JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE MATHIEU

Sur la publication d'un cours de Physique mathématique professé à Paris en 1867 et 1868

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 17 (1872), p. 418-421.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1872_2_17__418_0>

Sur la publication d'un cours de Physique mathématique professé à Paris en 1867 *et* 1868;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

L'Ouvrage que je publie en ce moment a en vue les méthodes d'intégration en Physique mathématique, et je me propose d'indiquer en quelques mots en quoi il consiste.

Les intégrations des équations aux différences partielles de la Physique présentent un caractère particulier qui les distingue des intégrations que l'on rencontre dans les autres branches des Mathématiques. En général, les fonctions que l'on y cherche satisfont non-seulement à ces équations dans l'intérieur d'une surface, mais elles satisfont, de plus, sur cette surface à de certaines équations que l'on appelle les *conditions aux limites*.

Il y a bien une partie de la Mécanique, l'Hydrodynamique, à laquelle se rapporterait ce genre d'intégration; mais presque toutes les questions de cette théorie sont tellement compliquées, qu'il est presque impossible de les résoudre complétement par une analyse rigoureuse.

Après avoir bien précisé la forme analytique d'un problème de Physique mathématique, il est évident que l'on pourrait à ce problème substituer une question d'analyse pure; mais il convient de remarquer qu'on lui ôterait par là presque toujours de son intérêt et de sa clarté: c'est ce que nous ferons facilement comprendre par des exemples. Prenons d'abord le problème de la corde vibrante. On peut intégrer son équation par les fonctions arbitraires, comme le fit d'abord d'Alembert; alors, si l'on se reporte à la question physique, il est évident qu'on ne pourra déterminer les deux fonctions arbitraires qu'en se donnant le déplacement et la vitesse de chaque point de la corde à l'instant initial; enfin on comprend que ces deux conditions ne sont pas encore suffisantes pour la détermination complète de ces fonctions, et qu'il est nécessaire de se servir de la fixité des extrémités de la corde. Il y a aussi de ce problème une autre solution, et qui rend bien mieux compte du phénomène étudié : c'est la solution exprimée par la série trigonométrique de Daniel Bernoulli. En effet, le premier terme de cette série donne le son fondamental rendu par la corde, et les termes suivants donnent les différents harmoniques qui l'accompagnent.

Comme second exemple, prenons une des questions les plus simples de la théorie de la chaleur, et imaginons qu'on veuille trouver la température d'équilibre d'un corps dont on entretient les différents points de la surface à des températures données. Il est tout de suite évident que le problème est entièrement déterminé. Si l'on observe que la température et que les flux de chaleur à l'intérieur du corps sont des fonctions continues, ce problème revient à cette question d'analyse : On demande une fonction V qui soit continue dans l'intérieur d'une surface, ainsi que ses dérivées du premier ordre, qui satisfasse à l'équation aux différences partielles $\Delta V = o$ dans l'intérieur de cette surface, et qui ait sur cette surface même des valeurs données. Mais alors ce n'est plus que par une analyse difficile que l'on reconnaît que le problème est entièrement déterminé.

Voici encore un point que je tiens à faire remarquer :

Presque tous les problèmes de Physique mathématique se résolvent à l'aide de séries, et chacune de ces solutions donne, en général, une formule pour la représentation des fonctions arbitraires d'une, de deux ou de trois variables au moyen d'une série qui est convergente dans des limites indiquées par la question. Ainsi, par exemple, la formule du mouvement vibratoire d'une membrane d'une forme déterminée donne immédiatement la représentation d'une fonction arbitraire de deux variables par une série double qui est convergente dans l'étendue marquée par les limites de la membrane.

Parmi toutes ces séries, les géomètres qui se livrent surtout aux Mathématiques pures n'ont considéré que les séries de sinus et de cosinus qui procèdent suivant des arcs multiples, et la série des Y_n de Laplace; mais ce qu'il faut bien remarquer, c'est que ces séries ne correspondent qu'à un premier pas fait dans la Physique mathématique, et les démonstrations que l'on a données pour prouver que ces séries peuvent représenter une fonction donnée arbitrairement et sont convergentes ne sont pas susceptibles d'être étendues aux séries dont nous parlons.

Les premières recherches d'intégration en Physique mathématique ont été faites pour la corde vibrante, dont la théorie a été étudiée par d'Alembert, Euler, Taylor, Daniel Bernoulli et Lagrange. Les recherches que l'on doit citer ensuite sont celles de Laplace sur l'attraction des sphéroïdes; puis viennent les travaux de Poisson et de Fourier : la plupart des résultats obtenus par Fourier ont été réunis par lui dans sa *Théorie analytique de la chaleur*. Enfin nous mentionnerons les ouvrages remarquables publiés par Lamé dans ces vingt dernières années.

J'ai voulu, dans mon Traité, revenir sur les premières questions étudiées; car non-seulement Lamé a laissé entièrement de côté l'historique dans ses livres, mais il n'y a pas remis en lumière tous les résultats de ses prédécesseurs.

J'ai exposé la substance principale du livre que je publie dans un Cours complémentaire de la Sorbonne; mais, en publiant ce Cours, j'ai dû y faire des additions et des modifications qui l'ont considérablement amélioré. Je vais indiquer d'une manière très-succincte la matière de chaque Chapitre.

Le Chapitre I renferme la théorie de la corde vibrante et les premières recherches de Fourier sur la théorie de la chaleur.

Le Chapitre II traite des surfaces isothermes et des coordonnées curvilignes; j'y ai mis sur ces théories de Lamé tout ce qui était nécessaire à mon sujet. Ce Chapitre se termine par un article que j'ai publié autrefois sur l'écoulement des liquides dans les tubes capillaires.

Le Chapitre III se rapporte à l'équilibre de température des cylindres; cette question a été traitée par Lamé, mais elle exigeait des améliorations. Je montre, comme je l'ai déjà fait dans ce *Journal* (t. XIV, 1869) [*], que les équations aux différences partielles de la

---

[*] *Mémoire sur le mouvement de la température dans le corps renfermé entre deux cylindres circulaires excentriques et dans les cylindres lemniscatiques.*

Physique, mises en coordonnées curvilignes, peuvent cesser d'avoir lieu sur certaines lignes ou certaines surfaces, et que, si l'on n'y prenait attention, les résultats des intégrations seraient entièrement faux.

Dans le Chapitre IV, on trouve les recherches de Sturm sur les équations différentielles linéaires du second ordre publiées dans le premier volume de ce *Journal* (1re série).

Dans le Chapitre V, j'ai exposé la théorie du mouvement vibratoire des membranes; on y doit remarquer principalement la théorie de la membrane de forme elliptique, que j'ai publiée d'abord dans ce *Journal* (t. XIII, 1868).

Le Chapitre VI contient les recherches de Laplace et de Poisson sur la distribution de la chaleur dans une sphère.

Le Chapitre VII est relatif à la distribution de la chaleur dans un milieu indéfini et aux températures du globe terrestre. Je résous le problème le plus général de ce Chapitre par des formules plus simples que celles qu'avait données Poisson.

Dans le Chapitre VIII, j'examine l'équilibre de température de l'ellipsoïde; ce problème a été entièrement résolu par Lamé, mais l'exposition qu'il en a donnée était susceptible de simplifications, qui m'étaient indiquées, d'une part, par les réflexions générales auxquelles m'avait conduit le sujet du Livre et, d'autre part, par les recherches de Jacobi et de M. Liouville sur les coordonnées elliptiques.

Le Chapitre IX, sur le refroidissement d'un ellipsoïde planétaire, m'appartient entièrement. La méthode que j'emploie pourrait facilement être étendue à un ellipsoïde à trois axes inégaux.