JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. TCHEBICHEF

Sur les fonctions qui diffèrent le moins possible de zéro

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 19 (1874), p. 319-346.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1874_2_19__319_0>

Sur les fonctions qui diffèrent le moins possible de zéro;

PAR M. P. TCHEBICHEF.

(Tiré des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. XXII; traduit du russe par M. N. DE KHANIKOF.)

---

1. J'ai montré, dans le Mémoire *Sur les fonctions semblables à celles de Legendre* [*], comment le procédé que ce géomètre a employé [**], pour établir la propriété fondamentale des fonctions connues sous son nom, pouvait être étendu à d'autres fonctions, plus compliquées, qu'on obtient en développant l'expression

$$\frac{(1+s+\sqrt{1-2sx+s^2})^\lambda(1-s+\sqrt{1-2sx+s^2})^\mu}{\sqrt{1-2sx+s^2}},$$

en une série de la forme

$$T_0 + T_1 s + T_2 s^2 + \ldots.$$

Jacobi, dans son Mémoire intitulé : *Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe* [***], déduit la même propriété des fonctions $T_0, T_1, T_2, \ldots$, à l'aide d'une équation différentielle à laquelle on satisfait au moyen de séries hypergéométriques. Je me propose ici d'appliquer ces fonctions à une recherche qui montrera plus clairement encore leur rapport intime aux fonctions de Le-

---

[*] *Travaux savants de l'Académie des Sciences*, 1869.

[**] *Exercices du Calcul intégral*, t. II, p. 250.

[***] JACOBI, *Mathematische Werke*. Band. III.

gendre. Cette application consiste à déterminer les polynômes de la forme

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$$

qui, sans cesser de croître ou de décroître constamment, entre des limites données, diffèrent aussi peu que possible de zéro. Les polynômes de cette espèce, comme nous le verrons, s'expriment à l'aide des fonctions de Legendre, uniquement dans le cas où n, le degré du polynôme, est un nombre impair, et le polynôme lui-même est une fonction croissante. Dans tous les autres cas, la détermination de ces polynômes exige l'emploi d'autres fonctions, que nous venons de désigner par $T_0, T_1, T_2, \ldots$, et que l'on obtient en développant en série l'expression

$$\frac{\left(1 + s + \sqrt{1 - 2sx + s^2}\right)^\lambda \left(1 - s + \sqrt{1 - 2sx + s^2}\right)^\mu}{\sqrt{1 - 2sx + s^2}},$$

pour des valeurs de λ et μ, différentes de zéro. Les polynômes, déterminés de cette façon, trouvent une application utile dans les recherches de l'Analyse pure, comme dans les questions de Mécanique pratique, ainsi que nous l'avons montré dans notre Communication du 22 août 1871, faite à Kiev lors de la troisième réunion des naturalistes russes, de même que dans notre article sur le *Régulateur centrifuge*, imprimé à la suite du compte rendu de l'École technologique de Moscou, pour l'année 1871.

2. Pour simplifier les formules, nous supposerons que les limites des valeurs de la variable x sont réduites à -1 et $+1$ (ce qu'il est toujours facile de réaliser). En désignant par $F(x)$ le polynôme

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$$

nous ferons remarquer que l'une des conditions de notre problème impose à la fonction $F(x)$ d'être constamment croissante, ou constamment décroissante, depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, de sorte que sa dérivée première

$$F'(x)$$

doit conserver toujours le même signe entre ces limites; par conséquent, les valeurs primitives

$$F(-1) \quad \text{et} \quad F(+1),$$

qui correspondent aux valeurs

$$x = -1 \quad \text{et} \quad x = +1,$$

représenteront les limites entre lesquelles la fonction $F(x)$ variera dans le passage de $x = -1$ à $x = +1$. Pour que le polynôme $F(x)$ puisse différer aussi peu que possible de zéro, en passant de $F(-1)$ à $F(+1)$, il faut que le plus grand des nombres

$$F(-1), \quad F(+1)$$

soit, en valeur numérique, aussi petit que possible et qu'il ne puisse devenir moindre par aucune variation du polynôme $F(x)$, compatible avec les conditions de la question, qui déterminent le degré et la forme du polynôme

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$$

ainsi que le signe de sa dérivée $F'(x)$.

Il est facile de voir que le polynôme cherché doit être tel que l'on ait l'égalité

$$F(+1) = -F(-1).$$

En effet, si cette égalité n'a pas lieu, nous n'aurons qu'à retrancher de $F(x)$ la quantité constante

$$\frac{F(+1) + F(-1)}{2},$$

ce qui, évidemment, ne change ni la forme du polynôme $F(x)$, ni la valeur de sa dérivée, et nous obtenons, au lieu des limites anciennes,

$$F(-1) \quad \text{et} \quad F(+1),$$

deux nouvelles valeurs que voici :

$$F(-1) - \frac{F(+1)+F(-1)}{2} = \frac{F(-1)-F(+1)}{2},$$
$$F(+1) - \frac{F(+1)+F(-1)}{2} = \frac{F(+1)-F(-1)}{2}.$$

En comparant les carrés de ces quantités avec la moyenne arithmétique des carrés de

$$F(-1) \quad \text{et de} \quad F(+1),$$

nous verrons que

$$\left[\frac{F(+1)-F(-1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{F(-1)-F(+1)}{2}\right]^2$$
$$= \frac{F^2(+1)+F^2(-1)}{2} - \left[\frac{F(+1)+F(-1)}{2}\right]^2.$$

D'où il résulte que le carré des nouvelles limites

$$\frac{F(+1)-F(-1)}{2}, \quad \frac{F(-1)-F(+1)}{2}$$

sera inférieur au plus grand des carrés

$$F^2(-1), \quad F^2(+1),$$

et que, par suite, les nouvelles limites seront inférieures, en valeur numérique, à la plus grande des anciennes limites. Ainsi nous sommes conduits à admettre que, dans la question qui nous occupe, tous les polynômes cherchés doivent satisfaire à l'égalité

$$F(+1) = -F(-1).$$

Cette égalité nous donne donc les moyens de trouver la valeur des polynômes que nous examinons, à l'aide de la valeur de leur dérivée.

En effet, représentons le polynôme $F(x)$ par l'intégrale

$$F(x) = \int_{-1}^{x} F'(x)\,dx + C,$$

et mettons cette expression dans l'égalité trouvée ci-dessus, nous obtenons, pour déterminer la constante C, l'équation que voici :

$$\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx + C = -C,$$

d'où l'on tire

$$C = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx.$$

En mettant cette valeur de C dans l'expression de $F(x)$, on a

$$F(x) = \int_{-1}^{x} F'(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx. \tag{1}$$

En déterminant les valeurs limites du polynôme $F(x)$ correspondant à $x = \pm 1$, nous trouverons qu'elles sont égales à l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx,$$

prise avec le signe + ou avec le signe −. Il s'ensuit, de plus, que la plus grande valeur des polynômes que nous avons en vue sera égale à la valeur numérique de l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx.$$

3. Passant à la détermination de la dérivée

$$F'(x),$$

nous ferons observer que, comme nous l'avons dit, c'est une condition des polynômes que nous considérons d'avoir une dérivée première qui ne change pas de signe entre $x = -1$ et $x = +1$; non-seulement toutes les racines de l'équation

$$F'(x) = 0,$$

comprises en dedans des limites $x = -1$ et $x = +1$, doivent être multiples, mais le degré de leur multiplicité doit s'exprimer en nombres pairs.

Or, désignons par

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots, \quad \alpha_m$$

toutes les racines de l'équation

$$F'(x) = 0,$$

supérieures à -1 et inférieures à $+1$, par

$$2\lambda_1, \quad 2\lambda_2, \ldots, \quad 2\lambda_m$$

les degrés de multiplicité de ces racines, et supposons, comme cela est permis, que l'équation $F(x) = 0$ ait λ racines égales à $+1$, et λ_0 racines égales à -1; nous allons prouver que la somme

$$\lambda + \lambda_0 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + 2\lambda_m,$$

qui représente le nombre des racines de l'équation $F(x) = 0$ ne dépassant pas les limites $x = -1$ et $x = +1$, ne saurait être inférieure à $n - 1$, ou au degré de cette équation.

Pour nous en convaincre, admettons le contraire, c'est-à-dire posons

$$\lambda + \lambda_0 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + 2\lambda_m < n - 1,$$

et prouvons que dans cette hypothèse il est toujours possible de faire varier le polynôme $F(x)$ sans déranger ni sa forme, ni le signe de sa dérivée $F'(x)$ entre les limites $x = -1$ et $x = +1$, mais de manière à diminuer la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx,$$

qui détermine la limite de l'écart entre le polynôme cherché et zéro.

Pour le faire voir, nous observerons que, d'après ce que nous venons de dire, l'équation

$$F'(x) = 0$$

et la suivante

$$(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha)^{2\lambda_m} = 0$$

auront, entre les valeurs limites $x = -1$ et $x = +1$, les mêmes racines et avec les mêmes degrés de multiplicité, et, par suite, le rapport

$$\frac{F'(x)}{(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m}}$$

ne changera pas de signe entre $x = -1$ et $x = +1$ et sera compris entre deux quantités distinctes de zéro. Désignons par L_0 la plus petite de ces quantités en valeur numérique, et remarquons que la différence

$$\frac{F'(x)}{(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m}} - L_0,$$

pour toutes les valeurs de x inférieures à $+1$ et supérieures à -1, aura le même signe que le rapport

$$\frac{F'(x)}{(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m}},$$

et qu'elle lui sera inférieure par sa valeur numérique. La même chose, évidemment, aura lieu pour les expressions

$$F'(x) - L_0(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m} \quad \text{et} \quad F'(x),$$

qu'on déduit des précédentes en les multipliant par

$$(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m};$$

d'où il est clair qu'en soustrayant de $F'(x)$ l'expression

$$L_0(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x+\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m},$$

nous ne cessons pas de satisfaire à la condition de conserver le même signe à $F'(x)$ entre les limites $x = \pm 1$; mais nous diminuons par là la valeur absolue de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx,$$

qui détermine la limite de l'écart entre le polynôme cherché et zéro.

Quant à la forme du polynôme

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$$

après avoir fait subir à $F'(x)$ la transformation ci-dessus indiquée, elle restera la même, car, d'après l'inégalité (2), l'expression

$$L_0 (x-1)^{\lambda} (x+1)^{\lambda_0} (x-\alpha_1)^{2\lambda_1} (x-\alpha_2)^{2\lambda_2} \ldots (x-\alpha_m)^{2\lambda_m}$$

ne contiendra pas de puissances de x, supérieures tout au plus à $n-2$.

Nous voyons ainsi qu'en admettant la possibilité de l'inégalité (2) on peut rendre le polynôme $F(x)$ plus approché de zéro, en lui conservant, conformément aux considérations de la question, la forme

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$$

et sans faire varier le signe de sa dérivée première entre les limites $x = -1$ et $x = +1$.

Or cette conclusion est absurde, puisque, par hypothèse, le polynôme en question est celui qui diffère le moins possible de zéro, entre les limites $x = -1$ et $x = +1$.

En observant que cette inégalité, dont le côté gauche est le nombre des racines de l'équation $F'(x) = 0$, comprises entre les limites $x = -1$ et $x = +1$, et la partie droite le degré $n-1$ de cette équation, ne peut avoir lieu, non plus, avec un signe d'inégalité contraire au premier, nous sommes conduits à admettre l'égalité

$$\lambda + \lambda_0 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + 2\lambda_m = n - 1,$$

d'où il résulte que toutes les $n-1$ racines de l'équation $F'(x) = 0$ lui seront communes avec l'équation

$$(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m},$$

et qu'ainsi l'on a

$$F'(x) = C(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m},$$

où C est un facteur constant.

Pour trouver la valeur de ce facteur, nous observons que, le polynôme cherché étant de la forme

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$$

sa dérivée sera

$$F'(x) = nx^{n-1} + (n-1) A_1 x^{n-2} + (n-2) A_2 x^{n-3} + \ldots + A_{n-1},$$

ce qui, étant comparé à l'expression ci-dessus de $F'(x)$, nous donne

$$C = n.$$

Par conséquent, $F'(x)$ peut être représentée par la formule que voici :

$$F'(x) = n(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m}.$$

Si maintenant on désigne par q et q_0 les quotients, et par ρ et ρ_0 les restes qu'on obtient en divisant les exposants λ et λ_0 par 2, cette égalité pourra être mise sous la forme

$$\begin{aligned} F'(x) = {} & n(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_0} \\ & \times [(x-1)^{q}(x+1)^{q_0}(x-\alpha_1)^{\lambda_1}(x-\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{\lambda_m}]^2 \end{aligned}$$

ou bien

$$F'(x) = n(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_0} U^2, \tag{3}$$

U étant un polynôme donné par la formule

$$U = (x-1)^q (x+1)^{q_0} (x-\alpha_1)^{\lambda_1} (x-\alpha)^{\lambda_2} \ldots (x-\alpha_m)^{\lambda_m}.$$

Les nombres ρ et ρ_0 de la formule (3) étant les restes de la division de λ et λ_0 par 2, ne peuvent avoir que les valeurs zéro et 1, et il est très-aisé de voir, dans chaque cas particulier, d'après la forme du nombre n, degré du polynôme cherché $F(x)$, et d'après le signe de sa dérivée première $F'(x)$, entre $x=-1$ et $x=+1$, lequel de ces deux nombres doit être adopté pour ρ et ρ_0 dans l'expression de $F'(x)$, par la formule (3).

En effet, si n, degré du polynôme $F(x)$, est un nombre impair, sa dérivée $F'(x)$ sera de degré pair, et dans ce cas l'égalité (3), où U^2 est aussi une fonction de degré pair, indique que le facteur $(x-1)^\rho (x+1)^{\rho_0}$ doit aussi être une fonction de degré pair; mais, comme il n'est possible de satisfaire à cette condition, ni dans l'hypothèse de $\rho = 0$ et $\rho_0 = 1$, ni dans celle de $\rho = 1$ et $\rho_0 = 0$, on est forcé d'admettre que, dans ce cas, on aura ou $\rho = 0$ et $\rho_0 = 0$, ou bien $\rho = 1$ et $\rho_0 = 1$.

Pour décider lequel de ces deux systèmes de valeurs de ρ et ρ_0 doit être adopté, nous observerons que le premier nous donne, d'après la formule (3), l'expression

$$F'(x) = nU^2,$$

et le second

$$F'(x) = n(x-1)(x+1)U^2,$$

et qu'ainsi, la variable x demeurant comprise entre -1 et $+1$, dans le premier cas, $F'(x)$ aura une valeur positive, et que, dans le second cas, elle aura une valeur négative. De cette façon, il est clair que les valeurs $\rho = 0$ et $\rho_0 = 0$ doivent être adoptées dans le cas où $F(x)$ sera une fonction constamment croissante entre les limites $x=-1$ et $x=+1$, et $\rho = 1$ et $\rho_0 = 1$, dans le cas où $F(x)$ sera une fonction constamment décroissante.

Passant à la considération du cas où n est pair, nous observerons que, dans cette hypothèse, le degré de la dérivée première de $F(x)$ sera impair, et, par suite, pour satisfaire à l'égalité (3), nous devons assigner à ρ et ρ_0 les valeurs que voici : ou bien $\rho = 0$ et $\rho_0 = 1$, ou *vice versâ* $\rho = 1$ et $\rho_0 = 0$. Or, comme pour ces valeurs de ρ et ρ_0 la formule (3) devient respectivement

$$F'(x) = n(x+1)U^2,$$
$$F'(x) = n(x-1)U^2,$$

et que la première de ces deux expressions reste constamment positive depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, et la seconde constamment négative pour les mêmes valeurs de x, nous concluons que, dans le cas de n pair, on a $\rho = 0$ et $\rho_0 = 1$, si $F(x)$ est un polynôme toujours croissant, depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, et $\rho = 1$ et $\rho_0 = 0$, quand $F(x)$ décroîtra constamment entre les mêmes limites.

5. Pour déterminer le polynôme U, qui figure dans l'expression ci-dessus de $F'(x)$, nous ferons remarquer que, d'après le n° **3**, ce polynôme est un produit de la forme

$$(x-1)^q(x+1)^{q_0}(x-\alpha_1)^{\lambda_1}(x-\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{\lambda_m};$$

par conséquent, il a toujours la forme

$$U = x^l + B_1 x^{l-1} + B_2 x^{l-2} + \ldots + B_{l-1} x + B_l,$$

et la valeur du degré l s'obtient à l'aide de l'égalité (3), qui donne, entre les exposants, la relation

$$(4) \qquad n - 1 = \rho + \rho_0 + 2l.$$

D'un autre côté nous savons, par le n° **3**, que la limite de l'écart entre zéro et le polynôme cherché $F(x)$, depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, est égale à la valeur numérique de l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx;$$

mais cette intégrale (3) se réduit à

$$(-1)^\rho \frac{n}{2}\int_{-1}^{+1}(1+x)^{\rho_0}(1-x)^\rho U^2\,dx,$$

si l'on y met pour $F'(x)$ son expression (3), et la valeur numérique de cette dernière intégrale est évidemment

$$\frac{n}{2}\int_{-1}^{+1}(1+x)^{\rho_0}(1-x)^{\rho}\,U^2\,dx.$$

Donc, en désignant par L la limite de l'écart entre zéro et le polynôme cherché $F(x)$, nous aurons

$$(5)\qquad L=\frac{n}{2}\int_{-1}^{+1}(1+x)^{\rho_0}(1-x)^{\rho}\,U^2\,dx.$$

Ainsi, pour diminuer, autant que possible, la quantité L, sans changer toutefois les conditions de la question, nous aurons à déterminer le polynôme U de façon à rendre minimum l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}(1+x)^{\rho_0}(1-x)^{\rho}\,U^2\,dx.$$

Il est facile d'y parvenir à l'aide des fonctions

$$T_0,\quad T_1,\quad T_2,\ldots,\quad T_l,$$

qu'on obtient en développant l'expression

$$\frac{(1+s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{\lambda}(1-s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{\mu}}{\sqrt{1-2sx+s^2}}$$

en une série de la forme

$$T_0+T_1 s+T_2 s^2+\ldots+T_l s^l.$$

En effet, on sait que ces fonctions sont de degrés $0, 1, 2, \ldots, l, \ldots$, et qu'en général pour tout m distinct de m_1 elles satisfont à l'équation

$$\int_{-1}^{+1}\frac{T_m T_{m_1}}{(1+x)^{\lambda}(1-x)^{\mu}}\,dx=0;$$

de plus, il résulte de ce que nous avons établi dans notre Mémoire *Sur les fractions continues* [*] que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{Z^2}{(1+x)^\lambda (1-x)^\mu}\, dx,$$

Z étant de la forme

$$x^l + B_1 x^{l-1} + B_2 x^{l-2} + \ldots + B_{l-1} x + B_l,$$

acquiert une valeur *minimum* lorsque le polynôme Z ne diffère de la fonction T_l que par un facteur constant. Nous en concluons donc que le polynôme

$$U = x^l + B_1 x^{l-1} + B_2 x^{l-2} + \ldots + B_{l-1} x + B_l,$$

qui correspond à la valeur minimum de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\rho_0} (1-x)^{\rho}\, U^2\, dx,$$

sera donné par la formule $U = CT_l$ en faisant $\lambda = -\rho$ et $\mu = -\rho_0$, dans l'expression de la fonction T_l, qui nous est fournie par le développement en série

$$T_0 + T_1 s + T_2 s^2 + \ldots + T_l s^l + \ldots$$

de l'expression

$$\frac{\left(1+s+\sqrt{1-2sx+s^2}\right)^\lambda \left(1-s+\sqrt{1-2sx+s^2}\right)^\mu}{\sqrt{1-2sx+s^2}}.$$

Désignant par K_l le coefficient de x^l, dans la fonction T_l, et remarquant que cette puissance de x doit figurer dans le polynôme U avec un coefficient égal à l'unité, nous en concluons que l'expression que nous venons de trouver pour U entraîne l'égalité

$$CK_l = 1,$$

[*] *Mémoires scientifiques de l'Académie des Sciences*, de la 1re et de la 3e Classe, t. III.

d'où l'on tire

$$C = \frac{1}{K_l},$$

et, par suite, le polynôme U est complétement déterminé par l'équation

$$(6) \qquad U = \frac{1}{K_l} T_l,$$

où, comme nous venons de le dire, la fonction T_l s'obtient en développant l'expression

$$\frac{(1+s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{-\rho_0}(1-s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{-\rho}}{\sqrt{1-2sx+s^2}}.$$

Or, comme ce développement peut être représenté par l'égalité que voici :

$$\frac{(1+s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{-\rho_0}(1-s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{-\rho}}{\sqrt{1-2sx+s^2}} = \sum_0^\infty T_m s^m,$$

et désignant par K_m, K'_m,... les coefficients de x^m, x^{m-1},... dans la fonction T_m pour une valeur quelconque de m, nous aurons

$$\frac{(1+s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{-\rho_0}(1-s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{-\rho}}{\sqrt{1-2sx+s^2}}$$
$$= \sum_0^\infty (K_m x^m + K'_m x^{m-1} + \ldots) s^m,$$

quelles que soient les valeurs de s et x. Donc, si l'on pose

$$x = \frac{\alpha}{s},$$

et si l'on fait ensuite $s = 0$, l'égalité ci-dessus se réduit à la formule

$$\frac{(1+\sqrt{1-2\alpha})^{-\rho-\rho_0}}{\sqrt{1-2\alpha}} = \sum_0^\infty K_m \alpha^m.$$

Cette expression nous montre que K_l, coefficient de x^l dans la fonction T_l, sera identique au coefficient de α^l, dans le développement en série de l'expression

$$\frac{(1+\sqrt{1-2\alpha})^{-(\rho+\rho_0)}}{\sqrt{1-2\alpha}}.$$

Mais comme on sait, par ce que nous avons dit, dans le n° **4**, sur les nombres ρ_0 et ρ, que leur somme ne peut être que zéro, 1 ou 2, la formule $\frac{(1+\sqrt{1-2\alpha})^{-(\rho+\rho_0)}}{\sqrt{1-2\alpha}}$, pour ces valeurs, peut être remplacée par les séries

$$1+\frac{1}{1}\alpha+\frac{1.3}{1.2}\alpha^2+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2l-1)}{1.2.3\ldots l}\alpha^l+\ldots,$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.1.2}\alpha+\frac{1\ 3.5}{2.1.2.3}\alpha^2+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2l+1)}{2.1.2.3\ldots(l+1)}\alpha^l+\ldots,$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1.3}{1.2}\alpha+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1.3.5}{1.2.3}\alpha^2+\ldots+\frac{1}{2}\frac{l+1}{l+2}\frac{1.3.5\ldots(2l+1)}{1.2.3\ldots(l+1)}\alpha^l+\ldots;$$

par suite, le coefficient K^l, selon que l'on donne à la somme $\rho+\rho_0$ les valeurs zéro, 1 ou 2, aura les trois valeurs que voici :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} K_l &= \frac{1.3.5\ldots(2l-1)}{1.2.3\ldots l},\\ K_l &= \frac{1.1.3.5\ldots(2l+1)}{2.1.2.3\ldots(l+1)},\\ K_l &= \frac{1.1.3.5\ldots(2l+1)(l+1)}{2.1.2.3\ldots(l+1)(l+2)}.\end{aligned}\right.$$

6. D'après toutes les recherches précédentes, il sera aisé de trouver, dans chaque cas particulier, un polynôme $F(x)$ de la forme de

$$x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n,$$

qui, tout en restant toujours croissant ou décroissant, depuis $x=-1$ jusqu'à $x=+1$, diffère le moins possible de zéro entre ces mêmes limites.

Nous commencerons par déterminer les nombres ρ et ρ_0 en observant que, d'après le n° 4, on a, n étant impair,

$$\rho = 0 \quad \text{et} \quad \rho_0 = 0,$$

ou bien

$$\rho = 1 \quad \text{et} \quad \rho_0 = 1,$$

selon que le polynôme cherché croîtra ou décroîtra constamment entre les limites $x = 1$ et $x = +1$, et que, dans le cas de n pair, ces mêmes nombres seront

$$\rho = 0 \quad \text{et} \quad \rho_0 = 1,$$

ou bien

$$\rho = 1 \quad \text{et} \quad \rho_0 = 0,$$

selon que le polynôme cherché sera constamment croissant ou constamment décroissant pour toutes les valeurs de x, depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$.

Connaissant ρ et ρ_0, nous trouvons, à l'aide de l'équation (4),

$$l = \frac{n - \rho - \rho_0 - 1}{2}, \tag{8}$$

puis nous cherchons la valeur de la fonction T_l, coefficient de s^l dans le développement de l'expression

$$\frac{(1 + s + \sqrt{1 - 2sx + s^2})^{-\rho_0}(1 - s + \sqrt{1 - 2sx + s^2})^{-\rho}}{\sqrt{1 - 2sx + s^2}},$$

selon les puissances ascendantes de s, et la valeur du coefficient K_l, par la formule (7). Les valeurs de T_l et de K_l étant connues, à l'aide des équations (3) et (6), dont on élimine la fonction U, nous déterminons $F'(x)$, dérivée du polynôme cherché,

$$F'(x) = \frac{n}{K_l^2}(x+1)^{\rho_0}(x-1)^{\rho} T_l^2;$$

mettant cette valeur à la place de $F'(x)$ dans l'équation (1), nous obtenons enfin, pour l'expression du polynôme cherché, la formule que voici :

$$\frac{n}{K_l^2}\left[\int_{-1}^{x} (x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_0} T_l^2\, dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} (x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_0} T_l^2\, dx\right].$$

Nous trouverons ainsi le polynôme cherché, qui, jouissant de la propriété de croître ou de décroître constamment, depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, différera de zéro, moins que tous les autres polynômes de la même forme.

Maintenant, pour calculer la valeur de L, limite des écarts de ce polynôme, nous observerons que la formule (5), en y mettant l'expression de U, tirée de l'équation (6), nous donne

$$L = \frac{n}{2K_l^2}\int_{-1}^{+1}(1+x)^{\rho_0}(1-x)^{\rho}T_l^2\,dx,$$

ou bien en mettant pour n sa valeur tirée de l'équation (4), c'est-à-dire la somme $2l+\rho+\rho_0+1$,

$$L = \frac{2l+\rho+\rho_0+1}{2K_l^2}\int_{-1}^{+1}(1+x)^{\rho_0}(1-x)^{\rho}T_l^2\,dx.$$

Nous observerons ensuite que, d'après ce que nous avons établi dans notre Mémoire *Sur les fonctions semblables aux fonctions de Legendre* (*Mém. sc.*, 1869), sur la réduction de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\sum_0^\infty T_m s^m \sum_0^\infty T_m t^m}{(1+x)^\lambda(1-x)^\mu}dx$$

à l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{2^{\lambda+\mu+1}(1-stx)^\mu}{x^\lambda(1-x)^\mu(1-stx^2)}dx,$$

la valeur de l'intégrale $\int_{-1}^{+1}(1+x)^{\rho_0}(1-x)^{\rho}T_l^2\,dx$, qui entre dans l'expression de L, sera le coefficient de $(st)^l$ dans le développement de la formule intégrale

$$\int_0^1 \frac{2^{-\rho_0-\rho+1}(1-stx)^{-\rho}}{x^{-\rho_0}(1-x)^{-\rho}(1-stx^2)}dx,$$

suivant les puissances ascendantes de st. Or, comme cette intégrale devient

$$\frac{1}{\sqrt{st}}\log\frac{1+\sqrt{st}}{1-\sqrt{st}} \quad \text{pour} \quad \rho = 0 \quad \text{et} \quad \rho_0 = 0,$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2(st)^{\frac{3}{2}}}\log\frac{1-\sqrt{st}}{1+\sqrt{st}} - \frac{\log(1-st)}{s^2t^2}\right] \quad \text{pour} \quad \rho = 1 \quad \text{et} \quad \rho_0 = 1,$$

et

$$\frac{1}{2st}\log(1-st) \quad \text{pour} \quad \rho = 0 \quad \text{et} \quad \rho_0 = 1,$$

de même que pour $\rho = 1$ et $\rho_0 = 0$, et que ces trois expressions se développent en trois séries que voici :

$$2 + \frac{1}{2}st + \frac{2}{5}(st)^2 + \ldots + \frac{2}{2l+1}(st)^l + \ldots,$$

$$\frac{1}{2.2.3} + \frac{2}{2.3.5}st + \frac{3}{2.4.7}(st)^2 + \ldots + \frac{l+1}{2(l+2)2(l+3)}(st)^l + \ldots,$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}st + \frac{1}{6}(st)^2 + \ldots + \frac{1}{2(l+1)}(st)^l + \ldots,$$

les valeurs de l'intégrale $\int_{-1}^{+1}(1+x)^{\rho_0}(1-x)^{\rho}\,\mathrm{T}_l^2\,dx$ seront, pour les trois systèmes de valeurs de ρ et ρ_0 que nous venons de mentionner,

$$\frac{2}{2l+1}, \quad \frac{l+1}{2(l+2)2(l+3)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2(l+1)}.$$

En mettant ces valeurs dans l'expression de L à la place de l'intégrale qui y figure, et en remplaçant K_l par ses valeurs tirées des équations (7), nous obtenons pour la valeur de L les trois expressions que voici :

1°
$$\mathrm{L} = \left[\frac{1.2.3\ldots l}{1.3.5\ldots(2l-1)}\right]^2,$$

2°
$$\mathrm{L} = \left[\frac{1.2.3\ldots(l+1)}{1.3.5\ldots(2l+1)}\right]^2\frac{l+2}{l+1},$$

et

3°
$$\mathrm{L} = 2\left[\frac{1.2.3\ldots(l+1)}{1.3.5\ldots(2l+1)}\right]^2,$$

correspondantes aux trois hypothèses sur les valeurs de ρ et de ρ_0

1° $\rho = 0$ et $\rho_0 = 0$,

2° $\rho = 1$ et $\rho_0 = 1$,

et

3° $\rho = 0$, $\rho_0 = 1$, ou bien $\rho = 1$ et $\rho_0 = 0$;

mais, d'après (8), ces trois systèmes d'hypothèses sur les valeurs de ρ et ρ_0 nous donnent

$$l = \frac{n-1}{2},\quad l = \frac{n-3}{2}\quad \text{et}\quad l = \frac{n-2}{2};$$

et par suite les expressions ci-dessus de L se réduisent à

$$\mathrm{L} = \left[\frac{1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}}{1.3.5\ldots(n-2)}\right]^2,$$

$$\mathrm{L} = \left[\frac{1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}}{1.3.5\ldots(n-2)^2}\right]^2\frac{n+1}{n-1},$$

$$\mathrm{L} = 2\left[\frac{1.2\ 3\ldots\frac{n}{2}}{1.3.5\ldots(n-1)}\right]^2.$$

Les deux premières de ces expressions de L obtenues dans les hypothèses ρ et $\rho_0 = 0$, et ρ et $\rho_0 = 1$, et se rapportant toutes deux, d'après le n° **6**, au cas de n impair, peuvent être remplacées par une seule formule

$$\mathrm{L} = \left(\frac{1.2\ 3\ldots\frac{n-1}{2}}{1.3.5\ldots n-2}\right)^2\frac{n+1}{n\pm 1},$$

qui se réduit à la première ou à la seconde, selon que dans $n \pm 1$ on prend le signe $+$ ou le signe $-$. Or, comme la première des trois expressions ci-dessus de L correspond à l'hypothèse $\rho = 0$ et $\rho_0 = 0$, c'est-à-dire (d'après le n° **5**) au cas où le polynôme cherché ne cesse de croître entre les limites de $x = -1$ et $x = +1$, et que la seconde de ces expressions a été obtenue dans l'hypothèse de $\rho = 1$ et $\rho_0 = 1$, c'est-à-dire en admettant que le polynôme cherché décroît constamment entre les limites de $x = -1$ et $x = +1$, nous concluons que l'on doit garder, dans la formule

$$L = \left[\frac{1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}}{1.3.5\ldots(n-2)}\right]^2 \frac{n+1}{n\pm 1},$$

le signe + ou le signe −, selon que le polynôme cherché ne cesse de croître ou de décroître entre les limites $x = -1$ et $x = +1$, bien entendu dans le cas où n, le degré de ce polynôme, est un nombre impair. Quant à la détermination de L dans le cas de n pair, la valeur est donnée par la troisième expression de L, à savoir :

$$L = 2\left[\frac{1.2.3\ldots\frac{n}{2}}{1.3.5\ldots(n-1)}\right]^2;$$

car elle a été obtenue en faisant $\rho = 0$ et $\rho_0 = 1$ ou bien $\rho = 1$ et $\rho_0 = 0$.

7. Les polynômes de la forme

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$$

déterminés conformément à ce qui vient d'être dit, différeront moins de zéro, entre les limites $x = -1$ et $x = +1$, que tous les polynômes de la même espèce, et qui seront, comme eux, constamment croissants ou constamment décroissants entre les limites indiquées de la variable x. En d'autres termes, l'écart entre zéro et tout polynôme satisfaisant aux mêmes conditions ne saurait être inférieur à L, limite des écarts entre zéro et la valeur des polynômes que nous examinons. Les valeurs de L que nous venons de trouver nous permettent d'énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si un polynôme de la forme*

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

ne cesse de croître ou de décroître depuis $x = -1$ *jusqu'à* $x = +1$, *sa* *valeur numérique ne saurait être, dans ces limites, inférieure à*

$$2\left[\frac{1.2.3\ldots\frac{n}{2}}{1.3.5\ldots(n-1)}\right]^2 \text{ si } n \text{ est un nombre pair,}$$

ou bien à

$$\left[\frac{1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}}{1.3.5\ldots(n-2)}\right]^2 \frac{n+1}{n\pm1} \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Dans la dernière formule, il faut prendre dans l'expression $n \pm 1$ *le signe* $+$ *ou le signe* $-$, *selon que le polynôme cherché croît ou décroît depuis* $x = -1$ *jusqu'à* $x = +1$.

Ce théorème nous permettra d'en déduire un autre plus simple, en remplaçant les valeurs exactes de L par des valeurs approchées, mais inférieures aux premières. En effet, ces valeurs approchées s'obtiennent aisément à l'aide de la formule de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\cdots\frac{2m}{2m-1}\,\frac{2m}{2m+1}\,\frac{2m+2}{2m+1}\,\frac{2m+2}{2m+3}\cdots$$

Notamment, si l'on fait

$$X = \frac{2m(2m+2)}{(2m+1)^2}\,\frac{(2m+2)(2m+4)}{(2m+3)^2}\cdots$$

et

$$Y = \frac{(2m+2)}{(2m+1)(2m+3)}\,\frac{(2m+4)^2}{(2m+3)(2m+5)}\cdots,$$

l'expression de $\frac{\pi}{2}$ devient

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\cdots\frac{2m}{2m-1}X$$

et

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\cdots\frac{2m}{2m-1}\,\frac{2m}{2m+1}Y;$$

d'où l'on tire

$$\left[\frac{1.2.3\ldots m}{1.3.5\ldots(2m-1)}\right]^2 = \frac{2m\pi}{2^{2m+1}X},$$

$$\left[\frac{1.2.3\ldots m}{1.3.5\ldots(2m-1)}\right]^2 = \frac{(2m+1)\pi}{2^{2m+1}Y};$$

mais, comme les valeurs trouvées ci-dessus pour X et Y peuvent être mises sous les formes

$$X = \left[1 - \frac{1}{(2m+1)^2}\right]\left[1 - \frac{1}{(2m+3)^2}\right]\cdots,$$

$$Y = \left[1 + \frac{1}{(2m+1)(2m+3)}\right]\left[1 + \frac{1}{(2m+3)(2m+5)}\right]\cdots,$$

il est évident que

$$X < 1 \quad \text{et} \quad Y > 1.$$

Donc en supprimant, dans les équations précédentes, les termes de X et Y, nous obtenons les inégalités

$$\left[\frac{1.2.3\ldots m}{1.3.5\ldots(2m-1)}\right]^2 > \frac{2m\pi}{2^{2m+1}}$$

et

$$\left[\frac{1.2.3\ldots m}{1.3.5\ldots(2m-1)}\right]^2 < \frac{(2m+1)\pi}{2^{2m+1}}.$$

Ainsi la valeur de $\left[\frac{1.2.3\ldots m}{1.3.5\ldots(2m-1)}\right]^2$ sera comprise entre deux produits qu'on obtient en multipliant $\frac{\pi}{2^{2m+1}}$ par $2m$ et $2m+1$; donc cette valeur sera égale à $\frac{\pi}{2^{2m+1}}$, multipliée par une certaine valeur moyenne entre $2m$ et $2m+1$; mais, comme cette moyenne peut être représentée par $2m+\theta$, où l'on a $\theta > 0$ et < 1, nous pouvons remplacer les dernières inégalités par l'équation

$$\left[\frac{1.2.3\ldots m}{1.3.5\ldots(2m-1)}\right]^2 = \frac{(2m+\theta)\pi}{2^{2m+1}}.$$

En faisant, dans cette formule, $m = \frac{n-1}{2}$ pour n impair, et $m = \frac{n}{2}$ pour n pair, nous obtenons

$$\left[\frac{1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}}{1.3.5\ldots(n-2)}\right]^2 = \frac{\pi}{2^n}(n-1+\theta)$$

et

$$\left[\frac{1.2.3\ldots\frac{n}{2}}{1.3.5\ldots(n-1)}\right]^2 = \frac{\pi}{2^{n+1}}(n+\theta).$$

Or, comme la valeur de θ n'est limitée que par zéro et 1, et que la différence $1-\theta$ se trouve dans le même cas, cette différence pourra être remplacée dans la formule ci-dessus par θ, ce qui nous permettra de simplifier les formules où figure cette différence et d'écrire

$$\left[\frac{1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}}{1.3.5\ldots(n-2)}\right]^2=\frac{\pi}{2^n}(n-\theta).$$

Comparant les égalités que nous venons d'obtenir avec les expressions de L du n° **6**, nous voyons que ces dernières peuvent être remplacées par

$$L=\frac{n+1}{n\pm 1}\,\frac{n-\theta}{2^n}\pi,\quad L=\frac{n+\theta}{2^n}\pi.$$

En examinant ces valeurs de L, nous remarquons qu'on obtient la limite inférieure de L par la formule $L=\frac{n+1}{n\pm 1}\,\frac{n-\theta}{2^n}\pi$, en y faisant $\theta=1$ et en prenant ± 1 avec le signe $+$, de façon que cette valeur limite devient $\frac{n-1}{2^n}\pi$. On voit ainsi que L surpassera toujours $\frac{n-1}{2^n}\pi$, et nous sommes amené au théorème que voici :

Théorème. — *La valeur numérique du polynôme*

$$x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n,$$

depuis $x=-1$ et $x=+1$, doit surpasser $\frac{n-1}{2^n}\pi$, si ce polynôme ne cesse de croître ou de décroître entre ces limites de la variable x.

Si nous faisons, dans nos formules,

$$x=\frac{2z-a-b}{b-a},$$

et si nous remarquons que, dans ce cas, le polynôme

$$x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n$$

étant multiplié par $\left(\frac{b-a}{2}\right)^n$ se réduit à un polynôme de la forme

$$z^n + A' z^{n-1} + A'' z^{n-2} + \ldots,$$

et que les limites de la nouvelle variable z deviennent $z = a$ pour $x = -1$, et $z = b$ pour $x = +1$, nous déduisons du théorème précédent le nouveau théorème que voici :

Théorème. — *La valeur numérique du polynôme*

$$z^n + A' z^{n-1} + A'' z^{n-2} + \ldots,$$

depuis $z = b$ jusqu'à $z = a$, doit surpasser $(n-1)\left(\frac{b-a}{4}\right)^n \pi$, si ce polynôme ne cesse de croître ou de décroître entre ces limites.

Or, à l'aide de ce dernier théorème, il nous sera aisé de conclure :

Théorème. — *Si la valeur numérique de $f(b) - f(a)$, différence de la valeur de $f(z) = z^n + A' z^{n-1} + A'' z^{n-2} + \ldots$, pour $z = a$ et $z = b$, ne peut surpasser la limite $2(n-1)\left(\frac{b-a}{4}\right)^n \pi$, la dérivée $f'(z)$ change de signe entre $z = a$ et $z = b$.*

En effet, si $f'(z)$ ne changeait pas de signe entre $z = a$ et $z = b$, le polynôme

$$\Phi(z) = f(z) - \frac{f(b) + f(a)}{2},$$

ne cesserait d'être, entre ces limites, ou constamment croissant, ou constamment décroissant, de façon que toutes ses valeurs, depuis $z = a$ jusqu'à $z = b$, seraient comprises entre ses deux valeurs extrêmes, qui correspondent aux valeurs limites de z que nous venons d'indiquer, et qui se réduisent à

$$\Phi(a) = -\frac{1}{2}[f(b) - f(a)],$$

$$\Phi(b) = \frac{1}{2}[f(b) - f(a)].$$

On voit ainsi que, depuis $z = a$ jusqu'à $z = b$, la valeur numérique de $\Phi(x)$ ne surpasserait pas celle de

$$\frac{1}{2}[f(b)-f(a)],$$

c'est-à-dire ne saurait être supérieure, d'après les conditions du théorème énoncé ci-dessus, à

$$\frac{1}{2}2(n-1)\left(\frac{b-a}{4}\right)^n\pi=(n-1)\left(\frac{b-a}{4}\right)^n\pi,$$

ce qui est impossible en vertu du théorème précédent.

Faisons

$$F(z)=(m+1)\int_a^z(z^m+B_1z^{m-1}+B_2z^{m-2}+\ldots)\,dz.$$

La fonction $F(z)$ se réduit, dans ce cas, au polynôme

$$z^n+A'z^{n-1}+A''z^{n-2}+\ldots,$$

où $n=m+1$ et la dérivée première de $F(z)$ est

$$F'(z)=(m+1)(z^m+B_1z^{m-1}+B_2z^{m-2}+\ldots),$$

On a donc

$$F(b)-F(a)=(m+1)\int_a^b(x^m+B_1x^{m-1}+B_2x^{m-2}+\ldots)\,dx.$$

Nous en concluons le théorème que voici :

THÉORÈME. — *L'équation* $z^m+B_1z^{m-1}+B_2z^{m-2}+\ldots=0$ *doit nécessairement avoir au moins une racine entre* $z=a$ *et* $z=b$, *si la valeur numérique de l'intégrale*

$$\int_a^b(z^m+B_1z^{m-1}+B_2z^{m-2}+\ldots)\,dz$$

ne dépasse pas la valeur de

$$\frac{2m}{m+1}\pi\left(\frac{b-a}{4}\right)^{m+1}.$$

A l'aide du même théorème, il sera aisé d'établir un théorème nouveau, concernant la série de fonctions

$$f(z),\quad f'(z),\quad f''(z),\ldots,\quad f^{(n-1)}(z),\quad f^{n}(z),$$

qui servent à déterminer les racines d'après la méthode de Fourier.

Théorème. — *Quelle que soit la valeur t, si l'on prend dans l'expression* $t \pm 4\sqrt[2n]{\dfrac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}$ *le radical avec un signe contraire à celui de la fraction* $\dfrac{f(t)}{f'(t)}$, *le nombre des variations de signes dans la série*

$$f(z),\quad f'(z),\ldots,\quad f^{(n-1)}(z),\quad f^{(n)}(z),$$

où

$$f(z) = z^n + A'z^{n-1} + A''z^{n-2} + \ldots,$$

ne saurait rester le même, si l'on y met consécutivement pour z la valeur de t et celle de $t \pm 4\sqrt[2n]{\dfrac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}$.

Il se présente plusieurs cas différents dans la démonstration de ce théorème, suivant le signe des quantités $f(t)$ et $f'(t)$. Nous nous bornerons à considérer le cas où ces deux quantités auront le signe $+$; mais le raisonnement que nous suivrons dans cette occasion s'appliquera facilement à tous les autres cas.

En supposant les deux grandeurs $f(t)$ et $f'(t)$ positives, nous devrons prendre dans l'expression $t \pm 4\sqrt[2n]{\dfrac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}$ le radical avec le signe $-$, et nous aurons à démontrer que, dans le cas de

$$f(t) > 0 \quad \text{et} \quad f'(t) > 0,$$

le nombre de variations de signes de la série

$$f(z),\quad f'(z),\quad f''(z),\ldots,\quad f^{(n-1)}(z),\quad f^{(n)}(z)$$

n'est pas le même pour $z = t$ et pour $z = t - 4\sqrt[2n]{\dfrac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}$.

Pour le démontrer, nous observerons qu'il est évident que toutes les fois qu'entre les limites indiquées ci-dessus l'une des deux fonctions $f(z)$ ou $f'(z)$, ou toutes les deux à la fois, s'évanouissent, le nombre des variations de signes dans la série

$$f(z),\quad f'(z),\ldots,\quad f^{(n-1)}(z),\quad f^{(n)}(z)$$

doit varier; quant à l'hypothèse qu'aucune de ces fonctions ne devient zéro entre les limites que nous considérons, il est aisé de démontrer, à l'aide du théorème précédent, qu'elle ne peut avoir lieu.

En effet, si $f(t) > 0$ et $f'(t) > 0$, et si en même temps les équations $f(z) = 0$ et $f'(z) = 0$ n'avaient pas de racines entre

$$z = t \quad \text{et} \quad z = t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}},$$

les fonctions $f(z)$ et $f'(z)$ devraient conserver, entre ces limites, le signe $+$: donc on aurait

$$f\left[t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}\right] > 0 \quad \text{et} \quad f\left[t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}\right] < f(t),$$

et la valeur numérique de

$$f(t) - f\left[t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}},\right]$$

devrait être inférieure à la valeur numérique de $f(t)$, ce qui, en vertu d'un théorème précédent, est impossible; car la différence $f(b) - f(a)$ pour $b = t$ et $a = t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}$, d'après ce théorème, doit surpasser

$$2(n-1)\pi\left(\frac{b-a}{4}\right)^n = 2(n-1)\pi\left[\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}\right]^n = f(t).$$

En appliquant ce dernier théorème au cas où l'équation

$$z^n + A'z^{n-1} + A''z^{n-2} + \ldots = 0$$

n'a pas de racines imaginaires, et observant que dans ce cas tout changement du nombre des variations de signes de la série

$$f(z),\quad f'(z),\ldots,\quad f^{(n-1)}(z),\quad f^{(n)}(z)$$

indique la présence d'une racine de l'équation $f(z) = 0$ entre les valeurs de z, nous sommes conduit au théorème que voici :

Théorème. — *Quelle que soit la grandeur t, on trouvera toujours au moins une racine de l'équation* $f(z) = z^n + A' z^{n-1} + A'' z^{n-2} + \ldots = 0$, *entre les limites t et* $t \pm \sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}$, *en prenant dans ce dernier radical le signe contraire à celui de la fraction* $\frac{f(t)}{f'(t)}$, *si toutefois l'équation proposée n'a pas de racines imaginaires.*