

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES  
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

J. BOUSSINESQ

**Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal  
rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans  
ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 17 (1872), p. 55-108.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1872\\_2\\_17\\_\\_55\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1872_2_17__55_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

---

*Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond [\*];*

PAR M. J. BOUSSINESQ.

---

Tous les ingénieurs connaissent les belles expériences de J. Scott Russell [\*\*] et de M. Bazin [\*\*\*] sur la production et la propagation des ondes solitaires. Si, à l'entrée d'un canal rectangulaire contenant un liquide en repos et de profondeur constante, on donne naissance à un gonflement, soit en versant brusquement du dehors une nouvelle quantité de liquide, soit en refoulant celui qui s'y trouve déjà au moyen d'un piston placé à l'entrée, ce liquide se répand tumultueusement sur celui qui est un peu plus éloigné de l'entrée, et produit un grand nombre de tourbillons, qui, par les frottements considérables qu'ils occasionnent entre les couches fluides, rendent bientôt presque égales, du fond à la surface, les vitesses horizontales communiquées aux molécules liquides d'une même section. Ces tourbillonnements s'éteignent ensuite, le mouvement se régularise, et l'on voit se propager le long du canal une onde unique, dont le volume est tout en saillie au-dessus de la surface libre primitive, et dont la coupe longitudinale, parfaitement régulière et symétrique par rapport à la verticale

---

[\*] Présentée à l'Académie des Sciences le 13 novembre 1871.

[\*\*] Faites en 1843 et publiées en 1845 (*Report of the fourteenth meeting of the British Association for the advancement of science, held at York in september 1844; London, 1845*).

[\*\*\*] *Recherches hydrauliques entreprises par Darcy et continuées par M. Bazin*, 2<sup>e</sup> partie, au tome XIX des *Savants étrangers*; on peut voir aussi le *Rapport de M. Clapeyron, Comptes rendus*, 10 août 1863, t. LVII, p. 312.

menée par son sommet, a seulement deux points d'inflexion : c'est l'onde *solitaire*. Elle est douée, suivant l'expression de Scott Russell, d'une très-grande *longévit*, c'est-à-dire qu'elle parcourt de grands espaces sans se déformer d'une manière sensible. Scott Russell a trouvé expérimentalement et M. Bazin a vérifié avec soin que le carré de sa *célérité* ou vitesse de propagation est égal au produit de la gravité  $g = 9^m, 809$  par la distance qu'il y a du sommet de l'onde au fond du canal. Chaque molécule liquide, en repos avant que l'onde l'atteigne et après qu'elle l'a dépassée, est animée dans l'intervalle d'une certaine vitesse dans le sens du transport apparent de la surface libre.

Ces lois se vérifient d'autant mieux que la hauteur du gonflement est plus petite en comparaison de la profondeur primitive du fluide : lorsque le rapport de la première de ces quantités à la seconde approche de l'unité, l'onde se raccourcit, sa forme cesse d'être stable, et son sommet, se propageant plus vite que sa partie antérieure, surplombe enfin et tombe en avant, par fragments qui donnent naissance à tout autant de nouvelles ondes solitaires plus petites : on dit alors que l'onde *déferle* ou qu'il y a *mascaret*.

Au lieu de produire à l'entrée du canal une onde *positive*, c'est-à-dire constituée par un gonflement; on peut y produire une onde *negative*, constituée par une dépression; cela se fait d'ordinaire en ouvrant et en fermant presque aussitôt après une vanne, de manière à laisser écouler une quantité limitée du liquide contenu dans le canal. Après quelques secondes, pendant lesquelles naissent et puis s'éteignent des tourbillonnements tumultueux qui rendent presque égales, de la surface au fond, les vitesses horizontales, le mouvement se régularise et la dépression se propage avec une *célérité* dont le carré vaut encore, bien qu'avec moins de précision que dans le cas de l'onde positive, le produit de la gravité par la distance du sommet (alors concave) de l'onde au fond; mais l'onde n'acquiert pas une forme stable et ne reste pas même unique; sa partie antérieure s'allonge sans cesse, tandis qu'il se forme à sa queue une série d'ondes plus petites et de grandeurs décroissantes, alternativement convexes et concaves, et qui sont, les premières, positives, les secondes négatives, c'est-à-dire entièrement situées, les unes au-dessus et les autres au-dessous de la surface libre initiale.

M. Bazin a encore étudié expérimentalement ce qu'il appelle des *remous*, c'est-à-dire des gonflements produits par l'injection continue et uniforme, à l'entrée d'un canal, d'une quantité indéfinie de liquide. Ces gonflements, en se propageant sur l'eau immobile du canal, offrent l'apparence d'une lame fluide de hauteur sensiblement constante qui glisserait par-dessus, précédée d'une série de convexités et de concavités de grandeurs décroissantes, respectivement situées au-dessus et au-dessous de la face supérieure de la lame liquide qui suit, mais toutes *positives*, c'est-à-dire plus élevées que la surface libre primitive : la première de ces convexités, appelée par M. Bazin *onde initiale*, est environ une fois et demie plus haute que la lame qui suit. Le carré de la vitesse de propagation de celle-ci et de l'onde initiale est égal au produit de la gravité par la profondeur primitive, augmentée d'une fois et demie la hauteur de la lame considérée.

Ces lois ne se vérifient qu'autant que le rapport de la hauteur de l'intumescence à la profondeur primitive est une quantité assez petite. Lorsque ce rapport approche de l'unité, l'onde initiale déferle sans cesse, sa hauteur n'est plus supérieure à celle de la lame qui suit, et, à cause sans doute de l'exagération des frottements du fond ou des parois, le carré de la vitesse de propagation n'est plus égal environ qu'au produit de la gravité par la distance de la face supérieure de cette lame au fond.

Concevons actuellement que le canal, toujours rectangulaire et de section normale constante à fond horizontal, ait une certaine pente longitudinale, et que le régime uniforme s'y trouve établi avant la propagation des ondes étudiées. Les frottements développés entre les filets fluides ou entre ceux-ci et les parois feront équilibre à la composante du poids de ces filets suivant l'axe du canal, composante dont on pourra par conséquent faire abstraction, de manière à réduire la pesanteur  $g$  à sa seconde composante, normale au fond et sensiblement égale à  $g$ . Si d'ailleurs les vitesses des divers filets sont assez peu différentes et qu'on adopte un système d'axes coordonnés animés de la moyenne de ces vitesses, le liquide, rapporté à ce système d'axes, pourra être supposé immobile. Des ondes ou des remous qui produiront de petites vitesses, peu différentes dans toute l'étendue d'une section normale, ne changeront d'une manière notable, ni le glisse-

ment relatif des filets, ni celui de la masse liquide le long des parois, ni par suite les frottements, qui feront toujours équilibre à la composante de la pesanteur suivant la direction des filets. Tout se passera donc sensiblement par rapport au système des axes mobiles adoptés, lors de la propagation de ces ondes ou de ces remous, comme si le canal était horizontal et le liquide primitivement en repos. M. Bazin a reconnu, par de nombreuses expériences, qu'il en est à peu près ainsi dans les canaux découverts ordinaires, et que l'on peut étendre avec assez d'exactitude, aux ondes ou aux remous qui y sont propagés, les lois des ondes et des remous produits dans un liquide en repos, pourvu que le mouvement soit rapporté à un système d'axes animés de la vitesse moyenne des filets fluides. Cette extension lui a permis d'expliquer les principales circonstances de la propagation des marées dans la partie maritime des fleuves, et notamment celle de la *barre*, ou onde initiale d'une grande hauteur qui les précède parfois, et qui, en déferlant aux points du fleuve où la profondeur primitive de l'eau est au-dessous d'une certaine limite, produit le *mascaret* proprement dit. Elle permettrait également de rendre compte des gonflements formés par les crues d'un fleuve dans la partie inférieure de ses affluents, et du retrait de ces crues qui a lieu dès que le fleuve commence à décroître.

Tels sont, en résumé, les phénomènes intéressants décrits par M. Bazin dans la deuxième partie des *Recherches hydrauliques* : les uns, dans lesquels le rapport de la hauteur des intumescences à la profondeur primitive est une petite quantité en valeur absolue, sont régis par des lois simples ; les autres, dans lesquels ce rapport approche de l'unité, obéissent à des lois bien plus compliquées, encore inconnues, et ne paraissent pas même compatibles avec la parfaite continuité du fluide et surtout de ses mouvements, puisqu'il s'y produit fréquemment des mascarets.

Je me propose de donner ici une théorie à peu près complète des premiers [\*], en me bornant au cas d'un liquide en repos, cas auquel

---

[\*] Une partie de ce Mémoire a déjà été résumée dans deux articles présentés, le 19 juin et le 24 juillet 1871, à l'Académie des Sciences, et insérés aux *Comptes rendus* des séances de ces jours (t. LXXII, p. 755, et t. LXXIII, p. 256).

on vient de voir que se ramène celui d'un liquide en mouvement, et en prenant pour point de départ de mon analyse le caractère qui les distingue essentiellement des autres mouvements ondulatoires des liquides : ce caractère consiste en ce que les vitesses horizontales des molécules fluides y sont sensiblement égales dans toute l'étendue d'une même section normale du canal. L'extrême *longévit*é de l'onde solitaire prouve d'ailleurs que, dans ces phénomènes, les frottements ont très-peu d'action dès que le mouvement s'est régularisé, et qu'on peut admettre avec une approximation suffisante la fluidité parfaite, c'est-à-dire l'égalité de pression en tous sens : comme, d'autre part, les composantes  $u, v, w$  de la vitesse suivant trois axes rectangulaires fixes des  $x, y, z$  sont nulles autour d'une molécule quelconque avant que l'onde l'atteigne, elles y vaudront à toute époque, d'après un théorème connu de Lagrange et de Cauchy, les trois dérivées partielles en  $x, y, z$  d'une fonction  $\varphi$ . Le caractère distinctif de la classe des phénomènes étudiés permet d'obtenir  $\varphi$  en série convergente ne contenant pas d'autre inconnue que la vitesse aux divers points du fond. Cette série, substituée à  $\varphi$  dans des formules connues de l'hydrodynamique, fournit, entre la profondeur sur les diverses sections normales et la vitesse aux divers points du fond, deux équations aux dérivées partielles par rapport au temps et par rapport à la coordonnée longitudinale  $x$ . A une première approximation, c'est-à-dire en négligeant tous les termes très-petits en comparaison du rapport de la hauteur de l'intumescence à la profondeur primitive, ces deux équations conduisent à la loi remarquable de Lagrange, seul résultat théorique qui eût été obtenu sur ce sujet avant mon article des *Comptes rendus* relatif à l'onde solitaire : elle consiste en ce que toute intumescence de petite hauteur, positive ou négative, se propage en conservant sa forme et avec une vitesse égale à la racine carrée du produit de la gravité par la profondeur primitive.

Cette loi cesse d'être vraie à une deuxième approximation. Il n'y a plus alors, si ce n'est pour certains phénomènes particuliers, une vitesse de propagation commune à toute l'onde, et il convient de diviser l'intumescence, à partir de sa tête, en parties infiniment petites de volume constant, comprises entre des plans consécutifs normaux à l'axe du canal, et positives ou négatives suivant que leur hauteur,

qui est l'excès de la profondeur actuelle aux points où elles se trouvent sur la profondeur primitive, l'est elle-même. Considérant à part chacune de ces parties, je démontre que le carré de sa vitesse de propagation est égal, à un instant donné quelconque, au produit de la gravité  $g$  par la somme : 1° de la profondeur primitive, 2° d'une fois et demie la hauteur actuelle de la partie considérée de l'intumescence, et 3° de la courbure qu'y affecte la surface libre, multipliée par l'inverse de la même hauteur et par le tiers du cube de la profondeur primitive.

Il est particulièrement intéressant d'étudier le mouvement du centre de gravité général de l'onde, en appelant ainsi un point tel que le produit de chacune de ses deux coordonnées, horizontale et verticale, par le volume total de l'intumescence, vaille la somme des diverses parties élémentaires de l'intumescence, respectivement multipliées par la coordonnée pareille de leurs milieux. Le carré de sa vitesse de propagation est égal au produit du nombre  $g$  par la profondeur primitive, augmentée de trois fois la hauteur, positive ou négative, du centre de gravité considéré au-dessus de la surface libre initiale. Cette hauteur reste constante aux divers instants du mouvement [\*]: son invariabilité provient de ce que, multipliée par le double du volume de l'intumescence et par le poids de l'unité de volume du liquide, elle devient sensiblement égale à l'énergie totale et constante de l'onde, c'est-à-dire au travail que produirait l'onde si l'on remettait le fluide instantanément en repos [\*\*].

Le volume total d'une intumescence et son énergie ne sont pas les deux seules intégrales qui restent constantes pendant le mouvement, et qui caractérisent ainsi chaque intumescence. Il y en a encore une

[\*] Cela n'empêche pas l'intumescence de s'aplatir parfois indéfiniment : il faut et il suffit pour cela qu'elle se décompose en parties alternativement positives et négatives, s'allongeant de plus en plus, et dont la somme algébrique seule représente sa valeur constante; le centre de gravité de toutes les parties positives et celui de toutes les parties négatives deviendront très-rapprochés de la surface libre initiale, quoique le centre de gravité général, situé sur le prolongement de la droite qui les joint, se maintienne toujours à la même hauteur.

[\*\*] Il est évident que je fais ici abstraction des frottements : leur effet est de diminuer un peu, d'un instant à l'autre, l'énergie de l'onde, et par suite de rapprocher sans cesse de la surface libre primitive le centre de gravité de l'intumescence.

troisième, dont on obtient les divers éléments en divisant, comme il a été dit, l'intumescence en parties infiniment petites par des sections normales, et en multipliant la distance de deux consécutives de ces sections par le carré de l'angle que la surface libre actuelle y fait avec la surface libre primitive, carré diminué de trois fois le cube du rapport de la hauteur qu'y a l'intumescence à la profondeur initiale. J'appelle cette intégrale *moment d'instabilité de l'onde*, pour une raison qu'on verra bientôt.

Il est naturel de chercher si, parmi toutes les formes possibles que peut affecter le profil longitudinal d'une intumescence, il n'en existe pas une qui donne à toutes les parties la même vitesse de propagation, de manière que l'onde avance sans se déformer. S'il y a une forme pareille, il est probable que les ondes l'acquerront souvent dans la période initiale du mouvement, en vertu du principe général d'après lequel les phénomènes tendent vers un état permanent toutes les fois qu'une cause persistante n'y met pas obstacle. Or je démontre qu'une forme pareille existe effectivement quand l'intumescence est positive et d'un volume assez petit, mais seulement dans ce cas. Cette forme, dont j'obtiens l'équation finie sans autre transcendante qu'un cosinus hyperbolique, est celle d'une courbe telle que le produit de chacune de ses ordonnées par le cube d'une ligne constante est égal au produit des deux parties en lesquelles l'ordonnée considérée divise la surface totale comprise entre la courbe et l'axe des abscisses. Elle est symétrique par rapport à la verticale menée par son sommet, et a deux points d'inflexion situés aux deux tiers de sa hauteur; entre ces deux points elle est convexe, en deçà et au delà elle est concave, et va se raccorder asymptotiquement au profil longitudinal primitif de la surface libre. Sa hauteur totale est égale aux trois seizièmes du carré du volume de l'intumescence par unité de largeur du canal, divisés par le cube de la profondeur primitive: pour une onde d'une énergie donnée, cette hauteur augmente, tandis que la base décroît, quand la profondeur diminue, et l'on conçoit que le déferlement se produise lorsque l'exhaussement devient exagéré. Enfin, l'onde a son centre de gravité au tiers de sa hauteur, ce qui, d'après une loi précédente, donne pour le carré de sa vitesse de propagation le produit du nombre  $g$  par la distance qu'il y a de son sommet au fond du canal. L'intumescence est

donc bien alors, avec toutes les circonstances qui la caractérisent, l'onde solitaire de Scott Russell.

Il reste à expliquer la formation fréquente de cette espèce particulière d'ondes et leur singulière stabilité. J'y parviens en démontrant qu'une onde solitaire est, parmi toutes les intumescences douées d'une égale énergie, celle pour laquelle l'intégrale que j'ai appelée *moment d'instabilité* a sa plus petite valeur, et même la seule qui rende cette intégrale maximum ou minimum. Il en résulte que, si une intumescence diffère peu à un instant donné, sous le rapport de la forme, de l'onde solitaire de même énergie, elle en différera peu à toute époque : car elle ne pourrait s'en écarter notablement sans que son moment d'instabilité grandît d'une manière sensible, ce qui est impossible, puisque ce moment est invariable. La forme vraie de l'intumescence oscillera donc sans cesse autour de celle d'une onde solitaire, ou plutôt les frottements, que nous avons négligés, et qui ont une influence notable au commencement de la propagation, ne tarderont pas à annuler ses petites variations et à donner à l'onde une forme permanente, tout comme ils font revenir assez promptement à leurs positions d'équilibre stable un système de points matériels qui en ont été peu écartés. Et, de même que cette action des frottements peut amener de très-loin certains corps à leur état d'équilibre, on conçoit qu'elle puisse changer en ondes solitaires des intumescences qui d'abord en différaient beaucoup.

Entre plusieurs intumescences de même énergie, celles dont le profil s'écarte le plus de celui d'une onde solitaire, et qui, par suite, sont les plus changeantes d'aspect d'un moment à l'autre, ont aussi, d'après ce qui précède, les moments d'instabilité les plus grands : ces moments méritent donc bien le nom que je leur ai donné, puisqu'ils représentent en quelque sorte, par leurs grandeurs relatives, la rapidité et l'amplitude des transformations que subit chaque onde.

La production d'une forme stable est impossible dans les deux cas d'une onde négative et d'une intumescence continue, et même dans celui d'une intumescence positive et finie trop considérable, qui ne pourrait se changer en une onde solitaire unique sans acquérir une hauteur excessive et devenir par suite instable. Dans ces trois cas, la théorie permet, non-seulement d'obtenir les formules expérimentales

des vitesses de propagation, mais encore d'expliquer les diverses circonstances qui se produisent, telles que la formation, à la queue d'une onde négative, d'une série d'autres ondes plus petites, alternativement positives et négatives, et, à la tête d'une intumescence continue positive, celle de renflements dont le premier et le plus élevé est l'onde initiale de M. Bazin.

Il est un cas dans lequel la surface de l'onde peut avoir en tous ses points une très-petite courbure, de manière que, les molécules fluides décrivant des lignes sensiblement droites et parallèles, la pression varie hydrostatiquement sur toute l'étendue d'une même section : c'est celui d'une dépression de longueur indéfinie, dont les parties ont des profondeurs lentement croissantes de l'une à l'autre à mesure qu'on s'éloigne de sa tête, comme il s'en produit à l'embouchure d'un canal lors du retrait d'une crue. Dans ce cas, on peut obtenir les diverses circonstances du phénomène, soit en employant les formules générales, soit en se servant d'une équation du *mouvement non permanent* des eaux, donnée par M. de Saint-Venant dans un Mémoire inséré aux *Comptes rendus* (t. LXXIII, p. 147 et 237, 17 et 24 juillet 1871) : cette équation comprend comme cas particulier celle dont on se sert dans l'étude du mouvement permanent par filets sensiblement rectilignes ; mais, étant établie, comme celle-ci, sur l'hypothèse que les pressions varient hydrostatiquement aux divers points d'une même section, elle ne peut pas être appliquée aux cas où la surface libre a une courbure sensible [\*]. Si on voulait l'employer, par exemple, dans l'étude de l'onde solitaire, on trouverait pour profil longitudinal de la surface libre, non pas une courbe symétrique par rapport à la verticale menée

---

[\*] La même observation s'applique à une théorie de M. Partiot, résumée dans un article des *Comptes rendus* (t. LXXIII, p. 91, 10 juillet 1871) et complétée dans le Mémoire cité des 17 et 24 juillet 1871 (p. 147 et 237) de M. de Saint-Venant, qui obtient du reste ainsi les mêmes résultats que par sa propre méthode. M. Partiot considère les intumescences de hauteur finie comme résultant de la superposition d'intumescences successives infiniment petites, dont chacune est supposée régie par la loi simple de Lagrange, bien que propagée par-dessus toutes les intumescences précédentes, c'est-à-dire dans une eau dont la surface a cessé d'être horizontale et même en général plane. Une telle assimilation n'est pas suffisamment exacte lorsque la surface acquiert une courbure sensible.

par son sommet, mais une ligne en pente de plus en plus douce d'un instant à l'autre du côté de la queue de l'onde, et surplombant verticalement du côté de sa tête. L'onde déferlerait donc sans cesse, si petite que fût d'ailleurs sa hauteur par rapport à la profondeur primitive. C'est également le résultat auquel on est conduit lorsqu'on veut appliquer la formule usuelle du mouvement permanent aux points d'un cours d'eau où la courbure des filets est sensible, c'est-à-dire aux ressauts; cette formule conduit à admettre en ces points une surface libre surplombante, ou ayant un plan tangent vertical, circonstance que les ressauts n'offrent qu'exceptionnellement et peut-être jamais. Mais l'application au retrait assez lent des crues de l'équation donnée par M. de Saint-Venant est parfaitement légitime. Les lois principales de ce phénomène, déjà établies dans le Mémoire cité (formules 24 et 26), bien qu'en supposant la vitesse moyenne dans toute section simplement fonction de la profondeur (hypothèse dont on peut se passer quand il s'agit d'ondes peu profondes), consistent en ce que : 1° la vitesse moyenne sur chaque section est égale à deux fois la racine carrée du nombre  $g$ , multipliée par la différence de la racine carrée de la profondeur actuelle et de celle de la profondeur primitive; 2° chaque ordonnée verticale comprise depuis le fond jusqu'à la surface libre se transporte (en apparence), dans le sens de la propagation de l'onde, avec une vitesse égale à la racine carrée du nombre  $g$ , multipliée par l'excès du triple de la racine carrée de cette ordonnée sur le double de celle de la profondeur primitive.

### § I. — *Équations fondamentales.*

Soient :  $x, y, z$  les coordonnées, par rapport à trois axes rectangulaires fixes, d'un point de l'espace occupé à l'époque  $t$  par une molécule d'un fluide;  $p$  la pression en ce point [\*];  $\rho$  la densité, supposée

---

[\*] L'hypothèse de la fluidité ou mobilité parfaite, qui n'est jamais complètement réalisée, consiste à regarder comme nulle toute résistance au glissement réciproque de deux parties adjacentes de matière, ou à supposer normale la pression exercée sur tous les éléments plans que l'on peut concevoir à l'intérieur du corps considéré, liquide ou

une fonction donnée de  $p$ ;  $u, v, w$  les composantes, suivant les trois axes, de la vitesse au même point, composantes qu'on admet être des fonctions continues de  $x, y, z, t$  [\*]; enfin  $X, Y, Z$  les composantes de l'action extérieure rapportée à l'unité de masse. On sait que les trois équations indéfinies des mouvements sont

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = X - \left( \frac{du}{dt} \right), \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = Y - \left( \frac{dv}{dt} \right), \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z - \left( \frac{dw}{dt} \right),$$

dans lesquelles  $\left( \frac{du}{dt} \right), \left( \frac{dv}{dt} \right), \left( \frac{dw}{dt} \right)$  désignent les dérivées de  $u, v, w$  prises, par rapport au temps, en suivant une même molécule, c'est-à-dire les rapports à  $dt$  des accroissements que reçoivent  $u, v, w$  lorsqu'on y fait grandir  $t$  de  $dt, x$  de  $u dt, y$  de  $v dt, z$  de  $w dt$ ; leurs expressions sont

$$(2) \quad \left( \frac{du}{dt} \right) = \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz}, \quad \left( \frac{dv}{dt} \right) = \dots, \quad \left( \frac{dw}{dt} \right) = \dots$$

Il faut y joindre l'équation de continuité

$$(3) \quad \frac{d\rho}{dt} + \frac{d(\rho u)}{dx} + \frac{d(\rho v)}{dy} + \frac{d(\rho w)}{dz} = 0,$$

gaz : il suit des formules bien connues qu'on déduit de la considération du tétraèdre de Cauchy qu'une telle pression a forcément la même valeur pour tous les éléments plans qui se croisent en un même point, et qu'elle est, par suite, une simple fonction de  $x, y, z, t$ .

[\*] Lorsque les frottements, ou actions tangentielles exercées par les fluides naturels en mouvement en outre des pressions normales, ont des valeurs relativement trop faibles pour qu'il soit nécessaire de les faire entrer dans les équations (comme lorsqu'on étudie l'écoulement par les orifices en mince paroi ou par les déversoirs et les phénomènes si divers des ondes de toute espèce), leur importance, bien que moins visible, n'est pas moindre pour cela. Ce sont, en effet, ces actions tangentielles qui produisent la continuité des mouvements, c'est-à-dire qui empêchent deux molécules très-voisines d'avoir des vitesses notablement différentes : or les questions d'hydrodynamique dans lesquelles on fait abstraction des frottements et qui ont pu être traitées jusqu'à ce jour ne sont des problèmes déterminés qu'autant qu'on y suppose la continuité parfaite des mouvements du fluide.

et les conditions spéciales aux surfaces limites du fluide, conditions dont l'une, applicable à toutes ces surfaces et résultant de l'hypothèse même de la continuité des mouvements, exprime que les mêmes molécules fluides y restent toujours, et dont l'autre revient, pour les parois, à les supposer fixes ou à supposer connus leurs mouvements, et, pour les autres surfaces limites, à égaliser la pression exercée de part et d'autre de leurs divers éléments plans.

Cauchy a démontré d'une manière très-remarquable, dans la deuxième partie de son *Mémoire sur la théorie des ondes*, 1816 (*Savants étrangers*, t. I, 1827), et pour le cas des fluides pesants ou plus généralement des fluides dans lesquels les composantes X, Y, Z de l'action extérieure égalent respectivement les trois dérivées en  $x, y, z$  d'une fonction  $\Phi$ , que, si les trois expressions

$$\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}, \quad \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}, \quad \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}$$

sont nulles autour d'une molécule à un certain moment, elles le seront à toute époque. Pour cela, Cauchy observe que  $u, v, w, p$  peuvent être regardés, soit comme dépendant de  $t$  et des coordonnées actuelles  $x, y, z$  des molécules, soit comme dépendant de  $t$  et de leurs coordonnées initiales  $x_0, y_0, z_0$ ; car il est évident que les coordonnées actuelles  $x, y, z$  sont des fonctions parfaitement déterminées de ces coordonnées initiales  $x_0, y_0, z_0$  et du temps  $t$ . On aura donc, par exemple,

$$\frac{dp}{dx_0} = \frac{dp}{dx} \frac{dx}{dx_0} + \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx_0} + \frac{dp}{dz} \frac{dz}{dx_0},$$

ou bien, en remplaçant les trois dérivées de  $p$  en  $x, y, z$  par leurs valeurs tirées des équations (1) et en rappelant que X, Y, Z sont les trois dérivées partielles en  $x, y, z$  d'une fonction  $\Phi$ ,

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx_0} = \frac{d\Phi}{dx_0} - \left( \frac{du}{dt} \right) \frac{dx}{dx_0} - \left( \frac{dv}{dt} \right) \frac{dy}{dx_0} - \left( \frac{dw}{dt} \right) \frac{dz}{dx_0}; \\ \text{on trouverait de même} \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy_0} = \frac{d\Phi}{dy_0} - \left( \frac{du}{dt} \right) \frac{dx}{dy_0} - \left( \frac{dv}{dt} \right) \frac{dy}{dy_0} - \left( \frac{dw}{dt} \right) \frac{dz}{dy_0}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz_0} = \frac{d\Phi}{dz_0} - \left( \frac{du}{dt} \right) \frac{dx}{dz_0} - \left( \frac{dv}{dt} \right) \frac{dy}{dz_0} - \left( \frac{dw}{dt} \right) \frac{dz}{dz_0}. \end{array} \right.$$

Les conditions d'intégrabilité de la fonction  $p$  seront au nombre de trois; l'une d'elles s'obtiendra en différentiant la seconde (4) par rapport à  $z_0$ , la troisième par rapport à  $y_0$ , et prenant la différence des résultats. Observons : 1° que  $\rho$  est supposé une simple fonction de  $p$ ; 2° que  $\left(\frac{du}{dt}\right)$ ,  $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ ,  $\left(\frac{dw}{dt}\right)$  sont précisément les dérivées partielles de  $u$ ,  $v$ ,  $w$  par rapport à  $t$  lorsque les coordonnées primitives sont prises pour variables indépendantes, puisqu'on obtient ces trois dérivées en suivant une même molécule, c'est-à-dire sans faire varier  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ ; 3° enfin, que  $u$ ,  $v$ ,  $w$  sont respectivement les trois dérivées partielles de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  par rapport à  $t$ ; et il viendra

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{du}{dz_0} \frac{dx}{dy_0} - \frac{du}{dy_0} \frac{dx}{dz_0} + \frac{dv}{dz_0} \frac{dy}{dy_0} - \frac{dv}{dy_0} \frac{dy}{dz_0} + \frac{dw}{dz_0} \frac{dz}{dy_0} - \frac{dw}{dy_0} \frac{dz}{dz_0} \right] = 0.$$

On peut, dans la parenthèse de cette relation, remplacer les dérivées de  $u$ ,  $v$ ,  $w$  en  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  par leurs valeurs

$$\frac{du}{dx_0} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dx_0} + \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx_0} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dx_0}, \quad \frac{du}{dy_0} = \dots, \text{ etc.};$$

en faisant, pour abrégér,

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} 1 + \theta &= \frac{dx}{dx_0} \frac{dy}{dy_0} \frac{dz}{dz_0} - \frac{dx}{dx_0} \frac{dy}{dz_0} \frac{dz}{dy_0} - \frac{dy}{dy_0} \frac{dz}{dx_0} \frac{dx}{dz_0} \\ &\quad - \frac{dz}{dz_0} \frac{dx}{dy_0} \frac{dy}{dx_0} + \frac{dx}{dy_0} \frac{dy}{dz_0} \frac{dz}{dx_0} + \frac{dx}{dz_0} \frac{dy}{dx_0} \frac{dz}{dy_0}, \end{aligned} \right.$$

et aussi

$$(7) \quad p = \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}, \quad q = \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}, \quad r = \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx},$$

on trouve ainsi que cette parenthèse revient identiquement à

$$p \frac{d\theta}{d \frac{dx}{dx_0}} + q \frac{d\theta}{d \frac{dy}{dy_0}} + r \frac{d\theta}{d \frac{dz}{dz_0}}.$$

D'après (5), elle ne dépend pas du temps, et il en est évidemment de même de deux autres pareilles, qu'on en déduirait par le simple changement de  $x_0$  en  $y_0$  et puis en  $z_0$ . Ces trois expressions ayant

les mêmes valeurs qu'à l'époque  $t = 0$ , époque à laquelle  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,  $z = z_0$ , si l'on appelle  $p_0$ ,  $q_0$ ,  $v_0$  leurs valeurs initiales, qui sont celles de  $p$ ,  $q$ ,  $v$  et qui dépendent seulement de  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ , il viendra

$$(8) \quad \begin{cases} p \frac{d\theta}{d \frac{dx}{dx_0}} + q \frac{d\theta}{d \frac{dy}{dy_0}} + v \frac{d\theta}{d \frac{dz}{dz_0}} = p_0, \\ p \frac{d\theta}{d \frac{dx}{dy_0}} + q \frac{d\theta}{d \frac{dy}{dy_0}} + v \frac{d\theta}{d \frac{dz}{dy_0}} = q_0, \\ p \frac{d\theta}{d \frac{dx}{dz_0}} + q \frac{d\theta}{d \frac{dy}{dz_0}} + v \frac{d\theta}{d \frac{dz}{dz_0}} = v_0. \end{cases}$$

Ces trois équations respectivement multipliées par  $\frac{dx}{dx_0}$ ,  $\frac{dx}{dy_0}$ ,  $\frac{dx}{dz_0}$ , ou par  $\frac{dy}{dx_0}$ ,  $\frac{dy}{dy_0}$ ,  $\frac{dy}{dz_0}$ , ou enfin par  $\frac{dz}{dx_0}$ ,  $\frac{dz}{dy_0}$ ,  $\frac{dz}{dz_0}$ , et ajoutées, donnent, comme conditions d'intégrabilité de la fonction  $p$ ,

$$(9) \quad \begin{cases} p(1 + \theta) = p_0 \frac{dx}{dx_0} + q_0 \frac{dx}{dy_0} + v_0 \frac{dx}{dz_0}, \\ q(1 + \theta) = p_0 \frac{dy}{dx_0} + q_0 \frac{dy}{dy_0} + v_0 \frac{dy}{dz_0}, \\ v(1 + \theta) = p_0 \frac{dz}{dx_0} + q_0 \frac{dz}{dy_0} + v_0 \frac{dz}{dz_0}. \end{cases}$$

Ce sont trois intégrales premières, trouvées par Cauchy, des équations de l'hydrodynamique. Le déterminant (6) y revient exactement à ce que j'appelle  $1 + \theta$  dans la formule (1) de ma *Théorie des ondes liquides périodiques* (*Savants étrangers*, t. XX), comme on peut s'en convaincre en remplaçant, dans (6),  $x, y, z$  par leurs valeurs primitives  $x_0, y_0, z_0$ , augmentées de leurs trois accroissements appelés déplacements de la molécule considérée; ce déterminant représente, ainsi qu'on peut le voir dans le Mémoire cité, ce qu'est devenu un volume fluide primitivement égal à un; par suite,  $\theta$  exprime à chaque instant la dilatation éprouvée par la matière qui environne la molécule dont les coordonnées primitives sont  $x_0, y_0, z_0$ .

Si, pour une certaine valeur de  $x_0, y_0, z_0$ , c'est-à-dire autour d'une

certaine molécule,  $p, q, v$  sont nuls à un seul moment, les formules (8) donneront, autour de cette molécule,  $p_0 = 0, q_0 = 0, v_0 = 0$ , et par suite on y aura à toute époque, d'après (9),  $p = 0, q = 0, v = 0$ , ce qu'il fallait démontrer.

Il suffit que chaque partie du fluide soit en repos un instant, comme il arrive, lors de la propagation d'ondes ou de remous, avant que le mouvement ait envahi les parties considérées, pour que les différences  $p, q, v$  y soient nulles en ce moment et, par suite, toujours. Nous aurons donc, dans tous les phénomènes que nous allons étudier,

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dv}{dy}, \quad \frac{dw}{dx} = \frac{du}{dz}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx},$$

ou bien, en appelant  $\varphi$  une certaine fonction de  $x, y, z, t$ ,

$$(10) \quad u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Ces relations permettent, comme on sait, d'intégrer une fois les équations (1), respectivement multipliées par  $dx, dy, dz$  et ajoutées. En se bornant au cas d'un liquide pesant incompressible, et supposant l'axe des  $z$  vertical et dirigé en haut, ce qui donne  $X = 0, Y = 0, Z = -g$ , il vient l'équation connue

$$(11) \quad \frac{p}{\rho} = -gz - \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2} \right) + \text{fonction arbitraire de } t,$$

et, d'autre part, la condition de continuité (3) se réduit à

$$(12) \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0.$$

Supposons le liquide contenu dans un bassin à fond horizontal et agité de telle sorte que les composantes horizontales  $u, v$  de la vitesse aient presque les mêmes valeurs, à un instant quelconque, pour toutes les molécules situées sur une même verticale, ce qui est le caractère distinctif des phénomènes que je me propose d'étudier. En prenant le fond pour plan des  $xy$ , appelant  $\varphi_0$  la valeur de  $\varphi$  aux divers points de ce

plan, valeur qui est une fonction de  $x, y, t$ , et observant que la quantité  $w$  ou  $\frac{d\varphi}{dz}$  doit être nulle pour  $z = 0$  d'après la condition spéciale aux parois, on aura évidemment

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^z dz \int_0^z \frac{d^2\varphi}{dz^2} dz,$$

ou bien, d'après (12),

$$(13) \quad \varphi = \varphi_0 - \int_0^z dz \int_0^z \left( \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} \right) dz.$$

On peut, dans le second membre de cette formule, remplacer  $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}$ , c'est-à-dire les vitesses  $u, v$ , par les valeurs très-peu différentes  $u_0, v_0$  ou  $\frac{d\varphi_0}{dx}, \frac{d\varphi_0}{dy}$  que ces vitesses ont aux points du fond situés sur les mêmes verticales : on aura ainsi

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{z^2}{1.2} \left( \frac{d^2\varphi_0}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_0}{dy^2} \right).$$

Cette expression approchée de  $\varphi$ , substituée encore dans le second membre de (13), permettra d'obtenir, par approximations successives,  $\varphi$  en série convergente. Si, afin d'abrégier, on représente

$$\text{par } \Delta_2 \text{ l'expression symbolique } \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2},$$

il viendra finalement

$$(14) \quad \varphi = \varphi_0 - \frac{z^2}{1.2} \Delta_2 \varphi_0 + \frac{z^4}{1.2.3.4} \Delta_2 \Delta_2 \varphi_0 - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} \Delta_2 \Delta_2 \Delta_2 \varphi_0 + \dots$$

la fonction  $\varphi$  est ainsi exprimée en fonction des valeurs qu'elle a aux divers points du fond.

Cherchons actuellement les deux conditions spéciales à la surface libre. J'appellerai :  $p_0$  la pression atmosphérique, que je supposera à chaque instant la même partout;  $H$  la profondeur constante du liquide dans les parties non encore agitées;  $H +$  une petite quantité  $h$  la profondeur, variable en fonction de  $x, y, t$ , dans les parties agitées; enfin je poserai

$$(15) \quad p = p_0 + \rho g(H + h - z) + P,$$

P désignant la partie de la pression qui ne varie pas d'après la loi hydrostatique, et je conviendrai de faire nulle la fonction  $\varphi$  aux points très-éloignés où le mouvement ne se propagera pas de longtemps, ce qui est évidemment permis sans changer nulle part les dérivées en  $x, y, z$  de cette fonction. La formule (11) deviendra

$$\frac{P}{\rho} = -gh - \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2} \right) + \text{une fonction arbitraire de } t.$$

La fonction arbitraire de  $t$  se détermine en observant qu'aux points très-éloignés où  $\varphi = 0$ , les quatre dérivées de  $\varphi$  en  $x, y, z, t$  et les quantités  $P$  et  $h$  s'annulent à la fois : cette fonction arbitraire est donc nulle, et l'on a, pour déterminer la partie de la pression qui ne varie pas hydrostatiquement, la relation

$$(16) \quad P = -\rho \left[ gh + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2} \right) \right].$$

La première condition spéciale à la surface libre consiste à y faire  $P = 0$ . La seconde doit exprimer qu'une molécule superficielle se meut sans quitter cette surface, et, par conséquent, que, si l'on suit une molécule pareille en faisant croître dans l'équation de la surface libre  $t$  de  $dt$ ,  $x$  de  $u dt$ ,  $y$  de  $v dt$ , l'ordonnée  $H + h$ , aux points successifs où se trouve cette molécule, croîtra de  $w dt$ . On aura donc

$$(17) \quad \left. \begin{array}{l} \text{(à la surface libre)} \\ \left\{ \begin{array}{l} gh + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) = 0, \\ w = \frac{dh}{dt} + \frac{dh}{dx} u + \frac{dh}{dy} v. \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

Je me propose d'étudier seulement des mouvements propagés le long d'un canal de longueur indéfinie et de section rectangulaire normale au plan des  $xz$ , de manière à n'avoir à considérer que des vitesses parallèles à ce plan, indépendantes de  $y$ , et par suite des formes cylindriques de la surface libre. La fonction  $\varphi_0$  ne dépendra, comme la partie variable  $h$  de la profondeur, que des deux variables  $x$  et  $t$ , et, si l'on suppose que le mouvement se propage du côté des  $x$

positifs,  $u_0$  et  $\varphi_0$  seront nuls pour  $x$  infini. On aura

$$\varphi_0 = - \int_x^\infty \frac{d\varphi_0}{dx} dx = - \int_x^\infty u_0 dx;$$

la formule (14), devenue simplement

$$(18) \quad \varphi = - \int_x^\infty u_0 dx - \frac{z^2}{1.2} \frac{du_0}{dx} + \frac{z^4}{1.2.3.4} \frac{d^2 u_0}{dx^2} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} \frac{d^3 u_0}{dx^3} + \dots,$$

permettra, si l'on n'oublie pas que  $u$ ,  $w$  sont les deux dérivées de  $\varphi$  en  $x$  et  $z$ , de changer les relations (17) en celles-ci :

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} & gh - \int_x^\infty \frac{du_0}{dt} dx - \frac{(H+h)^2}{1.2} \frac{d^2 u_0}{dx dt} + \dots \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \left[ u_0 - \frac{(H+h)^2}{1.2} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \dots \right]^2 + \left( - \frac{H+h}{1} \frac{du_0}{dx} + \dots \right)^2 \right\} = 0, \\ & - \frac{H+h}{1} \frac{du_0}{dx} + \frac{(H+h)^3}{1.2.3} \frac{d^3 u_0}{dx^3} - \dots = \frac{dh}{dt} + \frac{dh}{dx} \left( u_0 - \frac{(H+h)^2}{1.2} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \dots \right). \end{aligned} \right.$$

Ce sont deux équations en  $h$  et  $u_0$  qui régissent les variations de ces deux fonctions de  $x$  et  $t$ . Si l'on parvient à déterminer ces fonctions, les formules (18) et (16) donneront ensuite les vitesses  $u$ ,  $w$  et la pression non-hydrostatique  $P$  en tous les points du fluide.

La partie variable  $h$  de la profondeur et, par suite, la vitesse au fond  $u_0$  seront supposées très-petites, et leurs dérivées successives en  $x$  de plus en plus petites, de manière que la série (18) soit rapidement convergente. A une première approximation, on pourra négliger, dans chacune des relations (19), les termes par rapport auxquels d'autres seront très-grands, c'est-à-dire, en particulier, dans la première, tous ceux qui sont très-petits en comparaison de  $u_0$ , et, dans la seconde, tous ceux qui sont très-petits en comparaison de  $\frac{du_0}{dx}$ . Ces deux formules se trouveront ainsi réduites à

$$(20) \quad \int_x^\infty \frac{du_0}{dt} dx = gh, \quad \frac{dh}{dt} = - H \frac{du_0}{dx}.$$

La première de celles-ci, différenciée deux fois par rapport à  $x$ , multi-

pliée par  $H$ , et ajoutée à la seconde différenciée par rapport à  $t$ , donne

$$(21) \quad \frac{d^2 h}{dt^2} = gH \frac{d^2 h}{dx^2}.$$

C'est l'équation différentielle approchée déjà trouvée par Lagrange pour représenter le mouvement des ondes dans un canal peu profond. Son intégrale générale est

$$(22) \quad h = f(x - t\sqrt{gH}) + f_1(x + t\sqrt{gH}),$$

où  $f$  et  $f_1$  désignent deux fonctions arbitraires. La seconde relation (20) devient ainsi

$$\frac{du_0}{dx} = \sqrt{\frac{g}{H}} [f'(x - t\sqrt{gH}) - f_1'(x + t\sqrt{gH})],$$

ou bien, en multipliant par  $dx$  et intégrant,

$$u_0 = \sqrt{\frac{g}{H}} [f(x - t\sqrt{gH}) - f_1(x + t\sqrt{gH}) + \text{une fonction arbitr. } F(t)].$$

Cette valeur de  $u_0$ , portée dans la première (20), ne la vérifie qu'autant que  $F'(t) = 0$ . La fonction  $F(t)$  se réduit donc à une constante, dont on peut supposer une moitié implicitement comprise dans la fonction  $f$ , et l'autre moitié retranchée de la fonction  $f_1$ , de manière à avoir

$$(23) \quad u_0 = \sqrt{\frac{g}{H}} [f(x - t\sqrt{gH}) - f_1(x + t\sqrt{gH})],$$

sans cependant que la somme  $f + f_1$ , qui doit rester égale à  $h$ , soit modifiée.

Les deux fonctions arbitraires  $f$  et  $f_1$  se détermineront en exprimant que, pour  $t = 0$ ,  $h$  et  $u_0$  sont deux fonctions données de  $x$ . Comme je me propose d'étudier seulement des intumescences propagées vers les  $x$  positifs, je pourrai admettre qu'on ait choisi l'origine des  $x$  de manière que, pour  $t = 0$ ,  $u_0$  et  $h$  soient nuls ou du moins complètement insensibles pour toutes les valeurs positives de  $x$ . Les deux formules (22) et (23) donneront alors  $f(x) = 0$  et  $f_1(x) = 0$  pour  $x > 0$ , et les fonctions  $f$  et  $f_1$  seront nulles pour toutes les valeurs positives de leurs variables. Si l'on ne considère que des valeurs

de  $x$  supérieures à  $-t\sqrt{gH}$ , c'est-à-dire telles que  $x + t\sqrt{gH}$  soit  $> 0$ , les relations (22) et (23) se réduiront donc à

$$(24) \quad h = f(x - t\sqrt{gH}), \quad u_0 = \sqrt{\frac{g}{H}} h.$$

Or, comme on se propose de n'étudier que ce qui est propagé vers les  $x$  positifs, toutes les parties de l'intumescence qui ne seront pas très-éloignées de sa tête auront bientôt des  $x$  plus grands que  $-t\sqrt{gH}$  et l'on pourra s'en tenir aux formules (24), au lieu des relations plus générales (22) et (23).

La première (24) exprime que chaque valeur de  $h$  se propage le long du canal avec une vitesse égale à  $\sqrt{gH}$ , ou que la surface libre est animée d'un simple mouvement de translation parallèle au fond du canal et dont la vitesse est celle d'un corps tombant en chute libre d'une hauteur égale à la moitié de la profondeur primitive.

Passons à une seconde approximation [\*]. Il faut alors conserver : 1° dans la première équation (19) le troisième terme, et le terme  $u_0^2$  de la parenthèse qui termine le premier membre, tous les termes qui suivent ceux-là étant évidemment bien plus petits; 2° dans la seconde (19), la partie  $-h \frac{du_0}{dx}$  du premier terme, plus le second terme et le deuxième du second membre. Seulement ces termes très-petits pourront être évalués en y substituant à  $h$  et  $u_0$  leurs valeurs (24) résultant d'une première approximation, car il n'en résultera que des erreurs négligeables en comparaison de ces termes mêmes. Les formules (19) de-

---

[\*] Les termes introduits par cette seconde approximation sont analogues à ceux qui représentent les perturbations séculaires dans les mouvements des corps célestes, c'est-à-dire qu'ils acquièrent une influence notable au bout d'un temps assez long, mais restent négligeables dans les phénomènes de peu de durée. Par exemple, on peut les supprimer et conserver aux intégrales du problème la forme simple (22) et (23), lorsque le canal, au lieu d'être indéfini, est limité du côté des  $x$  positifs par une paroi normale à l'axe des  $x$ , et qu'on se propose d'étudier la réflexion d'une onde contre cette paroi. La condition spéciale  $u_0 = 0$ , qui devra s'y trouver vérifiée à toute époque, reviendra à considérer le canal comme indéfini, mais à superposer à l'onde directe, supposée se propager sans réflexion, celle de sens inverse qui lui serait à toute époque parfaitement symétrique par rapport à la paroi réfléchissante.

viennent ainsi

$$(25) \quad \begin{cases} \int_x^\infty \frac{du_0}{dt} dx = gh + \frac{g}{2} \left( \frac{h^2}{H} + H^2 \frac{d^2 h}{dx^2} \right), \\ \frac{dh}{dt} = -H \frac{du_0}{dx} - \sqrt{gH} \frac{d}{dx} \left( \frac{h^2}{H} - \frac{H^2}{6} \frac{d^2 h}{dx^2} \right). \end{cases}$$

Différentions la seconde (25) par rapport à  $t$ , en observant que la parenthèse très-petite qui la termine peut être regardée comme une simple fonction de  $x - t\sqrt{gH}$  et a sa dérivée en  $t$  égale au produit de sa dérivée en  $x$  par  $-\sqrt{gH}$ ; puis ajoutons au résultat la première (25), différenciée deux fois par rapport à  $x$  et multipliée par  $H$ . Il viendra l'équation

$$(26) \quad \frac{d^2 h}{dt^2} = gH \frac{d^2 h}{dx^2} + gH \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{3h^2}{2H} + \frac{H^2}{3} \frac{d^2 h}{dx^2} \right),$$

qui est la base de toute l'analyse suivante.

§ II. — *Vitesses de propagation des diverses parties d'une intumescence.*

J'appellerai *hauteur de l'intumescence* en un point donné la valeur de  $h$  en ce point, c'est-à-dire l'excès de la profondeur actuelle sur la profondeur primitive, et *volume de l'intumescence* la quantité totale de liquide qui se trouvera dans le canal, sur une largeur égale à l'unité, en plus de celle qu'il y aurait si le niveau primitif s'était conservé. La partie  $\sigma$  de ce volume comprise à l'époque  $t$  depuis la tête de l'onde jusqu'à la section normale dont l'abscisse est  $x$  aura pour expression

$$(27) \quad \sigma = \int_x^\infty h dx.$$

L'intumescence sera : 1<sup>o</sup> ou limitée à son arrière, c'est-à-dire terminée du côté des  $x$  négatifs à une abscisse particulière au delà de laquelle les valeurs de  $h$  seront complètement insensibles, et, dans ce cas, elle aura un volume total fini  $Q$ , ou 2<sup>o</sup> illimitée, et j'en considérerai alors toute la partie comprise depuis la tête jusqu'à une abscisse  $x_0$  très-

éloignée de cette tête, abscisse que je supposerai variable d'un moment à l'autre, de manière que le volume total de la partie considérée soit constant. En appelant  $Q$  ce volume, on aura donc

$$(28) \quad Q = \int_{x_0}^{\infty} h dx,$$

formule applicable même au cas d'une onde limitée en  $y$  faisant  $x_0 = -\infty$ .

Chaque élément  $h dx$  de l'intégrale (27) représente une partie de l'intumescence comprise entre deux plans normaux aux  $x$  et distants l'un de l'autre de  $dx$  : on peut supposer que ces plans avancent dans le sens des  $x$  positifs de manière que chacun ait toujours devant lui une partie constante de l'intumescence, et par suite de manière que l'élément  $h dx$  ou  $d\sigma$  d'intumescence que deux plans infiniment voisins comprennent entre eux soit constant aux divers instants successifs. La vitesse de propagation de chacun de ces plans sera celle de la partie d'intumescence adjacente. Cette vitesse, que j'appellerai  $\omega$ , s'obtiendra en exprimant que le second membre de (27) ne varie pas lorsqu'on y fait croître  $t$  de  $dt$  et la limite inférieure  $x$  de l'intégrale de  $\omega dt$ . On a donc

$$-h\omega + \int_x^{\infty} \frac{dh}{dt} dx = 0,$$

ou bien, en différentiant par rapport à  $x$ ,

$$(29) \quad \frac{dh}{dt} + \frac{d(h\omega)}{dx} = 0.$$

La formule (29) exprime la conservation de chaque élément de volume  $d\sigma$  de l'intumescence : pendant un instant  $dt$ , la longueur  $dx$  de cet élément croît du produit de  $dt$  par la différence  $\frac{d\omega}{dx} dx$  des vitesses de propagation des deux plans entre lesquels il est compris, tandis que sa hauteur  $h$  croît de sa différentielle,  $\frac{dh}{dt} dt + \frac{dh}{dx} \omega dt$ , obtenue en suivant l'un de ces plans ; le produit des deux dimensions de l'élément étant constant, il vient, en divisant sa différentielle par  $dx dt$ ,

$$\frac{dh}{dt} + \frac{dh}{dx} \omega + h \frac{d\omega}{dx} = 0,$$

c'est-à-dire l'équation (29).

La substitution à  $\frac{dh}{dt}$  de sa valeur tirée de (29) rend immédiatement intégrable par rapport à  $x$  l'équation fondamentale (26). Celle-ci, en observant que  $h$  et ses dérivées sont nulles pour  $x$  infini, devient

$$(30) \quad \frac{d \cdot h \omega}{dt} + gH \frac{dh}{dx} + gH \frac{d}{dx} \left( \frac{3h^2}{2H} + \frac{H^2}{3} \frac{d^2h}{dx^2} \right) = 0.$$

Cette nouvelle équation peut même être remplacée par une autre plus simple. Posons

$$(31) \quad \psi = h(\omega - \sqrt{gH}) - \frac{\sqrt{gH}}{2} \left( \frac{3h^2}{2H} + \frac{H^2}{3} \frac{d^2h}{dx^2} \right);$$

d'où il résulte (en se rappelant que la dérivée en  $t$  de la dernière parenthèse est égale au produit de sa dérivée en  $x$  par  $-\sqrt{gH}$ , sauf erreur négligeable par rapport à cette dérivée même)

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d \cdot h \omega}{dt} - \sqrt{gH} \frac{dh}{dt} + \frac{gH}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{3h^2}{2H} + \frac{H^2}{3} \frac{d^2h}{dx^2} \right).$$

Dans le second membre de celle-ci, substituons à  $\frac{dh}{dt}$  et à  $\frac{d \cdot h \omega}{dt}$  leurs valeurs tirées de (29) et (30). Il viendra simplement

$$(32) \quad \frac{d\psi}{dt} = \sqrt{gH} \frac{d\psi}{dx},$$

équation qui a pour intégrale, en appelant  $\chi$  une fonction arbitraire,

$$(33) \quad \psi = \chi(x + t\sqrt{gH}).$$

Comme il a été dit après les formules (24),  $h$  et ses dérivées en  $x$  sont supposées nulles, à l'époque  $t = 0$ , pour toutes les valeurs positives de  $x$ ; on a donc à cette époque, d'après (31),  $\psi = 0$  pour  $x > 0$ , et la fonction arbitraire  $\chi(x)$  est nulle pour toutes les valeurs positives de sa variable. Or toutes les parties de l'intumescence qui ne sont pas très-loin de sa tête acquièrent bientôt des abscisses plus grandes que  $-t\sqrt{gH}$ , de manière à rendre positive la somme  $x + t\sqrt{gH}$  et, par

suite, nulle la fonction  $\psi$ . On peut donc, dans l'étude de ces parties de l'onde, supposer  $\psi = 0$ , ou bien, en divisant par  $h\sqrt{gH}$  la relation (31),

$$(34) \quad \frac{\omega}{\sqrt{gH}} = 1 + \frac{3h}{4H} + \frac{H^2}{6h} \frac{d^2h}{dx^2}.$$

Élevée au carré, cette formule donne sensiblement

$$(35) \quad \omega^2 = g \left( H + \frac{3}{2}h + \frac{H^2}{3h} \frac{d^2h}{dx^2} \right).$$

D'où la loi suivante :

*Le carré de la vitesse de propagation d'une partie quelconque de l'intumescence est égal au produit du nombre  $g = 9^m, 809$  par la somme de la profondeur primitive, d'une fois et demie la hauteur  $h$  de cette partie de l'intumescence, et du tiers de la courbure qu'y a la surface libre, multiplié par l'inverse de cette hauteur et par le cube de la profondeur primitive.*

La relation (34) donnant  $\omega$  en fonction de  $h$  et de sa dérivée seconde en  $x$ , l'équation (29) permet d'obtenir sous forme finie, avec une approximation suffisante, les variations de  $h$  qui se produisent pendant un temps assez court. Si l'on appelle  $\omega_0$  une quantité constante très-peu différente de  $\sqrt{gH}$ , mais d'ailleurs arbitraire, cette équation pourra s'écrire

$$(36) \quad \frac{dh}{dt} + \omega_0 \frac{dh}{dx} + \frac{d \cdot h(\omega - \omega_0)}{dx} = 0;$$

son intégrale sera, pour  $t$  assez petit,

$$(37) \quad h = f(x - \omega_0 t) - t \frac{d \cdot h(\omega - \omega_0)}{dx},$$

comme on le reconnaît en portant cette expression de  $h$  dans (36), et en observant que, dans le dernier terme, très-petit par rapport au précédent tant que  $t$  est peu considérable, l'expression  $h(\omega - \omega_0)$  du second ordre de petitesse peut être supposée une simple fonction de  $x - \omega_0 t$ , et a par suite sa dérivée en  $t$  sensiblement égale au produit de  $-\omega_0$  par sa dérivée en  $x$ . Si, à un certain moment qu'on peut

choisir pour origine du temps,  $h$  est une fonction connue  $f$  de  $x$ , la formule (37) donnera bien  $\dot{h}$  pour  $t$  assez petit, après qu'on aura, dans le dernier terme, remplacé  $\omega$  par sa valeur tirée de (34) et ensuite  $h$  par  $f(x - \omega_0 t)$ .

L'équation (29), multipliée par  $h$ , donne encore, en désignant par  $\left(\frac{dh}{dt}\right)$  la dérivée de  $h$  prise en suivant un même élément  $d\sigma$  de l'intu-mescence, c'est-à-dire la somme  $\frac{dh}{dt} + \frac{dh}{dx} \omega$ ,

$$(38) \quad h \left(\frac{dh}{dt}\right) = -h^2 \frac{d\omega}{dx} = -\frac{d \cdot h^2 \omega}{dx} + 2h\omega \frac{dh}{dx}.$$

Or, d'après (34),

$$(39) \quad 2h\omega \frac{dh}{dx} = \sqrt{gH} \frac{d}{dx} \left( h^2 + \frac{h^3}{2H} + \frac{H^2}{6} \frac{dh^2}{dx^2} \right),$$

et par suite (38) devient, en divisant par  $h$ ,

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{dh}{dt}\right) &= -\sqrt{gH} \frac{1}{h} \frac{d}{dx} \left[ \frac{h^3}{4H} + \frac{H^2}{6} \left( h \frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{dh^2}{dx^2} \right) \right] \\ &= -\frac{\sqrt{gH}}{4H} \frac{1}{h} \frac{d}{dx} \left[ h^3 \left( 1 + \frac{2H^3}{3} \frac{1}{h} \frac{d}{dx} \frac{dh}{dx} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

La formule (27) permet de remplacer partout  $h dx$  par  $-d\sigma$ , et il vient

$$(40 \text{ bis}) \quad \left(\frac{dh}{dt}\right) = \frac{\sqrt{gH}}{4H} \frac{d}{d\sigma} \left[ h^3 \left( 1 + \frac{2H^3}{3} \frac{d}{d\sigma} \frac{dh}{d\sigma} \right) \right].$$

C'est l'équation aux dérivées partielles qui régit  $h$ , lorsqu'on choisit  $\sigma$  et  $t$  pour variables indépendantes.

Cherchons actuellement l'expression de  $u_0$ , et celles de  $u, v$  qui en résulteront. Si l'on remplace, dans la seconde relation (25),  $\frac{dh}{dt}$  par sa valeur  $-\frac{d \cdot h \omega}{dx}$ , dans laquelle  $\omega$  est donné par (34), cette relation, multipliée par  $dx$  et intégrée avec la condition que, pour  $x = \infty$ ,  $h$

et ses dérivées en  $x$  s'annulent, donnera

$$(41) \quad u_0 = \sqrt{\frac{g}{H}} \left( h - \frac{h^2}{4H} + \frac{H^2}{3} \frac{d^2 h}{dx^2} \right).$$

On peut remarquer que cette expression de  $u_0$ , portée dans la première (25), la vérifie, si l'on n'oublie pas que  $\frac{dh}{dt}$  vaut  $-\frac{d \cdot h \omega}{dx}$  et que les termes du second ordre de petitesse ont leur dérivée en  $t$  sensiblement égale au produit de leur dérivée en  $x$  par  $-\sqrt{gH}$ .

Il résulte à fort peu près de la formule (18), différenciée respectivement par rapport à  $x$  et par rapport à  $z$ ,

$$u = u_0 - \frac{z^2}{2} \frac{d^2 u_0}{dx^2}, \quad w = -z \frac{du_0}{dx} + \frac{z^3}{6} \frac{d^3 u_0}{dx^3},$$

ce qui donne sensiblement, pour les deux composantes  $u$ ,  $w$  de la vitesse en un point quelconque,

$$(42) \quad \begin{cases} u = \sqrt{\frac{g}{H}} \left[ h - \frac{h^2}{4H} + \left( \frac{H^2}{3} - \frac{z^2}{2} \right) \frac{d^2 h}{dx^2} \right], \\ w = -z \sqrt{\frac{g}{H}} \left[ \left( 1 - \frac{h}{2H} \right) \frac{dh}{dx} + \frac{1}{3} \left( H^2 - \frac{z^2}{2} \right) \frac{d^3 h}{dx^3} \right]. \end{cases}$$

Cherchons encore ce qu'on appelle la *vitesse moyenne*, que je représenterai par  $U$ , et qui n'est autre chose que la moyenne des valeurs de  $u$  sur toute l'étendue d'une section. On aura

$$U = \frac{1}{H+h} \int_0^{H+h} u dz = \sqrt{\frac{g}{H}} \left( h - \frac{h^2}{4H} + \frac{H^2}{6} \frac{d^2 h}{dx^2} \right);$$

le dernier membre de cette formule, multiplié par  $H+h$ , revient sensiblement, d'après (34), à  $h\omega$ . On peut donc poser

$$(43) \quad (H+h)U = h\omega, \quad \text{ou} \quad U = \frac{h\omega}{H+h}.$$

On aurait trouvé directement cette relation, en observant que le volume fluide  $(H+h)U dt$ , qui passe à travers une section durant un

instant  $dt$ , est égal à celui,  $h \omega dt$ , qui se trouve de plus au delà de cette section au bout du même instant, en vertu de la propagation de l'intumescence.

Enfin la partie P de la pression, qui n'est pas soumise à la loi hydrostatique, sera fournie par la formule (16) et par la condition  $P = 0$  à la surface libre. Elle vaudra

$$P = \rho \left[ \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) \right]_1 - \rho \left[ \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) \right],$$

expression dans laquelle l'indice 1 au bas d'une parenthèse indique que l'expression entre parenthèses doit être prise à la surface libre ou pour  $z = H + h$ .

En remplaçant 1<sup>o</sup> la différence  $\left( \frac{d\varphi}{dt} \right)_1 - \frac{d\varphi}{dt}$ , d'après (18) et (24), par

$$- \frac{(H+h)^2 - z^2}{2} \frac{d^2 u_0}{dx dt} - g \frac{H^4 - z^4}{24} \frac{d^4 h}{dx^4},$$

ce qu'on trouve en différentiant deux fois en  $x$  la première (25), égal à

$$g \left[ \frac{(H+h)^2 - z^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} \left( h + \frac{h^2}{2H} + \frac{H^2}{2} \frac{d^2 h}{dx^2} \right) - \frac{H^4 - z^4}{24} \frac{d^4 h}{dx^4} \right],$$

et 2<sup>o</sup>  $\frac{1}{2}(u_1^2 - u^2)$ ,  $\frac{1}{2}(w_1^2 - w^2)$ , par leurs valeurs approchées

$$- g \frac{H^2 - z^2}{2H} h \frac{d^2 h}{dx^2}, \quad g \frac{H^2 - z^2}{2H} \frac{dh^2}{dx^2},$$

tirées de (42), il vient

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} P = \rho g \left[ \frac{(H+h)^2 - z^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} \left( h + \frac{h^2}{2H} + \frac{H^2}{2} \frac{d^2 h}{dx^2} \right) \right. \\ \left. - \frac{H^4 - z^4}{24} \frac{d^4 h}{dx^4} + \frac{H^2 - z^2}{2H} \left( \frac{dh^2}{dx^2} - h \frac{d^2 h}{dx^2} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

La partie principale de P est proportionnelle à la courbure  $\frac{d^2 h}{dx^2}$  de la surface libre : résultat bien naturel, car la partie non hydrostatique de la pression est due principalement aux forces centrifuges.

On peut se demander quelle est la valeur moyenne de P dans toute l'étendue du fluide. On trouve d'abord aisément

$$\int_0^{H+h} \frac{P}{\rho g} dz = \frac{H^3}{3} \frac{d^2}{dx^2} \left( h + \frac{3h^2}{2H} + \frac{2H^2}{5} \frac{d^2 h}{dx^2} \right) - \frac{H^2}{3} \frac{dh^2}{dx^2},$$

et par suite, pour la valeur moyenne de  $\frac{P}{\rho g}$  sur toute une section,

$$\begin{aligned} \frac{1}{H+h} \int_0^{H+h} \frac{P}{\rho g} dz &= \frac{H^2}{3} \frac{d^2}{dx^2} \left( h + \frac{3h^2}{2H} + \frac{2H^2}{5} \frac{d^2 h}{dx^2} \right) - \frac{H}{3} \left( \frac{dh^2}{dx^2} + h \frac{d^2 h}{dx^2} \right) \\ &= \frac{H^2}{3} \frac{d^2}{dx^2} \left( h + \frac{h^2}{H} + \frac{2H^2}{5} \frac{d^2 h}{dx^2} \right). \end{aligned}$$

Multipliant par  $dx$  et intégrant enfin de  $x = x_0$  à  $x = \infty$ , il vient

$$(44 \text{ bis}) \quad \int_{x_0}^{\infty} dx \int_0^{H+h} \frac{P}{\rho g} \frac{dz}{H+h} = -\frac{H^2}{3} \left[ \frac{d}{dx} \left( h + \frac{h^2}{H} + \frac{2H^2}{5} \frac{d^2 h}{dx^2} \right) \right]_{x_0}.$$

Le dernier terme de cette relation, pris à la limite inférieure  $x_0$  de l'intégrale, est nul dans le cas d'une intumescence limitée, et insensible par rapport à la longueur de l'intumescence dans le cas contraire; en le supprimant, on voit que la valeur moyenne de P est nulle.

Si, après avoir intégré par rapport à  $z$ , on n'avait pas divisé par  $H+h$ , on aurait trouvé

$$(44 \text{ ter}) \quad \int_{x_0}^{\infty} dx \int_0^{H+h} \frac{P}{\rho g} dz = -\frac{H^2}{3} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dh^2}{dx^2} dx.$$

### § III. — *Mouvement du centre de gravité d'une onde. — Quantités constantes qui caractérisent chaque intumescence.*

L'intumescence étant composée d'un certain nombre d'éléments constants  $d\sigma$ , on peut étudier, non-seulement, comme au paragraphe précédent, le mouvement de propagation de chacun de ces éléments, mais encore celui du centre de gravité de la partie d'intumescence formée par un certain nombre d'entre eux, en appelant ainsi le point

dont les deux coordonnées à chaque instant, multipliées par le volume total de ces éléments, équivalent à la somme des produits de chacun d'eux par la coordonnée pareille,  $x$  ou  $H + \frac{h}{2}$ , de son milieu. Au lieu de considérer les coordonnées verticales tout entières, il reviendra au même et il sera plus commode de ne considérer que leurs parties variables, c'est-à-dire leurs excès  $\frac{h}{2}$  sur la profondeur primitive  $H$ . En représentant par  $q = \Sigma d\sigma$  une partie finie de l'intumescence, par  $\xi$ ,  $H + \eta$  les deux coordonnées de son centre de gravité, par  $x$  la coordonnée horizontale, à l'époque  $t$ , de l'élément  $d\sigma$ , on aura

$$(45) \quad \xi = \frac{\Sigma x d\sigma}{q}, \quad \eta = \frac{\Sigma h d\sigma}{2q};$$

d'où, en différenciant par rapport à  $t$ ,

$$(46) \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{\Sigma \omega d\sigma}{q}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\Sigma \left(\frac{dh}{dt}\right) d\sigma}{2q}.$$

Les deux intégrales  $\Sigma \omega d\sigma$ ,  $\Sigma \left(\frac{dh}{dt}\right) d\sigma$  peuvent être facilement obtenues au moyen des formules (34) et (40). Si l'on remplace au besoin  $d\sigma$  par  $-h dx$ , et que l'on représente par  $(\ )'_0$  la différence des valeurs que prend, à la tête et à la queue de la partie considérée d'intumescence, la quantité mise entre parenthèses, on trouve aisément

$$\begin{aligned} \Sigma \omega d\sigma &= \sqrt{gH} \left[ q + \frac{3}{4H} \Sigma h d\sigma + \frac{H^2}{6} \left(\frac{dh}{dx}\right)'_0 \right], \\ \Sigma \left(\frac{dh}{dt}\right) d\sigma &= -\sqrt{gH} \left[ \frac{h^3}{4H} + \frac{H^2}{6} \left( h \frac{d^2h}{dx^2} - \frac{dh^2}{dx^2} \right)'_0 \right], \end{aligned}$$

et les formules (46) deviennent, en tenant compte de (45),

$$(47) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \sqrt{gH} \left[ 1 + \frac{3\eta}{2H} + \frac{H^2}{6q} \left(\frac{dh}{dx}\right)'_0 \right], \\ \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\sqrt{gH}}{2q} \left[ \frac{h^3}{4H} + \frac{H^2}{6} \left( h \frac{d^2h}{dx^2} - \frac{dh^2}{dx^2} \right)'_0 \right]. \end{cases}$$

La première de ces relations se simplifie : 1° quand les deux plans tangents menés à la surface libre aux deux extrémités de la partie considérée d'intumescence sont parallèles, ou que la différence  $\left(\frac{dh}{dx}\right)'$  est nulle, ce qui arrive en particulier si l'intumescence est limitée et qu'on la prenne tout entière (car alors  $\frac{dh}{dx} = 0$  à ses deux extrémités); 2° quand le volume  $q$  est considérable. Dans ces deux cas, la première (47), élevée au carré, se réduit à

$$(48) \quad \frac{d^2\xi^2}{dt^2} = g(H + 3\eta).$$

Par conséquent, le carré de la vitesse de propagation du centre de gravité général d'une intumescence, ou du centre de gravité d'une partie d'intumescence comprise entre deux sections normales telles que les plans menés à ses deux extrémités, tangentielllement à la surface libre, soient parallèles, s'obtient en multipliant le nombre  $g = 9^m, 809$  par la somme de la profondeur primitive et du triple de la hauteur de ce centre de gravité au-dessus de la surface libre primitive.

La seconde formule (47) se simplifie également beaucoup si on l'applique au centre de gravité général d'une intumescence. Son second membre est nul, en effet, quand l'intumescence est limitée, car  $h$  et ses dérivées en  $x$  sont alors nulles à ses deux extrémités, et il est insensible, à cause de la présence du dénominateur relativement considérable  $q$ , lorsque l'intumescence est très-longue. On peut donc énoncer le théorème suivant :

*Le centre de gravité général d'une intumescence se maintient constamment à une même hauteur au-dessus de la surface libre primitive; d'où il suit que la vitesse de propagation de ce centre de gravité est constante.*

L'invariabilité de  $\eta$  durant le mouvement revient à dire que l'intégrale  $\Sigma h d\sigma$ , étendue à toute l'intumescence, ne dépend pas du temps. Cette intégrale, que j'appellerai  $E$ , de manière à avoir

$$(49) \quad E = \int_0^Q h d\sigma = \int_{x_0}^{\infty} h^2 dx,$$

exprime en effet à très-peu près, si on la multiplie par le poids spécifique  $\rho g$ , l'énergie totale et constante de l'onde, c'est-à-dire le travail qu'elle produirait si le fluide revenait au repos.

Pour le démontrer, observons que ce travail total serait égal, d'après le principe des forces vives, à la demi-force vive actuelle possédée par les molécules fluides, augmentée du travail que produirait, par son poids, l'intumescence en s'affaisant, et des travaux qu'effectueraient, soit les pressions exercées sur sa surface, soit les actions moléculaires réciproques du fluide lui-même. Ces derniers travaux seraient nuls : en effet, d'une part, la pression atmosphérique constante appliquée tout autour du fluide ne peut produire aucun travail à cause de l'invariabilité du volume fluide total, non plus que les pressions exercées en outre aux divers points des parois, et qui sont normales aux déplacements des molécules fluides adjacentes; d'autre part, les actions moléculaires s'opposant seulement, à cause de l'absence supposée des frottements, aux changements de volume et non aux changements de forme, ne travaillent pas dans des mouvements qui laissent invariable le volume de chaque particule fluide [\*]. Il n'y a donc qu'à évaluer la demi-force vive totale des molécules et le travail qu'effectuerait le poids du liquide si l'intumescence, dont le volume est  $Q$ , s'aplatissait en s'étendant tout le long de la surface libre primitive, de manière que l'ordonnée de son centre de gravité se réduisît de  $H + \eta$  à  $H$ . Cette seconde quantité est évidemment égale à  $\rho g Q \eta$ , ou, d'après une des formules (45), à

$$\frac{1}{2} \rho g \int_{x_0}^{\infty} h^2 dx.$$

Quant à la demi-force vive,

$$\frac{\rho}{2} \int_{x_0}^{\infty} dx \int_0^{H+h} (u^2 + w^2) dz,$$

elle est facile à évaluer au moyen des formules (42). Si l'on ne garde

---

[\*] On peut voir, à ce sujet, la dernière Note de ma *Théorie des ondes liquides périodiques* (*Savants étrangers*, t. XX).

que les termes de l'ordre de grandeur le moins élevé, et ceux de l'ordre immédiatement supérieur, on trouve

$$\int_0^{H+h} (u^2 + w^2) dz = g \left( h^2 + \frac{h^3}{2H} + \frac{H^2}{3} \frac{d \cdot h}{dx} \frac{dh}{dx} \right):$$

multiplions par  $\frac{\rho}{2} dx$ , et intégrons de  $x = x_0$  à  $x = \infty$ , en observant que, dans le résultat, le terme  $\frac{\rho g H^2}{6} h \frac{dh}{dx}$ , nul à la limite supérieure de l'intégrale, est également nul à la limite inférieure quand l'intumescence est limitée, et insensible dans le cas contraire en comparaison de deux autres termes qui sont alors considérables à cause de la longueur de l'onde; il viendra

$$\frac{\rho}{2} \int_{x_0}^{\infty} dx \int_0^{H+h} (u^2 + w^2) dz = \frac{\rho g}{2} \int_{x_0}^{\infty} h^2 dx + \frac{\rho g}{4H} \int_{x_0}^{\infty} h^3 dx.$$

L'énergie totale de l'onde, que je représenterai par  $\mathcal{E}$ , est par conséquent

$$(50) \quad \mathcal{E} = \rho g \int_{x_0}^{\infty} h^2 dx + \frac{\rho g}{4H} \int_{x_0}^{\infty} h^3 dx.$$

L'expression de  $\mathcal{E}$  se compose donc de deux termes, dont le premier, seul sensible, est égal à  $\rho g E$  et à fort peu près constant, tandis que le second peut être évalué, à cause de sa petitesse relative dans l'équation (50), en y supposant, pendant un temps fini,  $h$  simplement fonction de  $x - t\sqrt{gH}$  et  $x_0$  égal à une constante augmentée de  $t\sqrt{gH}$ , ce qui donne à ce second terme une valeur très-lentement variable.

On peut se demander quelle est la quantité totale de mouvement possédée par l'onde suivant l'axe du canal. Cette quantité, évidemment égale à  $\rho \int_{x_0}^{\infty} (H+h) U dx$ , pourra s'écrire, en tenant compte de (43),  $\rho \int_{x_0}^{\infty} h \omega dx$  ou  $\rho \Sigma \omega d\sigma$ , c'est-à-dire qu'elle est égale, d'après la première (46), au produit constant de la masse  $\rho Q$  de l'intumescence par la vitesse de propagation de son centre de gravité.

Chaque intumescence est caractérisée, non-seulement par son vo-

lume total et par son énergie, c'est-à-dire par les deux intégrales invariables  $Q = \Sigma d\sigma$  et  $E = \Sigma h d\sigma$ , mais encore par son *moment d'instabilité*. Cette quantité, que je représenterai par  $M$ , n'est autre que l'intégrale

$$(51) \quad M = \int_{x_0}^{\infty} \left( \frac{dh^2}{dx^2} - \frac{3h^3}{H^3} \right) dx;$$

on verra, au § V, ce qu'elle représente et la raison du nom que je lui donne. Je me contenterai ici de démontrer qu'elle conserve la même valeur d'un instant à l'autre.

On a évidemment, d'après les règles de la différentiation des intégrales, et en effectuant ensuite une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dh^2}{dx^2} dx &= - \left( \frac{dh^2}{dx^2} \omega \right)_{x_0} + 2 \int_{x_0}^{\infty} \frac{dh}{dx} \frac{d}{dt} \frac{dh}{dx} dx \\ &= - \left( \frac{dh^2}{dx^2} \omega + 2 \frac{dh}{dx} \frac{dh}{dt} \right)_{x_0} - 2 \int_{x_0}^{\infty} \frac{dh}{dt} \frac{d^2 h}{dx^2} dx. \end{aligned}$$

En observant que le terme entre parenthèses pris à la limite inférieure  $x_0$  est nul dans le cas d'une intumescence limitée et insensible en comparaison du dernier dans celui d'une intumescence très-longue, cette formule s'écrit simplement

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dh^2}{dx^2} dx = - 2 \int_{x_0}^{\infty} \frac{dh}{dt} \frac{d^2 h}{dx^2} dx.$$

On peut remplacer dans celle-ci  $\frac{dh}{dt}$  par sa valeur tirée de (29), puis  $h\omega$  par son expression que donne (34), et effectuer l'intégration exacte de deux termes qui ne fournissent également aux deux limites que des résultats nuls ou insensibles; il vient ainsi

$$(52) \quad \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dh^2}{dx^2} dx = 3 \sqrt{\frac{g}{H}} \int_{x_0}^{\infty} h \frac{dh}{dx} \frac{d^2 h}{dx^2} dx.$$

On trouve de même

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{\infty} h^3 dx = - (h^3 \omega)_{x_0} + 3 \int_{x_0}^{\infty} h^2 \frac{dh}{dt} dx = - 3 \int_{x_0}^{\infty} h^2 \frac{d \cdot h \omega}{dx} dx,$$

et, en intégrant par parties,

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{\infty} h^3 dx = 6 \int_{x_0}^{\infty} h^2 \omega \frac{dh}{dx} dx;$$

enfin, si l'on remplace  $\omega$  par sa valeur (34), et qu'on néglige deux termes exactement intégrables, donnant aux deux limites des résultats nuls ou négligeables, on trouve

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{\infty} h^3 dx = H^3 \sqrt{\frac{g}{H}} \int_{x_0}^{\infty} h \frac{dh}{dx} \frac{d^2 h}{dx^2} dx.$$

Cette relation, multipliée par  $\frac{3}{H^3}$  et retranchée de (52), donne bien

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{\infty} \left( \frac{dh^2}{dx^2} - \frac{3h^3}{H^3} \right) dx = 0.$$

#### § IV. — Onde solitaire.

L'onde solitaire de Scott Russell étant caractérisée par sa grande longévité, c'est-à-dire par la propriété qu'ont toutes ses parties de se propager également vite, de manière à ne pas subir de déformation appréciable, on doit trouver théoriquement les lois qui la concernent en supposant  $\omega$  constante dans la formule (34).

Dans cette hypothèse, si nous appelons  $h_1$  une quantité constante, telle que

$$(53) \quad \frac{\omega}{\sqrt{gH}} = 1 + \frac{h_1}{2H}, \quad \text{ou} \quad \omega^2 = g(H + h_1),$$

cette formule devient

$$(54) \quad \frac{d^2 h}{dx^2} = \frac{3h}{2H^3} (2h_1 - 3h).$$

Celle-ci, multipliée par  $2 \frac{dh}{dx}$  et intégrée de manière que  $h = 0$  et

$\frac{dh}{dx} = 0$  pour  $x = \infty$ , donne

$$(55) \quad \frac{dh^2}{dx^2} = \frac{3}{H^3} h^2 (h_1 - h).$$

Cette relation ayant son premier membre essentiellement positif, il faut que  $h_1$  soit partout plus grand que  $h$ , et par suite (comme  $h = 0$  pour  $x$  infini) que  $h_1$  soit positif.

On vérifie aisément que (55) revient à

$$(56) \quad \left( \frac{d \frac{h_1}{h}}{dx} \right)^2 = \frac{3 h_1}{H^3} \frac{h_1}{h} \left( \frac{h_1}{h} - 1 \right),$$

équation qui, différenciée par rapport à  $x$ , donne immédiatement

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{h_1}{h} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3 h_1}{H^3} \left( \frac{h_1}{h} - \frac{1}{2} \right),$$

et par suite, en intégrant et désignant par  $c, c'$  deux constantes arbitraires,

$$\frac{h_1}{h} - \frac{1}{2} = c' \left[ e^{\frac{\sqrt{3 h_1}}{H^3} (x-c)} + e^{-\frac{\sqrt{3 h_1}}{H^3} (x-c)} \right].$$

Pour que cette intégrale vérifie l'équation du premier ordre (56), il faut faire  $c'^2 = \frac{1}{16}$  ou  $c' = \pm \frac{1}{4}$  : on doit donc poser

$$(57) \quad \begin{cases} \frac{h_1}{h} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} \left[ e^{\frac{\sqrt{3 h_1}}{H^3} (x-c)} + e^{-\frac{\sqrt{3 h_1}}{H^3} (x-c)} \right] \\ = \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \operatorname{coshyp} \sqrt{\frac{3 h_1}{H^3}} (x-c) \right] [*]. \end{cases}$$

[\*] Cette équation, résolue par rapport à l'une des deux exponentielles, inverses l'une de l'autre, qu'elle contient, donne, en supposant  $x - c > 0$ ,

$$(57 \text{ bis}) \quad e^{\frac{\sqrt{3 h_1}}{H^3} (x-c)} = \pm 2 \left( \frac{h_1}{h} - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{4 \left( \frac{h_1}{h} - \frac{1}{2} \right)^2 - 1},$$

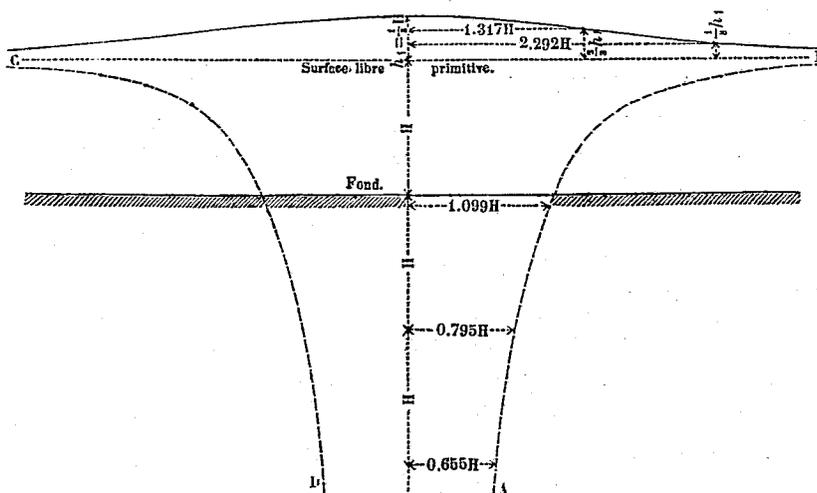
formule qui permet de calculer  $x$ , pour chaque valeur de  $h$ , au moyen des simples tables ordinaires de logarithmes.

C'est ainsi que j'ai obtenu divers points de la courbe suivante, dont la branche

Le cosinus hyperbolique qui entre dans le second membre de (57) est une fonction paire de  $x - c$ ; il a sa valeur minimum pour  $x - c = 0$ , et il grandit sans cesse jusqu'à l'infini lorsque  $x - c$  varie

supérieure représente le profil d'une onde solitaire dans l'hypothèse  $h_1 = \frac{1}{3} H$ , et dont les deux branches inférieures ponctuées correspondent à des valeurs négatives de  $h$ . Les profils des ondes solitaires pour lesquelles  $h_1$  différerait de  $\frac{1}{3} H$  pourraient s'en déduire en faisant varier les ordonnées verticales  $h$  abaissées de la courbe sur son asymptote proportionnellement à  $h_1$ , et les distances horizontales qui séparent ces ordonnées les unes des autres en raison inverse de la racine carrée de  $h_1$ ; la formule (57 bis) montre bien, en effet, que, pour des valeurs égales du rapport  $\frac{h_1}{h}$  dans différentes ondes, le produit  $\frac{x - c}{H} \sqrt{\frac{h_1}{H}}$  est constant.

Profil d'une onde solitaire.



L'équation (57) pourrait aussi s'écrire

$$\frac{h_1}{h} = \text{soit} \left[ \frac{e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}(x-c)} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}(x-c)}}{2} \right]^2, \quad \text{soit} \left[ \frac{e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}(x-c)} - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}(x-c)}}{2} \right]^2,$$

c'est-à-dire

$$(57 \text{ ter}) \quad \frac{h_1}{h} = \text{soit} \cos \text{hyp}^2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}(x - c), \quad \text{soit} - \sin \text{hyp}^2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}(x - c).$$

de 0 à  $\pm \infty$ . Par suite, le rapport  $\frac{h_1}{h}$ , égal à un ou à zéro pour  $x - c = 0$ , suivant que la constante  $c'$  est positive ou négative, croît dans le premier cas jusqu'à l'infini, et décroît dans le second jusqu'à  $-\infty$ , quand  $x - c$  va de 0 à  $\pm \infty$ ; dans le premier cas,  $h$  décroît de  $h_1$  à zéro; dans le second,  $h$  croît de  $-\infty$  à zéro. Il est évident que ce second cas ne répond à rien de réel, car  $h$  ne peut jamais être inférieur à  $-H$ . On est donc obligé de supposer  $c'$  positif. Si l'on considère d'ailleurs que l'onde avance dans le sens des  $x$  positifs avec la vitesse de propagation  $\omega$ , ou que l'abscisse  $c$  de son sommet est égale à  $\omega t$ , pourvu que le temps soit compté à partir du moment où ce sommet est passé à l'origine, l'équation (57) deviendra celle de la surface libre

$$(58) \quad h = \frac{4h_1}{2 + e^{\sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}(x-\omega t)} + e^{-\sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}(x-\omega t)}}.$$

Par conséquent, la surface libre de l'onde solitaire, symétrique par rapport à la section normale  $x = \omega t$ , menée par son sommet, s'abaisse avec continuité de part et d'autre de cette section, de manière à se raccorder asymptotiquement, pour  $x - \omega t = \pm \infty$ , avec la surface primitive. D'après la formule (54), elle est convexe aux points dont l'élévation est supérieure aux deux tiers de sa hauteur totale et concave aux points plus bas.

La constante  $h_1$  n'est autre, comme on vient de voir, que la valeur maximum de  $h$ : cela résulte d'ailleurs directement de l'équation (55), qui ne donne à la dérivée de  $h$  en  $x$  une valeur nulle que pour  $h = 0$  et  $h = h_1$ . La formule (53) exprime, par suite, cette loi expérimentale et bien connue de Scott Russell: *La vitesse de propagation d'une onde solitaire est égale à la racine carrée du produit du nombre  $g$  par la distance qu'il y a du sommet de l'onde au fond du canal.*

Cette loi, comparée à celle qu'exprime la formule (48), montre que le centre de gravité d'une onde solitaire se trouve au tiers de sa hauteur, comme dans le triangle isocèle. Il est aisé, du reste, de trouver directement ce résultat, en même temps qu'une relation intéressante entre la partie variable  $h$  d'une ordonnée quelconque  $H + h$  et l'aire que comprennent, du côté des  $x$  positifs, cette ordonnée, une

coupe longitudinale de la surface libre (58) et la surface libre primitive.

Un élément  $d\sigma$  de cette aire égalant  $h dx$  en valeur absolue, la formule (55) peut s'écrire

$$(59) \quad \frac{dh^2}{d\sigma^2} = \frac{3}{H^3}(h_1 - h).$$

Celle-ci, différenciée, donne

$$(60) \quad \frac{d \frac{dh}{d\sigma}}{d\sigma} = -\frac{3}{2H^3} \quad \text{ou} \quad 1 + \frac{2H^3}{3} \frac{d \frac{dh}{d\sigma}}{d\sigma} = 0:$$

on aurait pu déduire directement cette équation de (40 bis); il aurait suffi de remarquer que, l'onde solitaire ne se déformant pas, on y a  $\left(\frac{dh}{dt}\right) = 0$ , et par suite

$$h^3 \left( 1 + \frac{2H^3}{3} \frac{d \frac{dh}{d\sigma}}{d\sigma} \right) = \text{const.};$$

or cette constante égale zéro, car l'expression dont elle représente la valeur s'annule pour  $x = \infty$ ; à cause de la présence du facteur  $h^3$ .

L'équation (60), multipliée successivement deux fois par  $d\sigma$ , et intégrée chaque fois, en observant à la fin que  $h$  doit s'annuler pour  $\sigma = 0$  et pour  $\sigma = Q$ , donne

$$(61) \quad h = \frac{3}{4H^3} \sigma(Q - \sigma) [*].$$

---

[\*] Cette valeur de  $h$ , portée dans (59), la vérifie à la condition nécessaire et suffisante qu'il y ait entre  $h_1$  et  $Q$  la relation (63) ci-après. Celle-ci étant admise, l'équation (61) est donc équivalente à (59), et par suite à (55) ou à (57). Les trois branches AB, BC, CD (voir la figure précédente) de la courbe que représente l'équation (57) seront données par la relation (61) en y faisant varier respectivement  $\sigma$  de  $-\infty$  à 0, de 0 à  $Q$ , de  $Q$  à  $\infty$ ; car, si un point parcourt toute cette courbe en allant successivement de A en B, de B en C, de C en D, le  $\sigma$  de ce point, ayant par définition sa différentielle égale à  $-h dx$ , croîtra sans cesse comme on le voit sur la figure, et il sera d'abord négatif puisqu'il ne s'annule qu'en B.

D'où le théorème suivant : *La coupe longitudinale de la surface libre d'une onde solitaire est une courbe telle que le produit d'une perpendiculaire quelconque, abaissée de cette courbe sur son asymptote, par le cube de la profondeur primitive de l'eau dans le canal, est égal aux trois quarts du produit des deux parties en lesquelles cette perpendiculaire divise la surface comprise entre la courbe et son asymptote.*

Cette propriété n'appartient qu'à l'onde solitaire [\*]. Car, si une courbe plane est telle que le produit de son ordonnée  $h$  par le cube d'une ligne constante  $H$  soit égal aux trois quarts du produit des deux parties  $\int_{x_0}^x h dx$ ,  $\int_x^{x_1} h dx$ , en lesquelles cette ordonnée divise l'aire  $Q$  comprise entre la courbe et l'axe des abscisses, on aura

$$(62) \quad h = \frac{3}{4H^3} \int_{x_0}^x h dx \int_x^{x_1} h dx,$$

ou, en différentiant et élevant au carré,

$$\begin{aligned} \frac{dh^2}{dx^2} &= \left(\frac{3}{4H^3}\right)^2 h^2 \left(\int_x^{x_1} h dx - \int_{x_0}^x h dx\right)^2 \\ &= \left(\frac{3h}{4H^3}\right)^2 \left[\left(\int_x^{x_1} h dx + \int_{x_0}^x h dx\right)^2 - 4 \int_{x_0}^x h dx \int_x^{x_1} h dx\right] \\ &= \left(\frac{3h}{4H^3}\right)^2 \left(Q^2 - \frac{16H^3}{3} h\right). \end{aligned}$$

Le produit des deux parties de l'aire  $Q$  étant d'ailleurs maximum quand ces deux parties sont égales et valent  $\frac{Q}{2}$ , la formule (62) donne,

---

[\*] Entendue algébriquement, c'est-à-dire en tant qu'exprimée par la relation (61), cette propriété appartient, ainsi qu'on l'a vu dans la note précédente, à toute la courbe ayant l'équation (57), équation qui revient, si l'on appelle  $y$  et  $x$  les deux coordonnées  $h$  et  $x$ , et si l'on pose  $\sqrt{\frac{3h_1}{H^3}} = a$ ,  $c = 0$ , à  $\left(\frac{2h_1}{y} - 1\right)^2 = \cosh^2 ax$  : cette courbe comprend, comme le montre la figure d'une Note précédente, outre une branche à deux inflexions située du côté des  $y$  positifs, et qui est le profil d'une onde solitaire, deux branches sans inflexion, ayant chacune pour asymptotes l'axe des  $x$  et l'axe des  $y$  négatifs.

pour valeur maximum de  $h$ ,

$$(63) \quad h_1 = \frac{3Q^2}{16H^3},$$

et l'équation précédente devient précisément, en éliminant  $Q^2$ , l'équation différentielle (55) de l'onde solitaire.

La formule (63), qu'on peut également déduire de (61) en faisant  $\tau = \frac{Q}{2}$ , exprime que *la hauteur de l'onde solitaire est les trois seizièmes du carré du volume total de l'onde par unité de largeur du canal, divisés par le cube de la profondeur primitive.*

La hauteur  $\eta$  du centre de gravité de l'onde au-dessus de la surface libre primitive égale, d'après la seconde des relations (45), le quotient de  $\int h d\sigma$  par  $2Q$ . En substituant à  $h$  sa valeur (61), on trouve

$$(64) \quad \eta = \frac{1}{2Q} \int_0^Q h d\sigma = \frac{Q^2}{16H^3},$$

c'est-à-dire le tiers de la valeur (63) de  $h_1$ , ce qu'il fallait démontrer.

Il en résulte, pour l'intégrale  $E$  ou  $2Q\eta$ , dont le produit par le poids de l'unité de volume représente l'énergie de l'onde,

$$(64 \text{ bis}) \quad E = \frac{Q^3}{8H};$$

par suite,

$$Q = 2H \sqrt[3]{E},$$

et il vient, d'après la formule (63),

$$(64 \text{ ter}) \quad h_1 = \frac{3 \sqrt[3]{E^2}}{4H}, \quad \frac{Q}{h_1} = \frac{8H^2}{3 \sqrt[3]{E}}.$$

Lorsqu'une onde se propage le long d'un canal dont la profondeur  $H$  est lentement décroissante d'un point à l'autre, comme cela avait lieu dans les expériences de M. Bazin, le fond du canal doit réfléchir sans cesse une petite partie du mouvement, de manière que le volume et

l'énergie de l'intumescence se partagent entre l'onde directe et cette onde réfléchi. Celle-ci étant de longueur croissante et d'une hauteur évidemment très-petite, son volume deviendra fini sans que son énergie, qui est à la fois proportionnelle à ce volume et à sa hauteur, cesse de rester très-petite. L'onde directe conservera donc, à fort peu près, toute l'énergie de l'intumescence, et, comme elle gardera sensiblement la forme d'une onde solitaire, ainsi que nous le démontrerons au paragraphe suivant, sa hauteur  $h_1$  et le rapport de son volume  $Q$  à cette hauteur s'obtiendront à un instant quelconque au moyen des deux formules (64 ter), où  $E$  sera invariable : on voit que l'onde deviendra plus élevée, plus courte, et par conséquent moins stable, jusqu'à ce qu'enfin elle manque de base et déferle. Le contraire arriverait si la profondeur allait en augmentant. Alors l'onde réfléchi serait négative, mais n'aurait toujours qu'une énergie négligeable; et la hauteur décroissante  $h_1$ , ainsi que le volume croissant  $Q$ , de l'onde directe, seraient encore donnés en chaque point par les formules (64 ter).

L'onde solitaire jouit enfin de la propriété de rendre minimum deux intégrales dans des conditions données. Nous étudierons au paragraphe suivant la plus importante. Celle dont nous nous occuperons ici est l'intégrale

$$(65) \quad N = \int_{x_0}^{\infty} \left( \frac{1}{h} \frac{dh^2}{dx^2} - \frac{3h^2}{H^3} \right) dx = \int_0^Q \left( \frac{dh^2}{d\sigma^2} - \frac{3h}{H^3} \right) d\sigma.$$

L'onde solitaire est, de toutes les intumescences qui ont un même volume total  $Q$ , celle qui donne à cette intégrale sa plus petite valeur, et même la seule qui la rende maximum ou minimum.

Pour le démontrer, supposons que,  $h$  étant supposé exprimé en fonction de  $\sigma$  d'un bout à l'autre de l'intumescence, on donne à  $h$ , pour chacune de ces valeurs de  $\sigma$ , un petit accroissement  $\Delta h$  variable avec continuité d'un élément de volume  $d\sigma$  de l'intumescence aux éléments voisins. En appelant  $\Delta N$  l'accroissement que recevra  $N$ , et en observant que

$$\Delta \frac{dh^2}{d\sigma^2} = 2 \frac{dh}{d\sigma} \frac{d\Delta h}{d\sigma} + \left( \frac{d\Delta h}{d\sigma} \right)^2,$$

il viendra

$$\Delta N = \int_0^Q \left[ -\frac{3\Delta h}{H^3} + 2 \frac{dh}{d\sigma} \frac{d\Delta h}{d\sigma} \right] d\sigma + \int_0^Q \left( \frac{d\Delta h}{d\sigma} \right)^2 d\sigma,$$

ou bien, en intégrant un terme par parties,

$$(66) \quad \Delta N = \left( 2 \frac{dh}{d\sigma} \Delta h \right)_0^Q - \frac{3}{H^3} \int_0^Q \left( 1 + \frac{2H^3}{3} \frac{d^2 h}{d\sigma^2} \right) (\Delta h) d\sigma + \int_0^Q \left( \frac{d\Delta h}{d\sigma} \right)^2 d\sigma.$$

Le premier terme du second membre est nul à la limite inférieure de l'intégration, limite qui correspond à  $x = \infty$ , parce qu'on y a  $\Delta h = 0$ ; à la limite supérieure, ou pour  $x = x_0$ , il est nul pour la même raison dans le cas d'une intumescence limitée, et insensible en comparaison du dernier terme de (66) dans celui d'une intumescence très-longue. On peut donc écrire simplement

$$(66 \text{ bis}) \quad \Delta N = - \frac{3}{H^3} \int_0^Q \left( 1 + \frac{2H^3}{3} \frac{d^2 h}{d\sigma^2} \right) (\Delta h) d\sigma + \int_0^Q \left( \frac{d\Delta h}{d\sigma} \right)^2 d\sigma.$$

Si l'on n'a pas, pour toutes les valeurs de  $\sigma$ ,

$$1 + \frac{2H^3}{3} \frac{d^2 h}{d\sigma^2} = 0,$$

ce qui est l'équation différentielle (60) de l'onde solitaire, on pourra donner au petit accroissement  $\Delta h$ , pour chaque valeur de  $\sigma$ , des valeurs telles que tous les éléments de la première intégrale du second membre de (66 bis) aient le même signe et soient incomparablement plus grands que ceux de la seconde intégrale, puis donner à  $\Delta h$  les valeurs précisément contraires : l'accroissement  $\Delta N$  serait ainsi successivement positif et négatif, et  $N$  ne serait ni maximum ni minimum. Donc l'intégrale  $N$  ne peut être maximum ou minimum qu'autant que l'équation différentielle (60) sera vérifiée, c'est-à-dire dans le cas seulement de l'onde solitaire. Mais, si cette équation est vérifiée,  $\Delta N$ , alors égal au dernier terme de (66 bis), est essentiellement positif, et l'intégrale est bien minimum.

§ V. — *Moment d'instabilité d'une intumescence quelconque. — Stabilité de l'onde solitaire et cause de sa formation fréquente.*

*L'onde solitaire est encore, parmi toutes les intumescences d'égale énergie, celle pour laquelle le moment d'instabilité*

$$M = \int_{x_0}^{\infty} \left( \frac{dh^2}{dx^2} - \frac{3h^3}{H^3} \right) dx$$

*est le plus petit possible, et même la seule qui rende ce moment maximum ou minimum.*

Pour démontrer cette propriété, je poserai

$$(67) \quad \varepsilon = \int_x^{\infty} h^2 dx,$$

et je prendrai pour variable indépendante, au lieu de  $x$ , la quantité  $\varepsilon$ , essentiellement positive, et croissante de zéro à  $E$  lorsque  $x$  décroît de  $\infty$  à  $x_0$ . La relation (67) différenciée donnant

$$(68) \quad d\varepsilon = -h^2 dx, \quad \text{ou} \quad dx = -\frac{d\varepsilon}{h^2},$$

l'intégrale  $M$  deviendra

$$(69) \quad M = \int_0^E \left( h^2 \frac{dh^2}{d\varepsilon^2} - \frac{3h}{H^3} \right) d\varepsilon = \int_0^E \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{d(h^2)}{d\varepsilon} \right)^2 - \frac{3h}{H^3} \right] d\varepsilon,$$

et la limite supérieure  $E$  de l'intégrale sera la même pour toutes les intumescences que nous aurons à considérer, car cette limite n'est autre chose que le quotient par  $\rho g$  de l'énergie  $\mathcal{E}$ , qui est supposée la même pour toutes.

Concevons que, pour chaque valeur de  $\varepsilon$ ,  $h$  reçoive un accroissement  $\Delta h$  [\*], qui sera, comme  $h$ , une fonction continue et finie quel-

[\*] Cette méthode, dont je me suis déjà servi à la fin du paragraphe précédent, pour traiter le problème du maximum ou du minimum relatif d'une intégrale, et qui consiste à prendre pour variable indépendante l'intégrale,  $\sigma$  ou  $\varepsilon$ , dont la valeur totale doit rester constante, est analogue à celle qu'on emploie dans les questions d'isopérimètres, lorsqu'on y prend pour variable indépendante l'arc dont la valeur totale est une quantité invariable et donnée.

conque de  $\varepsilon$ . On aura évidemment

$$\Delta \left( \frac{d \cdot h^2}{d\varepsilon} \right)^2 = 2 \frac{d \cdot h^2}{d\varepsilon} \frac{d\Delta \cdot h^2}{d\varepsilon} + \left( \frac{d\Delta \cdot h^2}{d\varepsilon} \right)^2 = 4h \frac{dh}{d\varepsilon} \frac{d\Delta \cdot h^2}{d\varepsilon} + \left( \frac{d\Delta \cdot h^2}{d\varepsilon} \right)^2,$$

et par suite

$$\Delta M = \int_0^E \left( -\frac{3\Delta h}{H^3} + h \frac{dh}{d\varepsilon} \frac{d\Delta \cdot h^2}{d\varepsilon} \right) d\varepsilon + \int_0^E \frac{1}{4} \left( \frac{d\Delta \cdot h^2}{d\varepsilon} \right)^2 d\varepsilon;$$

en intégrant un terme par parties et observant ensuite que

$$\Delta \cdot h^2 = 2h\Delta h + (\Delta h)^2,$$

cette formule devient

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta M &= \left( h \frac{dh}{d\varepsilon} \Delta \cdot h^2 \right)_0^E - \frac{3}{H^3} \int_0^E \left( 1 + \frac{2H^3}{3} h \frac{d \cdot h \frac{dh}{d\varepsilon}}{d\varepsilon} \right) (\Delta h) d\varepsilon \\ &+ \int_0^E \left[ -\frac{d \cdot h \frac{dh}{d\varepsilon}}{d\varepsilon} (\Delta h)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{d\Delta \cdot h^2}{d\varepsilon} \right)^2 \right] d\varepsilon. \end{aligned} \right.$$

Le premier terme du second membre est la différence des deux valeurs de l'expression  $h \frac{dh}{d\varepsilon} \Delta \cdot h^2$ , ou  $\frac{dh}{d\varepsilon} \Delta \cdot h^2$ , prise successivement aux deux limites  $\varepsilon = 0$  et  $\varepsilon = E$ , c'est-à-dire aux points  $x = \infty$  et  $x = x_0$ : elle s'annule à la limite inférieure, ou pour  $x = \infty$ , car on y a toujours  $h^2 = 0$ , et par suite  $\Delta \cdot h^2 = 0$ ; à la limite supérieure, ou pour  $x = x_0$ , elle s'annule pour la même raison dans le cas d'une intumescence limitée, et elle est insensible en comparaison du dernier terme de (70) dans le cas d'une intumescence très-longue. Le premier terme du second membre de (70) peut donc toujours être supprimé.

On verra, en raisonnant comme on l'a fait après la formule (66 bis), que le signe de  $\Delta M$  changera suivant les valeurs données à  $\Delta h$ , si l'on n'a pas, quel que soit  $\varepsilon$ ,

$$(71) \quad 1 + \frac{2H^3}{3} h \frac{d \cdot h \frac{dh}{d\varepsilon}}{d\varepsilon} = 0,$$

ou bien, en observant que  $d\varepsilon = -h^2 dx = h d\sigma$ ,

$$1 + \frac{2H^3}{3} \frac{d}{d\sigma} \frac{dh}{d\sigma} = 0.$$

C'est l'équation différentielle (60) de l'onde solitaire : ainsi l'intégrale  $M$  ne peut être maximum ou minimum que pour l'onde solitaire. Or elle est dans ce cas minimum, car l'expression de  $\Delta M$ , alors réduite à

$$\Delta M = \int_0^E \left[ -\frac{d}{d\varepsilon} h \frac{dh}{d\varepsilon} (\Delta h)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{d\Delta \cdot h^2}{d\varepsilon} \right)^2 \right] d\varepsilon,$$

ou, d'après (71), à

$$(72) \quad \Delta M = \int_0^E \left[ \frac{3}{2H^3} \frac{(\Delta h)^2}{h} + \frac{1}{4} \left( \frac{d\Delta \cdot h^2}{d\varepsilon} \right)^2 \right] d\varepsilon,$$

est essentiellement positive,  $h$  étant partout  $> 0$  dans une onde solitaire [\*].

De toutes les ondes de même énergie, celle pour laquelle l'intégrale  $M$  a la plus petite valeur possible est donc l'onde solitaire, c'est-à-dire la seule qui ne se déforme pas en se propageant. L'excès de la valeur effective et constante de l'intégrale  $M$ , pour une intumescence donnée, sur sa valeur minimum, peut être regardée par suite comme

[\*] Cette valeur minimum de  $M = \int_0^Q \left( h \frac{dh^2}{d\sigma^2} - \frac{3h^2}{H^3} \right) d\sigma$ , facile à obtenir au moyen de l'expression (61) de  $h$ , est

$$-\frac{1}{10} \left( \frac{3}{4H^3} \right)^3 Q^3;$$

or  $E$  ou  $2Q\gamma$  vaut, d'après (64 bis),  $\left( \frac{Q}{2H} \right)^3$ , d'où il suit, en éliminant  $Q$ , que la valeur minimum du moment d'instabilité est

$$(72 \text{ bis}) \quad M = -\frac{27}{20} \frac{E^{\frac{5}{3}}}{H^4}.$$

une mesure, soit de la différence de forme qu'il y a entre l'intumescence considérée et l'onde solitaire de même énergie, soit de la rapidité avec laquelle l'onde se déforme en se propageant et de l'amplitude des déformations qu'elle éprouve. C'est pourquoi j'ai appelé cette intégrale le *moment d'instabilité* de l'onde.

Si le moment d'instabilité d'une onde dépasse peu sa valeur minimum, la forme de l'intumescence oscillera autour de celle d'une onde solitaire de même énergie, sans en différer jamais beaucoup : elle ne pourrait en effet s'en écarter notablement sans que le moment d'instabilité grandît, ce qui est impossible, puisque ce moment ne varie pas d'un instant à l'autre; ou, plutôt, une onde solitaire se formera bientôt; car les frottements, dont nous avons fait abstraction, finissent par éteindre les oscillations de la forme effective de l'intumescence autour de sa forme limite, tout comme ils finissent toujours par ramener à leurs positions d'équilibre stable des points matériels qu'on n'en a pas trop écartés. Et l'on conçoit même, vu l'absence d'une autre forme stable autour de laquelle une onde puisse osciller, que toute intumescence susceptible, par son volume positif et modéré, de former une onde solitaire assez peu haute pour ne pas déferler prenne au bout d'un certain temps cette forme. Ainsi s'explique la facilité avec laquelle on produit des ondes solitaires.

§ VI. — *Examen des cas où l'intumescence n'est pas une onde solitaire.*

Mais lorsque l'intumescence est ou positive, et d'un volume considérable, ou négative, il n'existe plus de forme stable qu'elle puisse prendre. La formule (34), qui fournit à chaque instant la vitesse de propagation de ses diverses parties, permet de prévoir la plupart des circonstances qui se présentent alors.

Examinons d'abord le cas où l'intumescence est positive et sans fin, comme il arrive quand on verse continuellement du liquide à l'entrée d'un canal horizontal de longueur indéfinie, ou encore quand l'entrée d'un tel canal est constituée par un piston que l'on pousse en avant

d'une manière continue. Si l'on admet, pour simplifier, que l'effusion du fluide ou le mouvement du piston soient uniformes, il est évident qu'on verra une lame liquide, dont la hauteur sera bientôt sensiblement constante, s'avancer progressivement sur l'eau tranquille du canal, et que la vitesse de propagation de cette lame, multipliée par sa hauteur, sera l'expression du volume liquide projeté du dehors ou refoulé par le piston dans l'unité de temps et par unité de largeur du canal. La courbure de cette même lame étant très-petite, abstraction faite des phénomènes exceptionnels que peut présenter sa tête, la dérivée seconde de  $h$  en  $x$  sera négligeable, et la formule (34) donnera la loi expérimentale trouvée par M. Bazin

$$(73) \quad \omega^2 = g(H + \frac{3}{2}h).$$

Cette loi résulterait encore de la relation (48), car la hauteur  $\eta$  du centre de gravité de la lame au-dessus de la surface libre primitive est évidemment égale à  $\frac{1}{2}h$ .

Le théorème relatif aux quantités de mouvement permet d'établir que la formule (73) est indépendante des frottements *intérieurs* du fluide, pourvu que l'onde conserve sensiblement la même forme pendant un certain temps. Considérons en effet le volume liquide compris à l'époque  $t$  entre deux sections normales, l'une de hauteur  $H$  et menée en avant de l'onde, l'autre de hauteur  $H + h$ , menée en un point du canal où la courbure de la surface soit insensible et où, les forces centrifuges étant par suite négligeables, la pression soit à fort peu près soumise à la loi hydrostatique : les actions exercées sur ce volume suivant l'axe du canal se réduisent, si les frottements du fond et des parois sont négligeables, à la pression  $\frac{1}{2}\rho g(H + h)^2$  exercée sur la seconde des deux sections considérées, et à celle de sens contraire  $-\frac{1}{2}\rho gH^2$  exercée sur la première; le produit de leur somme par un élément de temps  $dt$  doit égaler l'augmentation de la quantité de mouvement suivant les  $x$  de ce même volume. Cette augmentation est égale à l'accroissement, pendant l'instant  $dt$ , de la quantité de mouvement possédée, suivant les  $x$ , par la matière qui se trouve au delà de la seconde section, moins celle que possède le liquide, étranger au volume considéré, qui a traversé cette section pendant l'instant  $dt$ . Si  $U$  désigne la vitesse

commune des molécules qui traversent la section, la première de ces quantités est  $\rho U(H + h)\omega dt$ , à cause de la progression  $\omega dt$  de l'onde, dont la forme n'est pas supposée changer notablement, et la seconde est évidemment  $\rho U(H + h)U dt$ . On a donc l'égalité

$$\frac{1}{2}\rho g(H + h)^2 - \frac{1}{2}\rho gH^2 = \rho U(H + h)\omega - \rho U(H + h)U,$$

ou bien

$$(74) \quad gh\left(H + \frac{h}{2}\right) = (\omega - U)U(H + h).$$

D'autre part, le volume fluide  $(H + h)U dt$  qui traverse une section dans le temps  $dt$  est évidemment le même que celui  $h\omega dt$  qui, au bout de ce même temps, se trouve de plus au delà de cette section en vertu du mouvement de progression de l'onde. On a donc

$$(75) \quad (H + h)U = h\omega.$$

Si l'on tire  $U$  de (75) pour en porter la valeur dans (74), il vient

$$(76) \quad \omega^2 = g\left(H + \frac{3}{2}h + \frac{h^2}{2H}\right) \quad [*],$$

---

[\*] Cette relation se trouve déjà établie, et de la même manière, dans un article de M. de Saint-Venant inséré aux *Comptes rendus* (t. LXXI, 18 juillet 1870). Elle y est même étendue au cas où le canal, toujours prismatique, aurait pour section toute autre figure qu'un rectangle à base horizontale. En appelant alors  $H$  la profondeur moyenne primitive, c'est-à-dire le quotient de la section normale primitive par la largeur  $L$  à fleur d'eau, et supposant cette largeur sensiblement constante d'un bout à l'autre de l'intumescence, de manière que la seconde des sections considérées ci-dessus vaille  $HL + hL$ , la pression appliquée à la partie inférieure  $HL$  de cette section, en outre de celle qui s'y trouverait exercée si l'on avait  $h = 0$ , a pour expression  $(\rho gh)HL$ , et la pression appliquée à la partie supérieure  $hL$  vaut  $\frac{1}{2}\rho gh^2L$ . Si l'on égale le produit par  $dt$  de cet excédant total de pression à la quantité de mouvement gagnée pendant l'instant  $dt$  par le liquide qui, au commencement de cet instant, se trouve au delà de la même section, quantité dont l'expression est encore  $\rho U(H + h)L(\omega - U)dt$ , il vient la relation (74). Celle-ci, combinée avec la condition d'incompressibilité, qui est toujours (75), donne donc, pour  $\omega^2$ , la même formule (76) que dans le cas d'un canal rectangulaire.

formule qui se réduit à (73) quand le rapport de  $h$  à  $H$  est très-petit.

Voyons actuellement ce qui doit se passer à la tête de l'intumescence. Il est impossible que la hauteur  $y$  reste simplement égale à celle de la lame qui suit; car, le sommet de la partie antérieure de l'onde étant forcément convexe, la courbure  $\frac{d^2h}{dx^2}y$  est négative et le dernier terme de la formule (34)  $y$  rend, à hauteur pareille, la vitesse de propagation moindre que celle de la lame qui suit. Celle-ci, se propageant plus vite, inondera donc la partie antérieure de l'onde, de manière à l'exhausser jusqu'à ce que son excès d'élévation compense dans la formule (34) l'influence du dernier terme négatif. Ainsi se formera ce que M. Bazin a appelé *l'onde initiale*. Sa hauteur devra osciller, comme il l'a reconnu, un peu au-dessus et au-dessous de  $\frac{3}{2}$  de celle de la lame qui suit: en effet, son volume ne cessera d'augmenter que lorsque la vitesse de propagation de son centre de gravité sera sensiblement égale à celle de la lame même; or la forme de cette onde montre que son centre de gravité est environ au tiers de sa hauteur, et d'autre part, la formule (48), qui lui est applicable, donne, pour le carré de sa vitesse de propagation,  $g(H + 3\eta)$ , résultat dont l'égalité au second membre de (73) exige que  $3\eta = \frac{3}{2}h$ . Mais ce n'est pas tout: l'onde initiale ne pourra se raccorder à la lame située à son arrière que par une courbe ayant une partie concave, pour laquelle le dernier terme de (34) sera positif; tant que cette partie se trouvera aussi élevée que la surface de la lame, le dernier terme de la formule (34) rendra sa vitesse de propagation plus grande que la vitesse de propagation de celle-ci, et il se creusera, par suite, un vide entre l'onde initiale et la lame liquide. Mais la concavité ainsi formée restera tout entière située au-dessus de la surface libre primitive; car, si elle s'abaissait à peine au-dessous,  $h$   $y$  serait négatif, la formule (34)  $y$  donnerait  $\omega$  notablement inférieur à la vitesse de propagation des parties suivantes de l'intumescence, et celles-ci, affluant, en exhausseraient sur-le-champ le niveau. La concavité qui suivra l'onde initiale ne pourra de même se raccorder à la lame située à son arrière qu'au moyen d'une partie convexe qui deviendra de même, à cause de sa vitesse de propagation moindre que celle de la lame, plus haute que celle-ci. En continuant

le même raisonnement, on voit que l'onde initiale sera suivie de convexités plus élevées que la lame liquide qui suit et de concavités moins élevées que cette même lame, mais tout entières situées au-dessus de la surface libre primitive. Ces convexités et concavités auront des hauteurs décroissantes de l'une à l'autre et bientôt insensibles, à cause sans doute des frottements intérieurs du fluide. D'après ce qui précède, la forme de l'onde n'aura acquis un peu de stabilité que lorsque toutes les parties plus hautes que la lame placée à l'arrière seront convexes, et toutes les parties plus basses concaves, de manière que les points d'inflexion du profil longitudinal soient à peu près sur le prolongement de la surface libre de cette lame.

Quand une intumescence positive, sans être indéfinie, a une grande longueur, la partie moyenne de sa crête est forcément peu convexe, et, d'après la formule (34), se propage plus vite que la partie postérieure de la même crête, partie presque aussi élevée que la précédente, mais d'une convexité bien plus grande. Donc la queue de l'onde tend à se détacher du corps et à former une onde distincte. Le même morcellement continuant, l'intumescence se résoudra en un certain nombre d'ondes solitaires. Ce phénomène a été observé par Scott Russell, qui a même reconnu qu'il s'y forme parfois des ondes négatives, provenant sans doute de dépressions difficiles à éviter à la suite d'une grosse intumescence.

Occupons-nous enfin des ondes négatives, et d'abord de celles qui sont limitées. Leur profil longitudinal le plus simple est composé, peu de temps après leur formation, d'une partie concave plus ou moins profonde, se raccordant en avant et en arrière avec la surface libre primitive par l'intermédiaire de deux arcs convexes. Tant que cette forme n'est pas trop altérée, le centre de gravité général de l'onde se trouve environ au tiers de sa profondeur, et le carré de la vitesse de propagation de ce centre est sensiblement égal, d'après la formule (48), au produit du nombre  $g$  par la distance qu'il y a du fond du canal au point le plus bas de la surface libre : c'est bien la loi que les expériences de M. Bazin ont à peu près vérifiée. Mais la forme simple donnée d'abord à la surface libre ne tarde pas à s'altérer : la formule (34) montre en effet que,  $h$  étant négatif, les parties concaves pour lesquelles la dérivée seconde de  $h$  en  $x$  est  $> 0$ , se propagent, à hauteur égale,

moins vite que les parties convexes, et que d'autre part, à égalité du rapport de cette dérivée à  $h$ , les parties les plus basses de l'onde sont celles qui se propagent avec le moins de célérité. Donc, la tête de la dépression étant plus haute que le corps et se trouvant en même temps convexe, tandis que le corps est concave, se propagera plus vite et s'allongera ainsi de plus en plus en s'aplatissant. La queue, au contraire, allant, pour la même raison, plus vite que le corps, se raccourcira sans cesse tant qu'il y restera, au-dessous de la surface libre primitive, une partie convexe; un tel raccourcissement ne pouvant être indéfini et, d'autre part, une partie convexe étant absolument nécessaire pour le raccordement de l'onde avec la surface libre horizontale qui existe à son arrière, cette partie convexe finira par s'élever tout entière au-dessus de la surface libre primitive: alors,  $h$  y étant positif, le dernier terme de la formule (34), devenu négatif, pourra surpasser l'avant-dernier en valeur absolue, d'une quantité telle que le second membre de cette formule n'y soit pas plus grand qu'aux points les plus bas de la dépression. Mais l'onde positive ainsi produite à la suite de l'onde négative donnée aura forcément à son arrière, pour se raccorder avec la surface libre primitive, une partie concave qui ne pourra pas subsister et qui n'aurait pas même pu se former, si sa vitesse de propagation est supérieure à celle de l'onde précédente; la vitesse de propagation de cette partie concave devant être ainsi plus petite que  $\sqrt{gH}$ , le second membre de (34) montre qu'il faut absolument qu'on y ait  $h < 0$ , ou que l'onde positive, toute convexe, soit suivie d'une onde négative. En appliquant à celle-ci le raisonnement fait sur la première, on voit qu'il se formera nécessairement, à la suite de l'onde négative donnée, une infinité d'autres ondes, alternativement positives et négatives, c'est-à-dire respectivement situées les premières au-dessus et les secondes au-dessous de la surface libre initiale, et qui seront, les unes entièrement convexes, les autres entièrement concaves, de manière que les points d'inflexion du profil longitudinal se trouvent sensiblement sur le prolongement de cette surface libre primitive. Les ondes auront une énergie décroissante de l'une à l'autre, sans quoi l'intégrale  $\int_{-\infty}^{\infty} h^2 dx$ , dont le produit par  $\rho g$  est la somme de ces énergies, ne serait pas finie et constante comme on a vu au § III qu'elle l'est.

La tête d'une onde négative, s'allongeant sans cesse, finit par n'avoir plus une courbure appréciable, et aussi par être d'une longueur telle qu'on puisse l'assimiler à une onde négative indéfinie. Une dépression sans fin, telle que sa profondeur croisse de plus en plus à mesure qu'on s'éloigne de sa tête, est donc le seul genre d'intumescences dont toutes les parties puissent n'avoir que des courbures négligeables. Ce cas mérite un examen particulier; car la formule (34) s'y trouve réduite, par l'hypothèse consistant à supposer insensible la dérivée seconde de  $h$  en  $x$ , à la forme simple

$$(77) \quad \omega = \sqrt{gH} \left( 1 + \frac{3h}{4H} \right),$$

circonstance qui rend intégrable l'équation aux dérivées partielles (29) de la surface libre. Il résulte en effet de (77) qu'on peut écrire

$$(78) \quad h\omega = 2\sqrt{g} \left[ (H+h)^{\frac{3}{2}} - (H+h)\sqrt{H} \right],$$

comme on le reconnaît en développant le second membre de (78) suivant les puissances croissantes de  $h$ , jusqu'à celle du second degré; l'équation (29) devient par suite

$$(79) \quad \frac{dh}{dt} + [3\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}] \frac{dh}{dx} = 0,$$

dont l'intégrale est, avec une fonction arbitraire  $f(h)$ ,

$$(80) \quad x - [3\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}] t = f(h).$$

Cette équation exprime que,  $h$  ne variant pas, les accroissements de  $x$  sont égaux à ceux de  $t$  multipliés par  $3\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}$ , ou que la surface libre change d'un instant à l'autre de manière que chacune de ses ordonnées  $H+h$  se transporte, dans le sens de la propagation de l'onde et en conservant sa grandeur, avec une vitesse égale à la racine carrée du nombre  $g$ , multipliée par l'excès du triple de la racine carrée de l'ordonnée considérée sur le double de celle de la profondeur primitive.

La fonction arbitraire  $f(h)$  se déterminera de deux manières différentes, suivant que le canal sera indéfini dans les deux sens ou indéfini seulement dans un sens. Dans le premier cas, on donnera généralement, pour  $t = 0$ ,  $h$  en fonction de  $x$ , et par suite  $x$  sera, pour  $t = 0$ , la fonction inverse de  $h$ , fonction justement égale, d'après (80), à  $f(h)$ . Dans le second cas, je supposerai le canal en communication avec un bassin de dimensions très-grandes où le niveau du liquide variera d'un instant à l'autre d'après une loi donnée, comme il arrive pour un canal qui débouche dans l'Océan : on aura donc, pour  $x = 0$ ,  $h =$  une fonction connue de  $t$ , ou  $t =$  la fonction inverse de  $h$ , fonction qui, multipliée par  $3\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}$ , vaudra justement, d'après (80),  $f(h)$  changée de signe.

Nous avons vu plusieurs fois, et en particulier ci-dessus (75), que la vitesse moyenne  $U$  est égale au quotient de  $h\omega$  par  $H+h$ . La formule (78) donnera donc, sauf erreur très-petite par rapport à  $h^2$ ,

$$(81) \quad U = 2\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}.$$

Cette loi et celle que contient la formule (80) ont été trouvées par M. de Saint-Venant[\*], pour le cas où le rapport de  $h$  à  $H$  n'est pas petit et où l'on suppose toujours négligeable la courbure de la surface libre, mais en admettant que  $U$  ne varie d'une section à l'autre et d'un instant à l'autre qu'en fonction de  $h$ .

Les formules de (77) à (81) sont aussi applicables, dans une intumescence positive continue, à toute la partie qui vient à la suite des renflements initiaux, et dont la hauteur  $h$  est lentement variable d'un point à l'autre[\*\*]. Mais il faut observer qu'elles tombent en défaut

[\*] Voir la fin de l'introduction du Mémoire actuel.

[\*\*] Si on veut les appliquer à un canal horizontal de longueur infinie et dont l'entrée est en communication avec l'Océan, on aura sensiblement

$$(82) \quad H+h = a \left( 1 + \alpha \sin \frac{2\pi t}{T} \right) \quad (\text{pour } x = 0),$$

$a, \alpha, T$ , quantités connues, désignant respectivement l'élévation du niveau moyen de la mer au-dessus du fond du canal, le rapport (supposé petit) à cette élévation de la demi-hauteur d'une marée et l'intervalle de temps qui sépare deux marées consé-

chaque fois que la courbure de la surface libre devient sensible : or cela finit toujours par arriver à la tête de l'onde ; car la relation (80) donne la plus grande vitesse de translation aux ordonnées les plus hautes et tend à porter ces ordonnées tout à fait en avant de l'onde, de manière à faire que sa crête antérieure soit à pic et d'une courbure infinie.

tives. De cette relation (82) il résulte une valeur de  $t$  qui, portée dans la formule (80) spécifiée pour  $x = 0$ , donne

$$(83) \quad -f(h) = [3\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}] \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{H+h-a}{a\alpha},$$

et l'équation (80) de la surface libre devient elle-même

$$(84) \quad x = [3\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}] \left( t - \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{H+h-a}{a\alpha} \right).$$

Au bout d'un certain temps, l'état du canal est évidemment réglé de telle manière, que le volume fluide total,  $\int_0^T U(H+h)dt$ , qui y pénètre pendant la durée d'une période, est égal à zéro. On aura donc, pour déterminer  $H$ ,

$$\int_0^T U(H+h)dt = 0 \quad (\text{pour } x=0),$$

formule que les relations (81) et (82) changent en celle-ci

$$(85) \quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{\frac{H}{a}} &= \int_0^T \left( 1 + \alpha \sin \frac{2\pi t}{T} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{dt}{T} \\ &= \int_0^T \left( 1 + \frac{3}{2} \alpha \sin \frac{2\pi t}{T} + \frac{3}{8} \alpha^2 \sin^2 \frac{2\pi t}{T} - \frac{1}{16} \alpha^3 \sin^3 \frac{2\pi t}{T} - \dots \right) \frac{dt}{T}. \end{aligned} \right.$$

Négligeons les puissances de  $\alpha^2$  supérieures à la première [car la formule (81) n'a été démontrée exacte que jusqu'aux quantités de cet ordre], et il vient

$$(86) \quad \sqrt{\frac{H}{a}} = 1 + \frac{3}{16} \alpha^2, \quad \text{ou} \quad H = a \left( 1 + \frac{3}{8} \alpha^2 \right).$$

Le niveau moyen de la mer doit donc être un peu plus bas (de la quantité  $H - a = \frac{3}{8} a \alpha^2$ ) que celui de la surface libre dans les parties du canal, éloignées de l'embouchure, où les oscillations des marées ne se font plus guère sentir et où par conséquent la profondeur reste sensiblement égale à  $H$ .

