désignent des fonctions linéaires des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$. En réunissant les termes qui contiennent $(\lambda - \lambda_i - h)$, on aura

$$A_{n-p+1} = B_{n-p+1}(\lambda - \lambda_i - h) + C_{n-p+1}.$$

C_{n-p+1} désigne l'ensemble des termes en $U_1, \dots, U_p$. Il est facile de reconnaître que les coefficients de ces derniers termes sont des fonctions linéaires des mineurs d'ordre $p-1$ de Φ_0 : C_{n-p+1} contiendra donc en facteur $h^{\alpha_{p-1}}$. Posons

$$C_{n-p+1} = h^{\alpha_{p-1}} C_{n,p}.$$

Quant à B_{n-p+1}, c'est la fonction A_{n-p+1}, dans laquelle on a remplacé $X_1, \dots, X_n$ par $\frac{1}{2}(\lambda - \lambda_i - h)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dots$. On a donc

$$B_{n-p+1} = h^{\alpha_p}(\lambda - \lambda_i - h) B_{n,p},$$

$B_{n,p}$ étant une fonction linéaire des dérivées $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$ qui contient en outre λ_i et h. Le terme (B) prend donc la forme

$$-\frac{[h^{\alpha_p}(\lambda - \lambda_i - h)B_{n,p} + h^{\alpha_{p-1}}C_{n,p}]^2}{(\lambda - \lambda_i - h)h^{\alpha_p + \alpha_{p-1}}\Delta_p\Delta_{p-1}},$$

et dans son développement le seul terme

$$-\frac{(\lambda - \lambda_i - h)h^{2\alpha_p}B_p^2}{\Delta_p\Delta_{p-1}h^{\alpha_p+\alpha_{p-1}}}$$

peut donner des puissances négatives de h. Remplaçons $h^{\alpha_p - \alpha_{p-1}}$ par h^{-e_p}, nous aurons

$$\text{(C)} \qquad -\left[\frac{B_{n,p}}{\sqrt{\Delta_p\Delta_{p-1}}}\right]^2 \frac{\lambda - \lambda_i - h}{h^{e_p}}.$$

Développons $\frac{B_{n,p}}{\sqrt{\Delta_p\Delta_{p-1}}}$ suivant les puissances ascendantes de h; $B_{n,p}$ contenant linéairement $x_1, x_2, \dots, x_n$, il en sera de même des coefficients du développement et l'on aura

$$\frac{B_{n,p}}{\sqrt{\Delta_p \Delta_{p-1}}} = \xi_1 + \xi_2 h + \xi_3 h^2 + \ldots,$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 étant des fonctions linéaires de $x_1, \ldots, x_n$. Le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le terme (C) s'obtient ensuite sans difficulté; il est

$$\begin{aligned} &-(\lambda - \lambda_i)[\xi_1 \xi_{e_p} + \xi_2 \xi_{e_p - 1} + \ldots + \xi_{e_p} \xi_1] \\ &+ \xi_1 \xi_{1\, e_p - 1} + \xi_2 \xi_{e_p - 2} + \ldots + \xi_{e_p - 1} \xi_1. \end{aligned}$$

En séparant le coefficient de λ et les termes constants, on aura

$$(49) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= -\Sigma(\xi_1 \xi_{e_p} + \ldots + \xi_{e_p} \xi_1), \\ f &= +\Sigma\lambda_i[\xi_1 \xi_{e_p} + \ldots] \\ &\quad + \xi_1 \xi_{e_p - 1} + \ldots + \xi_{e_p - 1} \xi_1. \end{aligned} \right.$$

Ce sont les formules de M. Weierstrass.

On s'assurera aisément que le nombre total des fonctions linéaires ξ est égal à n; par conséquent, comme $f + \lambda\varphi$ dépend en général de n variables, il faut qu'aucune des fonctions linéaires ξ ne soit nulle et qu'elles soient linéairement indépendantes.

La réduction des formes f et φ, telle que nous l'avons donnée, conduit à la solution d'une des principales questions qui se présentent dans la théorie de deux formes quadratiques :

Étant données deux formes f, φ, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse les transformer par une même substitution linéaire en deux autres formes f', φ'?

Pour répondre à cette question, posons

$$F = f + \lambda\varphi, \quad F' = f' + \lambda\varphi'.$$

Les deux formes F, F' devront pouvoir se transformer l'une dans l'autre par une substitution linéaire dont les coefficients seront indépendants de λ. Or formons pour la fonction F la suite

$$\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n,$$

et écrivons aussi pour la forme F′ la suite analogue

$$\Phi'_0, \; \Phi'_1, \ldots, \; \Phi'_n.$$

D'après l'article II, si F′ est la transformée de F, les fonctions Φ' seront égales aux fonctions Φ correspondantes, multipliées par une constante : le carré du déterminant de la substitution linéaire qui transforme F en F′.

Il suit de là que, si un facteur $\lambda - \lambda_i$ figure avec un certain exposant dans Φ_0, il doit figurer avec le même exposant dans Φ'_0 ; que si, en outre, il entre dans un certain nombre des fonctions Φ_1, Φ_2 qui suivent Φ_0, il doit figurer avec les mêmes exposants dans les fonctions correspondantes Φ'_1, Φ'_2. Tout cela se déduit immédiatement de ce que les fonctions Φ sont des contrevariants.

Les conditions précédentes sont donc nécessaires, mais de plus la réduction à des formes canoniques, que nous avons donnée après M. Weierstrass, montre qu'elles sont suffisantes, puisque cette forme canonique est entièrement déterminée quand on connaît les facteurs $\lambda - \lambda_i$, ainsi que les exposants avec lesquels ils figurent dans les fonctions Φ_1, Φ_2,....

En terminant cet article, nous ajouterons un mot relatif à un cas exceptionnel que nous avons négligé. L'équation

$$\Delta(\lambda) = 0$$

est en général du degré n, mais il peut arriver dans quelques cas particuliers que son degré s'abaisse, c'est-à-dire que quelques-unes de ses racines deviennent infinies. Cela aura lieu toutes les fois que le déterminant de φ sera nul ; mais il suffira de substituer à φ $\varphi + mf$, m étant une constante convenablement choisie, et l'on reconnaîtra aisément qu'une racine infinie ne peut donner que des termes de la forme suivante :

$$x_1 x_n + x_2 x_{n-1} + \ldots + x_{n-2} x_2 + x_n x_1 \text{ dans } f$$

et

$$x_1 x_{n-1} + x_2 x_{n-2} + \ldots + x_{n-2} x_2 + x_{n-1} x_1 \text{ dans } \varphi.$$

En réunissant tous les résultats précédents, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Étant données deux formes f, φ telles que le déterminant de $f+\lambda\varphi$ ne soit pas identiquement nul, on peut toujours leur donner les formes suivantes :

$$f = A_1 + A_2 + \ldots + B_1 + B_2 + \ldots$$
$$\varphi = A'_1 + A'_2 + \ldots + B'_1 + B'_2 + \ldots,$$

où les groupes tels que A, A′ *sont de la forme suivante :*

$$\begin{aligned} A &= x_1 x_{n-1} + x_2 x_{n-2} + \ldots + x_{n-2} x_2 + x_{n-1} x_1 \\ &\quad - a(x_1 x_n + x_2 x_{n-1} + \ldots + x_{n-1} x_2 + x_n x_1), \\ A' &= x_1 x_n + x_2 x_{n-1} + \ldots + x_{n-1} x_2 + x_n x_1, \end{aligned}$$

et les groupes tels que (B, B′) *de la forme*

$$\begin{aligned} B &= x_1 x_n \quad + x_2 x_{n-1} + \ldots + x_{n-1} x_2 + x_n x_1, \\ B' &= x_1 x_{n-1} + x_2 x_{n-2} + \ldots + x_{n-1} x_1. \end{aligned}$$

Si pour plus de symétrie on a commencé par substituer aux fonctions f et φ des fonctions linéaires $mf + n\varphi$, $m'f + n'\varphi$, on aura la proposition suivante, plus générale et plus simple.

On peut décomposer les formes f, φ en groupes partiels A, A′, tels que l'on ait

$$\begin{aligned} A &= a\,V + b\,V' \\ A' &= a'V + b'V', \end{aligned}$$

V et V′ étant des formes suivantes :

$$\begin{aligned} V &= x_1 x_n \quad + \ldots + x_n x_1, \\ V' &= x_1 x_{n-1} + \ldots + x_{n-1} x_1. \end{aligned}$$

X.

Considérons maintenant le cas où l'équation $\Delta(\lambda) = 0$ est identiquement satisfaite pour toutes les valeurs de λ. Alors le déterminant de la forme

$$F = f + \lambda\varphi,$$

égal à Φ_0 ou $\Delta(\lambda)$, est identiquement nul. Il peut arriver aussi que les fonctions $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{p-1}$ relatives à cette forme soient nulles, quelles que soient les valeurs des arbitraires qui y entrent, ou, en d'autres termes, que tous les mineurs d'ordre $p-1$ du déterminant $\Delta(\lambda)$ soient nuls sans que tous ceux d'ordre p le soient. Nous adopterons cette hypothèse, qui comprend tous les cas possibles, et alors, d'après l'article V, la fonction F, pour une valeur quelconque de λ, ne dépendra que de $n-p$ fonctions linéaires des variables : il y aura p relations linéaires identiques entre ses dérivées. Représentons par $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ces dérivées, c'est-à-dire posons

$$u_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \tag{50}$$

Les relations linéaires entre les dérivées u_i peuvent être à coefficients constants, mais elles peuvent aussi dépendre de λ. En les ordonnant par rapport à cette variable λ, leur forme générale sera la suivante :

$$(51)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1 = \lambda^{q_1} U_1^0 - \lambda^{q_1-1} U_1^1 + \lambda^{q_1-2} U_1^2 - \ldots \pm \lambda U_1^{q_1-1} \mp U_1^{q_1} = 0, \\ A_2 = \lambda^{q_2} U_2^0 - \lambda^{q_2-1} U_2^1 + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_p = \lambda^{q_p} U_p^0 - \ldots \pm U_p^{q_p} = 0, \end{array}\right.$$

les symboles U_j^i représentant des fonctions linéaires à coefficients constants de $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Si l'une des relations, la première par exemple, ne devait pas contenir λ, il suffirait de supposer $q_1 = 0$.

Les p relations entre les dérivées peuvent prendre des formes très-variées. Nous allons d'abord montrer que, si toutes les fonctions U qui y figurent ne sont pas linéairement indépendantes, on pourra toujours remplacer quelques-unes des relations par d'autres qui seront d'un degré moindre en λ.

A cet effet, nous commencerons par remarquer que, si l'on remplace les dérivées u_i par leurs expressions tirées des formules (50) en $x_1, \ldots, x_n, \lambda$, elles deviennent des fonctions linéaires de λ qui doivent satisfaire identiquement aux relations (51). On trouvera facilement que, pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on ait

$$(52)\quad \begin{cases} U_\alpha^0 = \mu_\alpha^0, \\ U_\alpha^1 = \mu_\alpha^1 + \lambda\mu_\alpha^0, \\ U_\alpha^2 = \mu_\alpha^2 + \lambda\mu_\alpha^1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ U_\alpha^{q_\alpha} = \lambda.\mu_\alpha^{q_\alpha - 1}, \end{cases}$$

les quantités μ indépendantes de λ étant des fonctions linéaires à coefficients constants de $x_1, x_2, \dots, x_n$. On déduit des équations précédentes

$$(53)\quad \begin{cases} \mu_\alpha^0 = U_\alpha^0, \\ \mu_\alpha^1 = U_\alpha^1 - \lambda U_\alpha^0, \\ \mu_\alpha^2 = U_\alpha^2 - \lambda U_\alpha^1 + \lambda^2 U_\alpha^0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mu_\alpha^{q_\alpha - 1} = U_\alpha^{q_\alpha - 1} - \lambda U_\alpha^{q_\alpha - 2} + \lambda^2 U_\alpha^{q_\alpha - 3} - \dots \pm \lambda^{q_\alpha - 1} U_\alpha^0. \end{cases}$$

Admettons maintenant que les fonctions U ne soient pas linéairement indépendantes, que quelques-unes d'entre elles figurant dans les relations

$$A_\alpha = 0, \quad A_{\alpha'} = 0, \quad A_{\alpha''} = 0, \dots$$

satisfassent, par exemple, à la relation identique

$$(54)\quad a_\alpha^0 U_\alpha^0 + a_\alpha^1 U_\alpha^1 + \dots + a_\alpha^{q_\alpha} U_\alpha^{q_\alpha} + a_{\alpha'}^0 U_{\alpha'}^0 + \dots + a_{\alpha''}^0 U_{\alpha''}^0 + \dots = 0,$$

où les coefficients a_α^β désignent des constantes quelconques. Remplaçons les fonctions U par leurs expressions tirées des formules (52) dans l'identité (54). Le coefficient de λ et le terme constant du premier membre devront être nuls séparément, ce qui donne les deux relations

$$(55)\quad \begin{cases} a_\alpha^0 \mu_\alpha^0 + a_\alpha^1 \mu_\alpha^1 + \dots + a_\alpha^{q_\alpha - 1} \mu_\alpha^{q_\alpha - 1} + a_{\alpha'}^0 \mu_{\alpha'}^0 + \dots = 0, \\ a_\alpha^1 \mu_\alpha^0 + \dots + a_\alpha^{q_\alpha} \mu_\alpha^{q_\alpha - 1} + \dots = 0 \end{cases}$$

entre les fonctions μ. Si maintenant, opérant d'une manière inverse, nous remplaçons les μ par leurs expressions déduites des formules (54) nous obtiendrons les deux équations

$$\begin{aligned} V = a_\alpha^0 U_\alpha^0 + a_\alpha^1 (U_\alpha^1 - \lambda U_\alpha^0) + a_\alpha^2 (U_\alpha^2 - \lambda U_\alpha^1 + \lambda^2 U_\alpha^0) + \ldots \\ + a_{\alpha'}^0 U_{\alpha'}^0 + \ldots = 0, \\ W = a_\alpha^1 U_\alpha^0 + a_\alpha^2 (U_\alpha^1 - \lambda U_\alpha^0) + \ldots + a_{\alpha'}^1 U_{\alpha'}^0 + \ldots = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire deux nouvelles relations identiques entre les dérivées de la forme F. Il est facile d'ailleurs de reconnaître que l'on a identiquement

$$\lambda V + \lambda W + a_\alpha^{q_\alpha} A_\alpha + a_{\alpha'}^{q_{\alpha'}} A_{\alpha'} + \ldots = 0. \tag{56}$$

Il suit de là qu'on pourra retrancher du système des relations entre les dérivées une quelconque des relations $A_\alpha = 0$, $A_{\alpha'} = 0$, à la condition d'ajouter les deux nouvelles

$$V = 0, \quad W = 0.$$

Or, si A_α est la relation de degré le plus élevé en λ, V, W, d'après leur composition même, seront de degré inférieur à A_α : on aura donc remplacé une des relations du système par deux autres de degré moindre

$$V = 0, \quad W = 0.$$

On gardera à la place de A_α l'une de ces deux relations ou une combinaison des deux; l'autre sera une conséquence du nouveau système ainsi formé. Il restera donc un système de p relations entre les dérivées, dont l'une sera nouvelle et d'un degré inférieur à celui de la relation qu'elle remplacera [*].

En continuant de cette manière, on arrivera nécessairement à un système réduit de relations entre les dérivées jouissant de la propriété que toutes les fonctions U qui y figurent soient devenues linéairement indépendantes. Admettons donc, dès à présent, que les formules (51) satisfont à cette première condition.

---

[*] Ce raisonnement ne pourrait se faire si le coefficient $a_\alpha^{q_\alpha}$ était nul, mais on verra que cette circonstance ne pourra plus se présenter si aux deux formes f, φ on substitue des fonctions linéaires de ces formes $mf + n\varphi$, $m'f + n'\varphi$.

Puisque les fonctions U sont toutes indépendantes, il faut que leur nombre total soit inférieur au nombre n des variables. On a donc l'inégalité

$$q_1 + 1 + \ldots + q_p + 1 \leq n,$$
$$p + q_1 + q_2 + \ldots + q_p \leq n.$$

En second lieu, et pour la même raison, nous pouvons affirmer qu'on pourra effectuer sur $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une substitution linéaire au déterminant différent de zéro, et qui réduira chacune des fonctions U à un seul terme, par exemple U_1^0 à u_1, U_1^1 à $u_2, \ldots$. En effectuant une telle substitution, les relations entre les dérivées prendront une forme extrêmement simple et comprise dans le type suivant :

$$(57) \qquad \lambda^q F'_{x_1} - \lambda^{q-1} F'_{x_2} + \lambda^{q-2} F'_{x_3} - \ldots \pm F'_{x_{q+1}} = 0.$$

Or une telle équation exprime que F, considérée comme fonction des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{q+1}$, ne dépend que des combinaisons suivantes :

$$z_1 = x_1 + \lambda x_2, \quad z_2 = x_2 + \lambda x_3, \ldots, \quad z_q = x_q + \lambda x_{q+1}.$$

Si donc on exprime $x_1, x_2, \ldots, x_q$ en fonction de $z_1, z_2, \ldots, z_q, x_{q+1}$, F deviendra une fonction *entière* de λ et des z, mais ne contiendra plus x_{q+1}.

En répétant le même raisonnement pour chacune des relations entre les dérivées, toutes semblables à l'équation (57), mais de degrés différents en général, on voit qu'après avoir effectué sur nos variables la substitution qui ramène les relations entre les dérivées à ces formes simples, il y aura $p+1$ groupes de variables : 1° les p premiers groupes correspondant aux diverses relations entre les dérivées

$$\begin{array}{llll} x_1^1, & x_2^1, \ldots, & x_{q_1}^1, & x_{q_1+1}^1, \\ x_1^2, & x_2^2, \ldots, & x_{q_2}^2, & x_{q_2+1}^2, \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ x_1^p, \ldots, & x_{q_p}^p, & x_{q_p+1}^p; & \end{array}$$

2° h autres variables

$$\xi_1 \quad \xi_2, \ldots, \quad \xi_h,$$

en nombre tel que l'on ait

$$h + p + q_1 + q_2 + \ldots + q_p = n.$$

D'après ce que nous avons reconnu en examinant l'équation (57) et ses conséquences relatives à la forme de F, si l'on pose

$$(58) \qquad \begin{cases} z_1^i = x_1^i + \lambda x_2^i, \\ z_2^i = x_2^i + \lambda x_3^i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_{q_i}^i = x_{q_i}^i + \lambda x_{q_i+1}^i, \end{cases}$$

la forme F deviendra une fonction entière de λ et des variables

$$z_1', \quad z_2', \ldots, \quad z_1^2, \quad z_2^2, \ldots, \quad z_1^p, \ldots, \quad \xi_1, \quad \xi_2, \ldots, \quad \xi_h,$$

en nombre égal à $n - p$.

Une conséquence nouvelle peut se déduire de ce que F, sous sa première forme, quand on l'exprime en fonction des x et des ξ, ne contient λ qu'au premier degré. Il suit en effet de là que F ne peut contenir les carrés et les produits des variables z; car si, pour revenir à l'expression première de F, on remplace les z par leurs expressions tirées des formules (58), on verra sans peine que dans ces produits et ces carrés les termes de degré le plus élevé en λ ne pourraient se réduire les uns avec les autres. Il faudra donc que les variables z entrent au premier degré seulement dans F, qui sera de la forme

$$(59) \quad F = \sum_i y_1^i z_1^i + y_2^i z_2^i + \ldots + y_{q_i}^i z_{q_i}^i + \varpi(\xi_1, \ldots, \xi_h) + \lambda \varpi'(\xi_1, \ldots, \xi_h),$$

les variables y étant des fonctions linéaires de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_h$ et le nombre total des variables z et ξ étant $n - p$, ce qui est bien d'accord avec cette propriété que les formes $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{p-1}$, relatives à la forme F, sont identiquement nulles [*].

Comme la forme F ne peut dépendre d'un nombre de variables

---

[*] On peut encore établir ce point de la manière suivante : considérons dans la forme F les termes qui contiennent seulement $x_1, x_2, \ldots, x_{q+1}$, c'est-à-dire qui renferment les carrés et les produits de ces variables. L'ensemble de ces termes doit satisfaire à

moindre que $n-p$, il suit de là qu'il ne peut y avoir aucune relation linéaire identique entre les fonctions y. Par exemple, si l'on avait $y^i_2 = ay^i_1$, l'ensemble des termes

$$y^i_1\, z^i_1 + y^i_2\, z^i_2$$

serait remplacé par $y^i_1\,(z^i_1 + a z^i_2)$, et F, au lieu de dépendre effectivement de z^i_1, z^i_2, ne varierait qu'avec la somme $z^i_1 + a z^i_2$: F deviendrait donc fonction de moins de $n-p$ variables, ce qui est impossible. Le raisonnement qui précède, bien que fait sur un exemple simple, est tout à fait général.

Pour éviter des notations compliquées dans ce qui va suivre, nous supposerons que les séries en nombre égal à p,

$$y^i_1\, z^i_1 + \ldots + y^i_{q_i}\, z^i_{q_i},$$

qui figurent dans F, se réduisent à une seule [*]. Alors

$$F = y_1\, z_1 + y_2\, z_2 + \ldots + y_k\, z_k + \varpi\,(\xi_1,\ldots,\xi_h) + \lambda\varpi'\,(\xi_1,\ldots,\xi_h),$$

---

l'équation (57), ce qu'on reconnaîtra aisément être impossible, si ces termes ne disparaissent pas tous de F.

En second lieu, soit

$$\lambda^{q'} F'_{x'_1} - \lambda^{q'-1} F'_{x'_2} + \ldots = 0$$

une nouvelle relation entre les dérivées, jointe à l'équation (57). Les termes de F, qui contiennent les produits des variables x par les variables x', doivent satisfaire à la fois à l'équation précédente et à l'équation (57), ce qui ne peut avoir lieu que si leurs coefficients sont tous nuls. Cette double remarque justifie la forme de F, adoptée dans le texte.

[*] On peut encore justifier cette simplification par la remarque suivante, qui pourra être utile dans d'autres occasions. Plusieurs séries peuvent toujours se déduire d'une seule, en supposant que quelques-unes des variables y deviennent nulles; par exemple, la suite simple

$$y_1(x_1+\lambda x_2) + y_2(x_2+\lambda x_3) + y_3(x_3+\lambda x_4) + y_4(x_4+\lambda x_5) + y_5(x_5+\lambda x_6)$$

se décompose, si l'on égale y_3 à zéro, dans les deux suivantes :

$$y_1(x_1+\lambda x_2) + y_2(x_2+\lambda x_3),$$
$$y_4(x_4+\lambda x_5) + y_5(x_5+\lambda x_6).$$

Ainsi l'on peut toujours supposer que les suites $\Sigma y^i_\alpha z^i_\alpha$ que nous considérons se ou

$$(60)\quad \begin{cases} F = y_1(x_1 + \lambda x_2) + y_2(x_1 + \lambda x_3) + \ldots \\ \qquad + y_k(x_k + \lambda x_{k+1}) + \varpi + \lambda\varpi', \end{cases}$$

ce qui donnera

$$(61)\quad \begin{cases} f = x_1 y_1 + \ldots + x_k y_k + \varpi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_h), \\ \varphi = x_2 y_1 + \ldots + x_{k+1} y_k + \varpi'(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_h). \end{cases}$$

Les fonctions y étant indépendantes, nous pouvons exprimer quelques-unes des variables ξ en fonction des y, et écrire

$$f = x_1 y_1 + \ldots + x_k y_k + \varpi_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\alpha, y_1, y_2, \ldots, y_h),$$
$$\varphi = x_2 y_1 + \ldots + x_{k+1} y_k + \varpi'_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\alpha, y_1, y_2, \ldots, y_h).$$

Décomposons les fonctions ϖ_1, ϖ'_1 en trois groupes de termes : 1° les termes contenant les variables y; 2° les termes contenant les variables ξ; 3° les termes contenant les produits des variables y par les variables ξ.

On aura

$$(62)\quad \begin{cases} \varpi_1 = \Psi(y_1, y_2, \ldots, y_k) + y_1 \Pi_1 + \ldots + y_k \Pi_k + \psi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\alpha), \\ \varpi'_1 = \Psi'(y_1, y_2, \ldots, y_k) + y_1 \Pi'_1 + \ldots + y_k \Pi'_k + \psi'(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\alpha), \end{cases}$$

Π_i, Π'_i désignant des fonctions linéaires des variables ξ, et l'on aura

$$F = y_1 z_1 + \ldots + y_k z_k + \Psi + \lambda\Psi' + y_1(\Pi_1 + \lambda\Pi'_1) + \ldots + \Psi + \lambda\Psi'.$$

Il est à remarquer que le nombre total des variables dont dépend F est égal à $n-1$, puisqu'ici $p = 1$. On a donc

$$2k + \alpha = n - 1;$$

---

déduisent d'une seule dans laquelle quelques-unes des variables y sont ensuite égalées à zéro. Toutes les fois qu'il s'agira uniquement de démontrer que certaines identifications sont possibles, ce qui est le cas actuel, on pourra donc, avec un grand avantage pour la simplicité des notations, réduire les séries à une seule; car si l'identification est possible, quelles que soient les valeurs des variables y, elle le sera *a fortiori*, quand quelques-unes de ces variables seront égalées à zéro.

mais, F dépendant en général de $n-1$ variables, il faut qu'en la considérant comme fonction des variables y, z, ξ son déterminant soit en général différent de zéro. Or ce déterminant se réduit, comme il est facile de le voir, à celui de la fonction

$$\psi(\xi_1,\ldots,\xi_\alpha)+\lambda\psi'(\xi_1,\ldots,\xi_\alpha),$$

considérée comme fonction des seules variables $\xi_1,\ldots,\xi_\alpha$. Ce dernier déterminant n'est donc pas nul, quel que soit λ, et nous pourrons tout à l'heure appliquer aux deux fonctions ψ, ψ' la méthode de l'article IX.

Cela posé, faisons une troisième substitution et remplaçons $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_\alpha$ par $\xi_1+v_1,\ldots,\xi_\alpha+v_\alpha$, $v_1,v_2,\ldots,v_\alpha$ étant des fonctions linéaires à déterminer des variables y. Après cette substitution, les termes qui contiennent les produits des variables y et ξ dans F deviendront

$$\begin{aligned}&y_1(\Pi_1+\lambda\Pi'_1)+y_2(\Pi_2+\lambda\Pi'_2)+\ldots\\&\quad+v_1\left(\frac{d\psi}{d\xi_1}+\lambda\frac{d\psi}{d\xi_1}\right)+v_2\left(\frac{d\psi}{d\xi_2}+\lambda\frac{d\psi'}{d\xi_2}\right)+\ldots.\end{aligned}$$

Un calcul facile [*] prouve qu'on peut donner à l'ensemble de ces

---

[*] Soient en effet

$$\begin{aligned}v_1&=a_{11}y_1+\ldots+a_{1k}y_k,\\v_2&=a_{21}y_1+\ldots+a_{2k}y_k,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\v_\alpha&=a_{\alpha1}y_1+\ldots+a_{\alpha k}y_k\end{aligned}$$

les expressions des fonctions v où les coefficients a sont inconnus. En exprimant la condition énoncée dans le texte, on aura des équations telles que la suivante :

$$\Pi'_i+a_{1i}\frac{d\psi'}{d\xi_1}+a_{2i}\frac{d\psi'}{d\xi_2}+\ldots+a_{\alpha i}\frac{d\psi'}{d\xi_\alpha}=\Pi_{i+1}+a_{1,i+1}\frac{d\psi}{d\xi_1}+\ldots+a_{\alpha,i+1}\frac{d\psi}{d\xi_\alpha}.$$

Si l'on égale dans les deux membres les coefficients des variables ξ, on a un système d'équations qui font connaître a_{1i}, $a_{2i},\ldots,a_{\alpha i}$ en fonction de $a_{1i+1},\ldots,a_{\alpha,i+1}$, et dont le déterminant est le même que celui de la fonction ψ' qu'on peut toujours supposer différent de zéro. Donc, étant pris arbitrairement a_{1k}, $a_{2k},\ldots,a_{\alpha k}$, on déterminera $a_{1,k-1},\ldots,a_{\alpha,k-1}$, puis $a_{1,k-2}$, $a_{2,k-2},\ldots,a_{\alpha,k-2}$, etc.

termes, en disposant des arbitraires contenues dans les fonctions v, la forme

$$y_1(P_1+\lambda P_2)+y_2(P_2+\lambda P_3)+\ldots+y_k(P_k+\lambda P_{k+1}).$$

On verra de même que le nouveau terme $\Psi+\lambda\Psi'$ peut toujours recevoir la forme [*]

$$y_1(Q_1+\lambda Q_2)+y_2(Q_2+\lambda Q_3)+\ldots+y_k(Q_k+\lambda Q_{k+1}).$$

En tenant compte de ces résultats, F s'écrira sous la forme

$$\begin{aligned}F=y_1&[x_1+P_1+Q_1+\lambda(x_2+P_2+Q_2)]\\&+y_2[x_2+P_2+Q_2+\lambda(x_3+P_3+Q_3)]+\ldots+\psi+\lambda\psi'.\end{aligned}$$

Remplaçant enfin $x_i+P_i+Q_i$ par x_i, nous aurons la forme définitive

$$F=y_1(x_1+\lambda x_2)+\ldots+y_k(x_k+\lambda x_{k+1})+\psi+\lambda\psi',$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}f&=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ky_k+\psi(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_\alpha),\\ \varphi&=x_2y_1+x_3y_2+\ldots+x_{k+1}y_k+\psi'(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_\alpha).\end{aligned}$$

En opérant sur plusieurs séries, nous eussions trouvé de même

$$(63)\qquad\left\{\begin{aligned}f&=\sum_i x_1^i y_1^i+\ldots+x_{k_i}^i y_{k_i}^i+\psi(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_\alpha),\\ \varphi&=\sum_i x_2^i y_1^i+\ldots+x_{k_i+1}^i y_{k_i}^i+\psi'(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_\alpha),\end{aligned}\right.$$

comme forme définitive de f et de φ. Les deux fonctions ψ et ψ' étant telles, que le déterminant de $\psi+\lambda\psi'$ soit différent de zéro, donneront des termes de la forme de ceux trouvés à l'article IX, ce qui conduit au résultat général suivant.

[*] Il suffit de prendre pour inconnues les constantes figurant dans les fonctions P. Les équations du premier degré, auxquelles on est conduit, se résolvent sans aucune difficulté.

Étant données deux formes quadratiques f et φ, on peut toujours décomposer la forme $f+\lambda\varphi$ en plusieurs groupes ayant l'une des trois formes suivantes :

$$1^\circ \quad y_1(x_1+\lambda x_2)+y_2(x_2+\lambda x_3)+\ldots+y_k(x_k+\lambda x_{k+1});$$

$$2^\circ \quad (\lambda_i-\lambda)(x_1x_n+x_2x_{n-1}+\ldots+x_{n-1}x_2+x_nx_1) + (x_1x_{n-1}+x_2x_{n-2}+\ldots+x_{n-1}x_n);$$

$$3^\circ \quad x_1x_n+\ldots+x_nx_1+\lambda(x_1x_{n-1}+\ldots+x_{n-1}x_1).$$

Ce résultat concorde avec ceux qui ont été trouvés par MM. Weierstrass et Kronecker; mais, après l'avoir établi, il reste à indiquer d'une manière précise sous quelles conditions, étant données deux formes f, φ, elles peuvent être transformées en deux autres formes f', φ'. Voici quelles sont les conditions qui résultent de notre théorie des formes $\Phi_0, \Phi_1,\ldots, \Phi_n$. Formons

$$F=f+\lambda\varphi, \quad F'=f'+\lambda\varphi'.$$

Il faut :

1° Que, pour F et F', le même nombre de formes Φ_p soient identiquement nulles;

2° Que, pour les formes F et F', les relations entre les dérivées des formes soient des mêmes degrés par rapport à λ;

3° Il peut arriver que, Φ_p étant la première des fonctions qui ne s'annulent pas identiquement, l'équation en λ,

$$\Phi_p=0,$$

admette des racines λ_i indépendantes des arbitraires qui entrent dans Φ_p. Supposons alors que $\lambda=\lambda_i$ figure à la puissance α_p dans Φ_p, α_{p+1} dans $\Phi_{p+1},\ldots, \alpha_{p+k}$ dans Φ_{p+k}. Il faudra que le même facteur entre avec les mêmes exposants dans les formes $\Phi'_p, \Phi'_{p+1},\ldots,$ relatives à F'.

Démontrons que ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

La première est évidente et ne donne lieu à aucune difficulté.

Quant à la seconde, pour la rendre plus précise, nous avons à étudier ce que nous avons appelé les *systèmes réduits de relations* entre les dérivées et à indiquer quelques-unes de leurs propriétés communes.

Supposons qu'on ait obtenu un premier système réduit de relations entre les dérivées

$$A_1=0, \quad A_2=0,\ldots, \quad A_p=0,$$

où l'on a

$$A_\alpha = U_\alpha^0 \lambda^{q_\alpha} - U_\alpha^1 \lambda^{q_\alpha - 1} + \ldots.$$

D'après la définition que nous avons donnée d'un tel système, il ne peut y avoir aucune relation linéaire entre les fonctions U. Je dis qu'il résulte de là qu'on ne pourra obtenir de nouvelle relation entre les dérivées *sous forme entière* qu'en multipliant $A_1, A_2, \ldots, A_p$ par des polynômes *entiers en* λ, et en égalant à zéro la somme des résultats ainsi obtenus.

Supposons en effet qu'on multiplie $A_1, A_2, \ldots, A_p$ par des fonctions de λ, $L_1, L_2, \ldots, L_p$, on aura entre les dérivées l'équation

$$A_1 L_1 + A_2 L_2 + \ldots + A_p L_p = 0,$$

si $L_1, L_2, \ldots, L_p$ sont fractionnaires, soit $\lambda = h$ une valeur de λ qui rend infinie une ou plusieurs des fonctions L. En décomposant le premier membre de l'équation précédente en fractions simples, on aura un terme en $\frac{1}{\lambda - h}$ dont le numérateur sera une fonction linéaire des polynômes U, et, par conséquent, ne pourra être nul, puisqu'il n'y a aucune relation linéaire entre les variables U.

Il suit de là que, étant donné un système réduit de relations entre les dérivées, pour avoir toutes les relations entre les dérivées entières par rapport à λ, il suffira de multiplier les équations de ce premier système par des polynômes en λ. Supposons que, en opérant de cette manière, on ait substitué au système primitif de relations le suivant :

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \ldots, \quad B_p = 0,$$

où l'on a

$$B_\alpha = V_\alpha^0 \lambda^{r_\alpha} - V_\alpha^1 \lambda^{r_\alpha - 1} + \ldots.$$

Les fonctions V seront évidemment des fonctions linéaires des anciennes fonctions U. Si donc elles sont en plus grand nombre que les fonctions U, le nouveau système ne sera pas réduit. Or le nombre de fonctions V est égal à la somme des degrés en λ des équations

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \ldots, \quad B_p = 0,$$

augmentée de p. Il faut donc, pour que le nouveau système soit *réduit*, que la somme des degrés des équations nouvelles soit la même que pour le système primitif. De là résulte la règle suivante, pour passer d'un système réduit particulier au système le plus général :

Étant données les relations

$$A_1 = 0, \ldots, \; A_p = 0,$$

on ajoutera à chacune d'elles toutes celles du même degré multipliées par des constantes arbitraires, toutes celles de degré inférieur d'une unité, multipliées par des polynômes du premier degré en λ, et, en général, toutes celles de degré inférieur de k unités multipliées par des polynômes de degré k. On formera ainsi le système réduit le plus général de relations entre les dérivées.

Il résulte de cette règle que, dans deux systèmes réduits de relations entre les dérivées, il y a de part et d'autre le même nombre de relations du même degré en λ.

Alors notre seconde condition peut s'énoncer ainsi :

Pour les deux formes F, F', *les relations réduites entre les dérivées doivent être en même nombre et des mêmes degres.*

Quant à la troisième condition, elle est évidemment nécessaire : cela résulte de ce que les formes Φ sont des contrevariants; mais, comme elle achève de déterminer la forme canonique, nous voyons que, jointe aux précédentes, elle suffit à assurer l'équivalence des deux formes F, F'.

Il est donc démontré que nos trois conditions sont à la fois nécessaires et suffisantes.

Comme première application, nous traiterons les deux formes

$$f = -a(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_k y_k) + x_2 y_1 + \ldots + x_{k+1} y_k,$$
$$\varphi = x_1 y_1 + \ldots + x_k y_k.$$

Posons

$$\begin{aligned}
x_1 &= x'_1, \\
x_2 &= a x'_1 + x'_2, \\
x_3 &= a^2 x'_1 + 2a x_2 + a'_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
x_{k+1} &= a^k x'_1 + k a x'_2 + \frac{k(k-1)}{2} a^2 x'_3 + \ldots
\end{aligned}$$

Soit aussi

$$\begin{aligned} y_1 + \ \ a y_2 + a^2 y_3 + \ldots &= y'_1, \\ y_2 + 2a y_3 + \qquad \ldots &= y'_2, \\ y_3 + 3a y_4 + \qquad \ldots &= y'_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

on trouvera

$$\begin{aligned} f &= x'_2 y'_1 + \ldots + x'_{k+1} y'_k, \\ \varphi &= x'_1 y'_1 + \ldots + x'_k y'_k. \end{aligned}$$

Soient enfin deux formes quaternaires qui, égalées à zéro, représentent deux surfaces du second degré, nous obtiendrons les formes canoniques suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} a\, x_1^2 + b\, x_2^2 + c\, x_3^2 + d\, x_4^2, \\ a' x_1^2 + b' x_2^2 + c' x_3^2 + d' x_4^2; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} a\, x_1^2 + b\, x_1 x_2 + c\, x_3^2 + d\, x_4^2, \\ a' x_1^2 + b' x_1 x_2 + c' x_3^2 + d' x_4^2; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a\, x_2^1 + b\, x_1 x_2 + c\, x_3^2 + d\, x_3 x_4, \\ a' x_2^1 + b' x_1 x_2 + c' x_3^2 + d' x_3 x_4; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} a(2x_1 x_3 + x_2^2) + b\, x_1 x_2 + c\, x_4^2, \\ a'(2x_1 x_3 + x_2^2) + b' x_1 x_2 + c' x_4^2; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a(x_1 x_4 + x_2 x_3) + b(2x_1 x_3 + x_2^2), \\ a'(x_1 x_4 + x_3 x_3) + b'(2x_1 x_3 + x_2^2); \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} a\, x_1 x_2 + b\, x_4^2, \\ a' x_1 x_3 + b' x_4^2, \end{array}\right.$$

que nous avons réduites au moindre nombre, en supposant que les coefficients a, b, a', b',... puissent devenir nuls ou égaux. Ces résultats sont d'accord avec ceux de M. Painvin, dans le travail déjà cité p. 385.