JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Addition au Mémoire sur la Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire, etc

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 18 (1873), p. 47-52.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1873_2_18__47_0>

Addition au Mémoire sur la *Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire, etc.* [*];

PAR M. J. BOUSSINESQ.

J'ai démontré la formule fondamentale (14) du Mémoire sur la *Théorie des ondes et des remous, etc.*, en admettant que les composantes horizontales u, v, ou $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, de la vitesse en un point quelconque du fluide, diffèrent peu des valeurs u_0, v_0, ou $\frac{d\varphi_0}{dx}$, $\frac{d\varphi_0}{dy}$, qu'elles ont au point du fond situé sur la même verticale. Il importe de remarquer qu'on pourrait établir la même formule sans faire cette hypothèse restrictive. En effet, la relation (13)

$$(a)\qquad \varphi = \varphi_0 - \int_0^z dz \int_0^z \Delta_2\varphi . dz, \quad \text{où} \quad \Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2},$$

différentiée, d'une part, deux fois en x, d'autre part, deux fois en y, donne, si l'on ajoute les résultats,

$$(b)\qquad \Delta_2\varphi = \Delta_2\varphi_0 - \int_0^z dz \int_0^z \Delta_2\Delta_2\varphi . dz;$$

et l'on aurait de même successivement

$$(c)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Delta_2\Delta_2\varphi = \Delta_2\Delta_2\varphi_0 - \int_0^z dz \int_0^z \Delta_2\Delta_2\Delta_2\varphi . dz, \ldots, \\ &(\Delta_2)^n\varphi = (\Delta_2)^n\varphi_0 - \int_0^z dz \int_0^z (\Delta_2)^{n+1}\varphi . dz, \end{aligned}\right.$$

en désignant par $(\Delta_2)^n$ la répétition de n fois l'opération qu'indique Δ_2. Or la substitution à $\Delta_2\varphi$ de sa valeur (b), puis à $\Delta_2\Delta_2\varphi$ de sa va-

---

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. XVII (1872).

leur (c), etc., change finalement la relation (a) en celle-ci :

$$(d)\quad \begin{cases} \varphi = \varphi_0 - \dfrac{z^2}{1.2}\Delta_2\varphi_0 + \dfrac{z^4}{1.2.3.4}\Delta_2\Delta_2\varphi_0 - \ldots \\ \quad \pm \dfrac{z^{2n}}{1.2\ldots 2n}(\Delta_2)^n\varphi_0 \mp \left(\displaystyle\int_0^z dz\right)^{2n+2}(\Delta_2)^{n+1}\varphi. \end{cases}$$

Dans le cas particulier où les mouvements se font parallèlement au plan des zx et sont indépendants de la coordonnée transversale y, l'expression développée de $(\Delta_2)^{n+1}\varphi$ se réduit à $\frac{d^{2n+2}\varphi}{dx^{2n+2}} = \frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}}$, et doit rester finie à mesure que n grandit; car on ne voit pas que, dans les phénomènes ondulatoires en général, les variations de la composante horizontale u de la vitesse, suivant sa propre direction prise pour celle des x, soient assez rapides pour que les dérivées successives de cette composante aient des valeurs indéfiniment croissantes. Il en est sans doute de même quand le mouvement se fait autrement que par plans parallèles, et l'expression $(\Delta_2)^{n+1}\varphi$ ne doit pas tendre vers $\pm\infty$ à mesure que n grandit, excepté peut-être en quelques points exceptionnels. Or, si l'on appelle M la valeur absolue la plus grande, supposée ainsi finie, que reçoit cette expression aux divers points de la verticale considérée (x, y), il vient, en valeur absolue,

$$\left(\int_0^z dz\right)^{2n+2}(\Delta_2)^{n+1}\varphi < \mathrm{M}\left(\int_0^z dz\right)^{2n+2}, \quad \text{ou} \quad < \mathrm{M}\frac{z^{2n+2}}{1.2.3\ldots(2n+2)},$$

et le dernier terme de la relation (d) tend vers zéro à mesure que n grandit de plus en plus. On doit donc avoir, en général,

$$(e)\quad \varphi = \varphi_0 - \frac{z^2}{1.2}\Delta_2\varphi_0 + \frac{z^4}{1.2.3.4}\Delta_2\Delta_2\varphi_0 - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6}\Delta_2\Delta_2\Delta_2\varphi_0 + \ldots,$$

et cette équation, qui n'est autre que celle (14) du Mémoire, peut être appliquée, non-seulement aux mouvements dans lesquels les composantes horizontales des vitesses sont peu variables de la surface au fond, mais plus généralement à tous les phénomènes ondulatoires des liquides. Il en est, par suite, de même des équations (19), qui en résultent pour le cas de mouvements parallèles au plan des zx et indépendants de la coordonnée transversale y.

Les ondes et les remous observés par Scott Russell et par M. Bazin diffèrent des autres mouvements ondulatoires des liquides pesants, en ce qu'ils sont régis, à une première approximation, par la loi simple de Lagrange ($\omega = \sqrt{g\mathrm{H}}$). Or, pour que les formules (19) du Mémoire conduisent à cette loi, il faut : 1° que la valeur de u_0 soit petite en comparaison de $\sqrt{g\mathrm{H}}$; 2° que chacune des quantités u_0, $\mathrm{H}\dfrac{du_0}{dx}$, $\mathrm{H}^2\dfrac{d^2u_0}{dx^2}, \ldots$ puisse être, à commencer par la seconde, négligée à une première approximation vis-à-vis de la précédente. Cela revient à admettre que les dérivées successives en x de φ_0 sont d'ordres de petitesse de plus en plus élevés, et aussi, par suite, d'après la formule (18), ou (e), dans laquelle chaque terme du second membre sera négligeable par rapport au précédent, que $\dfrac{d\varphi}{dx}$ ou u est sensiblement égal à $\dfrac{d\varphi_0}{dx}$ ou à u_0.

Ainsi la classe intéressante de faits que j'ai étudiée dans le Mémoire sur la *Théorie des ondes et des remous, etc.*, peut être distinguée des autres espèces de mouvements ondulatoires des liquides pesants au moyen de *l'un quelconque* des trois caractères suivants :

1° *La vitesse de propagation des ondes y est régie, à une première approximation, par la loi simple de Lagrange;*

2° *La composante horizontale des vitesses y est sensiblement la même aux divers points d'une même normale au fond;*

3° *Les dérivées successives de cette composante suivant sa propre direction y sont d'autant plus petites que leur ordre est plus élevé.*

Ce troisième caractère, purement analytique en quelque sorte, est le plus important à considérer quand il s'agit de soumettre au calcul les diverses ondes dont il s'agit, parce qu'il permet d'utiliser, en la réduisant à ses deux ou à ses trois premiers termes, l'expression (e) de φ, qui serait beaucoup moins convergente et, par suite, d'un emploi difficile dans tous les autres cas. Le premier a été confirmé, comme on sait, par des expériences précises et très-variées de Scott Russell, de M. Bazin, et même, plus anciennement, de Bidone, qui avait déjà étudié la propagation du gonflement produit, dans un canal presque horizontal, à l'amont d'une vanne que l'on abaisse afin de suspendre l'écoulement. Quant au second caractère, bien qu'il n'ait pas été, à ma connaissance, l'objet de mesurages proprement dits, on peut inférer expérimentalement sa réalité : 1° des observations de M. Morin sur l'onde qui accompagne fréquemment un canot dans un canal étroit et profond, et qui, continuant d'abord à se propager avec la vitesse primitive du canot, quand on arrête celui-ci, ne prend la vitesse indiquée par la loi de Lagrange qu'au bout d'un temps assez long pour que le mouvement se soit étendu, avec une notable intensité, jusqu'au fond du canal; 2° des expériences de M. de Caligny, qui a constaté, au moment du passage de toute onde solitaire, un mouvement progressif, très-sensible et sans retour, de petits corps sphériques déposés au fond de l'eau, et qui a d'ailleurs réussi aisément à produire des ondes pareilles dans un canal de 72 centimètres de largeur, en y promenant avec une petite vitesse un cylindre vertical de 4 à 5 centimètres de diamètre, *plongé jusqu'au fond,* tandis qu'un cylindre beaucoup plus gros, offrant au liquide une section incomparablement plus considérable, mais *mis en contact seulement avec les couches fluides superficielles,* ne donnait naissance qu'à quelques rides de la surface liquide [*].

---

[*] *Bulletin de la Société Philomathique de Paris* (séance du 25 mars 1843) au journal *l'Institut.* M. de Caligny a reproduit cette Note, intitulée *Expériences sur la formation de l'onde solitaire,* dans un Mémoire (*Expériences diverses sur les ondes en mer et dans les canaux, etc.*) inséré au *Journal de M. Liouville* (t. XI, 1866), et aussi, partiellement, dans un travail plus ancien (*Expériences sur une nouvelle espèce d'ondes à double mouvement oscillatoire et orbitaire*) qui fait partie du même Recueil (1re série, t. XIII, 1848). Ces Mémoires contiennent d'autres détails intéressants : par exemple la manière, reconnue par M. de Caligny dès 1842, de mesurer la vitesse de propagation d'une onde solitaire, dans un canal court fermé à ses deux extrémités par des parois normales à son axe, en la faisant réfléchir un certain nombre de fois sur ces parois; l'observation des orbites décrites par les molécules liquides dans les ondes périodiques, orbites qui sont elliptiques (infiniment aplaties sur le fond) dans les ondes *courantes* ou *houleuses,* et sensiblement rectilignes dans les ondes oscillant sur place ou *clapoteuses;* celle de la diminution qu'éprouve, dans un système d'ondes courantes, la longueur d'onde correspondant à une période de vibration déterminée, à mesure que la profondeur d'eau diminue, ce qui établit que la vitesse de propagation de ces ondes augmente avec la profondeur, conformément à une remarque de la *Théorie des ondes liquides périodiques* (*Savants étrangers,* t. XX, 2e note du § IV); enfin l'observation des mouvements de transport du fluide qui se superposent parfois au mouvement vibratoire, mais à d'assez petites distances seulement des endroits où agissent les causes productrices des ondes, mouvements qui étaient progressifs, ou de même sens que les ondes, dans les régions supérieures du fluide, et rétrogrades, ou de sens inverse, sur le fond.

Les trajectoires des molécules fluides, qui sont à fort peu près des ellipses dans les ondes périodiques *courantes* et des droites diversement inclinées sur l'horizon dans les vagues oscillant sur place ou *clapoteuses*, se déterminent également par des lois approchées très-simples dans les ondes que régit la loi de Lagrange. Si, en effet, x', z' désignent les coordonnées, à l'époque t, de la molécule qui occupait à l'origine, ou pour $t = -\infty$, la position (x, z), les formules (24) donneront à fort peu près, en observant que les composantes u, w de la vitesse valent sensiblement u_0, $-z\frac{du^0}{dx}$, et, en remplaçant, afin d'abréger, $\sqrt{g\text{H}}$ par ω,

$$(f)\left\{\begin{aligned} &\frac{dx'}{dt} = u = \frac{\omega}{\text{H}} f(x' - \omega t), \quad \frac{dz'}{dt} = w = -\frac{\omega}{\text{H}} z' f'(x' - \omega t), \\ &\text{d'où} \\ &x' - x = \frac{\omega}{\text{H}}\int_{-\infty}^{t} f(x' - \omega t)\,dt, \quad \log\frac{z'}{z} = -\frac{\omega}{\text{H}}\int_{-\infty}^{t} f'(x' - \omega t)\,dt. \end{aligned}\right.$$

Posons, dans ces intégrales, $x' - \omega t = s$, et prenons s pour variable indépendante, en faisant par suite

$$dt = -\frac{ds}{\omega - \frac{dx'}{dt}} = \text{à fort peu près } \frac{-ds}{\omega}.$$

Il viendra aisément

$$(g)\left\{\begin{aligned} &x' - x = \frac{1}{\text{H}}\int_{x'-\omega t}^{\infty} f(s)\,ds = \frac{1}{\text{H}}\int_{x'}^{\infty} f(x - \omega t)\,dx = \frac{1}{\text{H}}\int_{x'}^{\infty} h\,dx, \\ &\log\frac{z'}{z} = -\frac{1}{\text{H}}\int_{x'-\omega t}^{\infty} f'(s)\,ds = \frac{1}{\text{H}} f(x' - \omega t) = \frac{h}{\text{H}}. \end{aligned}\right.$$

Or l'intégrale $\int h\,dx$, prise entre les limites x' et ∞, n'est autre chose que le volume σ d'intumescence, par unité de largeur du canal, qui a dépassé, à l'époque t, l'abscisse x' de la molécule liquide considérée, et, d'autre part, le logarithme de $\frac{z'}{z}$, égal au petit rapport $\frac{h}{\text{H}}$, peut être remplacé par $\frac{z'-z}{z}$. Les relations (g) équivalent donc aux formules simples

$$(i) \qquad x' - x = \frac{\sigma}{H}, \quad z' - z = \frac{z}{H}h.$$

D'après celles-ci, *l'espace total parcouru dans le sens horizontal, jusqu'à un moment quelconque, par une molécule liquide, est égal au quotient du volume d'intumescence qui l'a dépassée à ce moment par la profondeur primitive, et l'élévation, à chaque instant, de la même molécule au-dessus de son niveau initial, s'obtient en multipliant la hauteur actuelle de l'intumescence, sur la section où cette molécule se trouve, par le rapport, à la profondeur primitive, de la hauteur initiale de la molécule au-dessus du fond du canal.*

L'équation de la surface libre peut être supposée donnée en h et σ, et alors celle des trajectoires des molécules s'en déduira par la substitution, à h et à σ, de leurs valeurs tirées de (i). Par exemple, si l'onde est solitaire, ou que l'on ait $h = \frac{3\sigma(Q-\sigma)}{4H^3}$ (*voir* form. 61), il viendra

$$(j) \qquad z' - z = \frac{3z}{4H^2}(x' - x)\left[\frac{Q}{H} - (x' - x)\right].$$

Les trajectoires décrites lors du passage d'une onde solitaire sont par conséquent des arceaux paraboliques, symétriques par rapport à un axe vertical, et dont l'amplitude horizontale constante est le quotient $\frac{Q}{H}$ *du volume total de l'intumescence par la profondeur primitive, tandis que leur hauteur, égale à celle de l'onde pour les molécules superficielles, se trouve réduite, pour les autres, proportionnellement à leur distance au fond. Le demi-paramètre des paraboles, distance du foyer de chaque arceau à sa directrice, est les* $\frac{2}{3}$ *de la profondeur primitive pour les molécules superficielles, et varie pour les autres en raison inverse de leur distance au fond :* il est indépendant de la hauteur de l'onde.