JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Extrait d'une Lettre adressée à M. Besge

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 19 (1874), p. 189-191.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1874_2_19__189_0>

Extrait d'une Lettre adressée à M. Besge;

PAR M. J. LIOUVILLE.

« ... En désignant par x une variable indépendante, et par n une constante, puis considérant l'équation

$$U = \frac{\sin^n x}{n} e^{nx\sqrt{-1}},$$

on trouve tout de suite que

$$\frac{dU}{dx} = \sin^{n-1} x\, e^{(n+1)x\sqrt{-1}},$$

d'où résulte naturellement l'intégrale indéfinie

$$\text{(A)} \qquad \int \sin^{n-1} x\, e^{(n+1)x\sqrt{-1}} dx = \frac{\sin^n x}{n} e^{nx\sqrt{-1}}.$$

» Si l'on mettait pour les exponentielles imaginaires leurs valeurs exprimées en sinus et cosinus, on serait amené à décomposer cette équation en deux autres, savoir :

$$\text{(1)} \qquad \int \sin^{n-1} x \cos(n+1) x dx = \frac{\sin^n x \cos nx}{n}$$

et

$$(2)\qquad \int \sin^{n-1} x \sin(n+1) x\,dx = \frac{\sin^n x \sin nx}{n},$$

qui ont été indiquées déjà par Euler dans un de ses Mémoires posthumes [*], et dont la vérification directe, sans être difficile, donne lieu cependant pour chacune d'elles à des calculs plus longs et plus compliqués que celle de notre équation unique (A).

» On condensera semblablement en une seule formule les deux formules intégrales suivantes, qu'Euler donne aussi dans le Mémoire cité :

$$(3)\qquad \int \cos^{n-1} x \cos(n+1) x\,dx = \frac{1}{n} \cos^n x \sin nx$$

et

$$(4)\qquad \int \cos^{n-1} x \sin(n+1) x\,dx = -\frac{1}{n} \cos^n x \cos nx;$$

il suffira pour cela d'ajouter les équations (3) et (4) membre à membre, après avoir multiplié la seconde par le facteur $\sqrt{-1}$. On trouvera ainsi l'équation

$$(\mathrm{B})\qquad \int \cos^{n-1} x\, e^{(n+1)x\sqrt{-1}}\,dx = -\sqrt{-1}\,\frac{\cos^n x}{n}\, e^{nx\sqrt{-1}},$$

qui équivaut à ces deux-là et qui peut les remplacer.

» Je vous renvoie pour de plus longs détails, et pour des développements curieux, au Mémoire d'Euler déjà cité. Il me suffit d'avoir

---

[*] Ce Mémoire a pour titre : *Quatuor theoremata notatu digna in Calculo integrali.* On le trouve dans les *Nova Acta Acad. Petrop.* pour 1789. (J. L.)

attiré sur ce Mémoire votre attention exercée : je ne puis avoir d'autre objet.

» J'ajouterai cependant que, la constante n étant arbitraire dans nos formules, on peut effectuer sous le signe intégral des différentiations par rapport à ce paramètre, d'où naîtront de nouvelles formules en apparence plus compliquées, puisqu'elles contiendront des logarithmes. »