JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. TCHEBICHEF

Sur les quadratures

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 19 (1874), p. 19-34.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1874_2_19__19_0>

SUR LES QUADRATURES;

PAR M. P. TCHEBICHEF.

(Lu au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, à Lyon.)

1. Dans l'Ouvrage très-important que M. Hermite vient de publier sur l'Analyse mathématique, l'illustre géomètre donne une nouvelle formule pour évaluer approximativement la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Dans cette formule, toutes les valeurs de la fonction $\varphi(x)$ entrent avec un même coefficient; c'est ce qui apporte une différence essentielle entre la formule de M. Hermite et celle de Gauss, et ce qui en rend très-commode l'application numérique. L'utilité des formules approximatives de ce genre m'engage à présenter quelques réflexions sur la recherche de ces formules.

Nous supposerons que, la fonction $F(x)$ étant donnée, on cherche à exprimer le plus près possible les intégrales de la forme

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\varphi(x)\,dx,$$

quelle que soit la fonction $\varphi(x)$, par la formule

$$k[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)],$$

où $k, x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des valeurs indépendantes de la fonction $\varphi(x)$. Comme cette formule ne contient que $n+1$ quantités $k, x_1, x_2, \ldots, x_n$

dont on puisse disposer, il est impossible de l'identifier avec la valeur de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \mathrm{F}(x)\,\varphi(x)\,dx$ au delà des termes qui contiennent les n premières dérivées de la fonction $\varphi(x)$, et, par conséquent, on aura

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} \mathrm{F}(x)\,\varphi(x)\,dx - k[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)] \\ &\quad = k_1\,\varphi^{(n+1)}(0) + k_2\,\varphi^{(n+2)}\varphi(0)+\ldots, \end{aligned}\right.$$

en désignant par $k_1, k_2, \ldots$ les coefficients de $\varphi^{(n+1)}(0)$, $\varphi^{(n+2)}(0), \ldots$ dans l'expression de la différence

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{F}(x)\,\varphi(x)\,dx - k[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)],$$

que l'on trouve en développant, d'après la formule de Maclaurin, la fonction $\varphi(x)$ sous le signe de l'intégrale et les valeurs $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)$ qui sont hors ce signe.

2. Pour trouver, d'après la formule (1), tant qu'elle est possible, la valeur du coefficient k et les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la variable x, nous remarquons que cette formule, dans le cas particulier de

$$\varphi(x) = \frac{1}{z-x},$$

z étant une quantité quelconque, se réduit à l'égalité

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{F}(x)}{z-x}\,dx - k\left(\frac{1}{z-x_1}+\frac{1}{z-x_2}+\cdots+\frac{1}{z-x_n}\right) \\ &\quad = 1.2.3\ldots(n+1)k_1 z^{-n-2} + 1.2.3\ldots(n+2)k_2 z^{-n-3}+\ldots, \end{aligned}$$

où $k, k_1, k_2, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des valeurs indépendantes de z. D'autre part, en dénotant par $f(z)$ le produit

$$(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n),$$

on a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-x_1}+\frac{1}{z-x_2}+\cdots+\frac{1}{z-x_n},$$

et, par suite, la formule précédente se réduit à celle-ci :

$$(2)\quad \int_{-1}^{+1}\frac{F(x)}{z-x}dx = k\frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{1.2.3\ldots(n+1)k_1}{z^{n+2}} + \frac{1.2.3\ldots(n+2)k_2}{z^{n+3}} + \ldots$$

En multipliant cette formule par z et en remarquant que, pour $z=\infty$, les valeurs

$$z\int_{-1}^{+1}\frac{F(z)}{z-x}dx = \int_{-1}^{+1}\frac{F(x)}{1-\frac{x}{z}}dx,$$

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1}{1-\frac{x_1}{z}} + \frac{1}{1-\frac{x_2}{z}} + \cdots + \frac{1}{1-\frac{x_n}{z}},$$

$$\frac{1.2.3\ldots(n+1)k_1}{z^{n+1}},\quad \frac{1.2.3\ldots(n+2)k_2}{z^{n+2}},\ldots$$

sont respectivement égales à

$$\int_{-1}^{+1}F(x)\,dx,\quad n,\quad 0,\quad 0,\ldots,$$

on parvient à cette égalité

$$\int_{-1}^{+1}F(x)\,dx = nk,$$

ce qui nous donne, pour la détermination du coefficient k, la formule suivante :

$$k = \frac{1}{n}\int_{-1}^{+1}F(x)\,dx.$$

3. Pour déterminer la fonction

$$f(z) = (z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n),$$

nous remarquons que la formule (2), étant intégrée par rapport à z, nous donne

$$\int_{-1}^{+1}F(x)\log(z-x)\,dx = k\log\frac{f(z)}{C} - \frac{1.2.3\ldots nk_1}{z^{n+1}} - \frac{1.2.3\ldots(n+1)k_2}{z^{n+2}} - \ldots,$$

où C est une constante, et de là

$$f(z)e^{-\frac{1.2.3\ldots nk_1}{kz^{n+1}}-\frac{1.2.3\ldots(n+1)k_2}{kz^{n+2}}-\ldots}=\mathrm{C}e^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1}\mathrm{F}(x)\log(z-x)\,dx}.$$

Comme la fonction cherchée

$$f(z)=(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n)$$

est de degré n et que l'expression

$$e^{-\frac{1.2.3\ldots nk_1}{k_1z^{n+1}}-\frac{1.2.3\ldots(n+1)}{k_2z^{n+2}}-\ldots}$$

ne diffère de 1 que par les puissances de z inférieures à z^{-n}, il est clair que la partie entière du premier membre de la formule trouvée est égale à la fonction $f(z)$, et, par conséquent, on aura

$$f(z)=\mathrm{EC}e^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1}\mathrm{F}(x)\log(z-x)\,dx}$$

ou

$$f(z)=\mathrm{CE}e^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1}\mathrm{F}(x)\log(z-x)\,dx}, \tag{3}$$

en désignant par E la partie entière de la fonction mise sous ce signe. Dans cette formule, la valeur de la constante k, comme nous l'avons vu, est donnée par l'équation

$$k=\frac{1}{n}\int_{-1}^{+1}\mathrm{F}(x)\,dx. \tag{4}$$

Quant à la constante C, on trouvera aisément sa valeur en remarquant que le coefficient de z^n, dans la fonction cherchée, est égal à 1; mais nous n'insisterons pas sur la recherche de la valeur de cette constante, vu qu'elle peut être toujours supprimée sans modifier l'équation

$$f(z)=\mathrm{CE}e^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1}\mathrm{F}(x)\log(z-x)\,dx}=0,$$

dont les racines présentent les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans la formule en question

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{F}(x)\varphi(x)dx = k[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)].$$

4. Passant aux applications, nous ferons d'abord

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

ce qui est le cas de M. Hermite, et où l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{F}(x)\varphi(x)\,dx$$

se réduit à

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Pour cette valeur de $\mathrm{F}(x)$, on trouve

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{F}(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi,$$

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{F}(x)\log(z-x)\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{\log(z-x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi \log\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2};$$

donc, d'après (4),

$$k = \frac{\pi}{n},$$

et, d'après (3), l'équation $f(z) = 0$, qui détermine les valeurs de x_1, $x_2, \ldots, x_n$, se réduit à

$$\mathrm{E}e^{n\log\frac{z+\sqrt{1-z^2}}{2}} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{E}\left(\frac{z+\sqrt{1-z^2}}{2}\right)^n = 0,$$

résultat identique avec celui de M. Hermite, vu que la partie entière de la fonction $\left(\frac{z+\sqrt{1-z^2}}{2}\right)^n$ est égale à

$$\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x).$$

5. Pour montrer une autre application des formules que nous venons de donner, nous poserons maintenant

$$F(x) = 1,$$

ce qui est le cas où l'intégrale $\int_{-1}^{+1} F(x)\,\varphi(x)\,dx$ se réduit à

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx,$$

intégrale pour laquelle Gauss a donné sa formule de quadrature. Comme on trouve

$$\int_{-1}^{+1} dx = 2, \quad \int_{-1}^{+1} \log(z-x)\,dx = \log\frac{(z+1)^{z+1}}{(z-1)^{z-1}} - 2,$$

on conclut, d'après le n° **3**, que la valeur approchée de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx$ sera donnée par la formule

$$k[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)],$$

quand on fait $k = \frac{2}{n}$, et que l'on prend pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de l'équation

$$\mathrm{E}e^{\frac{n}{2}\left(\log\frac{(z+1)^{z+1}}{(z-1)^{z-1}} - 2\right)} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{E}\frac{(z+1)^{\frac{n(z+1)}{2}}}{(z-1)^{\frac{n(z-1)}{2}}} = 0,$$

équation qu'on peut mettre, par le développement en séries, sous la forme suivante :

$$(5) \qquad \mathrm{E}z^n e^{-\frac{n}{2.3z^2} - \frac{n}{4.5z^4} - \frac{n}{6.7z^6} - \ldots} = 0.$$

6. En donnant à n les valeurs les plus simples, telles que

$$n = 2, 3, 4, 5, 6, 7,$$

on trouve que, pour ces valeurs de n, l'équation (5) devient respectivement

$$z^2 - \frac{1}{3} = 0,$$

$$z^3 - \frac{1}{2} z = 0,$$

$$z^4 - \frac{2}{3} z^2 + \frac{1}{45} = 0,$$

$$z^5 - \frac{5}{6} z^3 + \frac{7}{72} z = 0,$$

$$z^6 - z^4 + \frac{1}{5} z^2 - \frac{1}{135} = 0,$$

$$z^7 - \frac{7}{6} z^5 + \frac{119}{360} z^3 - \frac{149}{6480} z = 0,$$

et, en résolvant ces équations, on obtient les systèmes suivants des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$n = 2.$

$$x_1 = -0,816479,$$
$$x_2 = +0,816479;$$

$n = 3.$

$$x_1 = -0,707166,$$
$$x_2 = 0,$$
$$x_3 = +0,707166;$$

$n = 4.$

$$x_1 = -0,794622,$$
$$x_2 = -0,187597,$$
$$x_3 = +0,187597,$$
$$x_4 = 0,794622;$$

$n = 5.$

$$x_1 = -0,832437,$$
$$x_2 = -0,374542,$$
$$x_3 = 0,$$
$$x_4 = +0,374542,$$
$$x_5 = +0,832437;$$

$$n=6.$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= -0{,}866249,\\
x_2 &= -0{,}422540,\\
x_3 &= -0{,}266603,\\
x_4 &= +0{,}266603,\\
x_5 &= +0{,}422540,\\
x_6 &= +0{,}866249;
\end{aligned}$$

$$n=7.$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= -0{,}883854,\\
x_2 &= -0{,}529706,\\
x_3 &= -0{,}323850,\\
x_4 &= 0,\\
x_5 &= +0{,}323850,\\
x_6 &= +0{,}529706,\\
x_7 &= +0{,}883854.
\end{aligned}$$

Avec ces valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la formule

$$\frac{2}{n}[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)]$$

donne l'expression approximative de l'intégrale $\int_{-1}^{+1}\varphi(x)dx$, qui, dans certains cas, est plus commode pour les applications que ne l'est celle de Gauss; car, dans cette dernière formule, les valeurs $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2),\ldots, \varphi(x_n)$ entrent avec des coefficients différents. Comme notre expression de l'intégrale $\int_{-1}^{+1}\varphi(x)dx$ n'est exacte que jusqu'aux termes en $\varphi^{(n+1)}(0)$, $\varphi^{(n+2)}(0),\ldots$, on devra y prendre, en général, plus de termes que dans la formule de Gauss. Néanmoins, dans le cas où les valeurs de $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2),\ldots, \varphi(x_n)$, d'après lesquelles on détermine l'intégrale $\int_{-1}^{+1}\varphi(x)dx$, sont affectées d'erreurs inconnues, notablement plus grandes que celle qui résulte des termes rejetés, la formule approchée que nous venons de trouver doit être préférée à celle de Gauss même par rapport au degré de précision, vu que, dans cette formule approchée, la somme des carrés de coefficients, à cause de leur égalité, a la plus petite valeur possible.

7. Revenant au cas résolu par M. Hermite, nous remarquons que l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$, pour $x = \cos\theta$, se réduit à $\int_0^\pi \varphi(\cos\theta)d\theta$; donc la formule donnée par lui peut avoir des applications très-utiles dans la recherche des valeurs approchées du premier terme du développement de $\varphi(\cos\theta)$ en série

$$A_0 + A_1 \cos\theta + A_2 \cos 2\theta + \ldots.$$

Pour trouver une expression pareille du coefficient A_1, on devrait faire, dans les formules du n° **3**,

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Or, pour cette valeur de $F(x)$, l'intégrale $\int_{-1}^{+1} F(x)dx$, qui entre dans les formules du n° **3**, se réduit à zéro, ce qui fait voir clairement que, pour le cas en question, ces formules ne sont pas applicables. Nous allons montrer le parti qu'on peut cependant tirer, dans ce cas, de la méthode exposée plus haut.

En remplaçant, dans l'intégrale $\int_{-1}^{+1} F(x)\varphi(x)dx$, la fonction $\varphi(x)$ par son développement en série

$$\varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1}x + \frac{\varphi''(0)}{1.2}x^2 + \frac{\varphi'''(0)}{1.2.3}x^3 + \ldots,$$

le terme du résultat qui contient $\varphi(0)$ s'annule toutes les fois que l'intégrale $\int_{-1}^{+1} F(x)dx$ est égale à zéro; mais il n'en est plus ainsi, évidemment, de son expression sous la forme

$$k[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)],$$

à moins qu'on ne prenne, dans cette formule, la moitié des termes avec le signe —. Nous allons donc chercher à exprimer la valeur approchée de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} F(x)\varphi(x)dx$, dans la supposition de $\int_{-1}^{+1} F(x)dx$, par la formule

$$k[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_m)-\varphi(x_{m+1})-\varphi(x_{m+2})-\ldots-\varphi(x_{2m})],$$

où il y a m termes avec le signe $+$ et m termes avec le signe —.

8. Comme, dans la formule

$$k[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_m)-\varphi(x_{m+1})-\varphi(x_{m+2})-\ldots-\varphi(x_{2m})],$$

il y a $2m+1$ valeurs, savoir: $k, x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{2m}$ dont on peut disposer, et que, par sa composition, le terme en $\varphi(0)$ s'annule, on peut identifier cette formule avec l'intégrale $\int_{-1}^{+1} F(x)\varphi(x)dx$ jusqu'aux termes qui contiennent les $2m+1$ premières dérivées de $\varphi(x)$, ce qui nous donne l'équation

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} F(x)\varphi(x) = k[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots\\ + \varphi(x_m) - \varphi(x_{m+1}) - \varphi(x_{m+2}) - \ldots - \varphi(x_{2m})]\\ + k_1\varphi^{2m+2}(0) + k_2\varphi^{2m+3}(0) + \ldots.\end{aligned}$$

En suivant la même marche que dans les n^{os} **2**, **3**, nous trouverons, d'après cette équation, les valeurs des quantités $k, x_1, x_2, \ldots, x_{2m}$. En effet, posant

$$\varphi(x) = \frac{1}{z-x},$$

l'équation précédente se réduit à celle-ci:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} \frac{F(x)}{z-x}dx = k\Big(\frac{1}{z-x_1} + \frac{1}{z-x_2} + \cdots\\ + \frac{1}{z-x_m} - \frac{1}{z-x_{m+1}} - \frac{1}{z-x_{m+2}} - \ldots - \frac{1}{z-x_{2m}}\Big)\\ + \frac{1.2.3\ldots(2m+2)k_1}{z^{2m+3}} + \frac{1.2.3\ldots(2m+3)k_2}{z^{2m+4}} + \ldots.\end{aligned}$$

Faisant ensuite

$$f_0(z) = (z - x_1)(z - x_2)\ldots(z - x_m),$$
$$f_1(z) = (z - x_{m+1})(z - x_{m+2})\ldots(z - x_{2m}),$$

et remarquant que, pour ces valeurs de $f_0(z)$, $f_1(z)$, on a

$$\frac{f_0'(z)}{f_0(z)} = \frac{1}{z - x_1} + \frac{1}{z - x_2} + \cdots + \frac{1}{z - x_m},$$
$$\frac{f_1'(z)}{f_1(z)} = \frac{1}{z - x_{m+1}} + \frac{1}{z - x_{m+2}} + \cdots + \frac{1}{z - x_{2m}},$$

on peut mettre l'équation sous la forme suivante :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{F}(z)}{z - x}dx = k\left[\frac{f_0'(z)}{f_0(z)} - \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\right] + \frac{1.2.3\ldots(2m+2)k_1}{z^{2m+3}} + \frac{1.2.3\ldots(2m+3)k_2}{z^{2m+4}} + \cdots:$$

d'où, en intégrant par rapport à z, on tire

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{F}(z)\log(z - x)dx = k\log\frac{f_0(z)}{f_1(z)} - \frac{1.2.3\ldots(2m+1)k_1}{z^{2m+2}} - \frac{1.2.3\ldots(2m+2)k_2}{z^{2m+3}} + \cdots.$$

La constante introduite par l'intégration se réduit à zéro, vu que tous les termes s'annulent pour $z = \infty$.

D'après cette équation et en faisant, pour abréger,

$$\frac{1.2.3\ldots(2m+1)k_1}{k} = \mathrm{L}_1, \quad \frac{1.2.3\ldots(2m+2)k_2}{k} = \mathrm{L}_2, \ldots,$$

on trouve

$$\frac{f_0(z)}{f_1(z)} e^{-\mathrm{L}_1 z^{-2m-2} - \mathrm{L}_2 z^{-2m-3} - \cdots} = e^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1}\mathrm{F}(x)\log(z-x)dx}.$$

Les fonctions $f_0(z)$, $f_1(z)$ étant de même degré, la fraction $\frac{f_0(z)}{f_1(z)}$ est du degré zéro; de plus, l'expression $e^{-\mathrm{L}_1 z^{-2m-2} - \mathrm{L}_2 z^{-2m-3} - \cdots}$ ne diffère de 1 que par les puissances de z inférieures à z^{-2m-1}; par conséquent, l'équation trouvée nous montre que la fraction $\frac{f_0(z)}{f_1(z)}$ ne diffère de l'expression $e^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx}$ que par les termes qui renferment les puissances de z moins élevées que z^{-2m-1} et, par suite, moins élevées que le degré de la fraction $\frac{1}{z[f_1(z)]^2}$; car la fonction $f_1(z)$, comme nous l'avons vu, n'est que du degré m; mais, on le sait, la fraction $\frac{f_0(z)}{f_1(z)}$ ne peut donner une valeur approchée d'une fonction quelconque exacte jusqu'à l'ordre de $\frac{1}{z(f_1 z)^2}$, à moins qu'elle ne soit l'une des fractions convergentes qu'on trouve par le développement en fraction continue, et que le quotient complet, correspondant à cette fraction convergente, ne soit dépourvu du terme en $\frac{1}{z}$. En partant de là, il est aisé de trouver et la constante k et les fonctions $f_0(z)$, $f_1(z)$, qui déterminent les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{2m}$. A cet effet, on développera l'expression $e^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx}$ en fraction continue, en s'arrêtant au quotient qui correspond à une fraction convergente dont les termes sont du degré m. Égalant à zéro le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans l'expression complète de ce quotient, on aura l'équation qui déterminera la valeur de la constante k, et, en mettant la valeur de k, ainsi déterminée, dans deux termes de la fraction convergente, on aura les fonctions cherchées $f_0(z)$, $f_1(z)$.

9. Pour montrer, sur un exemple, l'usage de ce que nous venons d'exposer, supposons qu'il s'agisse de trouver l'expression approximative de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} x\varphi(x)\,dx$. Pour cela on posera, dans les formules du numéro précédent,

$$F(x) = x.$$

Pour cette valeur de $F(x)$, on obtient

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx = \int_{-1}^{+1} x\log(z-x)\,dx = \frac{z^2-1}{2}\log\frac{z+1}{z-1} - z,$$

$$e^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx} = e^{\frac{z^2-1}{2}\log\frac{z+1}{z-1} - z}.$$

En développant la dernière expression en fraction continue, on trouve que le quotient complet, correspondant à une fraction convergente dont les termes sont du premier degré, est égal à

$$3kz + \left(\frac{3}{5}k - \frac{1}{9k}\right)\frac{1}{z} + \cdots,$$

et que cette fraction est égale à

$$\frac{3kz - 1}{3kz + 1};$$

d'où nous concluons que, dans l'expression approximative de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} x\varphi(x)\,dx$ par la formule $k[\varphi(x_1) - \varphi(x_2)]$, on doit prendre, pour k, une racine de l'équation

$$\frac{3}{5}k - \frac{1}{9k} = 0,$$

et, pour x_1, x_2 respectivement, les racines des équations

$$3kz - 1 = 0, \quad 3kz + 1 = 0.$$

On trouve ainsi deux valeurs de k :

$$k = +\sqrt{\frac{5}{27}}, \quad k = -\sqrt{\frac{5}{27}},$$

et deux systèmes des valeurs de x_1, x_2 :

$$x_1 = +\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{3}{5}},$$

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_2 = +\sqrt{\frac{3}{5}};$$

mais, de ces doubles valeurs de k, x_1, x_2, il ne résulte évidemment qu'une seule valeur de l'expression cherchée, savoir :

$$\sqrt{\frac{5}{27}}\left[\varphi\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) - \varphi\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right].$$

Pour trouver une expression approximative à quatre termes de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} x\varphi(x)dx$, on prendra le quotient de la même fraction continue qui correspond à la fraction convergente dont les termes sont du second degré. Comme la valeur complète de ce quotient s'exprime par la série

$$90kz - \frac{5832k^4 - 12163k^2 - 350}{243k^2 - 15}\frac{1}{z} + \cdots$$

et qu'il correspond à la fraction convergente

$$\frac{270k^2z^2 - 90kz + 10 - 54k^2}{270k^2z^2 + 90kz + 10 - 54k^2},$$

on trouvera les valeurs de la constante k et de x_1, x_2, x_3, x_4 par les équations

$$\begin{gathered} 5832k^4 - 12163k^2 - 350 = 0, \\ 270k^2z^2 - 90kz + 10 - 54k^2 = 0, \\ 270k^2z^2 + 90kz + 10 - 54k^2 = 0. \end{gathered}$$

En les résolvant, on parvient à cette expression approximative de l'intégrale en question

$$0{,}41621[\varphi(0{,}78326) + \varphi(0{,}01762) - \varphi(-0{,}01762) - \varphi(-0{,}78326)].$$

10. En passant à la recherche des expressions approximatives de l'intégrale $\int_0^\pi \cos\theta\varphi(\cos\theta)d\theta$ ou $\int_{-1}^{+1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\varphi(x)dx$, nous poserons, dans nos formules,

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pour cette valeur de $F(x)$, on obtient

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)dx = \int_{-1}^{+1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\log(z-x)dx = -\pi(z - \sqrt{z^2-1}),$$

$$e^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)dx} = e^{-\frac{\pi}{k}(z-\sqrt{z^2-1})}.$$

Développant la dernière expression en fraction continue, on trouve les fractions convergentes

$$\frac{4kz-\pi}{4kz+\pi},\quad \frac{48k^2z^2-12k\pi z+\pi^2-12k^2}{48k^2z^2+12k\pi z+\pi^2-12k^2},\ldots,$$

qui correspondent aux quotients complets

$$4kz+\pi-\frac{12k^2-\pi^2}{12k}\frac{1}{z}+\ldots,\quad 12kz-\frac{144k^4-60\pi^2k^2+\pi^4}{(12k^2-\pi^2)\pi}\frac{1}{z}+\ldots;$$

d'où, d'après le n° **8** : 1°, pour la détermination de k, x_1, x_2 dans l'expression approximative de l'intégrale $\int_0^\pi \cos\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta$ par la formule $k[\varphi(x_1)-\varphi(x_2)]$, résultent ces équations

$$12k^2-\pi^2=0,\quad 4kz-\pi=0,\quad 4kz+\pi=0;$$

et 2°, pour la détermination d'une expression semblable à quatre termes, les équations

$$\begin{gathered}144k^4-60\pi k^2+\pi^4=0,\\ 48k^2z^2-12k\pi z+\pi^2-12k^2=0,\\ 48k^2z^2+12k\pi z+\pi^2-12k^2=0.\end{gathered}$$

Les expressions approximatives de l'intégrale $\int_0^\pi \cos\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta$, que l'on obtient d'après ces équations, se réduisent à ceci :

$$\int_0^\pi \cos\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta=\frac{\pi}{\sqrt{12}}\{\varphi(\cos\theta_0)-\varphi[\cos(\pi+\theta_0)]\},$$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta=0{,}151765\{&\varphi(\cos\theta_1)+\varphi(\cos\theta_2)\\ &-\varphi[\cos(\pi+\theta_1)]-\varphi[\cos(\pi+\theta_2)]\},\end{aligned}$$

où

$$\theta_0=30°,\quad \theta_1=12°\,32'\,40'',\quad \theta_2=47°\,51'\,32''.$$

On trouverait des expressions plus approchées de l'intégrale $\int_0^\pi \cos\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta$, en prenant plus de termes dans la formule

$$k[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_m)-\varphi(x_{m+1})-\varphi(x_{m+2})-\ldots-\varphi(x_{2m})].$$

Nous n'insisterons pas sur la recherche de ces formules; nous remarquerons seulement que, en remplaçant dans toutes ces formules les termes de la forme $\varphi(\cos\theta_\lambda)$ par

$$\frac{1}{l}\left[\varphi\left(\cos\frac{\theta_\lambda}{l}\right)+\varphi\left(\cos\frac{2\pi+\theta_\lambda}{l}\right)+\cdots+\varphi\left(\cos\frac{2(l-1)\pi+\theta_\lambda}{l}\right)\right],$$

où l est un nombre entier, on obtient les expressions approximatives de l'intégrale $\int_0^\pi \cos(l\theta)\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta$.

Ainsi, en partant des formules précédentes, qui donnent les valeurs approchées, à deux et quatre termes, de l'intégrale $\int_0^\pi \cos\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta$, on passerait aux expressions approximatives à $2l$ et $4l$ de l'intégrale $\int_0^\pi \cos(l\theta)\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta$, expressions qui peuvent être présentées ainsi :

$$\frac{\pi}{\sqrt{12}\,l}\sum_{\mu=0}^{\mu=2l}(-1)^\mu\varphi\left(\cos\frac{\mu\pi+\theta_0}{l}\right),$$

$$\frac{0,151765\pi}{l}\sum_{\mu=0}^{\mu=2l}(-1)^\mu\left[\varphi\left(\cos\frac{\mu\pi+\theta_1}{l}\right)+\varphi\left(\cos\frac{\mu\pi+\theta_2}{l}\right)\right],$$

où les signes de sommation s'étendent à $\mu=0, 1, 2, \ldots, 2l-1$.