

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAURICE LEVY

**Sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres fraîchement remuées
et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 18 (1873), p. 241-300.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1873_2_18_241_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres fraîchement remuées et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement [*];

PAR M. MAURICE LEVY.

I. — OBJET DE CE TRAVAIL ET RÉSUMÉ SUCCINCT
DES RÉSULTATS OBTENUS.

1. Les formules ou règles géométriques, d'après lesquelles les Ingénieurs français calculent l'épaisseur des grands murs de soutènement, sont dûes au colonel Audoy [**], au général Poncelet [***] et à M. l'Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées de Saint-Guilhem [****]. Elles sont toutes fondées sur cette double hypothèse due à Coulomb, que dans un massif de terre dont l'équilibre se rompt les surfaces de glissement ou de *rupture des terres* sont planes et détachent du massif, des prismes exerçant sur les murs qui les soutiennent des pressions maxima.

En soumettant ces hypothèses à l'analyse, j'ai reconnu que, sauf

[*] Une première rédaction de ce travail a été présentée à l'Académie des Sciences, dans la séance du 3 juin 1867. Son insertion au *Recueil des Savants étrangers* a été ordonnée par l'Académie, le 7 février 1870.

[**] *Mémorial de l'Officier du Génie*, n° 11.

[***] *Mémorial de l'Officier du Génie*, n° 13.

[****] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. IX, année 1844.

dans deux cas très-particuliers, elles sont mathématiquement incompatibles. Malgré cela, on éprouve une certaine hésitation à les rejeter à cause de l'autorité des noms qui s'y attachent, et parce qu'elles sont extrêmement ingénieuses, et aussi parce qu'il semble, au premier abord, qu'on ne saurait les abandonner sans les remplacer par d'autres hypothèses plus ou moins douteuses et sujettes à leur tour à être condamnées par une analyse mathématique trop rigoureuse. Il n'en est heureusement pas ainsi; on peut étudier les surfaces de glissement des terres en toute rigueur et sans aucune idée préconçue quant à leur forme ou leur nature. Posée dans ces termes, la question cesse d'appartenir à la Mécanique empirique pour entrer dans le domaine de la Mécanique rationnelle et de la Géométrie. Elle acquiert ainsi un véritable intérêt scientifique, tout en conduisant, dans les cas ordinaires de la pratique, à des formules et à des constructions géométriques notablement plus simples que celles dont les Ingénieurs ont l'habitude de se servir.

C'est ce que je me propose de montrer dans ce travail. En le faisant, je n'abandonne pas ce que je regarde comme véritablement fondamental et fécond dans la pensée de Coulomb : l'idée même d'étudier la poussée des terres au moyen des surfaces de rupture qui s'y produiraient si leur équilibre venait à être brusquement rompu. Cette idée, je la conserve tout entière, mais en la dégageant des hypothèses dont elle est jusqu'ici demeurée enveloppée.

Je commence par étudier la répartition des pressions dans un massif de terre terminé par une surface cylindrique ou prismatique à arêtes horizontales, quelle que soit la forme de la section droite du prisme ou du cylindre.

J'examine ensuite plus particulièrement le cas pratique d'un massif limité par un talus plan indéfini d'une inclinaison quelconque, et je détermine les pressions exercées sur un mur de soutènement plan dans un semblable massif.

Je montre combien mes formules sont simples par rapport à celles que donnent les hypothèses de Coulomb. Enfin je termine en établissant l'incompatibilité mathématique que présentent en général ces hypothèses.

Mon travail est suivi d'une Note résumant les règles pratiques à

suivre pour faire le calcul des pressions que subit un mur de soutènement.

II. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES TERRES EN ÉQUILIBRE.

2. Nous regardons les terres comme formées de points matériels se succédant d'une manière continue et jouissant, les uns par rapport aux autres, d'une certaine mobilité. Nous ne considérerons (parce que c'est le seul cas pratique) que les masses terminées par des surfaces prismatiques ou cylindriques dont les génératrices sont horizontales; en sorte que, si l'on suppose les terres soumises exclusivement aux actions de la pesanteur, tout se passera de la même manière dans les diverses sections droites du prisme ou du cylindre, et il suffira d'étudier la répartition des forces dans l'une de ces sections. Soit donc (*fig. 1, n° 3*) ACD le profil curviligne ou polygonal de cette section que nous pouvons regarder comme la base d'un cylindre dont les génératrices ont pour longueur l'unité. Traçons-y une courbe quelconque Ca . Nous pouvons, sans troubler l'équilibre, enlever les terres CAa , pourvu qu'en chaque point de la courbe Ca nous appliquions des forces convenables. Ce sont ces forces fictives qui constituent les actions exercées sur les différents éléments de cette courbe. Ces actions sont en général obliques aux éléments plans sur lesquels elles s'exercent, et peuvent se décomposer en une pression normale \varkappa et une force tangentielle ε . \varkappa et ε dépendent non-seulement de la position du point m par lequel passe l'élément plan considéré, mais encore de la direction mn de cet élément plan, et tout ce que l'on sait sur ces forces, c'est que, si l'on considère le rapport

$$(1) \quad \frac{\varepsilon}{\varkappa} = f,$$

la fonction f est, dans l'état d'équilibre, inférieure ou au plus égale en valeur absolue à un certain nombre f , qui dépend de la nature des terres considérées et que l'on appelle le *coefficient de frottement* de

ces terres sur elles-mêmes ou simplement le coefficient de frottement de ces terres [*].

Si deux molécules infiniment voisines, prises sur la normale à l'élément plan mn , et près de chacune de ses deux faces sont sur le point de se mettre en mouvement l'une par rapport à l'autre, on est certain que la fonction \mathcal{F} atteint sa limite supérieure f ; dans tout autre cas, elle reste au-dessous de cette limite.

Telles sont toutes les notions que l'observation nous fournit *a priori* sur les terres; tout ce que nous dirions de plus serait hypothétique. On comprend que ces notions ne sont pas assez précises pour permettre de trouver toutes les conditions générales de l'équilibre des terres; mais nous verrons qu'elles suffisent pour trouver toutes celles qui intéressent le constructeur.

[*] On suppose souvent que si \mathcal{N} est la pression normale, par unité de surface sur un élément plan, la pression tangentielle \mathcal{E} ne sera pas simplement

$$\mathcal{E} = \mathcal{F}\mathcal{N},$$

mais bien

$$\mathcal{E} = \mathcal{F}\mathcal{N} + \Gamma,$$

\mathcal{F} et Γ étant deux fonctions telles, que l'on ait en valeur absolue

$$\mathcal{F}\mathcal{N} + \Gamma < f\mathcal{N} + \gamma,$$

la constante f étant le coefficient de frottement des terres et γ une autre constante que l'on appelle leur cohésion.

Mais tous les auteurs, après avoir introduit la constante γ , l'abandonnent dès qu'ils en arrivent aux applications. J'ai préféré simplifier les calculs en l'abandonnant dès le début de ce Mémoire. Ce n'est pas que ma théorie rende cette simplification nécessaire. On pourrait la reproduire tout entière en tenant compte de la cohésion; mais je crois que les praticiens ne doivent pas compter sur cette force pour réduire les dimensions des murs de soutènement; car lorsque les terres offrent de la cohésion, elles la doivent à de l'argile, et alors, loin de produire des poussées plus faibles, elles en produisent de beaucoup plus fortes, en raison des effets physiques que les alternatives de sécheresse et d'humidité produisent sur l'argile. Il faut alors augmenter les dimensions théoriques des murs de soutènement dans des proportions que l'expérience et la nature particulière des terres à soutenir peuvent seules indiquer dans chaque cas spécial.

Cette remarque sera comprise de tous les praticiens.

3. Cherchons d'abord tout ce que nous pouvons déduire de la Mécanique rationnelle, c'est-à-dire exprimons l'équilibre du parallélépipède et du prisme triangulaire élémentaire, suivant la méthode, si pleine d'enseignement dans toutes les questions de Physique mathématique, inaugurée par Cauchy et que M. Lamé a rendue géométriquement si saisissante au moyen de l'ellipsoïde d'élasticité.

Rapportons le système à deux axes rectangulaires Ox et Oy (*fig. 1*), l'un horizontal, l'autre vertical, et dirigé de haut en bas. Considérons en M un rectangle élémentaire dont les côtés dx et dy soient parallèles aux axes (ce rectangle, dans tout ce qui suit, est regardé comme la base d'un prisme dont les arêtes ont l'unité pour longueur.) Soient N_1 et T_1 les actions tangentielle et normale, rapportées à l'unité de surface que subit l'élément superficiel dy , normal aux x ; soient N_2 et T_2 les mêmes actions pour l'élément superficiel dx , normal aux y . Outre ces actions, le rectangle M subit l'action de la pesanteur. Si l'on exprime que la somme des moments de toutes ces forces, par rapport au centre du rectangle, est nulle, on trouve aisément

$$T_1 = T_2.$$

Soit T la valeur commune de ces deux forces. Si l'on projette maintenant toutes les forces sur les x et les y , on trouve, en appelant Π le poids de l'unité de volume des terres considérées,

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dN}{dx} + \frac{dT}{dy} = 0, \\ \frac{dT}{dx} + \frac{dN}{dy} = \Pi. \end{cases}$$

Ces deux équations contiennent trois fonctions inconnues : N_1 , N_2 et T . Il nous faudrait, entre ces fonctions, une troisième relation. Cette relation, rien dans la définition des terres ne nous la donne; tout ce que nous savons, c'est que les rapports $\frac{T}{N_1}$ et $\frac{T}{N_2}$ sont inférieurs ou au plus égaux au coefficient de frottement f ; mais c'est là une condition *d'inégalité*, et ce qu'il nous faudrait, c'est une définition assez précise des terres pour donner une condition *d'égalité* entre T , N_1 , N_2 . En

l'absence de cette définition, l'une de ces trois fonctions reste arbitraire, sauf les conditions

$$\frac{T}{N_1} \leq f, \quad \frac{T}{N_2} \leq f.$$

C'est ce que l'on peut exprimer en disant que, dans les termes où la question est posée, il y a une infinité d'états d'équilibre possibles.

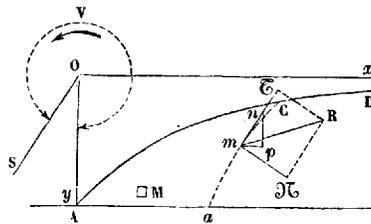
4. Mais je dis maintenant que, parmi tous ces états, il nous suffit, au point de vue des applications aux murs, d'en étudier un seul : c'est *l'équilibre limite* qui a lieu lorsque les terres sont sur le point de se mettre en mouvement. Supposons, en effet, qu'un mur de soutènement ait été établi de façon à résister aux pressions qu'il subit dans cet état d'équilibre particulier que nous appellerons (L); je dis qu'il résistera dans tout autre état d'équilibre (A) des terres. En effet, s'il ne résistait pas dans l'état d'équilibre (A), il chuterait, et les terres se mettraient en mouvement; mais, pour se mettre en mouvement, il faut qu'elles passent par l'état particulier d'équilibre (L) qui se produit immédiatement avant le mouvement; et comme, par hypothèse, le mur résiste dans cet état, il empêchera les terres de le dépasser et les y maintiendra.

Nous n'aurons donc à étudier que les propriétés de l'équilibre particulier (L); or nous allons voir que cet équilibre particulier est complètement défini; que outre les deux équations (2) qui existent pour tout état d'équilibre, il donne une troisième relation entre les fonctions N_1 , N_2 et T , en sorte que ces fonctions ne se trouvent plus indéterminées et que les propriétés de cet état d'équilibre peuvent être établies rigoureusement et sans le secours des hypothèses jusqu'ici admises et dont nous montrerons l'inexactitude.

En effet, considérons la masse sur le point de se mettre en mouvement; par chaque point m (*fig. 1*) passera une courbe Cma , suivant laquelle la partie antérieure de la masse tendra à glisser pour se séparer de la partie postérieure. Cette courbe Cma sera caractérisée parce que, suivant un quelconque de ses éléments, le rapport $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{N}} = f$ de l'action tangentielle à l'action normale atteindra sa limite

supérieure f ; en d'autres termes, l'élément plan mn de cette courbe jouira de la double propriété : 1° que la fonction $\mathfrak{F} y$ atteint une valeur absolue maxima, c'est-à-dire plus grande que celle qu'elle a pour tous les autres éléments plans passant au même point; 2° que cette valeur maxima est égale au coefficient de frottement f des terres que nous étudions. En exprimant cette double propriété, nous trouverons la troisième relation que nous cherchons entre les fonctions N_1 , N_2 et T . Pour cela, considérons l'équilibre du triangle élémentaire mnp , dont les deux côtés np et mp sont parallèles aux axes des coordonnées et supportent, par conséquent : le premier, les actions tangentielle et normale N_1 et T ; le second, les actions tangentielle et normale N_2 et T .

FIG. 1.



Soient \mathfrak{N} et \mathfrak{T} les composantes normale et tangentielle de l'action exercée sur l'élément mn ; soit V l'angle que cet élément fait avec l'axe des y [*]. En projetant les forces qui agissent sur le triangle mnp , sur mn et sur la normale à mn , et remarquant que la pesanteur n'interviendra pas comme étant proportionnelle à la surface du triangle, soit infiniment petite du second ordre, pendant que les actions sur les côtés du triangle sont du premier ordre, on trouve aisément

$$(3) \quad \begin{cases} \mathfrak{N} = -T \sin 2V + N_1 \cos^2 V + N_2 \sin^2 V, \\ \mathfrak{T} = T \cos 2V - \frac{N_2 - N_1}{2} \sin 2V, \end{cases}$$

[*] L'angle V se mesure ainsi : par l'origine on mène OS parallèle à l'élément plan mn considéré et dans la partie du plan contenant les y positifs. L'angle V est l'arc compris entre OS et le demi-axe positif des y , l'origine de cet arc étant sur l'axe des y , et l'arc étant parcouru en allant des y vers les x positifs.

ou encore

$$(4) \quad \begin{cases} \mathfrak{X} = \frac{N_1 + N_2}{2} - \frac{N_2 - N_1}{2} \cos 2V - T \sin 2V, \\ \mathfrak{E} = -\frac{N_2 - N_1}{2} \sin 2V + T \cos 2V; \end{cases}$$

et, par suite, en posant, comme nous l'avons fait plus haut (2),

$$\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{X}} = \mathfrak{f},$$

\mathfrak{f} étant une fonction de x, y et V , dont la plus grande valeur possible est f et la plus petite $-f$,

$$(5) \quad T \cos 2V - \frac{N_2 - N_1}{2} \sin 2V = \mathfrak{f} \left(-T \sin 2V - \frac{N_2 - N_1}{2} \cos 2V + \frac{N_2 + N_1}{2} \right).$$

Posons encore, pour simplifier,

$$(6) \quad \begin{aligned} \mathfrak{f} &= \text{tang } \Phi, \\ f &= \text{tang } \varphi, \end{aligned}$$

Φ sera une fonction de x, y, V dont la valeur maxima sera la constante φ et la valeur minima $-\varphi$. Par suite de cette nouvelle notation, l'équation (5) pourra s'écrire

$$(7) \quad \begin{cases} T \cos (\Phi - 2V) \\ + \frac{N_2}{2} [\sin (\Phi - 2V) - \sin \Phi] - \frac{N_1}{2} [\sin (\Phi - 2V) + \sin \Phi] = 0. \end{cases}$$

D'après ce qui précède, nous devons chercher le maximum de la fonction Φ lorsque V prend toutes les valeurs possibles, et écrire que ce maximum est égal à φ . Or le maximum de Φ a lieu pour

$$\frac{d\Phi}{dV} = 0;$$

nous n'aurons donc qu'à remplacer dans (7) la fonction Φ par la constante φ , et écrire que cette équation et sa différentielle par rapport

à V sont satisfaites, ce qui nous donnera les deux relations

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} T \cos(\varphi - 2V) \\ + \frac{N_2}{2} [\sin(\varphi - 2V) - \sin\varphi] - \frac{N_1}{2} [\sin(\varphi - 2V) + \sin\varphi] = 0, \\ 2T \sin(\varphi - 2V) - (N_2 - N_1) \cos(\varphi - 2V) = 0. \end{array} \right.$$

Si entre ces deux relations on élimine V ou $\varphi - 2V$, on aura la troisième équation cherchée entre les fonctions N_1 , N_2 et T . On trouve aisément que cette équation prend la forme très-simple

$$(9) \quad 4T^2 + (N_2 - N_1)^2 = \sin^2\varphi (N_1 + N_2)^2.$$

Rien ne serait changé à cette équation si l'on remplaçait φ par $-\varphi$, c'est-à-dire si l'on avait cherché le minimum analytique de $\frac{\epsilon}{\mathfrak{K}}$ et exprimé qu'il est égal à $-f$, ce qui a lieu effectivement; car $\frac{\epsilon}{\mathfrak{K}}$ peut varier entre $-f$ et $+f$.

En la combinant avec le groupe (2), on peut trouver N_1 , N_2 et T ; on déduit de (2), en appelant ψ une fonction entièrement arbitraire de x et de y ,

$$(10) \quad N_1 = \frac{d^2\psi}{dy^2}, \quad N_2 = 2\gamma + \frac{d^2\psi}{dx^2}, \quad T = -\frac{d^2\psi}{dxdy},$$

et ces valeurs, portées dans (9), donneront l'équation à laquelle devra satisfaire la fonction ψ . Il restera à intégrer cette équation aux différences partielles du second ordre et à déterminer, d'après les conditions à la surface, les fonctions arbitraires introduites par l'intégration, pour avoir résolu dans toute sa généralité le problème posé.

L'équation en ψ n'est pas, il s'en faut de beaucoup, facile à intégrer dans l'état actuel de la science; encore moins la détermination des arbitraires qui entreraient dans son intégrale peut-elle être effectuée d'une manière générale; mais nous verrons que les trois équations (1) et (9), dont on l'a déduite, comportent une solution en quelque sorte immédiate dans le cas qui se présente le plus ordinairement, on pourrait dire toujours, dans la pratique: celui d'une masse de terre terminée par un talus plan indéfini présentant une inclinaison quelconque.

Toutefois, avant de développer cette importante question, nous devons déduire, des équations que nous venons de trouver, les propriétés générales des terres en équilibre.

5. *Courbes isostatiques; forces principales.* — Les équations (4) donnent l'expression des composantes normale et tangentielle (\mathfrak{X} et \mathfrak{C}) de l'action que subit un élément plan passant en un point quelconque $m(x, y)$ de la masse de terre et ayant une inclinaison V sur la verticale; elles font connaître, par suite, le rapport

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{X}} = \mathfrak{f} = \text{tang } \Phi$$

donnant l'angle Φ que l'action exercée sur cet élément plan fait avec la normale à ce même élément.

Si l'on considère successivement tous les éléments plans passant en un point, c'est-à-dire si l'on fait varier V , l'angle Φ variera de son côté, et parmi toutes les valeurs qu'il est susceptible de prendre, il en est trois remarquables, à savoir: 1° la valeur $\Phi = 0$, qui correspond à un élément plan ne subissant qu'une pression normale; 2° la valeur $\Phi = \varphi$, qui est la valeur maxima de l'angle Φ ; 3° la valeur égale au signe près $\Phi = -\varphi$.

On trouvera la première en posant

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{X}} = \text{tang } \Phi = 0,$$

ou simplement

$$\mathfrak{C} = 0,$$

soit, d'après la seconde des équations (4),

$$-\frac{N_2 - N_1}{2} \sin 2V + T \cos 2V = 0,$$

d'où

$$(11) \quad \text{tang } 2V = + \frac{2T}{N_2 - N_1}.$$

On déduit de là, pour l'angle $2V$, deux valeurs différant entre elles

de 180 degrés, et par suite, pour V, deux valeurs différant entre elles de 90 degrés, c'est-à-dire qu'il existe *en chaque point de la masse des terres deux éléments plans perpendiculaires entre eux et ne subissant que des pressions normales*.

Nous appellerons ces éléments plans les *éléments isostatiques* et les pressions qu'ils subissent et qui leur sont normales *pressions* ou *forces principales*.

Si l'on prolonge les éléments isostatiques de proche en proche dans toute la masse, on tracera au sein de celle-ci deux familles de courbes orthogonales jouissant de la propriété de ne supporter que des pressions normales et que nous appellerons les *lignes isostatiques*.

Ces dénominations sont empruntées à M. Lamé (*Leçons sur l'élasticité des corps solides*); car les propriétés que nous venons d'indiquer existent, non-seulement pour les terres, mais pour toute espèce de matières comme les équations (4) dont elles sont déduites.

6. Propriétés caractéristiques des terres en équilibre limite. — Ce qui caractérise les terres et les distingue des autres matières en équilibre, c'est l'équation (9). Essayons de découvrir la propriété qu'elle exprime. Nous remarquerons d'abord que cette propriété est nécessairement indépendante du choix des axes des coordonnées. Du reste, cela est aisé à vérifier; nous avons, en effet, choisi des axes dirigés horizontalement et verticalement; mais comme la pesanteur n'entre pas dans les conditions d'équilibre du triangle élémentaire, il est clair que les équations (4) et toutes celles qui en sont déduites, y compris l'équation (9), subsisteraient, quelle que fût la direction des axes [*]. Or, puisqu'il existe en chaque point deux éléments plans rectangulaires ne supportant que des pressions normales, supposons qu'on ait placé les axes dans les directions qu'ont en un point donné ces deux éléments plans.

Soient A et B les forces principales ou les pressions que subissent ces éléments plans. L'équation (9), appliquée au point dont il s'agit et dans le système particulier d'axes que nous venons de définir,

[*] Cette remarque est essentielle et nous servira souvent par la suite.

s'obtiendra en faisant

$$T = 0,$$

et en remplaçant N_2 et N_1 par A et B . Elle deviendra donc simplement

$$(A - B)^2 = \sin^2 \varphi (A + B)^2,$$

ou

$$\frac{A - B}{A + B} = \sin \varphi,$$

ou, en supposant $B < A$,

$$(12) \quad \frac{B}{A} = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \operatorname{tang}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = m = \text{const.}$$

Ainsi, en chaque point d'une masse de terre en équilibre limite, le rapport des forces principales est constant, et sa valeur est connue dès qu'on se donne le coefficient de frottement de cette terre. Il est indépendant de la forme du massif de terre. C'est là la propriété essentielle et caractéristique des terres en équilibre limite [*].

7. Courbes de glissement. — Cherchons maintenant les courbes de glissement des terres, c'est-à-dire les courbes suivant lesquelles les différentes parties de la masse se détachent les unes des autres en cas de glissement. D'après la définition que nous avons donnée (4) de l'équilibre limite des terres, l'élément plan suivant lequel se pro-

[*] Remarquons que pour $\varphi = 0$ le rapport $\frac{B}{A}$ devient égal à l'unité, c'est-à-dire que les forces principales sont égales, et il est facile de vérifier que, dans ce cas, la pression exercée sur un élément plan quelconque est normale à cet élément, et que les pressions exercées sur les différents éléments plans passant par un point sont égales. Le cas dont il s'agit ici, où le coefficient de frottement $f = \operatorname{tang} \varphi = 0$, est en effet celui des liquides. Ainsi, dans un massif de terre en équilibre, le rapport des forces principales est constant. Ce rapport se rapproche d'autant plus de l'unité que le coefficient de frottement des terres que l'on étudie est plus petit; et à la limite, quand ce coefficient est nul, on retrouve, comme cela doit être, les propriétés des liquides, en sorte qu'un liquide est un massif de terre dont le talus de roideur limite une inclinaison nulle.

duirait le glissement en un point est celui pour lequel le rapport

$$\frac{\epsilon}{\delta\epsilon} = \mathcal{F} = \text{tang } \Phi$$

atteindrait son maximum $f = \text{tang } \varphi$ ou son minimum $f = - \text{tang } \varphi$, c'est-à-dire celui pour lequel Φ atteindrait son maximum φ ou son minimum $-\varphi$; mais cet élément plan est évidemment donné par l'une ou l'autre des équations (8), équations qui, en vertu de (9), rentrent l'une dans l'autre. Prenons la seconde de ces équations pour déterminer l'angle V' que fait avec la verticale l'élément plan le long duquel le glissement tend à se produire en chaque point de la masse, et nous aurons

$$- 2T \sin(\varphi - 2V') + (N_2 - N_1) \cos(\varphi - 2V') = 0$$

pour l'équation différentielle des courbes de glissement.

On déduit de là

$$(13) \quad \text{tang}(\varphi - 2V') = \frac{N_2 - N_1}{2T}.$$

Si l'on multiplie membre à membre cette équation et l'équation (11) qui donne l'inclinaison V sur la verticale des éléments isostatiques, on aura

$$\text{tang } 2V \times \text{tang}(\varphi - 2V') = + 1,$$

ou

$$\text{tang}(\varphi - 2V') = \cot 2V;$$

d'où

$$\varphi - 2V' = \frac{\pi}{2} - 2V,$$

ou

$$(14) \quad V - V' = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}.$$

Ainsi l'élément plan suivant lequel les terres tendent à glisser forme, avec l'un des éléments isostatiques, un angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, et, par suite, avec l'autre, un angle égal à $\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$.

Ainsi, dans tout massif de terre en équilibre limite, les courbes isostatiques et les courbes de glissement se coupent sous un angle constant qui est connu dès qu'on connaît le coefficient de frottement des terres que l'on étudie.

Si, au lieu de chercher l'élément plan pour lequel on a

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{T}} = \operatorname{tang} \varphi = f,$$

on cherchait celui par lequel on a

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{T}} = - \operatorname{tang} \varphi = -f,$$

il faudrait, dans l'équation (13), remplacer φ par $-\varphi$, ce qui donnerait

$$\operatorname{tang}(\varphi + 2V') = - \frac{N_2 - N_1}{2T};$$

et, par suite, en multipliant membre à membre avec (11),

$$\operatorname{tang}(\varphi + 2V') \operatorname{tang} 2V = -1,$$

d'où

$$\operatorname{tang}(\varphi + 2V') = - \cot 2V = \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{2} + 2V \right),$$

et

$$(14 \text{ bis}) \quad V' - V = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2},$$

qui est l'équation (14) changée de signe.

On obtient donc un élément plan symétrique, par rapport aux lignes isostatiques, de celui pour lequel on a $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{T}} = +f$, et qui constitue, comme ce dernier, un élément sur le point de glisser, en sorte que les terres tendent à se rompre suivant un double système de lignes de rupture.

Telles sont les relations les plus remarquables entre les forces qui se développent à l'intérieur des massifs de terre en équilibre, quel que soit le contour qui les termine.

Nous allons maintenant étudier plus particulièrement le cas où les terres sont terminées par un talus plan indéfini.

On satisfera à la troisième des équations (15), en posant entre ces constantes la relation

$$(17) \quad 4t^2 + (a^2 - a_1)^2 = \sin^2 \varphi (a_2 + a_1)^2.$$

Enfin si l'on porte les expressions (16) dans les deux premières équations (15), il viendra

$$(18) \quad \begin{cases} -a_1 \operatorname{tang} \omega + t = 0, \\ -t \operatorname{tang} \omega + a_2 = \Pi. \end{cases}$$

Si l'on détermine les trois constantes a_1 , a_2 et t , d'après les équations (17) et (18), on aura satisfait à toutes les conditions du problème. Or on déduit de (18)

$$\begin{aligned} a_2 &= t \operatorname{tang} \omega + \Pi, \\ a_1 &= + t \cot \omega. \end{aligned}$$

Par suite, (17) devient, après quelques réductions très-simples,

$$\begin{aligned} t^2 \cos^2 \varphi - \Pi \sin 2\omega (\cos 2\omega + \sin^2 \varphi) t + \frac{\Pi^2 \cos^2 \varphi \sin^2 2\omega}{4} &= 0, \\ t &= \frac{\Pi \sin^2 \omega}{2 \cos^2 \varphi} \left[\cos 2\omega + \sin^2 \varphi \pm \sqrt{(1 + \cos 2\omega)(\cos 2\omega - \cos 2\varphi)} \right]. \end{aligned}$$

Il faut prendre le radical avec le signe $-$; autrement, pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on aurait $t = \infty$, et, par suite, N_1 , N_2 et T infinis, ce qui est impossible [*].

[*] Ce cas extrême où $\varphi = \frac{\pi}{2}$, qui est celui d'un massif se tenant à pic, ne peut guère se présenter pratiquement dans les terres dépourvues de cohésion que nous considérons; mais nos équations n'en doivent pas moins s'y appliquer, comme à un cas limite, et il est remarquable que ce cas peut être résolu en termes finis, quel que soit le contour qui limite les terres.

Soit, en effet, $\gamma = \chi(x)$ ce contour, il faut :

1° Satisfaire aux équations (15), où $\varphi = \frac{\pi}{2}$, en tous les points de la masse;

Si l'on pose, pour simplifier,

$$(19) \quad \cos 2\omega + \sin^2 \varphi - \sqrt{(1 + \cos 2\omega)(\cos 2\omega - \cos 2\varphi)} = R,$$

il vient

$$t = \frac{\pi \sin 2\omega}{2 \cos^2 \varphi} R.$$

Si l'on pose, en outre,

$$(20) \quad y - x \operatorname{tang} \omega = h,$$

h désignant la distance verticale du point que l'on considère au talus OT, qui termine les terres, il viendra

$$(21) \quad \begin{cases} N_1 = \frac{\pi h \cos^2 \omega}{\cos^2 \varphi} R, \\ N_2 = \frac{\pi h}{\cos^2 \varphi} (\cos^2 \varphi + R \sin^2 \omega), \\ T = \frac{\pi h \sin \omega \cos \omega}{\cos^2 \varphi} R. \end{cases}$$

Et, par suite, les équations (4) donneront, pour les composantes \mathfrak{X} et \mathfrak{C} de l'action exercée sur un élément plan faisant avec la verticale l'angle V ,

$$(22) \quad \begin{cases} \mathfrak{X} = \frac{\pi h}{2 \cos^2 \varphi} \{ \cos^2 \varphi (1 - \cos 2V) + R [1 + \cos 2(V + \omega)] \}, \\ \mathfrak{C} = \frac{\pi h}{2 \cos^2 \varphi} [- \cos^2 \varphi \sin 2V + R \sin 2(V + \omega)]. \end{cases}$$

Au moyen de ces équations, le problème est analytiquement résolu. Connaissant les pressions \mathfrak{X} et \mathfrak{C} sur un élément plan quelconque pris

2° Avoir $N_1 = N_2 = T = 0$, pour $y = \chi(x)$. Or on remplit toutes ces conditions en faisant, en tous les points de la masse,

$$N_1 = T = 0, \quad \text{et} \quad N_2 = \pi [y - \chi(x)].$$

On voit donc que les trois forces N_1 , N_2 et T sont loin d'être infinies, puisque, au contraire, deux d'entre elles sont nulles. On voit, de plus, que les lignes isostatiques sont horizontales et verticales, quel que soit le contour qui limite les terres.

dans la masse, on peut calculer les pressions exercées sur une surface quelconque qui y est tracée, comme on les calcule pour les surfaces plongées dans un liquide.

9. *Talus de roideur limite.* — Pour que les diverses formules que nous venons de trouver soient réelles, il faut que le radical que comporte l'expression (19) de R soit lui-même réel, ce qui exige que

$$\cos 2\omega - \cos 2\varphi > 0,$$

ou, comme ω et φ sont des angles aigus,

$$\omega < \varphi.$$

Ainsi l'angle φ est l'angle *du talus de roideur limite*, ce qui est conforme à l'expérience.

Dans les théories existantes, ce résultat est une conséquence immédiate des hypothèses que l'on admet; ici il est obtenu d'une manière entièrement rationnelle.

10. *Les lignes isostatiques et les lignes de glissement sont droites.* — Si l'on veut avoir les lignes isostatiques, il faut poser

$$\varepsilon = 0,$$

ou, en vertu de (22),

$$(23) \quad -\cos^2\varphi \sin 2V + R \sin 2(\omega + V) = 0.$$

De là on déduit pour V deux valeurs qu'on reconnaît facilement, comme cela doit être, représenter deux directions rectangulaires. Ces valeurs de V sont constantes, c'est-à-dire indépendantes des coordonnées x et y d'où il résulte; que, *dans un massif de terre terminé par un talus plan indéfini, les lignes isostatiques sont deux systèmes de droites parallèles.*

Et comme nous avons vu (7) que les lignes de glissement coupent les lignes isostatiques sous des angles constants, on conclut que, *dans le massif de terre dont il s'agit, les lignes de glissement sont également des droites parallèles.*

11. *Direction de ces lignes.* — Déterminons maintenant la direction des lignes isostatiques, ce qui entraînera immédiatement la connaissance des lignes de glissement. Il faut, pour cela, résoudre l'équation (23).

Soit $V = \alpha$ l'une des racines de cette équation, la seconde racine sera $V = \frac{\pi}{2} + \alpha$, et l'on aura

$$(23 \text{ bis}) \quad -\cos^2 \varphi \sin 2\alpha + R \sin 2(\omega + \alpha) = 0.$$

On déduirait de là facilement la valeur de $\tan 2\alpha$; mais il est beaucoup plus commode de déterminer directement $\tan \alpha$. A cet effet, nous pouvons écrire l'équation (23 bis) ainsi :

$$\frac{\sin 2\omega \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 2\omega}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2 \varphi}{R},$$

ou

$$\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \sin 2\omega = \frac{\cos^2 \varphi}{R} - \cos 2\omega,$$

ou

$$\left(\frac{1}{\tan \alpha} - \tan \alpha \right) \sin \omega \cos \omega = \frac{\cos^2 \varphi}{R} - \cos 2\omega;$$

ou, en remplaçant R par sa valeur (19), faisant passer le radical au numérateur, et opérant les réductions qui se présentent,

$$\tan^2 \alpha + \frac{2 \tan \alpha}{\cos^2 \varphi \sin \omega} \left[\sin^2 \varphi \cos \omega + \sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)} \right] - 1 = 0,$$

et

$$\tan \alpha = \left\{ \begin{array}{l} \frac{-\sin^2 \varphi \cos \omega - \sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)}}{\cos^2 \varphi \sin \omega} \\ \pm \frac{\sqrt{\sin^4 \varphi \cos^2 \omega + \cos^4 \varphi \sin^2 \omega + \sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega) + 2 \sin^2 \varphi \cos \omega \sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)}}}{\cos^2 \varphi \sin \omega} \end{array} \right.$$

ou, en développant le produit $\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)$ sous le grand radical et remarquant qu'alors la quantité sous ce radical devient le carré de

$$\sin \varphi \left[\cos \omega + \sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)} \right],$$

il vient

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\sin \varphi \cos \omega (\pm 1 - \sin \varphi) - (\pm \sin \varphi + 1) \sqrt{\sin (\varphi + \omega) \sin (\varphi - \omega)}}{\cos^2 \varphi \sin \omega},$$

ou, en séparant les deux racines,

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tang} \alpha = \frac{\sin \varphi \cos \omega - \sqrt{\sin (\varphi + \omega) \sin (\varphi - \omega)}}{(1 + \sin \varphi) \sin \omega}, \\ \operatorname{tang} \alpha = \frac{-\sin \varphi \cos \omega - \sqrt{\sin (\varphi + \omega) \sin (\varphi - \omega)}}{(1 - \sin \varphi) \sin \omega}. \end{array} \right.$$

Le produit de ces deux racines est égal à l'unité prise négativement, c'est-à-dire qu'elles indiquent deux directions rectangulaires, comme cela devait être. Nous désignerons par la lettre α celle des deux directions qui fait un angle aigu avec la verticale, c'est-à-dire que nous poserons

$$(24 \text{ bis}) \quad \operatorname{tang} \alpha = \frac{\sin \varphi \cos \omega - \sqrt{\sin (\varphi + \omega) \sin (\varphi - \omega)}}{(1 + \sin \varphi) \sin \omega} \quad [*]$$

pour déterminer l'angle que l'une des lignes isostatiques fait avec la verticale. La seconde ligne isostatique sera à angle droit sur la première.

Quant aux lignes de glissement, elles feront (7), expression (14), avec la verticale, l'angle

$$(25) \quad V = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \alpha.$$

12. Construction géométrique pour déterminer les lignes isostatiques et par suite les lignes de glissement. — Il est intéressant d'étudier ce que devient l'équation (24 bis) lorsqu'on y change le signe du radical. Cette étude conduit à un procédé géométrique très-simple pour déterminer la direction des lignes isostatiques et, par suite, celle des lignes de glissement. On vérifie aisément, au moyen des formules or-

[*] Pour $\omega = 0$, on a $\operatorname{tang} \alpha = \frac{0}{0}$; mais on voit aisément que la véritable valeur est $\alpha = 0$.

dinaires de la Trigonométrie, qu'en changeant dans (24 bis) le signe du radical on obtient une expression qui représente la valeur de la ligne trigonométrique $\cot(\omega + \alpha)$ [*], c'est-à-dire que l'on a

$$(24\text{ ter}) \quad \cot(\omega + \alpha) = \frac{\sin \varphi \cos \omega + \sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)}}{(1 + \sin \varphi) \sin \omega}.$$

Multipliant membre à membre les équations (24 bis) et (24 ter), il viendra

$$(26) \quad \tan \alpha \cot(\omega + \alpha) = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right),$$

ou

$$\tan \alpha \tan \left(\frac{\pi}{2} - \omega - \alpha \right) = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Soit (fig. 2, n° 8) OA la direction isostatique formant l'angle α avec la verticale, c'est-à-dire soit

$$AOy = \alpha,$$

on aura

$$TOA = \frac{\pi}{2} - \omega - \alpha,$$

c'est-à-dire que l'angle $\frac{\pi}{2} - \omega - \alpha$ est l'angle que la même ligne isostatique fait avec le talus OT qui termine les terres. Soit β cet angle, on aura

$$\tan \alpha \times \tan \beta = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

[*] On a

$$\cot(\omega + \alpha) = \frac{1}{\tan(\omega + \alpha)} = \frac{1 - \tan \omega \tan \alpha}{\tan \omega + \tan \alpha}.$$

Portant dans cette expression la valeur (24 bis) de $\tan \alpha$, faisant passer le radical au numérateur, et effectuant les simplifications qui se présentent, on trouve

$$\cot(\omega + \alpha) = \frac{\sin \varphi \cos \omega + \sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)}}{(1 + \sin \varphi) \sin \omega}.$$

Cette relation exprime la propriété géométrique suivante :

Si l'on construit une ellipse ayant pour grand axe l'unité (une unité choisie arbitrairement), et pour petit axe la grandeur $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ mesurée avec la même unité, grandeur qui est connue dès qu'on se donne le coefficient de frottement des terres; si l'on place la courbe de façon que ses axes coïncident avec les deux lignes isostatiques OA et OB, les deux directions Oy et OT, c'est-à-dire la verticale et le talus qui termine les terres, coïncideront avec deux de ses diamètres conjugués.

Inversement, concevons que l'on ait construit une fois pour toutes un patron d'ellipse ayant pour axes l'unité et la grandeur $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$. On veut déterminer la direction des lignes isostatiques d'un massif de terre dont le talus OT fait avec l'horizontale un angle ω . — A cet effet on déterminera dans l'ellipse les deux diamètres conjugués formant entre eux l'angle $\frac{\pi}{2} - \omega$ [*], puis on placera le patron de façon que l'un de ces diamètres coïncide avec la verticale Oy; les directions qu'auront les axes de la courbe ne seront autres que celles des lignes isostatiques.

13. Expressions des forces qui se développent dans le massif en fonction de l'angle α qui donne la direction des lignes isostatiques. — Quand on aura trouvé l'angle α donnant la direction des lignes isostatiques, soit par la formule (24 bis), soit par la construction géométrique qui vient d'être indiquée, on pourra calculer les composantes \mathfrak{x} et \mathfrak{e} sur un élément plan quelconque pris dans l'intérieur de la masse au moyen des formules que nous allons établir maintenant.

Les formules (19) et (22) du n° 8 suffiraient pour calculer ces pressions; mais les formules que nous allons établir en fonction de l'angle α seront plus commodes.

[*] Pour cela, sur le grand axe on décrit un segment de cercle capable du supplément de l'angle $\frac{\pi}{2} - \omega$, c'est-à-dire capable de l'angle $\frac{\pi}{2} + \omega$. Soit M un des points d'intersection de ce segment avec l'ellipse, on joindra le point M aux deux extrémités du grand axe, et l'on aura deux lignes parallèles aux diamètres cherchés.

La première des formules (22) donne l'expression de \mathcal{X} ,

$$\mathcal{X} = \frac{\Pi h}{2 \cos^2 \varphi} \{ \cos^2 \varphi (1 - \cos 2V) + R [1 + \cos 2(\omega + V)] \};$$

ou, en remplaçant R par sa valeur tirée de (23 bis), n° 11, savoir :

$$\frac{R}{\cos^2 \varphi} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2(\omega + \alpha)},$$

on aura

$$\mathcal{X} = \frac{\Pi h}{2} \left\{ 1 - \cos 2V + \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2(\omega + \alpha)} [1 + \cos 2(\omega + V)] \right\},$$

ou encore

$$\mathcal{X} = \frac{\Pi h}{2 \sin 2(\omega + \alpha)} [\sin 2(\omega + \alpha) + \sin 2\alpha - \cos 2V \sin 2(\omega + \alpha) + \sin 2\alpha \cos 2(\omega + V)]$$

ou, en développant les deux derniers termes de la parenthèse et supprimant le terme $\sin \alpha \cos 2\omega \cos 2V$, qui disparaît dans ce développement,

$$\mathcal{X} = \frac{\Pi h}{2 \sin 2(\omega + \alpha)} [\sin 2(\omega + \alpha) + \sin 2\alpha - \sin 2\omega \cos 2(\alpha - V)],$$

ou, en remplaçant les deux premiers termes de la parenthèse par un produit,

$$\mathcal{X} = \frac{\Pi h \cos \omega}{\sin 2(\omega + \alpha)} [\sin(\omega + 2\alpha) - \sin \omega \cos 2(\alpha - V)];$$

ou encore, en posant

$$h \cos \omega = p,$$

p étant la distance du point considéré au talus, et en développant,

$$\mathcal{X} = \frac{\Pi p}{2} \left[\frac{\sin \alpha}{\sin(\omega + \alpha)} + \frac{\cos \alpha}{\cos(\omega + \alpha)} - \frac{\sin \omega \cos 2(\alpha - V)}{\sin(\omega + \alpha) \cos(\omega + \alpha)} \right],$$

ou

$$\mathcal{X} = \frac{\Pi p \sin \alpha}{2 \sin (\omega + \alpha)} \left[1 + \frac{\operatorname{tang} (\omega + \alpha)}{\operatorname{tang} \alpha} - \frac{\sin \omega \cos 2 (\alpha - V)}{\sin \alpha \cos (\omega + \alpha)} \right].$$

Or la relation (26) donne

$$(a) \quad \frac{\operatorname{tang} (\omega + \alpha)}{\operatorname{tang} \alpha} = \frac{1}{m} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

et peut aussi s'écrire

$$(a') \quad \frac{\sin (\omega + \alpha) \cos \alpha}{\sin \alpha \cos (\omega + \alpha)} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi},$$

d'où, en retranchant les dénominateurs des numérateurs,

$$(b) \quad \frac{\sin \omega}{\sin \alpha \cos (\omega + \alpha)} = \frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}.$$

En ayant égard à (a) et (b), l'expression de \mathcal{X} devient simplement

$$\mathcal{X} = \frac{\Pi p \sin \alpha}{\sin (\omega + \alpha)} \frac{1 - \sin \varphi \cos 2 (\alpha - V)}{1 - \sin \varphi}.$$

L'angle $\alpha - V$ n'est autre que l'angle que forme l'élément plan que l'on considère avec l'élément isostatique OA (*fig. 2*); cet angle étant compté positivement ou négativement, suivant que V est plus petit ou plus grand que α .

Soit i cet angle, on aura

$$(27) \quad \mathcal{X} = \frac{\Pi p \sin \alpha}{\sin (\omega + \alpha)} \frac{1 - \sin \varphi \cos 2 i}{1 - \sin \varphi}.$$

On trouverait par des calculs semblables l'expression de \mathcal{E} . En portant la valeur

$$\frac{R}{\cos^2 \varphi} = \frac{\sin 2 \alpha}{\sin 2 (\omega + \alpha)}$$

dans l'expression (22) de \mathcal{E} , on aura

$$\mathcal{E} = \frac{\Pi h}{2 \sin 2 (\omega + \alpha)} [-\sin 2 V \sin 2 (\omega + \alpha) + \sin 2 \alpha \sin 2 (\omega + V)],$$

ou

$$\mathfrak{E} = \frac{\Pi h \sin 2\omega}{2 \sin 2(\omega + \alpha)} \sin 2(\alpha - V),$$

ou

$$\mathfrak{E} = \Pi p \frac{\sin \omega \sin 2(\alpha - V)}{2 \sin(\omega + \alpha) \cos(\omega + \alpha)},$$

ou, à cause de (b),

$$(28) \quad \mathfrak{E} = \frac{\Pi p \sin \alpha}{\sin(\omega + \alpha)} \frac{\sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sin 2(\alpha - V) = \frac{\Pi p \sin \alpha \sin \varphi}{\sin(\omega + \alpha)(1 - \sin \varphi)} \sin 2i.$$

Des équations (27) et (28) on déduit

$$(29) \quad \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{H}} = \mathfrak{F} = \text{tang } \Phi = \frac{\sin \varphi \sin 2i}{1 - \sin \varphi \cos 2i}.$$

L'angle Φ est, comme on sait, le complément de l'angle que forme un élément quelconque avec la direction de l'action qui s'exerce sur lui. On voit que Φ ne dépend pas de p , mais seulement de i , c'est-à-dire que cet angle reste le même pour une série d'éléments plans parallèles, et qu'ainsi, dans toute section plane, il conserve une valeur constante. Cette valeur est nulle pour

$$i = 0, \quad i = \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire pour les éléments isostatiques. On vérifie de plus que cette valeur de Φ est maxima et égale à φ pour

$$i = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right),$$

et qu'elle est minima et égale à $-\varphi$ pour

$$i = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right);$$

en sorte que, par chaque point, il passe deux lignes symétriques par rapport à la ligne isostatique OA, faisant avec elle l'angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ et le

long desquelles le rapport $\frac{\sigma}{\rho}$ atteint en valeur absolue son maximum $\tan \varphi = f$. Cela est conforme aux propriétés générales indiquées au n° 7.

14. *Forces principales.* — Pour déduire de la formule générale (27) l'expression des forces principales, il suffit d'y faire successivement

$$i = 0, \quad i = \frac{\pi}{2},$$

ce qui donne, B étant la plus petite et A la plus grande de ces forces,

$$B = \Pi \frac{\sin \alpha}{\sin(\omega + \alpha)} p,$$

$$A = \Pi \frac{\sin \alpha}{\sin(\omega + \alpha)} \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} p,$$

que l'on peut encore écrire, en ayant égard à la relation

$$\frac{\tan(\omega + \alpha)}{\tan \alpha} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi},$$

$$(30) \quad \begin{cases} B = \Pi \frac{\sin \alpha}{\sin(\omega + \alpha)} p, \\ A = \Pi \frac{\cos \alpha}{\cos(\omega + \alpha)} p. \end{cases}$$

On voit que

$$\frac{B}{A} = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right),$$

ce qui vérifie le théorème général établi au n° 6.

Telles sont les propriétés fondamentales et les expressions très-simples des pressions qui se développent dans un massif de terre terminé par un talus plan. Cette simplicité tient tout entière à ce que les lignes de glissement y sont des droites parallèles. Il devient dès lors intéressant de rechercher si *les massifs terminés par un talus plan sont les seuls qui jouissent de cette propriété essentielle.*

A cet effet, je remarque que, si les lignes de glissement sont des droites parallèles, il en est de même des lignes isostatiques, et réci-

roquement, puisque ces deux systèmes de lignes se coupent, dans toute espèce de massif, sous un angle constant. Tout se réduit donc à chercher les massifs dont les lignes isostatiques sont des droites parallèles. Soient OA et OB les directions des deux systèmes de lignes isostatiques que nous prendrons pour axes de coordonnées; soit α l'angle indéterminé que la ligne OA fait avec la verticale; soient A et B les forces principales. Nous savons que l'on a

$$\frac{B}{A} = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = m.$$

Si nous écrivons les conditions d'équilibre d'un rectangle infinitésimal $abcd$ parallèle aux axes, comme les éléments de ce rectangle ne supportent, par hypothèse, que des pressions normales, nous aurons simplement les équations

$$\frac{dA}{dx} = \Pi \cos \alpha,$$

$$\frac{dB}{dy} = \Pi \sin \alpha,$$

OA étant l'axe des x et OB l'axe des y ; d'où, à cause de $\frac{B}{A} = m$,

$$A = \Pi \left(x \cos \alpha + \frac{y \sin \alpha}{m} \right),$$

en supposant que l'origine O soit sur la surface qui termine le massif, c'est-à-dire en supposant que, pour $x = y = 0$, on ait $A = 0$. L'équation de cette surface sera $A = 0$, c'est-à-dire

$$(c) \quad x \cos \alpha + \frac{y \sin \alpha}{m} = 0;$$

c'est donc nécessairement une droite.

Donc les massifs terminés par un talus plan sont les seuls dont les lignes isostatiques et les lignes de glissement soient des droites parallèles.

Remarquons en passant que, si OT est cette droite et qu'on pose

$$\text{TOA} = \beta,$$

son équation pourra encore s'écrire

$$(d) \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tang} \beta,$$

d'où, par la comparaison des deux équations (c) et (d),

$$\cos \alpha - \frac{\sin \alpha \operatorname{tang} \beta}{m} = 0,$$

ou

$$\operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta = m,$$

propriété que nous avons démontrée au n° 12, et d'où nous avons déduit une construction géométrique pour les lignes isostatiques.

14 bis. Résumé de la méthode à suivre dans les applications pour calculer les pressions qui s'exercent sur un élément plan quelconque pris à l'intérieur du massif, et formules nouvelles. — Résumons ce qui précède.

Étant donné (*fig. 2*) un massif de terre terminé par un talus formant un angle ω avec l'horizontale, le coefficient de frottement $f = \operatorname{tang} \varphi$ de ces terres étant connu, on se propose de trouver la pression normale \varkappa et la pression tangentielle σ , qui s'exercent, par unité de surface, sur un élément plan mn , formant un angle V avec la verticale, et placé à une profondeur verticale h , au-dessous du talus formant la surface libre, ou, si l'on veut, à une distance p de ce talus.

Pour cela, on commence par calculer un angle auxiliaire α . A la rigueur, il n'est pas nécessaire de connaître la signification géométrique de cet angle, qui représente l'inclinaison sur la verticale de l'un des deux systèmes de lignes isostatiques. Cet angle α pourrait être calculé au moyen de l'équation (*24 bis*), qui fournit l'expression de sa tangente trigonométrique en fonction des données ω et φ du problème; mais cette expression est assez complexe et n'est pas calculable par logarithmes. Nous sommes arrivé à une formule d'une simplicité tout à fait pratique, en prenant pour inconnue l'angle $\alpha + 2\omega$

au lieu de α . Pour établir cette formule, reprenons l'équation (23 bis)

$$-\cos^2 \varphi \sin 2\alpha + R \sin 2(\alpha + \omega) = 0,$$

où R a la valeur (19), savoir :

$$R = \cos 2\omega + \sin^2 \varphi - 2 \cos \omega \sqrt{\sin(\varphi + \omega)(\varphi - \omega)}.$$

De cette équation on déduit, en y introduisant l'angle $2\alpha + \omega$,

$$\text{tang}(2\alpha + \omega) = \frac{\sin \omega (\cos^2 \varphi + R)}{\cos \omega (\cos^2 \varphi - R)},$$

ou, en ayant égard à l'expression de R,

$$\text{tang}(2\alpha + \omega) = \frac{\sin \omega}{\sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)}};$$

d'où l'on tire, pour $\sin(2\alpha + \omega)$, l'expression très-simple et remarquable

$$(A) \quad \sin(2\alpha + \omega) = \frac{\sin \omega}{\sin \varphi}.$$

Connaissant le talus ω et l'angle des terres donné φ , cette formule fournit immédiatement l'angle α que fait l'une des lignes isostatiques, et, par suite, celui que fait l'autre de ces lignes avec la verticale.

Une fois l'angle α connu, nous rappellerons que les angles que font avec la verticale les deux systèmes de lignes de rupture sont

$$\pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) - \alpha.$$

Pour trouver ensuite la pression tangentielle ε , il suffira d'employer soit la formule

$$(B) \quad \varepsilon = \frac{\Pi h \sin 2\omega}{2 \sin 2(\alpha + \omega)} \sin 2(\alpha - V),$$

soit celle

$$\varepsilon = \Pi p \frac{\sin \alpha \sin \varphi \sin 2(\alpha - V)}{\sin(\omega + \alpha)(1 - \sin \varphi)},$$

démontrées au n° 13. La première est calculable par logarithmes; la seconde devient calculable par logarithmes, si on l'écrit ainsi :

$$(B_1) \quad \bar{c} = \Pi p \frac{\sin \varphi}{2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \frac{\sin \alpha}{\sin(\omega + \alpha)} \sin 2(\alpha - V),$$

ou ainsi, en vertu de la formule (a') du n° 13 :

$$B_2) \quad \bar{c} = \Pi p \frac{\sin \varphi}{2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \frac{\cos \alpha}{\cos(\omega + \alpha)} \sin 2(\alpha - V).$$

On choisira celle de ces formules qu'on jugera la plus commode.

Il restera ensuite à calculer la pression normale \varkappa . On pourrait, pour cela, employer la formule (27) du n° 13, mais elle n'est pas calculable par logarithmes. Aussi donnerons-nous la formule suivante. Soit posé, comme nous l'avons déjà fait souvent,

$$(C) \quad \frac{\bar{c}}{\varkappa} = \text{tang } \Phi.$$

Ayant \bar{c} , si nous calculons l'angle Φ , la formule (C) donnera \varkappa .

Or la formule (29) donne

$$\text{tang } \Phi = \frac{\sin \varphi \sin 2(\alpha - V)}{1 - \sin \varphi \cos 2(\alpha - V)}.$$

De là on déduit

$$\text{tang}(\Phi + \alpha - V) = \frac{\frac{\sin \varphi \sin 2(\alpha - V)}{1 - \sin \varphi \cos 2(\alpha - V)} + \text{tang}(\alpha - V)}{\frac{1 - \sin \varphi \sin 2(\alpha - V)}{1 - \sin \varphi \cos 2(\alpha - V)} \text{tang}(\alpha - V)}$$

ou

$$(D) \quad \text{tang}(\Phi + \alpha - V) = \frac{\text{tang}(\alpha - V)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)},$$

formule très-simple et calculable par logarithmes.

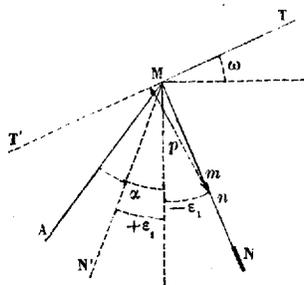
Ainsi, en résumé, par la formule (A), on calculera l'angle auxiliaire α ; par la formule (D), l'angle auxiliaire Φ ; par l'une des for-

mules (B), (B₁) ou (B₂), la pression ε , et enfin, par la formule (C), la pression \varkappa .

15. *Méthode à suivre pour trouver la pression totale que supporte une section plane.* — Appliquons les formules précédentes à la recherche des pressions exercées sur une section plane.

Soit (fig. 3) MN une section plane formant avec la verticale un angle $-\varepsilon_1$. Soient \varkappa et ε les composantes de la pression rapportées à

FIG. 3.



l'unité de surface exercée en un point m placé à une distance p du talus formant la surface libre. Soit R la résultante de ces pressions et φ_1 l'angle formé par cette résultante avec la normale au plan MN.

Posons

$$f_1 = \text{tang} \varphi_1.$$

Soit MA la direction de celle des deux lignes isostatiques qui forme avec la verticale l'angle aigu α . En appliquant les formules du numéro précédent, où l'on fera

$$V = -\varepsilon_1, \quad \Phi = \varphi_1,$$

nous aurons :

1° Pour trouver l'angle α ,

$$\sin(2\alpha + \omega) = \frac{\sin \omega}{\sin \varphi};$$

2° Pour calculer l'angle φ_1 ,

$$\text{tang}(\varphi_1 + \alpha + \varepsilon_1) = \frac{\text{tang}(\alpha + \varepsilon_1)}{\text{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)};$$

3° Pour calculer la pression tangentielle ε ,

$$\varepsilon = \Pi p \frac{\sin \varphi}{2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha + \omega)} \sin 2(\alpha + \varepsilon_1);$$

4° Pour calculer \varkappa ,

$$\varkappa = \frac{\varepsilon}{\tan \varphi_1};$$

5° Pour calculer la résultante \mathfrak{R} de \varkappa et ε ,

$$\mathfrak{R} = \sqrt{\varkappa^2 + \varepsilon^2}$$

ou

$$\mathfrak{R} = \frac{\varepsilon}{\sin \varphi_1} = \frac{\varkappa}{\cos \varphi_1}.$$

Soit R la pression résultante exercée sur la surface totale MN du plan. Toutes les pressions \mathfrak{R} forment avec la normale à ce plan l'angle φ_1 ; donc la résultante R formera ce même angle avec la normale. De plus, la pression \mathfrak{R} exercée en un point m étant proportionnelle à la distance de ce point au talus libre, *la résultante R sera appliquée au tiers de la longueur de la section MN considérée.*

Soient, pour avoir la grandeur de R , $Mm = s$; $MN = L$ la longueur totale de la section considérée.

On aura

$$R = \int_0^L \mathfrak{R} ds$$

ou

$$R = \Pi \frac{\sin \varphi}{2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha + \omega)} \frac{\sin 2(\alpha + \varepsilon_1)}{\sin \varphi_1} \int_0^L p ds.$$

Or

$$p = s \sin OMm = s \cos(\omega - \varepsilon_1);$$

donc

$$\int_0^L p ds = \cos(\omega - \varepsilon_1) \int_0^L s ds = \frac{\cos(\omega - \varepsilon_1)}{2} L^2,$$

donc

$$R = \frac{\Pi}{2} \frac{\sin \varphi}{2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha + \omega)} \frac{\sin 2(\alpha + \varepsilon_1) \cos(\omega - \varepsilon_1)}{\sin \varphi_1} L^2.$$

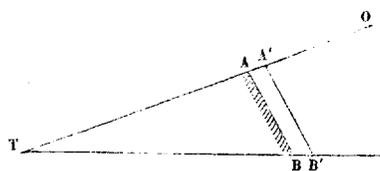
Si la section MN est remplacée par celle MN', symétrique de la précédente par rapport à la verticale, on devra, dans les formules précédentes, remplacer ε_1 par $-\varepsilon_1$.

16. Cas particulier d'une section dirigée suivant l'une des lignes de rupture. — Lorsque la section plane est dirigée suivant une des lignes de rupture, les formules précédentes se simplifient considérablement. Ce cas se présentant plus particulièrement dans la théorie des murs de soutènement dont nous allons nous occuper maintenant, nous en ferons l'examen au Chapitre suivant.

IV. — STABILITÉ DES MURS DE SOUTÈNEMENT.

17. Soit toujours OT le talus droit qui termine une masse de terre (*fig. 4*); nous voulons soutenir ces terres par un mur dont AB est la face postérieure plane; il s'agit de trouver les pressions qui s'exercent sur AB;

FIG. 4.



une fois ces pressions connues, on calculera l'épaisseur à donner au mur d'après les règles ordinaires de la résistance des matériaux. Il semble au premier abord que la solution soit une déduction immédiate de ce qui précède, qu'il suffise de considérer la masse de terre terminée par le talus indéfini OT, de concevoir qu'on fasse dans cette masse une section idéale AB, de calculer, par les équations du paragraphe précédent, les actions tangentielle et normale \varkappa et ε exercées sur cette surface; puis, à la place de la portion de terre située à gauche de AB, de placer un mur capable de résister aux actions \varkappa et ε ainsi calculées. Mais on se tromperait étrangement en opérant ainsi. Le mur ne tiendrait en aucune façon

lieu des terres enlevées. En effet, avant que ces terres ne soient enlevées, les actions \mathfrak{X} et \mathfrak{E} exercées sur AB sont bien celles données par les formules du paragraphe précédent, et, par suite, le rapport $\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{X}}$ ou \mathfrak{f} a la valeur fournie par la formule (29), valeur constante tout le long de AB. A la place des terres, mettons maintenant le mur, et rappelons-nous que nous n'étudions que l'équilibre limite des terres sur le point de glisser; le mur AB ne pouvant glisser que tout d'une pièce, les terres contiguës à AB seront assujetties à glisser le long de cette ligne, condition toute nouvelle à laquelle elles ne seraient pas assujetties sans l'existence du mur. Il en résulte que le rapport $\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{X}}$ le long de ce mur est déterminé *a priori*; il est égal au coefficient de frottement f_i du mur sur les terres, si ce coefficient est plus petit que celui de f des terres sur elles-mêmes, et il est égal à ce dernier si l'on a $f_i \geq f$ (*). C'est le cas qui se présente toujours dans la pratique. Ainsi, si le mur AB existe, le rapport $\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{X}}$ le long de ce mur est égal à f . S'il n'existe pas, ce rapport a la valeur \mathfrak{f} (29). Si l'inclinaison de AB sur les lignes isostatiques se trouve fortuitement être telle, que

$$\mathfrak{f} = f,$$

le mur remplacera les terres TOB, et la théorie qui précède s'appliquera sans difficulté; dans le cas contraire, la présence du mur change totalement la répartition des forces à l'intérieur de la masse : les lignes

[*] Je dis que si f_i est $> f$, le coefficient de frottement le long du mur AB ne saurait être f_i , bien que les terres glissent le long de cette surface, mais serait égal au coefficient de frottement f des terres sur elles-mêmes. En effet, faisons dans la masse une section A'B' parallèle à AB et infiniment voisine : A'B' étant à l'intérieur des terres, le coefficient de frottement y est au plus f . Or il ne peut pas augmenter de la quantité finie $f_i - f$ quand on passe de A'B' en AB; donc, en AB, il est aussi f . Ainsi le coefficient de frottement le long de AB est f_i si l'on a $f_i < f$ et f , si l'on a $f_i > f$. Matériellement cela se traduit ainsi : quand f_i est $< f$, le glissement qui tend à se produire contre la surface AB a lieu effectivement le long de cette surface; mais quand f_i est $> f$, les terres ne peuvent pas glisser le long de AB; une couche de terre ABA'B' reste adhérente à ce mur, et le glissement tend à se produire suivant A'B'.

isostatiques ne sont plus droites, et la théorie ne peut plus être faite dans l'état actuel de l'analyse.

Ce n'est donc que dans des cas restreints que les formules du Chapitre III peuvent être rigoureusement appliquées à la stabilité des murs de soutènement (*). Dans la pratique, nous verrons aussi comment on peut encore faire usage de nos formules d'une manière approximative en dehors de ces cas.

18. Application du principe précédent. — Considérons un massif terminé par un talus MO, présentant une inclinaison quelconque ω .

Soit MA la direction d'un des systèmes de lignes isostatiques, l'angle α , que ces lignes forment avec la verticale, étant donné par l'une ou l'autre des équations

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha + \omega) &= \frac{\sin \omega}{\sin \varphi}, \\ (31) \quad \text{tang } 2\alpha &= \frac{\sin \varphi \cos \omega - \sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)}}{(1 + \sin \varphi) \sin \omega}. \end{aligned}$$

Soit f_1 le coefficient de frottement des terres sur la maçonnerie, et soit $f = \text{tang } \varphi$ le coefficient de frottement des terres sur elles-mêmes; l'angle $\alpha + \varepsilon_1$, que forme avec la ligne isostatique MA la section MN le long de laquelle on a $\frac{\sigma}{\sigma_0} = f$, sera donné (n° 13), expression (29), par l'équation

$$(32) \quad \frac{\sin \varphi \sin 2(\alpha + \varepsilon_1)}{1 - \sin \varphi \cos 2(\alpha + \varepsilon_1)} = f_1.$$

Si $f_1 < f$, l'inclinaison sur la verticale de la face postérieure du mur de soutènement devra, pour que notre théorie soit rigoureusement applicable, être égale à la valeur que l'on déduit de cette équation pour ε_1 .

[*] M. de Saint-Venant a montré qu'en dehors de ces cas on peut néanmoins appliquer les formules du n° 14 bis, qui donnent alors une approximation par excès, c'est-à-dire des pressions plus fortes que celles qui ont lieu en réalité, de sorte qu'en adoptant ces formules on est amené à donner aux murs de soutènement une résistance un peu supérieure à celle strictement nécessaire (voir la Note de M. de Saint-Venant, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*).

Si au contraire, comme cela a lieu effectivement dans la pratique,

$$f_i > f,$$

l'angle ε , $= \varepsilon$, ε étant donné par l'équation

$$\frac{1 - \sin \varphi \cos 2(\alpha + \varepsilon)}{\sin \varphi \sin 2(\alpha + \varepsilon)} = \operatorname{tang} \varphi;$$

d'où l'on déduira simplement

$$(32 \text{ bis}) \quad \varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \alpha.$$

Ainsi, quand on aura déterminé l'angle α par l'équation (31), on connaîtra immédiatement, d'après l'équation (32 bis), le fruit ε à donner à la face postérieure du mur pour que nos formules s'appliquent rigoureusement.

L'angle ε étant déterminé, la pression sur le mur est donnée par les formules (27) et (28) du n° 13, lesquelles, avec les notations actuelles, deviennent

$$(33) \quad \begin{cases} \mathfrak{X} = \frac{\Pi \sin \alpha}{\sin(\omega + \alpha)} \frac{1 - \sin \varphi \cos 2(\alpha + \varepsilon)}{1 - \sin \varphi} p, \\ \mathfrak{E} = \frac{\Pi \sin \alpha}{\sin(\omega + \alpha)} \frac{\sin \varphi \sin 2(\alpha + \varepsilon)}{1 - \sin \varphi} p. \end{cases}$$

ou par la formule du n° 14 bis.

Si l'on remplace ε par ses valeurs, tirées de (32 bis), qui donne

$$2(\alpha + \varepsilon) = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right),$$

il vient

$$(33 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \mathfrak{X} = \frac{\Pi \sin \alpha}{\sin(\omega + \alpha)} (1 + \sin \varphi) p, \\ \mathfrak{E} = \frac{\Pi \sin \alpha}{\sin(\omega + \alpha)} (1 + \sin \varphi) \operatorname{tang} \varphi, p = f \mathfrak{X}, \end{cases}$$

équations où l'on remplacera α par sa valeur tirée de (31); mais il est plus simple de calculer directement \mathfrak{X} , et, par suite, \mathfrak{E} en fonction des

données du problème, qui sont l'inclinaison ω du talus et l'angle de frottement φ des terres. On déduit, en effet, de la dernière expression de \varkappa ,

$$\varkappa = \frac{\Pi p (1 + \sin \varphi)}{\cos \omega (1 + \tan \omega \cot \alpha)}.$$

Or on déduit de (31)

$$\cot \alpha = \frac{\sin \varphi \cos \omega + \sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)}}{(1 - \sin \varphi) \sin \omega},$$

d'où

$$1 + \cot \alpha \tan \omega = \frac{\cos \omega + \sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)}}{(1 - \sin \varphi) \cos \omega},$$

et, par suite,

$$\varkappa = \Pi p \frac{\cos^2 \varphi}{\cos \omega + \sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)}},$$

ou

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varkappa = \Pi p [\cos \omega - \sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)}], \\ \text{par suite} \\ \mathfrak{C} = \varkappa \tan \varphi = \Pi p \tan \varphi [\cos \omega - \sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)}], \\ \text{et} \\ \mathfrak{A} = \frac{\varkappa}{\cos \varphi} = \frac{\Pi p}{\cos \varphi} [\cos \omega - \sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)}], \end{array} \right.$$

\mathfrak{A} étant l'action totale exercée par unité superficielle sur le point du mur placé à la distance p du talus. On voit que \mathfrak{A} est proportionnel à p , d'où cette conclusion : *la résultante \mathfrak{A} des forces qui s'exercent sur la hauteur totale du mur est située au tiers de cette hauteur à partir de la base.*

Pour obtenir cette résultante en grandeur, soit ds un élément linéaire pris sur le mur, on aura

$$ds = \frac{dp}{\cos(\omega - \varepsilon)},$$

$$\mathfrak{A} ds = \frac{\Pi [\cos \omega - \sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)}]}{\cos \varphi \cos(\omega - \varepsilon)} p dp,$$

d'où

$$(35) \quad R = \int_0^4 \mathfrak{R} ds = \frac{\pi L^2 \cos(\omega - \varepsilon)}{2 \cos \varphi} [\cos \omega - \sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)}],$$

en appelant L la longueur MN du mur. Et si H est la projection de L sur la verticale,

$$(35 \text{ bis}) \quad R = \frac{\pi H^2 \cos(\omega - \varepsilon)}{2 \cos \varphi \cos^2 \varepsilon} [\cos \omega - \sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)}].$$

Ces diverses formules, quoique très-simples, peuvent encore être notablement simplifiées. En effet, en remarquant que

$$(36) \quad \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} = \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi},$$

on déduit, par des calculs faciles, des formules (31) et (32 bis), les suivantes :

$$(37) \quad \cot(\omega + \alpha) = \frac{\sin \varphi \cos \omega + \sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\omega - \omega)}}{(1 + \sin \varphi) \sin \omega}$$

et

$$(38) \quad \begin{cases} \operatorname{tang}(\varphi + \varepsilon) = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{\varepsilon} - \alpha\right) = \frac{\sin \varphi \sin(\varphi + \omega) + \sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)}}{\cos \varphi \sin(\varphi + \omega)}, \\ \operatorname{tang}(\omega - \varepsilon) = \operatorname{tang}\left[\omega + \alpha - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right] = \frac{\sin \varphi \sin(\varphi + \omega) - \sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)}}{\cos \varphi \sin(\varphi + \omega)}, \end{cases}$$

dont la première a déjà été donnée au n° 12.

Si des deux formules (38) on tire $\cos(\varphi + \varepsilon)$ et $\cos(\omega - \varepsilon)$, qu'on les divise l'une par l'autre et qu'on fasse disparaître le radical du dénominateur de la fraction ainsi obtenue, il viendra

$$\frac{\cos(\varphi + \varepsilon)}{\cos(\omega - \varepsilon)} = \frac{\cos \omega - \sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)}}{\cos \varphi},$$

ou

$$(39) \quad \cos \omega - \sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)} = \frac{\cos \varphi \cos(\varphi + \varepsilon)}{\cos(\omega - \varepsilon)}.$$

Portant l'expression du premier membre de cette équation dans les formules (34), (35) et (35 bis), celles-ci deviennent

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{X} = \frac{\Pi \cos \varphi \cos(\varphi + \varepsilon)}{\cos(\omega - \varepsilon)} p, \\ \mathfrak{C} = \frac{\Pi \sin \varphi \cos(\varphi + \varepsilon)}{\cos(\omega - \varepsilon)} p, \\ \mathfrak{R} = \frac{\Pi \cos(\varphi + \varepsilon)}{\cos(\omega - \varepsilon)} p, \end{array} \right.$$

et

$$(41) \quad R = \frac{\Pi L^2 \cos(\varphi + \varepsilon)}{2} = \frac{\Pi H^2 \cos(\varphi + \varepsilon)}{2 \cos^2 \varepsilon}.$$

On ne peut pas désirer des formules plus simples et plus pratiques que celles-ci, et aucune des méthodes empiriques usitées jusqu'ici n'a conduit, il s'en faut de beaucoup, à de tels résultats. Seulement pour faire usage de la formule (41), il faut au préalable calculer ε . On pourrait pour cela recourir aux formules (32) et (32 bis); mais en voici une beaucoup plus commode.

En multipliant membre à membre les équations (38 bis), il vient

$$\cos(\varphi + \varepsilon) \cos(\omega - \varepsilon) = \frac{\sin(\varphi + \omega)}{2 \operatorname{tang} \varphi},$$

ou

$$\cos(\varphi + \omega) \cos(2\varepsilon + \varphi - \omega) = \frac{\sin(\varphi + \omega)}{2 \operatorname{tang} \varphi};$$

d'où l'on déduit aisément

$$(42) \quad \cos(2\varepsilon + \varphi - \omega) = \frac{\sin \omega}{\sin \varphi}.$$

Ainsi le calcul de la pression sur un mur de soutènement se réduit à la résolution de l'équation (42) par rapport à ε et à la substitution de ε dans (41). C'est une règle autrement commode que toutes celles que fournissent les méthodes en usage aujourd'hui.

Il n'est pas besoin de remarquer que l'équation (42) permet aussi de calculer α ; car, en observant que

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{4} - \frac{\varphi}{2} - \alpha,$$

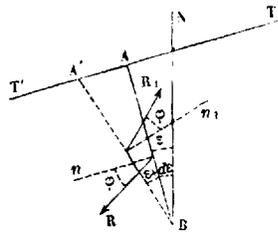
elle devient

$$(43) \quad \sin(2\alpha + \omega) = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi},$$

relation déjà établie au n° 14 bis.

19. La simplicité des formules (40) et (41) invite à en chercher une démonstration directe. A cet effet, soit T'T le talus terminal d'un massif indéfini de terre, dont AB est une ligne de glissement formant l'angle ε avec la verticale. Soit R la résultante des actions exercées sur AB par la partie du massif située à sa droite; R fera avec la normale n

FIG. 5.



à AB l'angle φ de frottement des terres sur elles-mêmes; de plus, cet angle atteignant suivant la ligne de glissement sa valeur maxima, son accroissement, lorsqu'on passera à une section BA', infiniment voisine et formant avec la verticale l'angle $\varepsilon + d\varepsilon$, sera nul, en sorte que, si R, est la résultante des actions exercées sur BA' par la partie de gauche du massif, l'angle de R, avec la normale n sera encore φ à un infiniment petit du second ordre près; donc l'angle aigu des forces R et R, sera $d\varepsilon$.

L'angle aigu de R avec la verticale est d'ailleurs, comme on le voit aisément, $\frac{\pi}{2} - \varepsilon - \varphi$. D'après cela, si l'on transporte en un même point les forces R et R, ainsi que le poids que nous appellerons dP du triangle BAA', et qu'on exprime que ces forces se font équilibre, les règles ordinaires du parallélogramme fourniront la relation

$$\frac{R}{dP} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \varepsilon\right)}{d\varepsilon} = \frac{\cos(\varphi + \varepsilon)}{d\varepsilon}.$$

Or, si $AB = L$, on a

$$dP = \frac{\pi L^2 d\varepsilon}{2},$$

et, par suite,

$$R = \frac{\pi L^2}{2} \cos(\varphi + \varepsilon),$$

expression qui n'est autre que la formule (41). Les formules (40) se déduisent facilement de celles-ci, en remarquant que, l'action \mathcal{R} exercée par unité de longueur sur un point situé à une distance L du talus, cette distance étant comptée parallèlement à AB , est

$$\mathcal{R} = \frac{dR}{dL},$$

soit

$$\mathcal{R} = \pi L \cos(\varphi + \varepsilon) = \pi \frac{\cos(\varphi + \varepsilon)}{\cos(\omega - \varepsilon)} P,$$

et, par suite,

$$\mathcal{X} = \mathcal{R} \cos \varphi = \frac{\pi \cos \varphi \cos(\varphi + \varepsilon)}{\cos(\omega - \varepsilon)} P,$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{R} \sin \varphi = \frac{\pi \sin \varphi \cos(\varphi + \varepsilon)}{\cos(\omega - \varepsilon)} P,$$

ce qui confirme les formules (40).

20. Appliquons nos formules à deux cas extrêmes qui se présentent fréquemment dans la pratique : celui d'un terrain terminé par le talus de roideur limite et celui d'une plate-forme horizontale. Dans le premier cas, je dis que nos formules s'appliqueront rigoureusement, si la face postérieure du mur est verticale, c'est-à-dire si $\varepsilon = 0$. En effet, la formule (31) donne, dans ce cas, c'est-à-dire pour $\omega = \varphi$:

$$\text{tang } \alpha = \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} = \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} = \text{tang} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right),$$

d'où

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2},$$

et, par suite,

$$\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \alpha = 0 \text{ [*]}.$$

Les formules (40) et (41) donnent ensuite, pour les charges par unité de longueur en chaque point du mur, et pour la charge résultante,

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R} = \Pi p, \\ \text{et} \\ \mathcal{R} = \frac{\Pi \cos \varphi L^2}{2} = \frac{\Pi \cos \varphi H^2}{2}. \end{array} \right.$$

21. Cas du terre-plein horizontal. — Dans le cas du terre-plein horizontal, c'est-à-dire pour $\omega = 0$, la formule (31) ou la formule (43) donne

$$\alpha = 0,$$

et, par suite,

$$\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}.$$

C'est encore là un cas très-pratique. Si, par exemple, $\varphi = 45$ degrés, comme cela a lieu en général, on a

$$\varepsilon = 22^{\circ} 30'.$$

Les formules (40) et (41) donnent alors

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R} = \frac{\Pi \sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} p = \Pi p \operatorname{tang} \varepsilon. \\ \mathcal{R} = \frac{\Pi L^2 \sin \varepsilon}{2} = \frac{\Pi H^2 \sin \varepsilon}{2 \cos^2 \varepsilon}. \end{array} \right.$$

22. Cas d'un talus quelconque. — Les deux cas que nous venons

[*] Valeur que la formule (42) donne immédiatement.

de traiter sont des cas usuels et extrêmes. Pour les valeurs de ω comprises entre zéro et φ , on trouverait pour ε des valeurs comprises entre zéro et $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$. Les formules (41) et (42) permettent d'ailleurs toujours de calculer simplement R et ε . Voici un tableau donnant les calculs tout faits pour les terres dont le talus naturel est de 45 degrés; nous avons fait ces calculs non-seulement pour ω compris entre zéro et 45 degrés, mais pour des valeurs de ω comprises entre zéro et - 45 degrés, c'est-à-dire des talus plongeants. Ce cas n'est pas fréquent, mais il peut se rencontrer quelquefois.

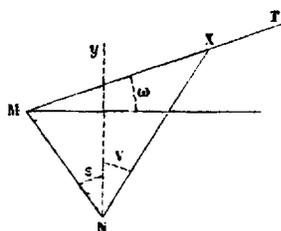
ω	α	$\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \alpha$	$\frac{R}{\Pi H}$	OBSERVATIONS.
45°	22° 30'	0°	0,35355	<p style="text-align: center;">FIG. 6.</p>
40	12° 41' 11"	9° 48' 49"	0,29674	
30	7° 30'	15°	0,26795	
20	4° 27' 48"	18° 2' 12"	0,25043	
10	2° 6' 28"	20° 23' 32"	0,23702	
0	0°	22° 30'	0,22416	
-10	-(2° 6' 28")	24° 36' 28"	0,21077	
-20	-(4° 27' 48")	26° 57' 48"	0,19488	
-30	-(7° 30')	30°	0,17255	
-40	-(12° 41' 11")	35° 11' 11"	0,12758	
-45	-(22° 30')	45°	0,00000	

α est l'inclinaison sur la verticale des lignes isostatiques. Pratiquement, cet élément n'est en général pas nécessaire; ε est l'angle que le parement postérieur du mur doit faire avec la verticale pour que nos formules s'appliquent rigoureusement. Si l'angle que l'on adopte diffère un peu de ε , nos formules doivent être regardées comme seulement approchées. Π est le poids du mètre cube des terres; R la pression appliquée au mur au tiers de sa hauteur H et inclinée à 45 degrés sur sa face postérieure.

23. *Comparaison entre les résultats de notre théorie et ceux de la théorie de Coulomb.* — La théorie de Coulomb suppose, comme on sait, les lignes de glissement planes; notre théorie prouve que, même dans le cas d'un massif terminé par un talus plan et soutenu par un mur, il n'en est généralement pas ainsi; cela n'arrive que dans le cas particulier que notre théorie indique et que la théorie de Coulomb est impuissante à révéler. Hormis ces cas particuliers, on conçoit, et nous le démontrerons plus loin, que les deux théories ne peuvent plus s'accorder et que celle de Coulomb doit être fautive; au contraire, lorsque la condition nécessaire pour que les lignes de glissement soient planes est remplie, on comprend que les deux théories doivent concorder, et nous allons montrer qu'en effet il en est ainsi. Pour cela, établissons les formules résultant de la théorie de Coulomb.

Soient (*fig. 7*) MT le talus des terres faisant avec l'horizon un angle quelconque ω ; MN la face postérieure du mur formant avec

FIG. 7.



la verticale l'angle ε ; V l'angle γNX du plan de rupture des terres avec la verticale; soient enfin φ et φ' les angles du frottement des terres sur elles-mêmes et sur les maçonneries.

Si l'on décompose le poids P du triangle MNX en deux forces dont l'une fasse un angle φ avec la normale à NX, l'autre un angle φ' avec la normale à MN, on trouve, d'après la règle du parallélogramme des forces, pour l'expression de cette dernière composante,

$$R = P \frac{\cos(V + \varphi)}{\sin(V + \varepsilon + \varphi + \varphi')}.$$

Or si $MN = L$, on a

$$P = \frac{\pi L^2 \cos(\omega - \varepsilon) \sin(V + \varepsilon)}{2 \cos(V + \omega)},$$

et, par suite,

$$(46) \quad R = \frac{\pi L^2 \cos(\omega - \varepsilon)}{2} \frac{\sin(V + \varepsilon) \cos(V + \varphi)}{\cos(V + \omega) \sin(V + \varepsilon + \varphi + \varphi')}.$$

Il faut déterminer l'angle V de façon que cette expression soit maxima. Nous suivrons pour cela la méthode de M. de Saint-Guilhem [*].

Si l'on pose $\cot(V + \varphi) = z$, on pourra écrire

$$R = \frac{\pi L^2 \cos(\omega - \varepsilon)}{2} \frac{z[\cos(\varepsilon - \varphi) + z \sin(\varepsilon - \varphi)]}{[z \cos(\omega - \varphi) - \sin(\omega - \varphi)][\cos(\varepsilon + \varphi') + z \sin(\varepsilon + \varphi')]},$$

ou en faisant, pour simplifier,

$$(47) \quad \begin{cases} \frac{\pi L^2 \cos(\omega - \varepsilon) \sin(\varepsilon - \varphi)}{2 \cos(\omega - \varphi) \sin(\varepsilon + \varphi)} = A, \\ \cot(\varphi - \varepsilon) = a, \\ \text{tang}(\varphi - \omega) = b, \\ \cot(\varphi' + \varepsilon) = -c, \end{cases}$$

on aura

$$(48) \quad R = A \frac{z(z - a)}{(z + b)(z - c)} = \frac{A}{b + c} \left[b + c + \frac{c(c - a)}{z - c} - \frac{b(b + a)}{z + b} \right].$$

Le maximum de R a lieu pour

$$(49) \quad \frac{z - c}{z + b} = \pm \frac{\sqrt{c(c - a)}}{b(b + a)} = \rho,$$

comme on le voit, en différentiant le troisième membre de l'équation (48). En différentiant le second membre et l'égalant à zéro, on

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. IX.

trouverait

$$\frac{(a+b)z}{z+b} = \frac{c(z-a)}{z-c},$$

d'où

$$\frac{z(z+a)}{(z-b)(z-c)} = \frac{a+b}{c} \left(\frac{z}{z+b} \right)^2,$$

et

$$R = A \frac{z(z-a)}{(z+b)(z-c)} = \frac{A(a+b)}{c} \left(\frac{z}{z+b} \right)^2,$$

ou, en vertu de la formule (49),

$$R = A \frac{a+b}{c} \left(\frac{c+b\rho}{b+c} \right)^2 = \frac{A(a+b)c}{(b+c)^2} \left(1 + \frac{b}{c}\rho \right)^2.$$

Si l'on remplace a, b, c par leurs valeurs (47), et qu'on pose

$$\frac{b}{c}\rho = K,$$

on trouve

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} K = -\sqrt{\frac{\sin(\varphi + \varphi') \sin(\varphi - \omega)}{\cos(\omega - \varepsilon) \cos(\varphi + \varepsilon)}}, \\ z = \cot(V + \varphi) = -\frac{(1+K) \cot(\varphi' + \varepsilon)}{1 + K \cot(\varphi' + \varepsilon) \cot(\varphi - \omega)}, \\ R = \frac{\pi L^2 \cos^2(\omega - \varepsilon) \cos(\varphi' + \varepsilon)}{2 \cos^2(\varphi + \varphi' + \varepsilon - \omega)} (1+K)^2 \\ = \frac{\pi H^2 \cos^2(\omega - \varepsilon) \cos(\varphi' + \varepsilon)}{2 \cos^2 \varepsilon \cos^2(\varphi + \varphi' + \varepsilon - \omega)} (1+K)^2. \end{array} \right.$$

Telles sont les équations qui donnent la pression R dans la théorie de Coulomb [*].

On voit combien notre formule générale (35) est simple par rapport à celles qu'il faut calculer dans la théorie de Coulomb.

[*] En prenant avec le signe + le radical exprimant K , on trouverait le minimum de R , ce qui correspondrait à ce que M. Poncelet a appelé *la butée des terres*. On s'en assure facilement par le signe de la dérivée seconde de la formule (48).

24. Dans le cas particulier d'un mur dont l'angle de frottement avec les terres est égal ou supérieur à celui des terres sur elles-mêmes, il faut faire $\varphi = \varphi'$, d'où

$$(51) \left\{ \begin{aligned} K &= \sqrt{\frac{\sin 2\varphi \sin(\varphi - \omega)}{\cos(\omega - \varepsilon) \cos(\varphi + \varepsilon)}} \\ \cot(V + \varphi) &= \frac{-(1 + K) \cot(\varphi + \varepsilon)}{1 + K \cot(\varphi + \varepsilon) \cot(\varphi - \omega)} \\ R &= \frac{\pi L^2 \cos^2(\omega - \varepsilon) \cos(\varphi + \varepsilon)}{2 \cos^2(2\varphi + \varepsilon - \omega)} (1 + K)^2 = \frac{\pi H^2 \cos^2(\omega - \varepsilon) \cos(\varphi + \varepsilon)}{2 \cos^2 \varepsilon \cos^2(2\varphi + \varepsilon - \omega)} (1 + K)^2. \end{aligned} \right.$$

Ici encore on voit combien ces formules sont compliquées par rapport à nos deux formules (41) et (42). Il serait difficile de prévoir qu'il existe un cas où la dernière (51) peut se réduire à l'expression simple (41), savoir :

$$R = \frac{\pi L^2}{2} \cos(\varphi + \varepsilon),$$

si ma théorie n'indiquait *a priori* la condition dans laquelle une telle coïncidence est vraisemblable. Cette condition est précisément celle fournie par les formules (32 bis), nécessaire pour que les lignes de glissement soient réellement planes. Pour montrer qu'alors les deux théories sont d'accord, soit q le rapport de la valeur de R fournie par la théorie de Coulomb à celle (41) fournie par ma théorie. On aura

$$q = \frac{\cos^2(\omega - \varepsilon) (1 + K)^2}{\cos^2(2\varphi + \varepsilon - \omega)},$$

d'où

$$\sqrt{q} = \frac{\cos(\omega - \varepsilon) (1 + K)}{\cos(2\varphi + \varepsilon - \omega)} = \frac{1 + K}{\cos 2\varphi + \sin 2\varphi \operatorname{tang}(\omega - \varepsilon)},$$

ou, en vertu de la seconde des formules (38),

$$\sqrt{q} = \frac{1 + K}{\cos 2\varphi + \sin 2\varphi \frac{\sin \varphi \sin(\varphi + \omega) - \sqrt{\sin(\varphi + \omega) \sin(\varphi - \omega)}}{\cos \varphi \sin(\varphi + \omega)}}$$

ou

$$\sqrt{q} = \frac{1 + K}{1 - 2 \sin \varphi \sqrt{\frac{\sin(\varphi - \omega)}{\sin(\varphi + \omega)}}}$$

Mais on a

$$K = - \sqrt{\frac{\sin 2\varphi \sin(\varphi - \omega)}{\cos(\omega - \varepsilon) \cos(\varphi + \varepsilon)}};$$

et des équations (38) on tire facilement

$$\cos(\omega - \varepsilon) \cos(\varphi + \varepsilon) = \frac{\cos\varphi \sin(\varphi + \omega)}{2 \sin\varphi}.$$

d'où

$$K = - 2 \sin\varphi \sqrt{\frac{\sin(\varphi - \omega)}{\sin(\varphi + \omega)}},$$

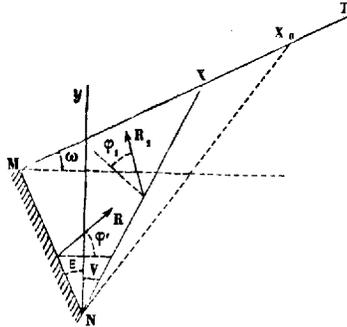
et, par suite, la dernière expression de \sqrt{q} se réduit à l'unité; ce qu'il fallait démontrer.

25. Cette démonstration suppose que le coefficient de frottement φ' du mur MN est égal ou supérieur à celui φ des terres; il serait nécessaire de faire une vérification analogue quand $\varphi' < \varphi$ et de faire aussi la vérification sur l'angle V, afin de montrer que la ligne de rupture fournie par la théorie de Coulomb coïncide avec l'une de celles que donne notre théorie. Pour cela il faudrait introduire dans les équations ci-dessus, non plus la condition simple (32 bis), mais celle (32) où l'on mettrait $\tan\varphi'$ à la place de f_1 , et alors on serait conduit à des calculs presque inabordable pour ramener à la même forme les deux groupes de formules fournis par les deux théories. Mais il est aisé de démontrer *a priori* et d'une manière rigoureuse que chaque fois que les lignes de rupture sont planes, les deux théories coïncident complètement.

A cet effet, soit (fig. 7, n° 23) MT le talus des terres formant un angle ω avec l'horizon; soit MN la face postérieure d'un mur dont l'angle de frottement φ' et l'inclinaison ε sur la verticale sont supposés liés entre eux par la relation (32) ou (32 bis), suivant que φ' est inférieur à φ , ou égal ou supérieur, de telle façon que les lignes de rupture sont planes. Soit R la réaction que le mur exerce sur les terres et qui fait avec la normale au mur l'angle φ' . Soit NX une section plane prise *tout à fait arbitrairement* et formant l'angle V avec la verticale; désignons par R, l'action totale inconnue exercée par le massif sur NX

et par φ_1 , l'angle également inconnu de R, avec la normale à NX.
 En décomposant, comme au n° 20, le poids du triangle MNX en

FIG. 8.



deux forces, dont l'une soit parallèle à R et l'autre à R_1 , on trouverait aisément, en posant $MN = L$, l'équation

$$(52) \quad R = \frac{\Pi L^2 \cos(\omega - \varepsilon)}{2} \frac{\sin(V + \varepsilon) \cos(V + \varphi_1)}{\cos(V + \omega) \sin(V + \varepsilon + \varphi_1 + \varphi')},$$

qui n'est autre que l'équation (46), où φ est remplacé par l'angle inconnu φ_1 . Cette équation est évidemment rigoureuse, et elle donnerait l'expression exacte de R, si l'on connaissait φ_1 en fonction de V. En portant cette fonction φ_1 dans (52), V disparaîtrait du second membre et R serait complètement déterminé. Je dis que V disparaîtrait du second membre; car il est évident que, quelle que soit la direction NX que l'on choisit, le triangle MNX doit être en équilibre et donnerait pour R l'expression (52), et comme R a une valeur unique et déterminée qui ne saurait dépendre de la direction donnée à NX, il est clair que V disparaîtrait du second membre si l'on y remplaçait φ_1 par sa valeur exacte en V. Par suite, si l'on donne à V un accroissement δV , R ne doit pas varier, c'est-à-dire que l'on a nécessairement

$$(53) \quad \frac{dR}{dV} + \frac{dR}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dV} = 0.$$

Cette équation et celle (52) sont rigoureuses, quel que soit le mode

d'équilibre du massif et quelle que soit la forme de ses lignes de glissement. Supposons maintenant que les lignes de glissement soient droites et que NX_0 soit une de ces lignes, alors, le long de cette ligne φ_1 , atteindra sa valeur maxima φ , c'est-à-dire que l'on aura à la fois

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \varphi \\ \text{et} \\ \frac{d\varphi_1}{dV} = 0. \end{array} \right.$$

Par suite, l'équation (53) se réduira à

$$(55) \quad \frac{dR}{dV} = 0.$$

Les relations (54) et (55), prises ensemble, signifient que, si le massif soutenu par le mur MN a des lignes de glissement planes, pour avoir l'inclinaison γNX_0 de l'une de ces lignes sur la verticale, il suffit, dans l'équation (52), de remplacer la fonction φ_1 de V par la constante φ et d'égaliser à zéro la dérivée du second membre par rapport à V; et la poussée R sur le mur MN sera précisément celle produite par le triangle MNX_0 ; en un mot, pour avoir la poussée R et la direction des lignes de glissement, il faut opérer précisément comme on opère d'après la théorie de Coulomb. Celle-ci, dans le cas que nous considérons, est donc exacte comme la nôtre.

Mentionnons, comme corollaire immédiat résumant ce qui précède, la proposition suivante, qui n'a jamais été démontrée, que l'on a toujours admise comme une simple hypothèse :

Lorsqu'un massif soutenu par un mur renferme *effectivement* des lignes de rupture planes, ces lignes sont précisément celles qui détachent du massif les prismes exerçant sur la portion du mur contre laquelle ils s'appuient la poussée maxima.

On comprendra, en lisant le Chapitre suivant, toute l'importance de cette proposition. La théorie de Coulomb comporte deux hypothèses : la première, c'est que les lignes de rupture sont planes; la seconde, c'est que ces lignes détachent les prismes exerçant sur les murs de soutènement les pressions maxima. On voit que celle-ci est

consécutives de celle-là ; si la première était toujours remplie, la seconde le serait nécessairement : elle est donc, en tout cas, inutile.

En terminant ce parallèle entre quelques-unes des formules résultant de notre théorie et les formules générales de la théorie de Coulomb, nous devons faire ressortir ce point essentiel : c'est que, même dans le cas où elle est exacte, où elle coïncide avec la nôtre, la théorie de Coulomb conserve une infériorité capitale ; elle ne peut pas à elle seule fournir la condition d'après laquelle on peut reconnaître son exactitude.

Tout ce que nous venons de faire, c'est de montrer que, dans le cas où les lignes de rupture sont planes, la théorie est exacte comme la nôtre ; mais comment reconnaître si dans un massif donné les lignes de rupture sont réellement planes ? C'est ce que notre théorie peut seule faire au moyen des formules (32) et (32 bis), et l'impossibilité où est la théorie de Coulomb de fournir elle-même les symptômes de son exactitude lui ôte tous les avantages pouvant résulter de cette exactitude, puisque rien, dans cette théorie, n'indique au constructeur les conditions dans lesquelles il doit se placer pour obtenir les résultats rigoureux qu'elle est susceptible de donner.

Le cas que nous venons d'examiner est d'ailleurs le seul où la théorie de Coulomb puisse donner des résultats exacts ; pour tout terrain autre que celui terminé par un talus plan indéfini, elle est mathématiquement impossible.

C'est par la démonstration de ce fait que nous terminerons notre travail, auquel nous ajouterons ensuite, sous forme de Note, un résumé pratique.

V. — IMPOSSIBILITÉ DE LA THÉORIE DE COULOMB TELLE QU'ELLE A ÉTÉ APPLIQUÉE JUSQU'ICI.

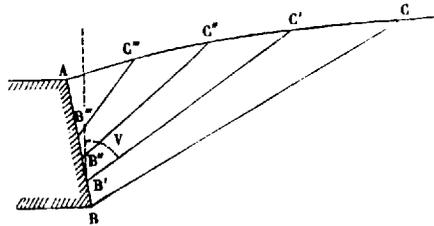
26. La théorie de Coulomb, telle qu'elle a été interprétée par tous les auteurs qui s'en sont servis, consiste à supposer que les lignes suivant lesquelles les terres tendent à glisser sont droites. Il est utile de bien préciser la signification de cette hypothèse.

Soit (*fig. 9*) un massif de terre terminé par la ligne courbe ou brisée AC, et soutenu par un mur dont la face postérieure soit AB.

Tous les interprètes de Coulomb procèdent ainsi pour calculer la

pression exercée sur une portion quelconque AB' du mur : ils considèrent une section $B'C'$, partant du point B' et formant avec la verti-

FIG. 9.



cale un angle inconnu V . Ils admettent que le prisme $AB'C'$ est soumis à trois forces qui se font équilibre, savoir :

1° Son poids P ;

2° La réaction R de la portion considérée AB' du mur, réaction qu'ils supposent faire avec la normale au mur un angle φ' égal à l'angle du frottement des terres sur le mur ;

3° La réaction S que le massif de terre exerce sur la face $B'C'$ du prisme, réaction qu'ils supposent inclinée sur la normale à $B'C'$ d'un angle φ égal à l'angle du frottement des terres sur elles-mêmes.

Je dis que cette dernière hypothèse suppose que la droite $B'C'$ est une des lignes de glissement *telles que je les ai définies*. En effet, j'ai défini les lignes de glissement des lignes telles que l'action exercée sur un *quelconque* de ses éléments fasse avec la normale à cet élément un angle φ égal à l'angle du frottement des terres. Or l'hypothèse consistant à supposer que l'action totale S exercée sur la ligne entière $B'C'$ fait un angle φ avec la normale à cette ligne revient à admettre que l'action exercée sur *chacun des éléments de cette droite fait aussi un angle φ avec la normale à cet élément* ; car si la force agissant sur un seul de ces éléments faisait avec la normale à la droite $B'C'$ un angle moindre que φ , il faudrait, pour que la résultante S fit un pareil angle avec cette normale, qu'il existât au moins un autre élément sur lequel s'exerçât un effort formant avec cette normale un angle plus grand que φ ; or cela est impossible d'après la définition même de cet angle. Ainsi la ligne droite $B'C'$ est bien censée, dans la théorie dont il s'agit,

être une ligne de glissement dans le sens que j'attache à ce mot. Et, comme on fait le même raisonnement pour toute autre portion AB'' du mur, on voit que l'on admet en principe que les lignes de glissement sont formées par une série de droites telles que $BC, B'C', B''C'', \dots$, c'est-à-dire qu'on suppose que le lieu des éléments plans pour lesquels le rapport $\frac{\sigma}{\mathcal{P}}$ atteint son maximum f est formé par une famille de lignes droites.

On détermine la direction de l'une quelconque $B'C'$ de ces droites en admettant qu'elle détache du massif le prisme $AB'C'$ exerçant sur la partie du mur contre laquelle il s'appuie une pression maxima, c'est-à-dire une pression plus grande que celle que produirait tout autre prisme s'appuyant contre la même partie du mur. Il résulte de là que la théorie de Coulomb, telle qu'elle a été appliquée jusqu'ici aux terres soutenues par des murs, peut se formuler par les trois propositions suivantes :

1° On ne considère que des massifs de terre sur le point de glisser, c'est-à-dire des massifs tels qu'en chacun de leurs points passe un élément plan pour lequel le rapport $\frac{\sigma}{\mathcal{P}}$ atteint sa valeur maxima $f = \text{tang } \varphi$.

2° On admet que les lignes que tracent dans le massif de terre ces éléments plans, prolongées de proche en proche, sont droites; ces lignes sont les lignes de glissement;

3° Que chacune de ces droites détache de la masse des terres le prisme qui exercerait sur la portion du mur de soutènement contre laquelle il s'appuie une pression maxima.

De ces trois propositions, il n'y en a que deux de distinctes; la troisième est en effet une conséquence de la seconde, comme je l'ai montré au n° 22 : il n'y a donc à considérer que les deux premières.

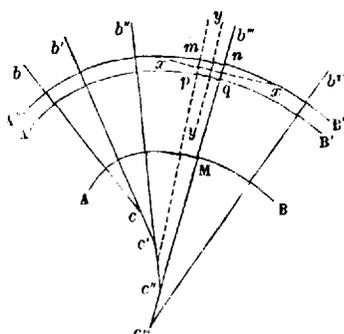
La première est moins une hypothèse qu'une définition; c'est la définition que nous avons donnée de l'équilibre limite; la seconde constitue une véritable hypothèse. Or j'ai démontré (n° 4), que l'état d'équilibre limite est un état complètement défini par lui-même, dont on peut découvrir rationnellement toutes les propriétés, sans le secours d'aucune hypothèse.

L'hypothèse des lignes de rupture planes est donc inutile; c'est une

condition de trop que l'on se donne *a priori*, et je me propose d'établir que cette condition est en général incompatible avec celles que comporte l'équilibre limite.

Admettons en effet, pour un instant, qu'un massif de terre puisse contenir un système de lignes de glissement droites.

FIG. 10.



Soient (*fig. 10*) $bc, b'c', b''c'', \dots$ ces lignes, que nous supposons distribuées dans le massif d'une manière quelconque. Nous pouvons toujours les regarder comme normales à une certaine courbe AB , dont nous pouvons écrire l'équation sous la forme

$$R_0 = F(\theta),$$

R_0 étant son rayon de courbure en un point M , et θ l'angle que la direction de ce rayon de courbure fait avec la verticale.

L'équation d'une courbe $A'B'$, parallèle à AB et distante de celle-ci d'une longueur r , sera

$$R_1 = R_0 + r.$$

Nous pouvons rapporter les divers points du massif à un système de coordonnées curvilignes dont les paramètres seraient r et θ ;

$$r = \text{const.}$$

représentera une courbe $A'B'$;

$$\theta = \text{const.}$$

une des lignes $cb, c'b', \dots$

Soient A_1 et T' les composantes de la pression qui s'exerce sur un élément plan nq coïncidant avec le rayon $c''b''$;

Soient A_2 et T' les composantes analogues pour un élément plan pq tangent à la courbe $A'B'$.

Écrivons les conditions d'équilibre du rectangle élémentaire $mnpq$. En projetant les forces qu'il supporte, y compris celle de la pesanteur sur les deux droites xx, yy , passant par son centre O et dirigées, celle-ci suivant le rayon qui passe en O , celle-là normalement à ce rayon, on trouvera facilement

$$(56) \quad \begin{cases} (R_0 + r) \frac{dA_2}{dr} + \frac{dT'}{d\theta} + A_2 - A_1 + \Pi(R + r) \cos\theta = 0, \\ (R_0 + r) \frac{dT'}{dr} + \frac{dA_1}{d\theta} + 2T - \Pi(R + r) \sin\theta = 0. \end{cases}$$

Voilà les deux équations d'équilibre fournies par la Mécanique rationnelle dans le système particulier des coordonnées que nous considérons. Il s'agit maintenant d'exprimer l'hypothèse de Coulomb, à savoir que les droites $cb, c'b', \dots$ sont des lignes de glissement, c'est-à-dire que l'élément nq jouit de cette *double propriété* :

1° Que le rapport $\frac{T'}{A_1} = \tan\varphi$;

2° Que ce rapport est maximum, c'est-à-dire plus grand que le rapport analogue pour tous les autres éléments plans passant en q . Or si l'on appelle \varkappa et ε les composantes de la force agissant sur un élément plan faisant un angle V avec l'élément nq , nous obtiendrons ces forces par l'équilibre du tétraèdre et nous aurons des expressions identiques aux équations (4) du n° 4, où l'on remplacerait N_1, N_2, T respectivement par A_1, A_2, T' ; et en cherchant l'élément plan pour lequel la double condition de $\frac{\varepsilon}{\varkappa}$ maximum et égal à $\tan\varphi$ soit remplie, on arrivera aux équations (7) et (8), où les mêmes substitutions devront être faites, ce qui donnera

$$T' \cos(\varphi - 2V) + \frac{A_2}{2} [\sin(\varphi - 2V) - \sin\varphi] - \frac{A_1}{2} [\sin(\varphi - 2V) + \sin\varphi] = 0,$$

et

$$- 2T' \sin(\varphi - 2V) + (A_2 - A_1) \cos(\varphi - 2V) = 0.$$

Or l'hypothèse des théories existantes consiste à supposer que l'élément nq remplit les conditions qu'expriment ces deux équations, c'est-à-dire que celles-ci sont satisfaites par $V = 0$, ce qui donnera

$$\begin{aligned} T' \cos \varphi - A_1 \sin \varphi &= 0, \\ -2T' \sin \varphi + (A_2 - A_1) \cos \varphi &= 0, \end{aligned}$$

équations dont la première est évidente; car elle exprime l'hypothèse faite que le rapport $\frac{T'}{A_1} = \tan \varphi$, et dont la seconde exprime que ce rapport est maximum. On déduit de ces équations

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} A_1 &= T' \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = T' \cot \varphi, \\ A_2 &= T' \frac{1 + \sin^2 \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi}, \\ \text{d'où} \\ A_2 - A_1 &= 2T' \tan \varphi. \end{aligned} \right.$$

Portant ces valeurs dans les équations (56), il viendra

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1 + \sin^2 \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} (R_0 + r) \frac{dT'}{dr} + \frac{dT'}{d\theta} + 2T' \tan \varphi + \Pi (R_0 + r) \cos \theta &= 0, \\ (R_0 + r) \frac{dT'}{dr} + \frac{dT'}{d\theta} \cot \varphi + 2T' - \Pi (R_0 + r) \sin \theta &= 0. \end{aligned} \right.$$

Voilà deux équations auxquelles la fonction T' doit simultanément satisfaire pour que les lignes de glissement puissent être planes. On comprend que, en général, cela n'est pas possible et ne peut, en tout cas, avoir lieu que pour des formes déterminées de la surface libre. Voyons s'il existe des formes compatibles avec cette hypothèse. Je retranche la seconde des équations (58) de la première, après l'avoir multipliée par $\tan \varphi$, et il viendra simplement

$$(59) \quad \frac{dT'}{dr} + \Pi (\cos \theta + \tan \varphi \sin \theta).$$

Je retranche la première de la seconde, après avoir multiplié celle-ci par $\frac{1 + \sin^2 \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi}$,

$$(59 \text{ bis}) \quad \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{dT'}{d\theta} + \frac{2T'}{\sin \varphi \cos \varphi} - \Pi(R_0 + r) \left[\cos \theta + \frac{1 + \sin^2 \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} \sin \theta \right].$$

Pour que les deux dernières équations soient compatibles, il faut que la valeur de $\frac{d^2 T'}{dr d\theta}$, tirée de l'une et de l'autre, soit la même. Or on déduit de la première

$$\frac{d^2 T'}{d\theta dr} = -\Pi(-\sin \theta + \operatorname{tang} \cos \theta),$$

de la seconde

$$\frac{d^2 T'}{d\theta dr} = \Pi \operatorname{tang} \varphi [(2 + \sin \varphi \cos \varphi) \cos \theta + (2 \operatorname{tang} \varphi + \sin^2 \varphi + 1) \sin \theta].$$

Il faudrait que ces deux expressions de $\frac{d^2 T'}{dr d\theta}$ fussent égales, quel que soit θ . Or, pour qu'elles soient égales pour $\theta = 0$, il faut que l'on ait

$$4 \sin^2 \varphi = 0,$$

ce qui est impossible, φ étant par hypothèse différent de zéro. Ainsi, quelle que soit la valeur finie de R_0 , les lignes de rupture ne peuvent pas être planes, c'est-à-dire que, si elles sont planes, elles sont nécessairement parallèles, et nous avons vu (15) que cela n'est possible que pour un massif terminé par un talus plan; et, lorsqu'un tel massif est maintenu en équilibre par un mur de soutènement, les lignes de rupture ne sont réellement planes (17) que dans le cas où il existe une relation particulière entre la direction du talus et celle de la face postérieure du mur. Ce n'est donc que dans ce dernier cas que l'hypothèse relative à la forme plane des lignes de rupture est exacte; alors la théorie de Coulomb coïncide avec la nôtre. Dans tout autre cas, les deux théories diffèrent, et celle de Coulomb devient mathématiquement inadmissible. Ajoutons, comme nous l'avons déjà fait remarquer, que, même dans le cas particulier où elle coïncide avec la nôtre, la théorie de Coulomb conserve, outre des formules se présentant sous une forme très-complexe, une infériorité capitale; c'est qu'elle est impuissante à fournir par elle-même les conditions néces-

saires à son exactitude; de sorte qu'en l'employant on peut se trouver en pleine vérité sans avoir aucun indice qui le prouve, de même qu'on peut être en pleine erreur en croyant être dans le vrai. Notre théorie rationnelle n'a pas ces inconvénients : les formules qu'elle donne indiquent par elles-mêmes la condition moyennant laquelle elles peuvent être rigoureusement appliquées aux murs de soutènement; et cette condition, rien, en général, dans la pratique n'empêche le constructeur de s'y conformer exactement ou approximativement. Elle est d'ailleurs susceptible de progrès indéfinis et fera un pas de plus chaque fois que l'analyse rendra possible, dans un nouveau cas, l'intégration exacte ou approchée des équations (2) du n° 3 et (9) du n° 4.

Par ces motifs, et en raison des formules exceptionnellement simples qu'elle donne dès à présent dans les cas les plus usuels, nous pensons qu'elle devra à l'avenir prévaloir dans la pratique et dans l'enseignement.

Aux ingénieurs elle fournira des constructions géométriques extrêmement faciles, dont ils seront même dispensés, ainsi que de tout calcul, par l'emploi de la Table numérique du n° 19, laquelle peut être facilement étendue à des terres dont le talus naturel est différent de 45 degrés. Aux élèves des Écoles d'application elle apprendra plus que la question spéciale qu'elle traite; car elle leur donnera une idée de ce que le constructeur peut attendre, dans une foule de questions, d'une saine application des principes de Cauchy relatifs à l'équilibre du parallélépipède et du tétraèdre élémentaires.

En terminant, qu'il nous soit permis d'adresser tous nos remerciements à l'éminent rapporteur de notre Mémoire à l'Académie des Sciences, M. de Saint-Venant, pour l'attention toute bienveillante avec laquelle il a examiné notre travail et les excellents conseils qu'il nous a donnés. Ces conseils nous ont permis de compléter et de perfectionner, dans une mesure importante, notre première rédaction. En particulier, toutes nos recherches contenues dans les deux derniers Chapitres, sur la comparaison de notre théorie avec celle de Coulomb, ont été provoquées par M. de Saint-Venant [*].

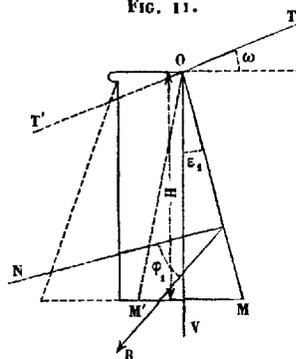
[*] Depuis que ce travail est rédigé, nous avons su que Mackhorn Rankine a déjà, en 1857, obtenu quelques-uns des résultats qui y sont contenus. Nous ne pouvons que nous féliciter de nous être rencontré avec l'éminent et très-regretté professeur de l'Université de Glasgow. La publication de notre Mémoire ne nous en a pas moins paru utile,

NOTE

RÉSUMANT LES RÈGLES PRATIQUES A SUIVRE POUR FAIRE LE CALCUL
DES PRESSIONS EXERCÉES SUR UN MUR DE SOUTÈNEMENT.

Soient (*fig. 11*) *OM* la face postérieure de ce mur et ε_1 l'angle que fait *OM* avec la verticale *OV*, cet angle étant pris avec le signe +

FIG. 11.



Données :

ω angle du talus supérieur *OT* des terres avec l'horizon.
 φ angle de frottement des terres sur elles-mêmes, c'est-à-dire inclinaison du talus de roideur limite ou talus naturel des terres.

Π poids du mètre cube des terres.

H hauteur verticale du mur de soutènement.

si *OM* tombe dans l'angle *VOT*, et remplacé dans toutes les formules ci-dessous par $-\varepsilon_1$, si *OM* est au contraire dans l'angle *VOT'*, formé par la verticale *OV* avec le prolongement *OT'* du talus des terres. C'est ce qui aurait lieu pour le mur marqué en pointillé, dont la face postérieure serait *OM'*.

1° Si l'on n'a aucune raison de prendre pour ε_1 une valeur déterminée, on prendra

$$(k) \quad \varepsilon_1 = \varepsilon,$$

ε étant donné par la formule

$$(k_1) \quad \cos(2\varepsilon + \varphi - \omega) = \frac{\sin \omega}{\sin \varphi},$$

qui se calcule immédiatement par logarithmes.

parce qu'il contient un très-grand nombre de résultats différents de ceux obtenus par Rankine; ce dernier n'a notamment pas aperçu la nécessité de la condition (32), sur laquelle reposent toutes les applications de la théorie aux murs de soutènement, c'est-à-dire toute son utilité pratique. Son Mémoire repose, de plus, sur un principe de moindre action admis *a priori*, tandis que nous ne nous appuyons que sur des principes et des données qui nous semblent d'une incontestable netteté.

L'angle ε étant ainsi déterminé, la pression totale R, exercée sur le mur, est donnée par la formule

$$R = \frac{\Pi H^2 \cos(\varphi + \varepsilon)}{2 \cos^2 \varepsilon}.$$

Cette pression est appliquée au tiers de la hauteur et l'angle φ_1 qu'elle fait avec la normale à la face postérieure du mur est $\varphi_1 = \varphi$.

Ces résultats sont d'ailleurs rigoureusement exacts. Ce sont ceux établis aux nos 18 et 19 de ce Mémoire.

Si l'on a une raison de se donner *a priori* l'angle ε_1 de telle façon que cet angle ne satisfasse plus à la formule (k) ci-dessus, alors on suivra les règles suivantes, qui ne sont plus qu'approchées, mais qui donnent toujours, comme M. de Saint-Venant l'a établi dans une Note insérée au tome XV du *Journal des Mathématiques pures et appliquées* (voir encore les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* en date des 7 et 14 février 1870), des résultats approchés par excès.

On calculera d'abord un angle auxiliaire α par la formule

$$\sin(2\alpha + \omega) = \frac{\sin \omega}{\sin \varphi}.$$

L'angle φ_1 de la résultante R avec la normale à la face postérieure sera ensuite donné par l'expression

$$\text{tang}(\varphi_1 + \varepsilon_1 + \alpha) = \frac{\text{tang}(\varepsilon_1 + \alpha)}{\text{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

La résultante elle-même sera

$$R = \frac{\Pi H^2 \cos(\omega - \varepsilon_1)}{4 \cos^2 \varepsilon_1} \frac{\sin \varphi}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha + \omega)} \frac{\sin 2(\alpha + \varepsilon_1)}{\sin \varphi_1}.$$

Cette force est toujours appliquée au tiers de la hauteur du mur. (Ces formules sont celles démontrées au n° 16 de ce Mémoire.)

