JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. DARBOUX

Sur la résolution de l'équation du quatrième degré

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 18 (1873), p. 220-235.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1873_2_18__220_0>

Sur la résolution de l'équation du quatrième degré;

Par M. G. DARBOUX.

On connaît bien des méthodes de résolution de l'équation du quatrième degré. Celle que je propose met en évidence, sans faire appel à la théorie des invariants, les éléments essentiels qui figurent dans les différentes solutions, et elle conduit, sans difficulté, à l'expression de la fonction la plus générale d'une racine par une somme de trois radicaux. Ce résultat me paraît nouveau; j'en déduis l'expression des fonctions des racines qui dépendent d'une équation du quatrième degré, pour laquelle l'invariant quadratique est nul. M. Hermite a montré que les équations de cette forme se ramènent immédiatement à celles qu'on rencontre dans la théorie de la trisection des fonctions elliptiques, et c'est de ce fait important qu'il a déduit sa méthode de résolution des équations du quatrième degré par les fonctions elliptiques.

On sait que la recherche des points communs à deux courbes du second degré se ramène à la résolution d'une équation du quatrième ordre à une inconnue. Inversement, on peut faire dépendre la résolution des équations biquadratiques de la détermination des points communs à deux coniques. On est ainsi conduit à la marche que je vais exposer, sans y mêler aucune considération géométrique.

I.

Soient

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi = a_0 x^2 + a_2 y^2 + a_4 z^2 + 2a_3 yz + 2a_2 xz + 2a_1 xy, \\ \psi = y^2 - 4xz \end{cases}$$

deux formes quadratiques. La fonction adjointe de $\varphi + m\psi$ sera donnée par la formule

$$(2)\qquad F = -\begin{vmatrix} 0 & X & Y & Z \\ X & a_0 & a_1 & a_2 - 2m \\ Y & a_1 & a_2 + m & a_3 \\ Z & a_2 - 2m & a_3 & a_4 \end{vmatrix},$$

et l'on sait qu'elle deviendra un carré parfait, pour toutes les valeurs de m qui annulent le déterminant suivant :

$$(3)\qquad \Delta(m) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - 2m \\ a_1 & a_2 + m & a_3 \\ a_2 - 2m & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant développé prend la forme

$$(4)\qquad \Delta(m) = J + Im - 4m^3,$$

où l'on a posé

$$(5)\qquad \begin{cases} J = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 - a_2^3, \\ I = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2. \end{cases}$$

Le développement de F nous donne, de même,

$$(6)\qquad F = H + Km + Lm^2,$$

où H, K, L sont trois formes quadratiques définies par les équations

$$(7)\qquad \begin{cases} H = (a_2 a_4 - a_3^2)X^2 + (a_0 a_4 - a_2^2)Y^2 \\ \qquad + (a_0 a_2 - a_1^2)Z^2 \pm 2(a_0 a_3 - a_1 a_2)YZ \\ \qquad + 2(a_1 a_3 - a_2^2)XZ \pm 2(a_1 a_4 - a_2 a_3)XY, \\ K = a_4 X^2 + 4a_2 Y^2 + a_0 Z^2 \pm 4a_1 YZ + 2a_2 XZ \pm 4a_3 XY, \\ L = 4(XZ - Y^2). \end{cases}$$

Cela posé, décomposons en fractions simples la fraction rationnelle

$\frac{F}{\Delta}$ considérée comme fonction de m. On aura

$$(8)\quad \frac{F}{\Delta} = -\sum \frac{1}{\Delta'(\nu_1)(m-\nu_1)} \begin{vmatrix} 0 & X & Y & Z \\ X & a_0 & a_1 & a_2 - 2\nu_1 \\ Y & a_1 & a_2+\nu_1 & a_3 \\ Z & a_2 - 2\nu_1 & a_3 & a_4 \end{vmatrix},$$

ν_1, ν_2, ν_3 étant les trois racines de l'équation $\Delta(m) = 0$ et la somme qui figure dans le second membre étant étendue à ces trois racines. D'après une remarque, déjà faite, sur la forme adjointe, chacun des trois déterminants qui figurent dans le second membre de l'équation (8) est un carré parfait et l'on a, par exemple,

$$(9)\quad \begin{vmatrix} 0 & X & Y & Z \\ X & a_0 & a_1 & a_2 - 2\nu_1 \\ Y & a_1 & a_2+\nu_1 & a_3 \\ Z & a_2 - 2\nu_1 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = P_1^2 = \frac{1}{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0\nu_1} \begin{vmatrix} X & a_0 & a_1 \\ Y & a_1 & a_2+\nu_1 \\ Z & a_2 - 2\nu_1 & a_3 \end{vmatrix}^2.$$

L'équation (8) pourra donc s'écrire

$$(10)\quad \frac{F}{\Delta(m)} = -\frac{P_1^2}{\Delta'(\nu_1)(m-\nu_1)} - \frac{P_2^2}{\Delta'(\nu_2)(m-\nu_2)} - \frac{P_3^2}{\Delta'(\nu_3)(m-\nu_3)};$$

c'est la relation fondamentale que nous voulions établir et d'où il serait bien facile de déduire la décomposition des formes φ et ψ en sommes composées des mêmes carrés. On en déduit, par la comparaison avec la formule (6),

$$H + Km + Lm^2 = \sum \frac{-\Delta(m)P_1^2}{\Delta'(\nu_1)(m-\nu_1)},$$

et, en égalant les coefficients des mêmes puissances de m dans les deux membres,

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{4}L &= \sum \frac{P_1^2}{\Delta'(\nu_1)}, \\ \frac{1}{4}K &= \sum \frac{\nu_1 P_1^2}{\Delta'(\nu_1)}, \\ H &= \sum \frac{4\nu_1^2 - 1}{\Delta'(\nu')} P_1^2. \end{aligned} \right.$$

On a aussi évidemment

$$(12)\qquad \begin{cases} P_1^2 = -H - Kv_1 - Lv_1^2, \\ P_2^2 = -H - Kv_2 - Lv_2^2, \\ P_3^2 = -H - Kv_2 - Lv_3^2. \end{cases}$$

II.

Pour obtenir des formules relatives aux formes biquadratiques, remplaçons dans les équations précédentes

$$X,\quad Y,\quad Z \quad \text{par} \quad y^2, -xy, \quad x^2,$$

nous trouverons

$$(13)\quad K = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 y + 6a_2 x^2 y^2 + 4a_3 xy^3 + a_4 y^4 = f(x, y),$$

et $f(x, y)$ sera pour nous la forme fondamentale ;

$$(14)\qquad \begin{cases} H = (a_0 a_2 - a_1^2)x^4 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2)x^3 y \\ \qquad + (a_0 a_4 + 2a_1 a_3 - 3a_2^2)x^2 y^2 \\ \qquad + 2(a_1 a_4 - a_2 a_3)xy^3 + (a_2 a_4 - a_3^2)y^4, \end{cases}$$

et enfin

$$(15)\qquad L = 0.$$

Nous désignerons la nouvelle valeur de H par h, c'est le hessien de la forme f. On a, en effet,

$$h = \frac{1}{12^2}\left[\frac{d^2 f}{dx^2}\frac{d^2 f}{dy^2} - \left(\frac{d^2 f}{dx\,dy}\right)^2\right].$$

Quant aux fonctions P_1, P_2, P_3, elles deviendront des fonctions Q_1, Q_2, Q_3 homogènes et du second degré en x, y. On aura identiquement, en vertu des équations (11),

$$(16)\qquad \frac{Q_1^2}{\Delta'(v_1)} + \frac{Q_2^2}{\Delta'(v_2)} + \frac{Q_3^2}{\Delta'(v_3)} = 0$$

et

$$f(x, y) = \frac{4v_1 Q_1^2}{\Delta'(v_1)} + \frac{4v_2 Q_2^2}{\Delta'(v_2)} + \frac{4v_3 Q_3^2}{\Delta'(v_3)}, \tag{17}$$

ce qu'on peut écrire, en tenant compte de l'équation précédente,

$$f(x, y) = \frac{4(v_1 - m)Q_1^2}{\Delta'(v_1)} + \frac{4(v_2 - m)Q_2^2}{\Delta'(v_2)} + \frac{4(v_3 - m)Q_3^2}{\Delta'(v_3)}, \tag{18}$$

m ayant une valeur quelconque. Les formules (12) nous donnent aussi

$$Q_1^2 = -h - v_1 f, \quad Q_2^2 = -h - v_2 f, \quad Q_3^2 = -h - v_3 f, \tag{19}$$

et de ces relations résultent, comme on va le voir, les différents modes de résolution de l'équation du quatrième degré.

III.

En donnant à m, dans l'équation (18), une des valeurs v_1, v_2, v_3, v_1 par exemple, on a

$$f(x, y) = \frac{Q_2^2 - Q_3^2}{v_3 - v_2} = \frac{(Q_2 + Q_3)(Q_2 - Q_3)}{v_3 - v_2}. \tag{20}$$

La résolution de l'équation proposée sera donc ramenée à celle des deux équations du second degré

$$Q_2 - Q_3 = 0, \quad Q_2 + Q_3 = 0,$$

ou

$$\sqrt{-h - v_2 f} \pm \sqrt{-h - v_3 f} = 0. \tag{21}$$

On aura de même

$$f(x, y) = \frac{Q_3^2 - Q_1^2}{v_1 - v_3} = \frac{Q_1^2 - Q_2^2}{v_2 - v_1},$$

ce qui donne les trois décompositions de la forme $f(x, y)$ en deux facteurs quadratiques. Mais cette méthode, qui peut être très-commode pour la résolution des équations numériques, ne paraît guère propre à mettre en évidence les expressions des racines par des sommes de radicaux. Pour obtenir ce résultat, nous chercherons d'abord les expressions des fonctions Q_1, Q_2, Q_3, en fonction des racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de l'équation

$$f(x, y) = 0.$$

A cet effet

$$Q_1 \pm Q_2, \quad Q_1 \pm Q_3, \quad Q_2 \pm Q_3$$

étant les six diviseurs quadratiques de $f(x, y)$ nous remarquerons qu'on doit avoir, en faisant pour abréger $y = 1$,

$$\begin{aligned}
Q_2 - Q_3 &= \lambda_1 (x-\alpha)(x-\delta), & Q_2 + Q_3 &= \mu_1 (x-\beta)(x-\gamma),\\
Q_1 - Q_3 &= \lambda_2 (x-\alpha)(x-\gamma), & Q_1 + Q_3 &= \mu_2 (x-\beta)(x-\delta),\\
Q_1 - Q_2 &= \lambda_3 (x-\alpha)(x-\beta), & Q_1 + Q_2 &= \mu_3 (x-\gamma)(x-\delta).
\end{aligned}$$

Le facteur $x - \alpha$, par exemple, doit figurer dans $Q_1 - Q_2$, qui est la différence entre $Q_1 - Q_3$ et $Q_2 - Q_3$. Les autres expressions se justifient de la même manière. On déduit de ces formules deux expressions pour chacune des trois fonctions Q_1, Q_2, Q_3. En exprimant que ces doubles valeurs sont égales pour les valeurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de x, on fixera sans peine les rapports respectifs des quantités λ, μ, et l'on obtiendra ainsi

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
Q_1 &= \lambda[(\gamma-\delta)(x-\alpha)(x-\beta) + (\beta-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta)]\\
&= \lambda[(\beta-\delta)(x-\alpha)(x-\gamma) + (\gamma-\alpha)(x-\beta)(x-\delta)],\\
Q_2 &= \lambda[(\delta-\gamma)(x-\alpha)(x-\beta) + (\beta-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta)]\\
&= \lambda[(\beta-\gamma)(x-\alpha)(x-\delta) + (\delta-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)],\\
Q_3 &= \lambda[(\delta-\beta)(x-\alpha)(x-\gamma) + (\gamma-\alpha)(x-\beta)(x-\delta)]\\
&= \lambda[(\gamma-\beta)(x-\alpha)(x-\delta) + (\delta-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)],
\end{aligned}\right.$$

et il n'y aura plus à déterminer que le facteur λ. Or, d'après l'équation (9), le premier terme de la fonction Q_1 est $\pm\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_1}$.

On a donc

$$(23)\qquad \overset{\pm}{\cancel{\mp}}\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 \nu_1} = \lambda\,(\beta + \gamma - \alpha - \delta).$$

De même

$$(23)\qquad \left\{\begin{array}{l} \pm\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 \nu_2} = \lambda(\beta + \delta - \alpha - \gamma),\\ \pm\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 \nu_3} = \lambda\,(\gamma + \delta - \alpha - \beta);\end{array}\right.$$

et ces équations, élevées au carré et ajoutées membre à membre, nous donnent

$$3\,(a_1^2 - a_0 a_2) = \lambda^2(3\Sigma\alpha^2 - 2\Sigma\alpha\beta) = \frac{48\lambda^2}{a_0^2}(a_1^2 - a_0 a_2),$$

c'est-à-dire

$$\lambda = \pm\frac{a_0}{4}.$$

Nous prendrons $\lambda = -\frac{a_0}{4}$, puisque nous pouvons choisir le signe des fonctions Q_1, et, en substituant cette valeur dans les équations (23), nous en déduirons les expressions suivantes de ν_1, ν_2, ν_3 en fonction des racines :

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{l} \nu_1 = -\frac{a_0}{12}[(\beta - \alpha)(\gamma - \delta) + (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)],\\ \nu_2 = -\frac{a_0}{12}[(\beta - \alpha)(\delta - \gamma) + (\beta - \gamma)(\delta - \alpha)],\\ \nu_3 = -\frac{a_0}{12}[(\gamma - \alpha)(\delta - \beta) + (\gamma - \beta)(\delta - \alpha)].\end{array}\right.$$

L'équation

$$4m^3 - \mathrm{I}m - \mathrm{J} = 0,$$

qui donne les trois valeurs ν_1, ν_2, ν_3 de m, est celle que M. Hermite a prise pour base de sa belle méthode de résolution des équations biquadratiques (*Journal de M. Borchardt*, t. 52). Nous retrouvons ici cette méthode ; car il suffira, pour avoir les quatre racines α, β, γ, δ, de joindre aux équations (23) la suivante :

$$a_0(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = -4a_1,$$

qui donne la somme des racines. On obtiendra ainsi l'expression suivante de α :

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} a_0\alpha + a_1 = \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_1} \\ + \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_2} + \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_3}. \end{aligned} \right.$$

Les mêmes équations nous donneront aussi β, γ, δ par des expressions qu'on déduira de la précédente, en changeant les signes des radicaux de telle manière, que le produit des trois radicaux pris chaque fois avec leur signe conserve une même valeur. En d'autres termes, si l'on a les signes pour la racine α, il faudra en changer deux quelconques pour avoir les expressions des autres racines.

Cette détermination si essentielle des signes des radicaux résulte, comme on sait, de ce fait, que le produit des valeurs des trois radicaux doit être égal à une fonction rationnelle des coefficients. Voici comment on peut établir cette proposition.

Reprenons les équations

$$\begin{aligned} \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_1} &= \frac{a_0}{4}(\alpha + \beta - \gamma - \delta), \\ \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_2} &= \frac{a_0}{4}(\alpha + \gamma - \beta - \delta), \\ \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_3} &= \frac{a_0}{4}(\alpha + \delta - \beta - \gamma). \end{aligned}$$

En les multipliant membre à membre, nous voyons que le produit des trois radicaux doit être égal à la fonction symétrique

$$\left(\frac{a_0}{4}\right)^3 (\alpha + \beta - \gamma - \delta)(\alpha + \gamma - \beta - \delta)(\alpha + \delta - \beta - \gamma)$$

et, par conséquent, doit s'exprimer en fonction rationnelle des coefficients; mais on peut, sans effectuer le calcul de cette fonction symétrique, démontrer que

$$(26)\quad (a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_1)(a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_2)(a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_3)$$

est un carré parfait. On a, en effet,

$$-\Delta(m) = 4m^3 - \mathrm{I}m - \mathrm{J} = 4(m - v_1)(m - v_2)(m - v_3)$$

et, en remplaçant m par $\frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0}$,

$$4(a_1^2 - a_0 a_2)^3 - a_0^2(a_1^2 - a_0 a_2)\mathrm{I} - \mathrm{J} a_0^3$$
$$= 4(a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_1)(a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_2)(a_2^1 - a_0 a_2 - a_0 v_3).$$

Or le premier membre est, à un facteur constant près, le résultat de la substitution, dans $\Delta(m)$,

$$\Delta(m) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - 2m \\ a_1 & a_2 + m & a_3 \\ a_2 - 2m & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

de la valeur de m qui annule le mineur $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 + m \end{vmatrix}$.

On aura donc, d'après une formule connue,

$$a_0 \Delta(m) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 + m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & a_2 - 2m \\ a_2 - 2m & + a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 - 2m & a_3 \end{vmatrix}^2,$$

ou

$$a_0 \Delta(m) = -(a_0 a_3 - a_1 a_2 + 2 m a_1)^2,$$

ou, en substituant la valeur de m,

$$4(a_1^2 - a_0 a_2)^3 - a_0^2(a_1^2 - a_0 a_2)\mathrm{I} - \mathrm{J} a_0^3 = (2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2 - a_0^2 a_3)^2,$$

ou enfin

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_1}\,\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_2}\,\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_3} \\ & \quad = -2a_1^3 + 3a_0 a_1 a_2 - a_0^2 a_3. \end{aligned} \right.$$

Le signe du second membre est déterminé par la remarque que la fonction symétrique à calculer contient $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3$ que donne le terme $-a_1^3$. Les signes des radicaux sont donc nettement déterminés dans les expressions des différentes racines.

IV.

Des équations

$$h + v_1 f = -Q_1^2, \quad h + v_2 f = -Q_2^2, \quad h + v_3 f = -Q_3^2,$$

on déduit une conséquence, importante dans la théorie des formes biquadratiques. On a évidemment

$$\begin{vmatrix} \frac{dh}{dx} + v_1 \frac{df}{dx} & \frac{dh}{dy} + v_1 \frac{df}{dy} \\ \frac{dh}{dx} + v_2 \frac{df}{dx} & \frac{dh}{dy} + v_2 \frac{df}{dy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2Q_1 \frac{dQ_1}{dx} & 2Q_1 \frac{dQ_1}{dy} \\ 2Q_2 \frac{dQ_2}{dx} & 2Q_2 \frac{dQ_2}{dy} \end{vmatrix},$$

ou

$$(v_2 - v_1)\left(\frac{dh}{dx}\frac{df}{dy} - \frac{dh}{dy}\frac{df}{dx}\right) = 4Q_1 Q_2 \left(\frac{dQ_1}{dx}\frac{dQ_2}{dy} - \frac{dQ_2}{dx}\frac{dQ_1}{dy}\right).$$

Comme on obtiendrait deux équations analogues en permutant v_1, v_2, v_3, on conclut de la précédente

$$(28) \qquad \frac{dQ_1}{dx}\frac{dQ_2}{dy} - \frac{dQ_2}{dx}\frac{dQ_1}{dy} = k(v_2 - v_1)Q_3;$$

d'où il suit que des trois fonctions Q_1, Q_2, Q_3 chacune est, à un facteur constant près, le déterminant fonctionnel de l'autre. Ce fait résulte aussi de ce que la somme des carrés des trois fonctions est égale à zéro. On aura donc

$$\frac{dh}{dx}\frac{df}{dy} - \frac{dh}{dy}\frac{df}{dx} = 4kQ_1 Q_2 Q_3;$$

le terme en x^6, dans le premier membre, a pour coefficient

$$8(3a_0 a_1 a_2 - 2a_1^3 - a_3 a_0^2);$$

dans le second membre, le coefficient du même terme est

$$4k\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_1}\,\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_2}\,\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_3},$$

ou, d'après l'équation (27),

$$2k(3a_0 a_1 a_2 - 2a_1^3 - a_3 a_0^2).$$

On a donc $k = 4$ et

$$\frac{dh}{dx}\frac{df}{dy} - \frac{dh}{dy}\frac{df}{dx} = 16\,Q_1 Q_2 Q_3, \tag{29}$$

ou, en élevant au carré,

$$\left(\frac{dh}{dx}\frac{df}{dy} - \frac{dh}{dy}\frac{df}{dx}\right)^2 = -\overline{16}^2\,(h + v_1 f)(h + v_2 f)(h + v_3 f),$$

et par suite, en posant $\frac{1}{8}\left(\frac{dh}{dx}\frac{df}{dy} - \frac{dh}{dy}\frac{df}{dx}\right) = T$,

$$T^2 = -4h^3 + Ihf^2 - Jf^3; \tag{30}$$

c'est la relation entre les trois covariants fondamentaux T, h, f.

M. Cayley a déduit de cette relation une méthode nouvelle de résolution des équations biquadratiques que nous sommes maintenant en mesure de donner d'une manière complète.

L'équation

$$(v_2 - v_3)\,Q_1 + (v_3 - v_1)\,Q_2 + (v_1 - v_2)\,Q_3 = 0,$$

qui est du second degré, est évidemment satisfaite par la valeur α de x, qui est racine de l'équation biquadratique et qui donne

$$Q_1 = Q_2 = Q_3.$$

Je dis que l'équation (31) admet une racine double, c'est-à-dire que α satisfait aussi à l'équation

$$(v_2 - v_3)\frac{dQ_1}{dx} + (v_3 - v_1)\frac{dQ_2}{dx} + (v_1 - v_2)\frac{dQ_3}{dx} = 0;$$

cela résulte, en effet, de l'identité (16), qui donne

$$(v_2 - v_3)\,Q_1^2 + (v_3 - v_1)\,Q_2^2 + (v_1 - v_2)\,Q_3^2 = 0,$$

ou, en différentiant,

$$(v_2 - v_3)\,Q_1\frac{dQ_1}{dx} + (v_3 - v_1)\,Q_2\frac{dQ_2}{dx} + (v_1 - v_2)\,Q_3\frac{dQ_3}{dx} = 0.$$

En faisant, dans cette relation, $Q_1 = Q_2 = Q_3$, on obtient l'équation qu'il s'agissait de démontrer. Nous avons donc la proposition suivante de M. Cayley. L'une des équations du second degré

$$(\nu_2 - \nu_3)\sqrt{-h-\nu_1 f} \pm (\nu_3 - \nu_1)\sqrt{-h-\nu_2 f} \pm (\nu_1 - \nu_2)\sqrt{-h-\nu_3 f} = 0$$

admet comme racine double une racine simple de l'équation proposée. Les quatre combinaisons de signes correspondent aux quatre racines de l'équation proposée.

V.

J'arrive maintenant à l'expression de la fonction la plus générale d'une racine par une somme de radicaux. Nous déduirons cette expression des formules (22). En les ajoutant, nous trouvons

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = \frac{a_0}{4}[(\alpha-\gamma)(x-\beta)(x-\delta) + (\alpha-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) + (\alpha-\delta)(x-\beta)(x-\gamma)],$$

ou

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = \frac{a_0}{4(x-\alpha)}[(\alpha-\gamma)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\delta) + (\alpha-\beta)(x-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta) + (\alpha-\delta)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)].$$

L'expression entre parenthèses, multipliée par a_0, est la valeur de $x'\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}$ pour $x' = \alpha$, $y = 1$. On a donc

$$\frac{\alpha\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}}{4(x-\alpha y)} = Q_1 + Q_2 + Q_3,$$

ou

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{(a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 x y^2 + a_3 y^3)\alpha + a_1 x^3 + 3a_2 x^2 y + 3a_3 x y^2 + a_4 y^2}{x - \alpha y} \\ = \pm\sqrt{-h-\nu_1 f} \pm \sqrt{-h-\nu_2 f} \pm \sqrt{-h-\nu_3 f}. \end{cases}$$

Les signes à prendre dans le second membre résultent sans difficulté de l'expression des fonctions Q_1, puisque, d'après les formules (9), les produits

$$Q_1 \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_1}$$

sont des fonctions rationnelles des racines, ou encore, d'après l'équation (29), le produit des trois radicaux doit être égal à $\frac{1}{2}$T.

La formule (31) est due à M. Aronhold, qui l'a donnée dans le tome 52 du *Journal de M. Borchardt*. On l'obtiendrait en effectuant une substitution linéaire dans la forme biquadratique et en appliquant ensuite la formule (25). Pour avoir la fonction la plus générale d'une racine, nous opérerons de la manière suivante :

Les trois fonctions Q_1 ont été déduites des fonctions linéaires P_1, en faisant dans celles-ci la substitution de y^2, xy, x^2 à X, Y, Z. Réciproquement les fonctions Q_1, Q_2, Q_3 étant seulement du second degré, on en déduira les fonctions P_1, P_2, P_3 en y remplaçant y^2, xy, x^2 par X, Y, Z, et l'on aura alors

$$P_1 = \sqrt{-H - Kv_1 - Lv_2^2}, \ldots,$$

les signes étant déterminés par les mêmes conditions que pour les fonctions Q_1.

Or on trouve, en effectuant la division dans le premier membre de l'équation (31),

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 + Q_3 = (a_0\alpha + a_1)x^2 &+ (a_0\alpha^2 + 4a_1\alpha + 3a_2)xy \\ &+ (a_0\alpha^3 + 4a_1\alpha^2 + 6a_2\alpha + 3a_3)y^2. \end{aligned}$$

On aura alors

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} &(a_0\alpha + a_1)Z + (a_0\alpha^2 + 4a_1\alpha + 3a_2)Y + (a_0\alpha^3 + 4a_1\alpha^2 + 6a_2\alpha + 3a_3)X \\ &\quad = P_1 + P_2 + P_3 = \sqrt{-H - Kv_1 - Lv_1^2} + \sqrt{-H - Kv_2 - Lv_2^2} \\ &\qquad + \sqrt{-H - Kv_3 - Lv_3^2}. \end{aligned} \right.$$

C'est l'équation que nous nous proposions d'obtenir; elle donne l'expression de la fonction la plus générale d'une racine pour laquelle la somme des quatre valeurs soit nulle. En y ajoutant la constante

$$a_0 \mathrm{T} + 3a_1 \mathrm{Z} + 3a_2 \mathrm{Y} + a_3 \mathrm{X},$$

nous aurons

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &(a_0\alpha^3 + 4a_1\alpha^2 + 6a_2\alpha + 4a_3)\mathrm{X} + (a\alpha^2 + 4a_1\alpha + 6a_2)\mathrm{Y} \\ &\qquad + (a_0\alpha + 4a_1)\mathrm{Z} + a_0\mathrm{T} \\ &\quad = a_0\mathrm{T} + 3a_1\mathrm{Z} + 3a_2\mathrm{Y} + a_3\mathrm{X} \pm \sqrt{-\mathrm{H} - \mathrm{K}v_1 - \mathrm{L}v_1^2} \\ &\quad \pm \sqrt{-\mathrm{H} - \mathrm{K}v_2 - \mathrm{L}v_2^2} \pm \sqrt{-\mathrm{H} - \mathrm{K}v_3 - \mathrm{L}v_3^2}. \end{aligned}\right.$$

On trouvera facilement, en partant des équations (12), que le produit des trois radicaux est égal à la fonction rationnelle

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \dfrac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{X}} & \dfrac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{Y}} & \dfrac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{Z}} \\ \dfrac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{X}} & \dfrac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{Y}} & \dfrac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{Z}} \\ \dfrac{d\mathrm{H}}{dx} & \dfrac{d\mathrm{H}}{dy} & \dfrac{d\mathrm{H}}{dz} \end{vmatrix}.$$

VI.

On voit que les formules relatives à la fonction la plus générale d'une racine contiennent sous les radicaux les carrés des racines de l'équation résolvante. C'est par là qu'elles se distinguent de celle de M. Aronhold. Si l'on veut que ces carrés disparaissent, il faudra supposer

$$\mathrm{L} = 4(\mathrm{Y}^2 - \mathrm{XZ}) = 0.$$

On pourra donc poser

$$\mathrm{Y} = xy, \quad \mathrm{X} = y^2, \quad \mathrm{Y} = x^2,$$

et l'on sera conduit à la formule de M. Aronhold ; mais on peut obtenir d'autres résultats de la manière suivante :

Soient ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 les quatre valeurs d'une fonction quelconque d'une racine. Chacun des radicaux qui figurent dans les formules (32) et (33) est égal à une quantité telle que

$$\psi_1 + \psi_2 - \psi_2 - \psi_4.$$

Si donc on écrit l'équation

$$B\psi^4 + B_1\psi^3 + \ldots = 0, \tag{34}$$

qui donne les quatre valeurs de ψ, et si l'on désigne par Θ_1, Θ_2, Θ_3 les trois racines de la nouvelle équation résolvante

$$4m^3 - I_1 m - J_1 = 0,$$

où I_1 J_1 sont les invariants de l'équation (34), on aura évidemment

$$\left\{\begin{aligned} -H - Kv_1 - Lv_1^2 &= A + B\Theta_1, \\ -H - Kv_2 - Lv_2^2 &= A + B\Theta_2, \\ -H - Kv_3 - Lv_3^2 &= A + B\Theta_3. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

En faisant la somme de ces trois équations, on déterminera A,

$$3A = -3H - L\Sigma v_1^2 = -3H - \frac{LI}{2}.$$

On a donc

$$B\Theta_1 = \frac{LI}{6} - Kv_1 - Lv_1^2. \tag{36}$$

Telle est la formule qui définit, à un facteur constant près, les racines de la nouvelle équation résolvante relative à la fonction ψ. Supposons qu'on remplace B par 1, ce qui est toujours permis, nous aurons

$$\Theta_1 = \frac{LI}{6} - Kv_1 - Lv_1^2.$$

Les racines v_1 sont d'ailleurs données par la formule de Cardan

$$v_1 = \alpha\sqrt[3]{R} + \alpha^2\sqrt[3]{R'}, \tag{37}$$

où α est une racine cubique de l'unité, et R et R' deux quantités définies par les formules

$$(38)\qquad \begin{cases} \sqrt[3]{R}\sqrt[3]{R'} = \frac{I}{12}, & R = \frac{J}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{J^2 - \frac{I^3}{27}}, \\ R + R' = \frac{+J}{4}, & R' = \frac{J}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{J^2 - \frac{I^3}{27}}: \end{cases}$$

on aura donc, en substituant la valeur de φ_1,

$$\Theta_1 = \alpha\sqrt[3]{R}\left(-K - \frac{12LR'}{I}\right) + \alpha^2\sqrt[3]{R'}\left(-K - \frac{12LR}{I}\right),$$

expression de même forme que celle de φ_1. En appliquant donc les deux premières formules (38), on trouvera

$$(39)\qquad \begin{cases} I_1 = I\left(-K - \frac{12LR'}{I}\right)\left(-K - 12\frac{LR}{I}\right), \\ \frac{1}{4}J_1 = -R\left(K + \frac{12LR'}{I}\right)^3 - R'\left(K + 12\frac{LR}{I}\right)^3. \end{cases}$$

Nous pouvons déduire de ces équations un résultat important auquel a été conduit M. Hermite, dans sa méthode de résolution de l'équation du quatrième degré par les fonctions elliptiques. Pour que l'équation en ψ ait son invariant I_1 nul, il faut et il suffit que l'on ait

$$(40)\qquad K + \frac{12L}{I}\left(\frac{J}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{J^2 - \frac{I^3}{27}}\right) = 0.$$

Cette équation est quadratique et homogène en X, Y, Z, et ses coefficients ne contiennent qu'une racine carrée. On pourra donc, par de simples extractions de racines carrées, ramener l'équation proposée du quatrième ordre à une autre dans laquelle l'invariant I_1 sera nul et qui se résoudra immédiatement par l'emploi des fonctions elliptiques.

Au contraire, l'équation $J_1 = 0$ ne peut se résoudre sans des extractions de racines carrées et cubiques.