JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. ZOLOTAREFF

Sur la Méthode d'intégration de M. Tchebichef

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 19 (1874), p. 161-188.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1874_2_19__161_0>

Sur la Méthode d'intégration de M. Tchebichef;

PAR M. G. ZOLOTAREFF,
de Saint-Pétersbourg.

Dans une Note insérée dans le *Bulletin de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg* [*], M. Tchebichef a fait connaître, sans démonstration, sa méthode d'intégration de la différentielle

$$\frac{(x+\mathrm{A})\,dx}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}$$

où α, β, γ, δ désignent des nombres rationnels. Suivant la marche indiquée par M. Tchebichef, on obtient cette intégrale une fois qu'il est possible de l'exprimer en termes finis; on démontre, dans le cas contraire, l'impossibilité d'une pareille expression.

Cette Note de M. Tchebichef a été réimprimée dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville (1864, p. 225 et suiv.). Il est aisé de voir, d'après les recherches d'Abel et de Jacobi, que cette méthode est liée intimement au développement du radical

$$\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta},$$

en fraction continue et aux fonctions elliptiques.

En étudiant cette liaison, je suis parvenu non-seulement à démontrer la méthode de M. Tchebichef, mais encore à trouver quelques relations nouvelles qui se rattachent au développement de

$$\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}$$

en fraction continue.

[*] Voir *Bulletin de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. III, 1860.

Je me propose de démontrer, dans ce Mémoire, la méthode d'intégration de M. Tchebichef.

1. Considérons, avec Jacobi [*], deux variables x et z liées par l'équation

$$(1)\quad (ax^2+2bx+c)z^2+2(a'x^2+2b'x+c')z+(a''x^2+2b''x+c'')=0,$$

ou, ce qui revient au même, par l'équation

$$(2)\quad (az^2+2a'z+a'')x^2+2(bz^2+2b'z+b'')x+(cz^2+2c'z+c'')=0.$$

En posant

$$\begin{aligned}(a'x^2+2b'x+c')^2-(a''x^2+2b''x+c'')(ax^2+2bx+c)&=\mathrm{R}x,\\ (bz^2+2b'z+b'')^2-(az^2+2a'z+a'')(cz^2+2c'z+c'')&=\mathrm{R}_1z,\end{aligned}$$

on obtient, en vertu des équations précédentes,

$$(3)\qquad z=\frac{-(a'x^2+2b'x+c')\pm\sqrt{\mathrm{R}x}}{ax^2+2bx+c},$$

$$(4)\qquad x=\frac{-(bz^2+2b'z+b'')\pm\sqrt{\mathrm{R}_1z}}{az^2+2a'z+a''}.$$

L'équation (1) différentiée nous donne

$$\begin{aligned}&[(ax^2+2bx+c)z+(a'x^2+2b'x+c')]\,dz\\ &+[(az^2+2a'z+a'')x+(bz^2+2b'z+b'')]\,dx=0.\end{aligned}$$

Or des expressions de z et de x on déduit

$$\begin{aligned}(ax^2+2bx+c)z+(a'x^2+2b'x+c')&=\pm\sqrt{\mathrm{R}x},\\ (az^2+2a'z+a'')x+(bz^2+2b'z+b'')&=\pm\sqrt{\mathrm{R}_1z},\end{aligned}$$

et par suite

$$\frac{dz}{\sqrt{\mathrm{R}_1z}}=\pm\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}x}}.$$

[*] Jacobi, *Mathematische Werke*. Band. 3, p. 83.

Au moyen de l'équation (1), on peut transformer la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}$$

en celle de la forme

$$\frac{dz}{\sqrt{z^4+lz^3+mz^2+nz}},$$

c'est-à-dire telle que le polynôme placé sous le radical contienne le facteur z. Déterminons à cet effet les constantes a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', de sorte que $\mathrm{R}x$ soit égal à $x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, et que $\mathrm{R}_1 z$ ait la forme $z^4+lz^3+mz^2+nz$.

On a alors les équations suivantes :

$$a'^2-aa''=1,\quad 4a'b'-2ab''-2a''b=\alpha,$$
$$4b'^2+2a'c'-ac''-a''c-4bb''=\beta,$$
$$4b'c'-2bc''-2b''c=\gamma,\quad c'^2-cc''=\delta,$$
$$b^2-ac=1,\quad b''^2-a''c''=0.$$

Comme il n'y a ci-dessus que sept équations servant à déterminer les neuf inconnues a, b, c, ..., nous en pouvons choisir deux à volonté. La transformation employée par M. Tchebichef s'obtient en posant

$$a=0,\quad a''=0.$$

Des équations précédentes, il vient

$$b''=0,\quad a'=\pm 1,\quad b=\pm 1.$$

Prenons $a'=1$, $b=-1$.

Des mêmes équations on déduit

$$b'=\frac{\alpha}{4},\quad c'=\frac{1}{2}\left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right),\quad c''=\frac{\gamma}{2}-\frac{\alpha}{4}\left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right),$$

$$c=-\frac{\frac{1}{4}\left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)^2-\delta}{\frac{\alpha}{4}\left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)-\frac{\gamma}{2}}.$$

Égalant les coefficients des mêmes puissances de la variable dans les expressions $R_1 z$ et $z^4 + lz^3 + mz^2 + n$, on obtient

$$\begin{aligned} l &= -\alpha - \frac{(4\beta - \alpha^2)^2 - 64\delta}{2\alpha^3 - 8\alpha\beta + 16\gamma'}, \\ m &= -2\beta + \tfrac{3}{4}\alpha^2, \\ n &= -\gamma + \tfrac{1}{2}\alpha\beta - \tfrac{1}{8}\alpha^3. \end{aligned}$$

Quant aux signes devant les radicaux dans les formules (3) et (4), nous choisirons dans la première le signe négatif, et dans la seconde le signe positif.

D'après cela

$$z = \frac{x^2 + \frac{\alpha}{2} + \frac{4\beta - \alpha^2}{8} + \sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}{2x + \dfrac{\frac{1}{4}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)^2 - \delta}{\frac{\alpha}{4}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right) - \frac{\gamma}{2}}},$$

$$x = \frac{z^2 - \frac{\alpha}{2}z + \sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}{2z}.$$

Les équations précédentes nous conduisent à celles-ci :

$$\frac{dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}} = \frac{dz}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}},$$

$$\int \frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}} = \frac{1}{2}\int \frac{\left(z - \frac{\alpha}{2} + 2A\right)dz}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}} + \tfrac{1}{2}\log z.$$

C'est la transformation dont se sert M. Tchebichef dans son Mémoire.

2. Maintenant nous allons établir les conditions qui doivent être satisfaites pour que l'intégrale de la différentielle

$$\frac{(z + A)\,dz}{\sqrt{Rz}}$$

puisse s'exprimer en logarithmes.

Si cette intégrale s'exprime sous forme finie, elle s'obtient, comme on sait, d'après la formule

$$\lambda\int\frac{(z+\mathrm{A})\,dz}{\sqrt{\mathrm{R}z}}=\log\left(\mathrm{P}'+\mathrm{Q}'\sqrt{\mathrm{R}z}\right)+\text{const.},$$

où P' et Q' désignent les fonctions entières dont les degrés sont respectivement λ et $\lambda-2$, et qui satisfont à l'équation

$$\mathrm{P}'^2-\mathrm{Q}'^2\mathrm{R}z=1. \tag{5}$$

Dans le cas où $z=0$, on a $\mathrm{R}z=0$, $\mathrm{P}'=\pm 1$. On peut supposer d'ailleurs $\mathrm{P}'=1$; car, si l'on avait $\mathrm{P}'=-1$, l'équation (5) subsisterait encore pour les valeurs $-\mathrm{P}'$ et $-\mathrm{Q}'$.

Cela posé, nous pouvons écrire l'intégrale précédente comme il suit :

$$\lambda\int_0^z\frac{(z+\mathrm{A})\,dz}{\sqrt{\mathrm{R}z}}=\log\left(\mathrm{P}'+\mathrm{Q}'\sqrt{\mathrm{R}z}\right).$$

Soient g, g', g'' les trois racines de l'équation

$$z^3+lz^2+mz+n=0.$$

On peut supposer que, parmi les valeurs zéro, g, g', g'', il n'y en ait pas deux égales entre elles, car, dans le cas contraire, l'intégrale

$$\int\frac{(z+\mathrm{A})\,dz}{\sqrt{\mathrm{R}z}}$$

s'exprimerait sous forme finie, quel que soit le paramètre A; mais ce cas, nous le laissons de côté.

En remarquant que $\mathrm{R}z$ s'annule pour $z=g, g', g''$, on conclut de l'équation (5) que P est égal à ± 1 pour ces valeurs de z. On aura, par suite,

$$\lambda\int_0^g\frac{(z+\mathrm{A})\,dz}{\sqrt{\mathrm{R}z}}=\mu\pi i,\quad \lambda\int_{g'}^{g''}\frac{(z+\mathrm{A})\,dz}{\sqrt{\mathrm{R}z}}=\mu'\pi i,$$

où μ et μ' représentent des nombres entiers qui dépendent évidemment des chemins d'intégration; mais, dans le but que nous nous proposons, il faut exprimer, sous une autre forme, les conditions d'intégrabilité en logarithmes.

Réduisons pour cet effet l'intégrale

$$\int \frac{(z+\text{A})\,dz}{\sqrt{\text{R}z}}$$

à sa forme canonique.

En posant

$$z = \frac{g \sin^2 am\,u}{\sin^2 am\,u - \sin^2 am\,a},$$

$$x^2 = \frac{g''}{g'}\,\frac{g'-g}{g''-g}, \quad \sin^2 am\,a = \frac{g''-g}{g''},$$

et par conséquent

$$g'' = \frac{g}{\cos^2 am\,a}, \quad g' = \frac{g}{\Delta^2 \sin am\,a},$$

on a

$$\sqrt{\text{R}z} = \frac{g(g''-g)}{g''}\sqrt{g'(g''-g)}\,\frac{\sin am\,u \cos am\,u\,\Delta am\,u\,du}{(\sin^2 am\,u - \sin^2 am\,a)^2},$$

$$\frac{(z+\text{A})\,dz}{\sqrt{\text{R}z}} = \text{M}\,du - 2\,\frac{\sin am\,a \cos am\,a\,\Delta am\,a\,du}{\sin^2 am\,u - \sin^2 am\,a},$$

où

$$\text{M} = -2(\text{A}+g)\frac{g''}{g'(g''-g)^3}\sin^2 am\,a.$$

Donc

$$(6)\ \lambda\int_0^z \frac{(z+\text{A})\,dz}{\sqrt{\text{R}z}} = \log(\text{P}'+\text{Q}'\sqrt{\text{R}z}) = \lambda\left(\text{M} - 2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right)u + \lambda\log\frac{\text{H}(a+u)}{\text{H}(a-u)},$$

où Θ et H sont les fonctions jacobiennes. Pour déterminer les constantes a et A, remarquons que z reprend la même valeur toutes les fois qu'on augmente ou diminue u de 2K ou $2\text{K}'i$ et, par conséquent, de $2m\text{K}+2m'\text{K}'i$, m et m' désignant des nombres entiers. Dans ce cas, l'accroissement du second terme de l'équation (6) doit être égal à $2s\pi i$, où s est un nombre entier. Par conséquent

$$(7)\ \left\{\begin{aligned} &\lambda\left(\text{M} - 2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right)(2m\text{K}+2m'\text{K}'i) \\ &\quad + \lambda\log\frac{\text{H}(a+u+2m\text{K}+2m'\text{K}'i)}{\text{H}(a-u-2m\text{K}-2m'\text{K}'i)} - \lambda\log\frac{\text{H}(u+a)}{\text{H}(u-a)} = 2s\pi i.\end{aligned}\right.$$

D'autre part on a

$$\mathrm{H}(u + 2m'\mathrm{K}'i) = (-1)^{m'}\mathrm{H}(u)\, e^{-\frac{\pi i}{\mathrm{K}}(m'u + m'\mathrm{K}'i)},$$

$$\mathrm{H}(u + 2m\mathrm{K}) = (-1)^{m}\mathrm{H}(u),$$

et par suite

$$\frac{\mathrm{H}(u + a + 2m\mathrm{K} + 2m'\mathrm{K}'i)}{\mathrm{H}(a - u - 2m\mathrm{K} - 2m'\mathrm{K}'i)} = \frac{\mathrm{H}(a+u)}{\mathrm{H}(a-u)}\, e^{-\frac{2\pi i m' a}{\mathrm{K}}}.$$

D'après cela, l'équation (7) peut s'écrire

$$\lambda\left(\mathrm{M} - 2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right)(2m\mathrm{K} + 2m'\mathrm{K}'i) - \frac{2\pi i \lambda a m'}{\mathrm{K}} = 2s\pi i.$$

Posant dans cette équation $m = 1$, $m' = 0$ et désignant par ν' la valeur correspondante de s, on obtient

$$\mathrm{M} - 2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} = \frac{\nu'\pi i}{\lambda}. \tag{8}$$

Ensuite, faisant $m = 0$, $m = 1$, et désignant par $-\nu$ la valeur correspondante de s, on aura

$$a = \frac{\nu\mathrm{K} + \nu'\mathrm{K}'i}{\lambda}.$$

De l'équation (8), on déduit la valeur de M ou de A.

3. La détermination de l'intégrale $\int \frac{(z + \mathrm{A})\,dz}{\sqrt{\mathrm{R}z}}$, dans le cas où elle s'exprime en termes finis, se réduit, comme on sait, à la détermination des fonctions P et Q satisfaisant à l'équation

$$\mathrm{P}^2 - \mathrm{Q}^2\mathrm{R}z = a, \tag{9}$$

a désignant une constante. De toutes les solutions de l'équation (9), on peut naturellement préférer celle où P atteint le moindre degré possible. On sait que ces fonctions P et Q peuvent être trouvées au moyen du développement de $\sqrt{\mathrm{R}z}$ en fraction continue, et que leurs coefficients s'expriment rationnellement en ceux de $\mathrm{R}z$. Lorsque ces derniers sont rationnels, les coefficients de P et Q le seront aussi. Nous supposerons les coefficients l, m, n de Rz entiers.

Quant à l'équation (9), il y a deux cas à distinguer, savoir : 1° lorsque λ, degré de la fonction P, est un nombre impair; 2° lorsque λ est pair.

Nous allons démontrer actuellement que le second cas ne peut avoir lieu que lorsque Rz se décompose en deux facteurs du second degré à coefficients rationnels satisfaisant à certaines conditions que nous allons signaler ci-dessous.

Remarquant que, d'après l'équation (9), P^2 acquiert la valeur a, lorsque z s'annule, et désignant cette valeur par b^2, on peut mettre l'équation sous la forme qui suit

$$P - b^2 = Q^2 Rz,$$

d'où il vient

$$P - b = \pm Q_1^2 (z^2 + pz),$$
$$P + b = \pm Q_2^2 (z^2 + rz + s),$$

où

$$Q_1 Q_2 = Q, \quad Rz = (z^2 + pz)(z_2 + rz + s).$$

En effet les fonctions $P - b$ et $P + b$ n'ont pas de facteurs communs, car, autrement, chacun de ces facteurs diviserait leur différence, ce qui est évidemment impossible. Il s'ensuit que Q doit être égal au produit de Q_1 et Q_2, Q_1 étant lui-même le produit des facteurs de Q appartenant à $P - b$, et Q_2 celui des facteurs qui sont communs à Q et à $P + b$. Quant au polynôme Rz, on ne peut faire à son égard que deux suppositions. En effet, $P - b$ et $P + b$ étant des fonctions de degrés pairs, Rz doit figurer comme facteur dans l'une de ces fonctions (savoir, dans $P - b$, si $z = 0$, $P = b$, ce qui peut toujours être supposé) ou être égal au produit de deux facteurs $z^2 + pz$ et $z^2 + rz + s$, dont le premier appartient à $P - b$ et le second à $P + b$. La première supposition doit être rejetée, puisqu'elle nous conduirait aux équations

$$P - b = \pm Q_1^2 Rz,$$
$$P + b = \pm Q_2^2,$$

ou bien à l'équation

$$Q_2^2 - Q_1^2 Rz = \pm 2b;$$

ce qui nous fait voir que, de toutes les fonctions satisfaisant à l'équation (9), P et Q ne sont pas du moindre degré possible.

D'après cela, nous ne nous occuperons que des équations

$$(10) \qquad \begin{cases} P - b = \pm Q_1^2(z^2 + pz), \\ P + b = \pm Q_2^2(z^2 + rz + s). \end{cases}$$

Il est aisé de voir que les nombres p, r, s sont rationnels. Quant à p, cela résulte immédiatement de ce que l'équation $\frac{P-b}{z} = 0$ à coefficients rationnels a la racine $z = -p$, dont le degré de multiplicité est impair, tandis que ses autres racines ont des nombres pairs pour leurs degrés de multiplicité. En outre, p étant une racine rationnelle de l'équation

$$z^3 + lz^2 + mz + n = 0$$

à coefficients entiers, on en conclut qu'il est entier. Il en est de même pour r et s, comme le montre l'égalité

$$z^3 + lz^2 + mz + n = (z + p)(z^2 + rz + s).$$

Il résulte de ce qui précède que les coefficients Q_1 et Q_2 sont rationnels.

Des équations (10), il vient

$$(11) \qquad Q_2^2(z^2 + rz + s) - Q_1^2(z^2 + pz) = \pm 2b.$$

En attribuant successivement à z les valeurs zéro et $-p$, et en désignant par A_1 et A_2 les valeurs correspondantes de Q_2, il s'ensuit que

$$(12) \qquad \begin{cases} A_1^2 s = \pm 2b, \\ A_2^2(p^2 - pr + s) = \pm 2b; \end{cases}$$

par conséquent

$$s(p^2 - pr + s) = \frac{4b^2}{A_1^2 A_2^2} = \text{nombre carré};$$

c'est la première relation entre les coefficients p, r, s.

Les racines de l'équation

$$z^2 + rz + s = 0$$

peuvent être imaginaires ou réelles. Dans le premier cas, on a l'inégalité $4s - r^2 > 0$; dans le second cas, désignons ces racines par z_1 et z_2, et par B_1 et B_2 les valeurs correspondantes de Q_1. Faisant dans (11) successivement $z = z_1$ et $z = z_2$, on trouve

$$-B_1^2(z_1^2 + pz_1) = \pm 2b,$$
$$-B_2^2(z_2^2 + pz_2) = \pm 2b,$$

si $s > 0$, $\pm 2b > 0$, en vertu des équations (12); par conséquent

$$z_1^2 + pz_1 < 0,$$
$$z_2^2 + pz_2 < 0.$$

En additionnant ces inégalités, on aura

$$z_1^2 + z_2^2 + p(z_1 + z_2) < 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$r^2 - pr - 2s < 0;$$

mais $r^2 > 4s$; donc $pr - 2s > 0$.

Si, au contraire, $s < 0$, on a, d'après (12),

$$p^2 - pr + s < 0,$$

d'où $pr - s > 0$, et par suite $pr - 2s > 0$, en vertu de $s < 0$.

D'après cela, l'inégalité $pr - 2s > 0$ doit avoir lieu, si $r^2 - 4s > 0$. Ainsi, pour que l'équation (11) ait lieu, il est nécessaire qu'il existe au moins l'une des inégalités

$$4s - r^2 > 0, \quad pr - 2s > 0.$$

4. En s'appuyant sur des résultats obtenus, nous allons démontrer

que l'intégrale $\lambda\int_0^z \frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{Rz}}$, lorsqu'elle s'exprime par $\log(P+Q\sqrt{Rz})$, où P désigne une fonction de degré pair λ, peut être réduite à une autre qui s'exprime par $\log(P'+Q'\sqrt{Rz})$, P' étant une fonction de degré impair.

Remarquons pour cela que, si nous parvenons à transformer, au moyen d'une substitution rationnelle, l'intégrale $\int \frac{(z+A)\,dr}{\sqrt{Rz}}$, qui s'exprime en termes finis, en une autre $\int \frac{(z'+A')\,dz'}{\sqrt{z'^4+l'z'^3+m'z'^2+n'z'}}$ où l', m', n' sont rationnels, et dans laquelle la fonction $z'^4 = l'z'^3+m'z'^2+n'z'$ se décompose maintenant en facteurs du second degré $z'^2+p'z'$ et $z'^2+r'z'+s'$ à coefficients rationnels, de manière que $s'(p'^2-p'r'+s')$ devienne un nombre carré, et, en outre, qu'une des inégalités

$$4s'-r'^2>0,\quad p'r'-2s'>0$$

au moins soit satisfaite, nous aurons

$$\lambda'\int \frac{(z'+A')\,dz'}{\sqrt{Rz}} = \log(P'+Q'\sqrt{Rz'}),$$

où P' est une fonction de degré impair λ'.

Pour transformer l'intégrale de cette manière, M. Tchebichef emploie la substitution

$$z_1 = \frac{(p-r)^2(z^2+pz)}{(r-p)z+s}, \tag{13}$$

et remarque que, au moyen de pareilles substitutions, on peut arriver à l'ntégrale de la forme désirée, ou à une telle dont l'expression en logarithmes est connue *a priori*.

D'après l'expression de z, on a

$$z^2+pz = z_1\frac{(r-p)z+s}{(p-r)^2},$$

$$z^2+rz+s = \frac{[z_1+(p-r)^2][(r-p)z+s]}{(p-r)^2};$$

par conséquent

$$(14)\qquad \sqrt{(z^2+pz)(z^2+rz+s)} = \frac{[(r-p)z+s]\sqrt{z_1[z_1+(p-r)^2]}}{(p-r)^2}.$$

En outre, de la même équation (13) il vient

$$(p-r)z = -\frac{p(p-r)+z_1}{2} - \sqrt{\left[\frac{p(p-r)+z_1}{2}\right]^2 + sz_1}.$$

Nous avons préféré le signe négatif devant le radical pour avoir une valeur infinie de z pour $z_1 = \infty$.

En différentiant (13), on trouve

$$\frac{(r-p)\,dz}{(r-p)z+s} = \frac{dz_1}{\sqrt{[p(p-r)+z_1]^2+4sz_1}},$$

$$(15)\qquad \frac{(r-p)^2(z+\mathrm{A})\,dz}{(r-p)z+s} = \frac{1}{2}\frac{p(p-r)+z_1+2\mathrm{A}(r-p)}{\sqrt{[p(p-r)+z_1]^2+4sz_1}}dz_1 + \tfrac{1}{2}dz_1.$$

D'après les équations (14) et (15), on aura

$$\int \frac{(z+\mathrm{A})\,dr}{\sqrt{(z^2+pz)(z^2+rz+s)}} = \frac{1}{2}\int \frac{[p(p-r)+z_1+2\mathrm{A}(r-p)]\,dz_1}{\sqrt{z_1[z_1+(p-r)^2]\{[p(p-r)+z_1]^2+4sz_1\}}}$$
$$+ \log\left[\sqrt{z_1}+\sqrt{z_1+(p-r)^2}\right].$$

Les racines de l'équation

$$[z_1+p(p-r)]^2+4sz_1 = 0$$

sont

$$p(r-p)-2s \pm \sqrt{4s(p^2-pr+s)};$$

elles sont rationnelles à cause de $s(p^2-pr+s) =$ nombre carré. Ainsi toutes les racines du nouveau polynôme du quatrième degré, placé sous le radical, seront des nombres rationnels. Nous allons chercher d'abord combien de fois ce polynôme se décompose en facteurs

$$(z_1^2+p_1z_1)(z_1^2+r_1z_1+s_1),$$

satisfaisant aux conditions dont nous avons parlé plus haut. Essayons d'abord de poser

$$p_1 = (p-r)^2,$$

donc

$$r_1 = 2[p(p-r)+2s],$$
$$s_1 = p^2(p-r)^2;$$

il en résulte

$$s_1(p_1^2 - p_1 r_1 + s_1) = p^2(p-r)^4(r^2-4s),$$
$$r_1^2 - 4s_1 = 16s(s-pr+p^2) > 0,$$
$$p_1 r_1 - 2s_1 = 2(p-r)^2(2s-pr).$$

Pour que $s_1(p_1^2 - p_1 r_1 + s)$ soit un nombre carré, il est nécessaire que $r^2 - 4s$ ne soit pas négatif; mais, dans ce cas, d'après ce qui a été dit plus haut, $pr - 2s$ doit être positif, et, cette dernière condition étant satisfaite, les nombres p_1, r_1, s_1 ne satisfont à aucune des inégalités $4s_1 - r_1^2 > 0$, $p_1 r_1 - 2s_1 > 0$.

Ainsi il suffit de poser

$$p_1 = p(p-r) + 2s \pm 2\sqrt{s(p^2-pr+s)},$$
$$s_1 = (p-r)^2\left[p(p-r) + 2s \mp 2\sqrt{s(p^2-pr+s)}\right],$$
$$r_1 = (p-r)^2 + (p-r)p + 2s \pm 2\sqrt{s(p^2-pr+s)},$$

d'où il vient

$$\begin{aligned} s_1&(p_1^2 - p_1 r_1 + s_1) \\ &= \pm 4(p-r)^2\sqrt{s_1(p^2-pr+s)}\left[rp - 2s \pm 2\sqrt{s(p^2-pr+s)}\right],\end{aligned}$$
$$r_1^2 - 4s_1 = \left[r^2 - rp + 2s \pm 2\sqrt{s(p^2-pr+s)}\right]^2,$$
$$r_1 p_1 - 2s_1 = (p-r)^2\left[rp - 2s \pm 6\sqrt{s(p^2-pr+s)}\right].$$

Il est aisé de voir qu'il faut, dans les formules ci-dessus, affecter du signe positif le radical $\sqrt{s(p^2-pr+s)}$; en effet, comme l'inégalité $4s_1 - r_1^2 > 0$ n'est évidemment pas satisfaite, posons $r_1 p_1 - 2s_1 > 0$. D'après cela, le signe négatif devant $\sqrt{s(p^2-pr+s)}$ ne peut être retenu que lorsque $rp - 2s$ est positif et supérieur à $6\sqrt{s(p^2 - pr + s)}$; mais alors $s_1(p_1^2 - p_1 r_1 s_1)$ deviendrait négatif et, par conséquent, ne pourrait pas être un carré. Posons donc

$$\begin{aligned}
p_1 &= p(p-r) + 2s + 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)},\\
r_1 &= p(p-r) + 2s + (p-r)^2 - 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)},\\
s_1 &= (p-r)^2\left[p(p-r) + 2s - 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)}\right].
\end{aligned}$$

Si $s_1(p_1^2 - p_1 r_1 + s_1)$ est encore un nombre carré, nous ferons de nouveau la transformation en passant aux nombres p_2, r_2, s_2, qui s'expriment en p_1, r_1, s_1 de la même manière que p_1, r_1, s_1 s'expriment en p, r, s, et ainsi de suite. Si, en opérant comme il a été dit plus haut, nous rencontrions des nombres égaux $p_i = r_i$, nous trouverions l'intégrale correspondant au système p_i, r_i, s_i d'après la formule

$$\int \frac{(z_i + \frac{1}{2}p_i)\,dz_i}{\sqrt{(z_i^2 + p_i z_i)(z_i^2 + p_i z_i + s_i)}} = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{z_i^2 + p_i z_i} + \sqrt{z_i^2 + p_i z_i + s_i}}{\sqrt{z_i^2 + p_i z_i} + \sqrt{z_i^2 + p_i z_i + s_i}}.$$

5. Il nous reste maintenant à prouver que, lorsque nous ne rencontrerons pas de nombres p_i et r_i qui soient égaux entre eux, nous arriverons, après un nombre fini d'opérations, aux nombres p_ν, r_ν, s_ν, de sorte que $s_\nu(p_\nu^2 - r_\nu p_\nu + s_\nu)$ ne sera pas un carré.

D'après ce qui précède, il existe entre les nombres p_μ, r_μ, s_μ et $p_{\mu-1}$, $r_{\mu-1}$, $s_{\mu-1}$ les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&s_\mu(p_\mu^2 - p_\mu r_\mu + s_\mu)\\
&\quad = 4(p_{\mu-1} - r_{\mu-1})^4\Big[r_{\mu-1}p_{\mu-1} - 2s_{\mu-1} + 2\sqrt{s_{\mu-1}(p_{\mu-1}^2 - p_{\mu-1}r_{\mu-1} + s_{\mu-1})}\\
&\qquad\qquad + \sqrt{s_{\mu-1}(p_{\mu-1}^2 - p_{\mu-1}r_{\mu-1} + s_{\mu-1})}\Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_\mu p_\mu - 2s_\mu = (p_{\mu-1} - r_{\mu-1})^2\Big[&r_{\mu-1}p_{\mu-1} - 2s_{\mu-1}\\
&+ 6\sqrt{s_{\mu-1}(p_{\mu-1}^2 - p_{\mu-1}r_{\mu-1} + s_{\mu-1})}\Big].
\end{aligned}$$

Soient

$$\mathrm{A}_\mu^2 = \frac{s_\mu(p_\mu^2 - p_\mu r_\mu + s_\mu)}{(p_{\mu-1} - r_{\mu-1})^4(p_{\mu-2} - r_{\mu-2})^4\ldots(p-r)^4},$$

$$\mathrm{B}_\mu = \frac{r_\mu p_\mu - 2s_\mu}{(p_{\mu-1} - r_{\mu-1})^4(p_{\mu-2} - r_{\mu-2})^4\ldots(p-s)^4};$$

donc

$$A_\mu^2 = 4(B_{\mu-1} + 2A_{\mu-1})A_{\mu-1},$$
$$B_\mu = B_{\mu-1} + 6A_{\mu-1}.$$

Comme $A_0 = \sqrt{s(p^2 - pr + s)}$ et $B_0 = rp - 2s$ sont des entiers, A_0 et B_μ le seront aussi pour toutes les valeurs de μ, pourvu que

$$s_\mu(p_\mu^2 - p_\mu r_\mu + s_\mu)$$

soit un carré.

Démontrons à présent que tout diviseur commun impair de A_μ et de B_μ sera aussi un commun diviseur de $A_{\mu-1}$ et de $B_{\mu-1}$.

En effet, soit k_μ le plus grand diviseur impair commun à A_μ et P_μ, et $k_{\mu-1}$ le plus grand commun diviseur impair de $A_{\mu-1}$ et de $B_{\mu-1}$. En posant

$$A_\mu = k_\mu a_\mu, \qquad B_\mu = k_\mu b_\mu,$$
$$A_{\mu-1} = k_{\mu-1} a_{\mu-1}, \quad B_{\mu-1} = k_{\mu-1} b_{\mu-1},$$

on a

$$(16) \qquad \begin{cases} k_\mu^2 a_\mu^2 = 4k_{\mu-1}^2 (b_{\mu-1} + 2a_{\mu-1}) a_{\mu-1}, \\ k_\mu b_\mu = k_{\mu-1}(b_{\mu-1} + 6a_{\mu-1}). \end{cases}$$

Il s'ensuit que k_μ sera divisible par $k_{\mu-1}$, parce que, dans le cas contraire, a_μ et b_μ auraient eu quelque diviseur commun impair, et, par conséquent, k_μ n'aurait pas été le plus grand commun diviseur impair des nombres A_μ et B_μ. Soit $k_\mu = \lambda k_{\mu-1}$, λ étant un entier impair.

Des équations (16) on a

$$\lambda^2 a_\mu = 4\lambda a_{\mu-1} b_\mu - 16 a_{\mu-1}^2;$$
$$\lambda b_\mu = b_{\mu-1} + 6a_{\mu-1}.$$

On conclut de la première équation que $a_{\mu-1}$ et λ ont un diviseur commun, et, de la seconde, que ce diviseur appartient aussi à $b_{\mu-1}$, ce qui ne peut avoir lieu, car $k_{\mu-1}$ est le plus grand commun diviseur impair de $A_{\mu-1}$ et de $B_{\mu-1}$. Il en résulte que le plus grand commun diviseur impair de A_μ et de B_μ sera en même temps le plus grand commun diviseur impair de A_0 et de B_0. Réciproquement, soit k le plus grand diviseur commun à ces derniers nombres (qui peut aussi être pair). En effectuant le calcul des nombres A_1, B_1, A_2, B_2,..., on trouvera que k sera le diviseur commun de A_μ et de B_μ. Soient

$$A_\mu = kA'_\mu, \quad B_\mu = kB'_\mu,$$

alors

$$A'^2_\mu = 4A'_{\mu-1}(B'_{\mu-1} + 2A'_{\mu-1}),$$
$$B'_\mu = B'_{\mu-1} + 6A'_{\mu-1}.$$

D'après ce qui précède, il est clair que B'_μ et A'_μ sont sans diviseur commun impair. Considérons à présent la fraction $\frac{B_0 + 2A_0}{A_0}$ après qu'elle sera réduite à ses moindres termes, c'est-à-dire après la division de ses termes par k, le plus grand commun diviseur de A_0 et de B_0 ou de A_0 et de $B_0 + 2A_0$, ce qui est la même chose. Suivant la notation adoptée, cette fraction deviendra $\frac{B'_0 + 2A'_0}{A'_0}$. Remarquons que les termes de cette fraction sont positifs. Quant au dénominateur, cela se voit immédiatement, et le numérateur ne peut être négatif que lorsque $B_0 = rp - 2s < 0$. En outre, en remarquant que dans ce cas le nombre

$$B_0^2 - 4A_0^2 = (rp - 2s)^2 - 4s(p^2 - pr + s) = p^2(r^2 - 4s)$$

doit être négatif, en vertu de $4s - r^2 > 0$, on voit que B_0 est inférieur à $2A_0$; donc le numérateur $B_0 + 2A_0$ est positif. Considérons à présent le cas où la fraction $\frac{B'_0 + 2A'_0}{A'_0}$ se réduit à l'unité. Alors on a $B_0 = -A_0$. En effectuant le calcul, on trouve

$$A_1 = 2A_0, \quad B_1 = 5A_0, \quad A_2^2 = 8.9.A_0^2;$$

A_2 n'est pas déjà un nombre rationnel. Nous nous occuperons ensuite du cas où au moins un des termes de la fraction $\frac{B'_0 + 2A'_0}{A'_0}$ a des diviseurs impairs. Soit q^f celui des diviseurs dont le degré de multiplicité f est le moindre, q étant un nombre premier. Des expressions

$$A'^2_1 = 4A'_0(B'_0 + 2A'_0),$$
$$B'^2_1 = B'_0 + 6A'_0 = B'_0 + 2A'_0 + 4A'_0,$$

il suit que $A_1'^2$ est divisible par q, et B'_1 ne l'est pas. En outre, pour que A'_1 devienne un nombre entier, f doit être pair et, par conséquent, A'_1 admet le diviseur $q^{\frac{f}{2}}$. Des expressions

$$A_2'^2 = 4A'_1(B'_1 + 2A'_1),$$
$$B'_2 = B'_1 + 6A'_1,$$

on voit encore que $A_2'^2$ est divisible par q, et B'_2 ne l'est pas. Pour que A'_2 soit un nombre rationnel et entier, $\frac{f}{2}$ doit être pair; donc A'_2 admet $\frac{f}{4}$ fois le diviseur q. On prouvera de la même manière que B'_3 ne sera pas divisible par q, et que A'_3 admettra le diviseur q au degré $\frac{f}{8}$, lorsqu'il sera un nombre rationnel et entier. Suivant la même marche, on voit que le nombre A'_μ, contenant q au degré impair, ne sera pas un carré, et par conséquent $A'_{\mu+1}$ ne sera pas un nombre rationnel : il est évident que μ est inférieur à f.

Considérons enfin le cas où l'un des termes de la fraction $\frac{B'_0 + 2A'_0}{A'_0}$ est égal à 2^f, où f est l'exposant quelconque et l'autre l'unité.

Soient d'abord

$$B'_0 + 2A'_0 = 1, \quad A'_0 = 2^f.$$

En évaluant $A'_1, B'_1, \ldots$, on aura

$$A'_1 = 2^{\frac{f+2}{2}}, \quad B'_1 = 1 + 2^{\frac{f+2}{2}},$$

où f doit être pair. Le numérateur de la fraction irréductible

$$\frac{2A'_1 + B'_1}{A'_1} = \frac{\left(1 + 2^{\frac{f+2}{2}}\right)}{2^{\frac{f+2}{2}}}$$

ne renferme que des facteurs impairs dont les degrés ne sont pas supérieurs à f. En effet, cela résulte de ce que, pour $f = 2$, le numérateur devient 5^2 et, pour $f > 2$, $1 + 2^{\frac{f+2}{2}} \lesseqgtr 3^{\frac{f}{2}}$.

Il résulte de là qu'il suffit de répéter les mêmes opérations moins de f fois pour arriver au nombre A_μ^2 qui ne sera pas un carré. Soient maintenant $B'_0 + 2A'_0 = 2^f$, $A_0 = 1$. Remarquons que f ne peut pas être égal à 2, car alors B'_0 serait aussi égal à 2, et par suite $B_0 = 2A_0$, c'est-à-dire $B_0^2 - 4A_0^2 = p^2(r^2 - 4s) = 0$; donc il faut admettre $p = 0$ ou $r^2 - 4s = 0$. Dans les deux suppositions, l'équation

$$z(z+p)(z^2 + rz + s) = 0$$

a des racines égales; mais nous avons fait abstraction de ce cas, comme cela a été dit plus haut. Après avoir démontré que f ne peut pas être égal à 2, passons au calcul des nombres $A'_1, B'_1, \ldots$ Nous avons

$$A'_1 = 2.2^{\frac{f}{2}}, \text{ où } f \text{ doit être pair,}$$
$$B'_1 = 2^2(1 + 2^{f-2}).$$

Le numérateur de la fraction

$$\frac{2A'_1 + B'_1}{A'_1} = \frac{\left(1 + 2^{\frac{f-2}{2}}\right)}{2^{\frac{f-2}{2}}}$$

ne contiendra que des facteurs impairs, dont les exposants ne surpassent pas $f - 2$. Il suffit donc d'opérer ces calculs un nombre de fois inférieur à $f - 2$ pour arriver au nombre A_μ^2, qui ne sera pas un carré.

6. D'après ce qui a été dit ci-dessus, on voit qu'en transformant, au moyen de la formule

$$z_1 = \frac{(p-r)^2(z^2+pz)}{(r-p)z+s},$$

l'intégrale

$$\int \frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{(z^2+pz)(z^2+rz+s)}},$$

on obtient une intégrale de la même forme, et, en outre, il a été montré qu'après un nombre fini d'opérations on rencontre l'intégrale dans laquelle $p_i = r_i$, ou celle dans laquelle la fonction placée sous le radical ne se décompose pas en deux facteurs $(z^2 + pz)(z^2 + rz + s,)$ dont les coefficients satisfont à cette condition-ci :

$$s(p^2 - pr + s) = \text{un nombre carré},$$

et au moins à l'une des inégalités

$$4s - r^2 > 0, \quad rp - 2s > 0.$$

Il résulte de là qu'on peut toujours se borner aux intégrales dans lesquelles la fonction placée sous le radical ne se décompose pas en facteurs satisfaisant aux conditions précédentes; afin d'évaluer de pareilles intégrales, M. Tchebichef se sert de nouveau de transformations successives.

D'après sa méthode, passons de l'intégrale

$$\int \frac{(z + \mathrm{A})\,dz}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}$$

à celle-ci

$$\int \frac{(z_1 + \mathrm{A}')\,dz_1}{\sqrt{z_1^4 + l_1 z_1^3 + m_1 z_1^2 + n_1 z_1}},$$

en ayant égard à la transformation du n° **1**, c'est-à-dire en posant

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{\frac{1}{16}l^3 - \frac{1}{4}lm + \frac{1}{2}n}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz} - z^2 - \frac{1}{2}lz - \frac{4m - l^2}{8}},\\
l_1 &= -l - \frac{(l^2 - 4m)^2}{2l^3 - 8lm + 16n},\\
m_1 &= -2m + \tfrac{3}{4}l^2,\\
n_1 &= -n + \tfrac{1}{2}lm - \tfrac{1}{8}l^3.
\end{aligned}$$

De s nombres l_1, m_1, n_1 nous passerons aux nombres l_2, m_2, n_2,..., en posant généralement

$$(17)\quad \begin{cases} l_{i+1} = -l_i - \dfrac{(l_i^2-4m_i)^2}{2l_i^3-8l_im_i+16n_i}, \\ m_{i+1} = -2m_i + \frac{3}{4}l_i^2, \\ n_{i+1} = -n_i + \frac{1}{2}l_im_i - \frac{1}{8}l_i^3, \end{cases}$$

et en prenant $l_0 = l$, $m_0 = m$, $n_0 = n$.

Maintenant allons chercher où nous conduisent ces transformations successives, lorsque l'intégrale $\int \frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{z^4+lz^2+mz^2+nz}}$ s'exprime en termes finis, et, pour cet effet, considérons les relations entre les racines des équations

$$z^3+lz^2+mz+n=0,\quad z_1^3+l_1z_1^2+m_1z_1+n_1=0,\ldots$$

Soient g_i, g_i', g_i'', les racines de l'équation

$$z_i^3+l_iz_i^2+m_i+n_i=0;$$

g_0, g_0', g_0'' étant désignés plus haut par g, g', g''. Il est aisé de faire voir que g_{i+1}, g_{i+1}', g_{i+1}'' sont liés à g_i, g_i', g_i'' de la manière suivante :

$$(19)\quad \begin{cases} g_{i+1} = \dfrac{(g_i+g_i'-g_i'')(g_i+g_i''-g_i')}{2(g_i'+g_i''-g_i)}, \\ g_{i+1}' = \dfrac{(g_i'+g_i-g_i'')(g_i'+g_i''-g_i)}{2(g_i+g_i''-g_i')}, \\ g_{i+1}'' = \dfrac{(g_i'+g_i''-g_i)(g_i+g_i''-g_i')}{2(g_i'+g_i-g_i'')}. \end{cases}$$

En effet, multipliant ces expressions, il vient

$$g_{i+1}g_{i+1}'g_{i+1}'' = -n_{i+1} = \tfrac{1}{8}(g_i+g_i'-g_i'')(g_i+g_i''-g_i')(g_i'+g_i''-g_i);$$

mais

$$g_i+g_i'+g_i''=-l_i;$$

donc

$$-n_{i+1}=\left(-\frac{l_i}{2}-g_i\right)\left(-\frac{l_i}{2}-g'_i\right)\left(-\frac{l_i}{2}-g''_i\right),$$
$$=n_i-\tfrac{1}{2}l_i m_i+\tfrac{1}{8}l_i^3.$$

C'est la troisième formule (17).

Ensuite

$$m_{i+1}=g_{i+1}g'_{i+1}+g_{i+1}g''_{i+1}+g'_{i+1}g''_{i+1},$$
$$=\tfrac{1}{4}(g_i+g'_i-g''_i)^2+\tfrac{1}{4}(g_i+g''_i-g'_i)^2+\tfrac{1}{4}(g'_i+g''_i-g_i)^2,$$
$$=-2m_i+\tfrac{3}{4}l_i^2;$$

c'est la deuxième formule (17).

En additionnant enfin les expressions (18), il vient

$$-l_{i+1}=\frac{(g_i+g'_i-g''_i)^2(g_i+g''_i-g'_i)^2+(g''_i+g_i-g'_i)^2(g'_i+g''_i-g_i)^2+(g'_i+g''_i-g_i)^2(g_i+g'_i-g''_i)^2}{2(g'_i+g''_i-g_i)(g_i+g''_i-g'_i)(g_i+g'_i-g''_i)};$$

par conséquent

$$l_{i+1}n_{i+1}=\left(-\frac{l_i}{2}-g''_i\right)^2\left(-\frac{l_i}{2}-g'_i\right)^2+\left(-\frac{l_i}{2}-g'_i\right)^2\left(-\frac{l_i}{2}-g_i\right)^2$$
$$+\left(-\frac{l_i}{2}-g_i\right)^2\left(-\frac{l_i}{2}-g''_i\right)^2.$$

Le second nombre de l'équation précédente est une fonction symétrique et entière des racines g_i, g'_i, g''_i. Après l'avoir exprimé en coefficients l_i, m_i, n_i, on a

$$l_{i+1}n_{i+1}=(m_i-\tfrac{1}{4}l_i^2)^2+l_i(n_i-\tfrac{1}{2}m_i l_i+\tfrac{1}{8}l_i^3),$$

donc

$$l_{i+1}=-l_i-\frac{(l_i^2-4m_i)^2}{2l_i^3-8m_i l_i+16n_i};$$

c'est la première formule (17).

7. A présent, nous allons faire connaître les expressions de g_i, g'_i, g''_i en fonctions elliptiques. Après avoir posé

$$\varkappa^2=\frac{g''_0(g'_0-g_0)}{g'_0(g''_0-g_0)}=\frac{g''(g'-g)}{g(g''-g)},\quad \sin^2 am\,a=\frac{g''_0-g_0}{g''_0}=\frac{g''-g}{g''},$$

nous avons eu

$$g'_0 = \frac{g_0}{\Delta^2 am\, a}, \quad g''_0 = \frac{g_0}{\cos^2 am\, a}.$$

Ces formules nous donnent de même

$$g'_0 + g''_0 - g_0 = g_0 \frac{1 - \varkappa^2 \sin^4 am\, a}{\cos^2 am\, a\, \Delta^2 am\, a},$$

$$g''_0 + g_0 - g'_0 = g_0 \frac{1 - 2\varkappa^2 \sin^2 am\, a + \varkappa^2 \sin^4 am\, a}{\cos^2 am\, a\, \Delta^2 am\, a},$$

$$g_0 + g'_0 - g''_0 = g_0 \frac{1 - 2 \sin^2 am\, a + \varkappa^2 \sin^4 am\, a}{\cos^2 am\, a\, \Delta^2 am\, a};$$

d'où, ayant égard aux formules (18), en y posant $i = 0$, on trouve

$$g_1 = \frac{g_0}{2} \frac{\Delta am\, 2a \cos am\, 2a (1 - \varkappa^2 \sin^4 am\, a)}{\cos^2 am\, a\, \Delta^2 am\, a},$$

$$g'_1 = \frac{g_0}{2} \frac{\cos am\, 2a (1 - \varkappa^2 \sin^4 am\, a)}{\Delta am\, 2a \cos^2 am\, a\, \Delta^2 am\, a},$$

$$g''_1 = \frac{g_0}{2} \frac{\Delta am\, 2a (1 - \varkappa^2 \sin^4 am\, a)}{\cos am\, 2a \cos^2 am\, a\, \Delta^2 am\, a},$$

donc

$$g'_1 = \frac{g_1}{\Delta^2 am\, 2a}, \quad g''_1 = \frac{g_1}{\cos^2 am\, 2a},$$

$$\varkappa^2 = \frac{g''_1 (g'_1 - g_1)}{g'_1 (g''_1 - g_1)}, \quad \sin^2 am\, 2a = \frac{g''_1 - g_1}{g''_1},$$

c'est-à-dire, lorsque des racines g_0, g'_0, g''_0 on passe aux racines g_1, g'_1, g''_1, le module $\varkappa$ reste invariable, et l'argument a se redouble. Il en résulte qu'on peut immédiatement écrire les valeurs de g_i, g'_i, g''_i

$$(19^a) \qquad \begin{cases} g'_i = \dfrac{g_i}{\Delta^2 am\, 2^i a}, \quad g''_i = \dfrac{g_i}{\cos^2 am\, 2^i a}, \\[2ex] g_i = g_{i-1} \dfrac{\sin am\, 2^{i-1} a \cos am\, 2^i a\, \Delta am\, 2^i a}{\sin am\, 2^i a \cos am\, 2^{i-1} a\, \Delta am\, 2^{i-1} a}, \end{cases}$$

et par conséquent

$$(19^b) \qquad g_i = g_1 \frac{\sin am\, 2a \cos am\, 2^i a\, \Delta am\, 2^i a}{\sin am\, 2^i a \cos am\, 2a\, \Delta am\, 2a}.$$

8. Supposons maintenant que

$$\int \frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}$$

(point de départ de nos transformations) s'exprime en termes finis, la constante A ayant une valeur convenable. Il a été démontré que le paramètre a acquiert dans ce cas la valeur $\frac{\nu K + \nu' K' i}{\lambda}$, où ν, ν' et λ sont des entiers, dont le dernier est un nombre impair. Soit à présent σ le moindre entier satisfaisant à la congruence

$$2^\sigma \equiv 2 \pmod{\lambda},$$

laquelle est toujours soluble, λ étant un nombre impair. Soit

$$2^\sigma = 2 + h\lambda,$$

où le nombre h est évidemment pair.

Si, dans les formules (18) et (19), on attribue à i la valeur σ et si l'on remplace a par $\frac{\nu K + \nu' K' i}{\lambda}$, on aura

$$g_\sigma = g_1, \quad g'_\sigma = g'_1, \quad g''_\sigma = g''_1,$$

et, par conséquent,

$$l_\sigma = l_1, \quad m_\sigma = m_1, \quad n_\sigma = n_1.$$

Donc, si l'intégrale donnée s'exprime en termes finis, les quantités l_i, m_i, n_i sont périodiques. Si les nombres ν et ν' sont pairs, on aura

$$l_{\sigma-1} = l_0, \quad m_{\sigma-1} = m_0, \quad n_{\sigma-1} = n_0,$$

et par conséquent la période commencera par l_0, m_0, n_0; mais lorsque au moins l'un des nombres ν et ν' sera impair, la période ne commencera que par l_1, m_1, n_1.

Maintenant nous allons démontrer que, dans le cas de périodicité, tous les nombres l_i, m_i, n_i sont des entiers, pourvu que l_0, m_0, n_0 le soient.

Posons

$$\frac{(l_i^2 - 4m_i)^2}{2l_i^3 - 8l_i m_i + 16n_i} = \alpha_i,$$

i étant un entier quelconque, et démontrons que, dans le cas de périodicité, les systèmes l_i, m_i, n_i et tous les nombres α_i seront entiers. Nous allons le prouver d'abord pour le nombre α_0, et, pour cet effet, cherchons la forme générale des expressions l_i, m_i, n_i en l_0, m_0, n_0 et α_0, lesquelles sont respectivement égales à l, m, n, α.

On a

$$(20) \qquad \left\{ \begin{array}{l} l_1 = - l - \alpha, \quad 4m_1 = - 8m + 3l^2, \\ 8n_1 = - 8n + 4lm - l^3. \end{array} \right.$$

Remarquons d'abord que l_i, m_i, n_i peuvent être exprimés en α par les formules

$$l_i = \frac{\Phi_i \alpha}{\varphi_i \alpha}, \quad 4m_i = \frac{\Psi_i \alpha}{\psi_i \alpha}, \quad 8n_i = \frac{\Omega_i \alpha}{\omega_i \alpha},$$

où Φ_i, φ_i, Ψ_i, ψ_i, Ω_i, ω_i sont des fonctions entières rationnelles de α à coefficients entiers (ces coefficients renferment l, m, n). En outre, ces fonctions seront de la forme

$$(21) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_i \alpha = 3\alpha^{p_i} + \ldots, & \varphi_i \alpha = 2^{i-1} (\alpha^{p_i - 1} + \ldots); \\ \Psi_i \alpha = 3\alpha^{q_i} + \ldots, & \psi_i \alpha = 2^{2i-4} (\alpha^{q_i - 2} + \ldots); \\ \Omega_i \alpha = \alpha^{r_i} + \ldots, & \omega_i \alpha = 2^{3i-6} (\alpha^{r_i - 3} + \ldots). \end{array} \right.$$

Les exposants des termes vont en décroissant; nous avons affecté des parenthèses les fonctions entières de α à coefficients entiers. On peut très-aisément vérifier ces formules pour les nombres l_2, m_2, n_2. En effet, après avoir substitué, dans les formules (17), au lieu de l_1, m_1, n_1, leurs valeurs (20), on aura

$$l_2 = \frac{3\alpha^4 + \ldots}{2\alpha^3 + \ldots}, \quad 4m_2 = 3\alpha + \ldots, \quad 8n_2 = \alpha^4 + \ldots;$$

donc $\psi_2 \alpha$ et $\omega_2 \alpha$ sont égaux à l'unité.

Afin d'établir la généralité des formules (21), nous supposerons qu'elles subsistent pour un nombre quelconque i et prouverons qu'elles ont encore lieu pour $i+1$.

Nous avons

$$l_{i+1} = -l_i - \frac{(l_i^2 - 4m_i)^2}{2l_i^3 - 8l_i m_i + 16n_i}$$
$$= -\frac{2\Phi_i\alpha\psi_i\alpha(\Phi_i^3\alpha\psi_i\alpha\omega_i\alpha - \Phi_i\alpha_i\Psi\alpha\omega_i\alpha\varphi_i^2\alpha + \Omega_i\alpha\varphi_i^3\alpha\psi_i\alpha) + \omega_i\alpha(\Phi_i^2\alpha\psi_i\alpha - \Psi_i\alpha\varphi_3\alpha)^2}{2\varphi_i\alpha\psi_i\alpha(\Phi_i^3\alpha\psi_i\alpha\omega_i\alpha - \Phi_i\alpha\Psi_i\alpha\omega_i\alpha\varphi_i^2\alpha + \Omega_i\alpha\varphi_i^3\alpha\psi_i\alpha)}.$$

Après avoir remplacé les fonctions $\Phi_i\alpha$, $\varphi_i\alpha, \ldots$ par leurs valeurs, on obtient, en réduisant,

$$l_{i+1} = \frac{3\alpha^{p_{i+1}} + \ldots}{2^i(\alpha^{p_{i+1}-1} + \ldots)},$$

ou

$$p_{i+1} = 4p_i + 2q_{-i} + r_i - 7.$$

D'une manière analogue on trouve

$$4m_{i+1} = \frac{3\Phi_i\alpha\psi_i\alpha - 2\varphi_i^2\alpha\Psi_i\alpha}{\psi_i\alpha\varphi_i^2\alpha} = \frac{3\alpha^{q_{i+1}} + \ldots}{2^{2i-2}(\alpha^{q_{i+1}-2} + \ldots)},$$

où

$$q_{i+1} = 2p_i + q_i - 2,$$

$$8n_{i+1} = \frac{\Omega_i(\alpha)\psi_i\alpha\varphi_i^3\alpha - \omega_i(\alpha)\Psi_i(\alpha)\Phi_i(\alpha)\varphi_i^2(\alpha) + \Phi_i^3(\alpha)\psi_i\alpha\omega_i\alpha}{\omega_i(\alpha)\psi_i(\alpha)\varphi_i(\alpha)}$$
$$= \frac{\alpha^{r_{i+1}} + \ldots}{2^{3i-3}(\alpha^{r_{i+1}-3} + \ldots)},$$

où

$$r_{i+1} = 3p_i + q_i + r_i - 5.$$

Par conséquent, les formules (21) ont lieu pour $i+1$: c'est ce que nous voulions prouver. Il a été démontré plus haut que, lorsque l'intégrale donnée s'exprime en logarithmes, nous arriverons de nouveau aux nombres l_1, m_1, n_1, les systèmes l_i, m_i, n_i se succédant périodiquement. Soient, comme il a été supposé, $l_\sigma = l_1$, $m_\sigma = m_1$, $n_\sigma = n_1$.

On a, dans ce cas,

$$8n_1 = \frac{\Omega_\sigma \alpha}{\omega_\sigma \alpha}, \tag{22}$$

ou

$$\Omega_\sigma \alpha - 8n_1 \omega_\sigma \alpha = 0.$$

En remarquant que

$$8n_1 = -8n + 4lm - l^3$$

est un nombre entier, on voit que α est une racine rationnelle de l'équation à coefficients entiers, dont le premier terme a l'unité pour coefficient; donc α sera un nombre entier. De ce que

$$\alpha = \frac{(l^2 - 4m)^2}{2l^3 - 8lm + 16n}$$

est un nombre entier, on voit que l doit être pair; par conséquent

$$l_1 = -l - \alpha, \quad m_1 = -2m + \tfrac{3}{4} l^2,$$
$$n_1 = -n + \tfrac{1}{2} lm - \tfrac{1}{8} l^3$$

seront des nombres entiers.

Soit à présent

$$\frac{(l_1^2 - 4m_1)^2}{2l_1^3 - 8l_1 m_1 + 16n_1} = \alpha_1.$$

En remplaçant dans la formule (22) les nombres l, m, n par l_1, m_1, n_1 et α par α_1, on aura $8n_{\sigma+1}$ au lieu de $8n_\sigma$, savoir :

$$8n_{\sigma+1} = 8n_2 = \frac{\Omega'_\sigma(\alpha_1)}{\omega'_\sigma(\alpha_1)};$$

les nombres l_1, m_1, n_1 entrent dans les coefficients des fonctions Ω'_σ et ω'_σ de la même manière que l, m, n dans ceux de Ω_σ et ω_σ.

Comme

$$8n_2 = -8n_1 + 4l_1 m_1 = l_1^3$$

est un nombre entier; d'après l'équation

$$\Omega'_\sigma(\alpha_1) - 8n_2\,\omega'_\sigma(\alpha_1) = 0,$$

que α_1 est un nombre entier : donc l_2, m_2, n_2 seront aussi des entiers. On voit de la même manière que l_3, m_3, n_3,... sont aussi des entiers.

9. Pour achever la démonstration de la méthode de M. Tchebichef, il ne nous reste qu'à faire voir que les nombres des systèmes l_i, m_i, n_i que l'on obtient avant que la périodicité soit manifestée ne surpassent pas une limite finie. Nous reprendrons, pour cet effet, les relations qui existent entre les racines g_{i+1}, g'_{i+1}, g''_{i+1} et g_i, g'_i, g''_i. On a

$$\begin{aligned}
g'_{i+1}(g''_{i+1} - g_{i+1}) &= \frac{g_{i+1}^2 \sin^2 am\,2^i a}{\Delta^2 am\,2^i a \cos^2 am\,2^i a} \\
&= \frac{g^i \sin^2 am\,2^{i-1} a}{\Delta^2 am\,2^{i-1} a \cos^2 am\,2^{i-1} a} = g'_i(g''_i - g_i), \\
g_{i+1}(g'_{i+1} - g''_{i+1}) &= -g_{i+1}^2 \frac{\varkappa'^2 \sin^2 am\,2^i a}{\cos^2 am\,2^i a\, \Delta^2 am\,2^i a} \\
&= -\frac{g_i^2 \varkappa'^2 \sin^2 am\,2^{i-1} a}{\Delta^2 am\,2^{i-1} a \cos^2 am\,2^{i-1} a} = g_i(g'_i - g''_i), \\
g''_{i+1}(g_{i+1} - g'_{i+1}) &= -g_{i+1}^2 \frac{\varkappa^2 \sin^2 am\,2^i a}{\cos^2 am\,2^i a\, \Delta^2 am\,2^i a} \\
&= -\frac{g_i^2 \varkappa'^2 \sin^2 am\,2^{i-1} a}{\Delta^2 am\,2^{i-1} a \cos^2 am\,2^{i-1} a} = g''_i(g_i - g'_i).
\end{aligned}$$

Des relations ci-dessus, il vient

$$\begin{aligned}
&g_{i+1}^2(g'_{i+1} - g''_{i+1})^2 + g'^2_{i+1}(g''_{i+1} - g_{i+1})^2 + g''^2_{i+1}(g_{i+1} - g'_{i+1})^2 \\
&\quad = g_i^2(g'_i - g''_i)^2 + g'^2_i(g''_i - g_i)^2 + g''^2_i(g_i - g'_i)^2.
\end{aligned}$$

En y introduisant les coefficients l_i, m_i, n_i, l_{i+1}, m_{i+1}, n_{i+1} au lieu des racines, on aura

$$m_{i+1}^2 - 3l_{i+1}\,n_{i+1} = m_i^2 - 3l_i n_i.$$

Des mêmes relations on a

$$g_{i+1}^2 g_{i+1}'^2 g_{i+1}''^2 (g_{i+1} - g_{i+1}')^2 (g_{i+1}' - g_{i+1}'')^2 (g_{i+1}'' - g_{i+1})^2$$
$$= g_i g_i'^2 g_i'^2 (g_i - g_i')^2 (g_i' - g_i'')^2 (g_i'' - g_i)^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$n_{i+1}^2 (4 l_{i+1}^3 n_{i+1} - l_{i+1}^2 m_{i+1}^2 - 18 l_{i+1} m_{i+1} n_{i+1} + 4 m_{i+1}^3 + 27 n_{i+1}^2)$$
$$= n_i^2 (4 l_i^3 n_i - l_i^2 m_i^2 - 18 l_i m_i n_i + 4 m_i^3 + 27 n_i^2).$$

Il suit des égalités obtenues que le nombre de différents systèmes l_i, m_i, n_i ne surpassera pas celui des solutions entières des équations

$$Y^2 - 3XZ = m^2 - 3ln,$$
$$Z^2 (4X^3Z - X^2Y^2 - 18XYZ + 4Y^3 + 27Z^2)$$
$$= n^2 (4l^3 n - l^2m^2 - 18lmn + 4m^3 + 27n^2).$$

Ces solutions X, Y, Z ne peuvent être qu'en nombre limité, comme l'a démontré M. Tchebichef lui-même [*].

[*] *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, 1864, p. 235.