JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. MANNHEIM

Sur la surface gauche, lieu des normales principales de deux courbes

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 17 (1872), p. 406-417.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1872_2_17__406_0>

Sur la surface gauche, lieu des normales principales de deux courbes;

PAR M. A. MANNHEIM.

« Sur la surface gauche formée par l'ensemble des rayons de cour-
» bure d'une courbe donnée, peut-on tracer une seconde courbe dont
» les génératrices de la surface soient aussi des rayons de courbure? »

Cette question fut proposée aux géomètres par M. de Saint-Venant dans son *Mémoire sur les lignes courbes non planes* [*].

M. Bertrand y a répondu le premier [**], en donnant la relation qui doit exister entre les deux rayons de courbure d'une courbe pour que les normales principales de cette courbe soient en même temps normales principales d'une autre courbe.

Dans le travail actuel, j'établis très-simplement et géométriquement la relation due à M. Bertrand, en faisant usage de la *droite auxiliaire* dont j'ai donné la construction et les propriétés dans mon *Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies* [***].

En outre, après avoir démontré une propriété de la surface gauche dont les génératrices sont les normales principales de deux courbes, j'étends à cette surface toutes les propriétés dont jouit un pinceau quelconque de droites.

J'arrive ainsi à des résultats nouveaux qui ne rappellent à l'esprit rien d'analogue : c'est que la marche suivie pour les obtenir n'est elle-même analogue en rien aux procédés jusqu'ici employés pour la démonstration des vérités géométriques.

---

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, 30e cahier.
[**] *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XV, p. 332.
[***] *Id.*, 2e série, t. XVII, p. 109.

Désignons par (o) une courbe gauche, par o un point de cette courbe, par G la normale principale en ce point et par (G) la surface gauche formée par les normales principales de (o).

La courbe (o) est une trajectoire orthogonale des génératrices de (G), et, comme son plan osculateur au point quelconque o est tangent à (G), nous voyons que :

Théorème I. — *Une courbe quelconque est une ligne asymptotique qui rencontre à angle droit les génératrices de la surface formée par ses normales principales.*

Réciproquement :

Théorème II. — *Lorsque la trajectoire orthogonale des génératrices d'une surface gauche* (G) *est une ligne asymptotique de cette surface, elle a pour normales principales les génératrices de* (G).

La question posée par M. de Saint-Venant équivaut donc à celle-ci :

Problème I. — *Dans quel cas peut-on tracer sur une surface gauche deux lignes asymptotiques, trajectoires orthogonales des génératrices de cette surface?*

Je dis d'abord que :

Théorème III. — *S'il y a plus de deux lignes asymptotiques d'une surface gauche qui rencontrent à angle droit une génératrice de cette surface, il y en a une infinité.*

Appelons toujours (G) la surface gauche et G une génératrice de cette surface. Les asymptotes des indicatrices de (G) pour les différents points de G appartiennent à un hyperboloïde : hyperboloïde osculateur de (G) le long de G. Sur cet hyperboloïde il n'y a que deux génératrices de l'un des systèmes qui rencontrent à angle droit une génératrice de l'autre système.

On voit ainsi que, généralement, il y a deux lignes asymptotiques de (G) qui rencontrent G à angle droit.

S'il y en a plus de deux, c'est que, au lieu d'un hyperboloïde osculateur, il y a un paraboloïde osculateur, et alors toutes les lignes asymptotiques de la surface gauche rencontrent G à angle droit.

Revenons maintenant à la question précédemment posée et d'abord modifions-en l'énoncé.

Menons par les différents points d'une courbe (o) des plans respectivement perpendiculaires aux normales principales de cette courbe. Ces plans enveloppent une surface développable (T) qui est la surface rectifiante de (o).

Les plans osculateurs de (o) étant normaux à cette développable, la courbe (o) est une ligne géodésique de la surface (T). Ainsi :

Théorème IV. — *La surface* (G), *lieu des normales principales d'une courbe* (o), *est, relativement à la surface rectifiante de cette courbe, une normalie dont la directrice est une géodésique de cette surface rectifiante.*

Réciproquement :

Théorème V. — *Si l'on prend une géodésique pour directrice d'une normalie à une surface, cette courbe est une asymptotique de cette normalie.*

Toute surface parallèle à (T) coupera cette normalie suivant une trajectoire orthogonale des génératrices de cette surface; et, pour que cette ligne soit une asymptotique de cette normalie, il faut qu'elle soit une géodésique de la surface parallèle qui la détermine.

Notre question revient donc à celle-ci :

Problème II. — *Étant données une surface développable* (T) *et une normalie à cette surface dont la directrice est une géodésique* (o) *de* (T), *dans quel cas pourra-t-on déterminer une surface* (T′) *parallèle à* (T) *qui soit coupée aussi par cette normalie suivant une géodésique?*

Appelons (a) la courbe d'intersection de (T′) et de la normalie, et supposons que cette courbe soit une géodésique sur (T′). Alors la transformée de cette courbe après le développement de (T′) sera une ligne droite. (T) et (T′), étant des surfaces parallèles, ont leurs génératrices parallèles entre elles. Après le développement de ces surfaces, ces génératrices parallèles deviennent les tangentes aux transformées des arêtes de rebroussement de (T) et (T′), et toutes ces tangentes peuvent être placées de manière à être respectivement parallèles entre elles. Ces tangentes, ainsi correspondantes, sont coupées par les droites transformées de (o) et de (a) sous des angles dont la différence est égale à l'angle que ces droites font entre elles. Par suite, les courbes (o) et (a) elles-mêmes rencontrent les génératrices de (T) et (T′)

sous des angles dont la différence est constante, ou, ce qui revient au même, aux points o et a, où les courbes (o) et (a) rencontrent une même génératrice de la normalie, les tangentes à ces courbes comprennent entre elles un angle qui est le même, quelle que soit la génératrice considérée.

Mais cet angle mesure l'angle que font entre eux les plans tangents en o et a à la normalie, et, comme ces plans tangents ne sont autres que les plans osculateurs des courbes (o) et (a), nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème VI. — *Lorsque deux courbes admettent les mêmes normales principales, les plans osculateurs de ces courbes aux points où elles rencontrent une même normale font entre eux un angle qui est le même, quelle que soit cette normale* [*].

Reprenons les courbes (o) et (a) ayant les mêmes normales principales. Appelons toujours (G) la surface formée par ces normales, G une génératrice de cette surface, o et a les points de rencontre de cette droite avec les deux courbes (o) et (a), G′ une autre génératrice de (G), i et j les points de rencontre de cette droite avec les courbes (o) et (a). Nous savons que (G) est, par rapport à (T), une normalie dont la directrice est une géodésique de (T).

Amenons la génératrice G′ en coïncidence avec G, le point i venant en o, et le plan tangent en i à (G) coïncidant avec le plan tangent en o à cette même surface. Alors le point j vient en a et le plan tangent en j coïncide avec le plan tangent en a.

Amenons ainsi en coïncidence avec G toutes les génératrices de (G), et entraînons en même temps que ces génératrices, et avec chacune de ces droites, un élément infiniment petit de la surface (G).

Ces éléments infiniment petits, réunis de cette façon, constituent les *surfaces élémentaires* d'un pinceau dont G est un rayon, o et a les *foyers* de ce rayon, et dont les plans tangents en ces points sont les *plans focaux*.

---

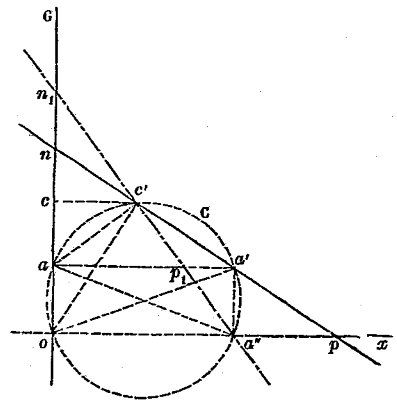
[*] Voir *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure*, par P. Serret, p. 109, et *Journal de Mathématiques*, 2e série, t. I, p. 223.

Étudions ce pinceau au moyen des droites auxiliaires relatives à ces surfaces élémentaires.

Prenons o pour origine, et traçons sur un plan quelconque mené par G la droite auxiliaire de l'une des surfaces élémentaires.

Pour cela, élevons dans ce plan la perpendiculaire aa' à G (*fig.* 1); menons du point o la droite oa' faisant avec la perpendiculaire ox à G

Fig. 1.



l'angle α, que les plans tangents en o et a font entre eux : une droite np, qui contient a', peut être considérée comme la droite auxiliaire d'une des surfaces élémentaires du pinceau.

Si, par exemple, cette surface élémentaire provient de l'élément infiniment petit de (G) le long de G$'$, alors on est le rayon de première courbure ρ de (o) pour le point de rencontre i de G$'$ et de (o), op est le rayon de seconde courbure r de (o) pour le même point i.

Le pied c' de la perpendiculaire oc' abaissée de o sur np se projette sur G au point c : ce point c est ce que devient le point central de (G) sur G$'$ lorsque G$'$ coïncide avec G. Enfin l'inclinaison de oc' sur ox est l'angle φ que le plan central pour la génératrice G$'$ fait avec le plan tangent en i à (G).

Les triangles pon et $a'an$ sont semblables; ils donnent

$$\frac{op}{on} = \frac{aa'}{an}$$

ou, en désignant simplement par a la distance focale oa,

$$\frac{r}{\rho} = \frac{\frac{a}{\tang\alpha}}{\rho - a},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\frac{a}{\tang\alpha}}{r} + \frac{a}{\rho} = 1. \tag{1}$$

Telle est la relation qui existe entre les rayons de courbure de (o), dont les normales principales sont les normales principales d'une autre courbe (a).

La relation (1) peut s'écrire

$$\rho = a + \frac{a}{\tang\alpha}\frac{\rho}{r};$$

mais $\frac{r}{\rho}$ est égal, comme on le voit sur la figure, à la tangente de l'angle φ, et, comme le plan central contient la génératrice de la développable (T), φ est l'angle que fait avec cette génératrice la tangente à la courbe (o). La dernière relation, que l'on peut écrire

$$\rho = a + \frac{a}{\tang\alpha}\cot\varphi,$$

établit donc la liaison qui existe entre les rayons de courbure d'une géodésique tracée sur une développable et les angles sous lesquels cette courbe rencontre les génératrices de cette surface lorsque les normales principales de cette courbe sont les normales principales d'une autre courbe.

Nous avons dit que on et op étaient le rayon de première et de seconde courbure de (o); il est facile de construire les rayons de courbure de (a). Il suffit, pour cela, de construire la droite auxiliaire de la surface élémentaire considérée précédemment en prenant le point a pour origine : on élève au point c' une perpendiculaire à la droite ac'. On obtient ainsi la nouvelle droite auxiliaire $n_1 p_1$. Le segment an_1 est le rayon de première courbure ρ_1 de la courbe (a), et le segment ap_1 est le rayon de seconde courbure de la même courbe.

Problème III. — *Cherchons maintenant quelles relations il y a entre les rayons de courbure des courbes (o) et (a) qui ont les mêmes normales principales.*

Prolongeons la droite $n_1 p_1$ jusqu'au point a'' où elle rencontre ox : la droite $a'a''$ est perpendiculaire à ox; les triangles $ap_1 a''$ et $oa'p$ sont semblables. Ils donnent

$$\frac{ap_1}{aa''} = \frac{oa'}{op} \quad \text{ou} \quad \frac{r_1}{\frac{a}{\sin\alpha}} = \frac{\frac{a}{\sin\alpha}}{r},$$

que l'on peut écrire

$$(2) \qquad rr_1 = \frac{a^2}{\sin^2\alpha}.$$

Telle est la relation fort simple qui existe entre les rayons de seconde courbure des courbes (o) et (a).

On peut énoncer ainsi ce résultat :

Théorème VII. — *Le produit des rayons de seconde courbure de deux courbes qui ont les mêmes normales principales pour les points situés sur une même normale est constant, quelle que soit cette normale.*

La figure que nous employons peut s'appliquer à un élément quelconque de (G). Quel que soit cet élément, la droite auxiliaire correspondante, en prenant le point o pour origine, sera une droite passant par le point a'.

Il résulte de là que les points tels que c' appartiennent à la circonférence C qui passe par les points o, a, a', a''.

Les droites auxiliaires relatives au même élément infiniment petit de (G), lorsqu'on prend le point o ou le point a pour origine, passent toujours par le point a' ou par le point a'', et elles se coupent sur la circonférence C.

On aura donc pour les différents éléments de (G) des droites telles que $c'a'$, $c'a''$, qui, jointes aux deux droites $c'a$, $c'o$, formeront un faisceau de quatre droites donnant toujours lieu au même rapport anharmonique.

Les droites de ce faisceau coupent G aux quatre points o, a, n, n_1

donnant lieu à un rapport anharmonique qui sera alors aussi le même pour les différentes génératrices de (G); mais n et n_1 sont des centres de courbure de (o) et de (a). Nous pouvons donc dire :

Théorème VIII. — *Les points où deux courbes ayant les mêmes normales principales rencontrent une de leurs normales et les centres de courbure de ces courbes situés sur cette normale déterminent quatre points dont le rapport anharmonique est constant, quelle que soit la normale considérée.*

Ce théorème exprime sous une forme particulière la relation qui existe entre les rayons de première courbure ρ et ρ_1 des courbes (o) et (a). Nous allons établir directement cette relation.

Nous avons trouvé

$$\frac{\frac{a}{\operatorname{tang}\alpha}}{r}+\frac{a}{\rho}=1;$$

d'où

$$\frac{\frac{a}{\operatorname{tang}\alpha}}{r}=1-\frac{a}{\rho}.$$

On a de même pour la courbe (a)

$$\frac{\frac{a}{\operatorname{tang}\alpha}}{r_1}=1+\frac{a}{\rho_1}.$$

En faisant le produit membre à membre de ces deux relations, il vient

$$\frac{\frac{a^2}{\operatorname{tang}^2\alpha}}{rr_1}=\left(1-\frac{a}{\rho}\right)\left(1+\frac{a}{\rho_1}\right).$$

Remplaçant rr_1 par sa valeur $\frac{a^2}{\sin^2\alpha}$, on a

$$\cos^2\alpha=\left(1-\frac{a}{\rho}\right)\left(1+\frac{a}{\rho_1}\right). \tag{3}$$

Les relations (2) et (3) obtenues directement sur notre figure sont beaucoup plus simples que celles qui avaient été données jusqu'à présent.

La même figure, qui va nous conduire encore à de nombreux résultats, permet d'établir aussi, comme je vais le montrer, une relation qui se trouve dans le Mémoire, déjà cité, de M. Bertrand.

Deux génératrices infiniment voisines G et G_1 de la surface (G) déterminent sur les courbes (o) et (a) des arcs infiniment petits ds, ds_1, qui sont entre eux dans le rapport de oc' à ac' [*].

Mais on voit sur la figure que

$$\frac{1}{oc'^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2},$$

$$\frac{1}{ac'^2} = \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{r_1^2};$$

on a donc la relation

$$\frac{ds}{ds_1} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{r_1^2}}{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}}},$$

qu'il s'agit d'établir.

Reprenons le pinceau dont les surfaces élémentaires ont été obtenues en réunissant toutes les génératrices de (G), ainsi que les éléments infiniment petits le long de ces génératrices.

Les propriétés de la surface (G) vont se déduire immédiatement des propriétés de ce pinceau. Pour les énoncer plus facilement, j'appellerai *projection* d'un point de cette surface sur une génératrice G le point de rencontre avec cette droite de la courbe partant du point et qui coupe orthogonalement les génératrices de (G).

Les théorèmes VII, VIII, IX, X, etc., de mon *Mémoire sur les pinceaux* nous donnent les théorèmes suivants, qui sont entièrement nouveaux :

THÉORÈME IX. — *La surface* (G), *lieu des normales principales de deux courbes* (o), (a), *est telle que ses points centraux pour ses diffé-*

[*] *Voir*, dans mon *Mémoire sur les pinceaux de droites*, la note au bas de la page 148.

rentes génératrices se projettent sur un segment déterminé d'une quelconque de ses génératrices.

Les extrémités de ce segment sont les projections des points centraux, que j'appellerai *points limites*. J'appellerai aussi *distance centrale* la distance d'un point central à la courbe (o).

Cette distance centrale acquiert ses valeurs extrêmes aux points limites.

THÉORÈME X. — *La distance comprise sur une même normale entre les points a et o des courbes (a) et (o) est égale à la différence des distances centrales des points limites multipliés par le sinus de l'angle que font entre eux les plans osculateurs de (a) et (o) aux points a et o.*

THÉORÈME XI. — *Si, dans un plan passant par* G, *on porte, sur des perpendiculaires à cette droite élevées des projections des points centraux de* (G) *et à partir de ces points, des longueurs égales aux paramètres de distribution de* (G) *qui correspondent respectivement à ces points centraux, les extrémités des longueurs ainsi portées sont sur une circonférence de cercle.*

THÉORÈME XII. — *Aux points limites de la surface* (G) *les plans centraux font avec la courbe* (o) *des angles dont la différence est égale à un angle droit.*

Ces plans centraux aux points limites, je les appellerai *plans principaux*.

Prenons l'angle que le plan central en un point central quelconque de (G) fait avec la courbe (o), l'angle analogue pour l'un des plans principaux, et désignons par ω la différence de ces angles.

Désignons par l la *distance centrale* pour le point central que nous considérons, par l_1 et l_2 les distances centrales des *points limites*.

On a

$$l_1 \cos^2 \omega + l_2 \sin^2 \omega = l.$$

Cette relation peut être considérée comme une équation de la ligne de striction de (G) écrite dans un système particulier de coordonnées.

Si nous disons que ω est l'inclinaison d'un plan central sur l'un des plans principaux, alors les coordonnées employées dans l'équation précédente sont la distance centrale pour un point central et l'inclinaison sur l'un des plans principaux du plan central correspondant.

THÉORÈME XIII. — *Lorsque deux points de la ligne de striction de* (G) *ont même distance centrale, les plans centraux qui correspondent à ces points sont également inclinés sur les plans principaux.*

THÉORÈME XIV. — *Le produit des paramètres de distribution de* (G) *relatif aux deux génératrices de cette surface pour lesquelles les points centraux ont même distance centrale est égal au produit des distances de l'un de ces points centraux aux courbes* (a), (o).

THÉORÈME XV. — *Les génératrices de* (G) *pour lesquelles cette surface a même paramètre de distribution ont leurs points centraux respectivement à la même distance des courbes* (a), (o).

Appelons k le paramètre de distribution de (G) pour une génératrice quelconque G, k_1, k_2 les valeurs extrêmes de k, et ψ l'excès de l'angle que le plan central pour G fait avec le plan tangent en o sur l'angle que le plan central relatif à la génératrice dont le paramètre de distribution est maximum fait avec le même plan tangent.

On a

$$k = k_1 \cos^2\psi + k_2 \sin^2\psi.$$

A partir d'un point quelconque b de G, traçons la trajectoire orthogonale (b) des génératrices de (G).

Soit h le point de G pour lequel le plan tangent en ce point à (G) fait avec le plan tangent en b un angle β.

Désignons par h la distance hb du point h à la courbe (b); sur chaque génératrice de G, il y a un point tel que h. On a la relation

$$\frac{1}{h} = \frac{\cos^2\left(\alpha + \dfrac{\dfrac{\pi}{2} - \beta}{2}\right)}{h_1} + \frac{\sin^2\left(\alpha + \dfrac{\dfrac{\pi}{2} - \beta}{2}\right)}{h_2},$$

dans laquelle β est un angle constant, h_1, h_2 sont les valeurs extrêmes de h, et α l'inclinaison du plan tangent en b sur l'un des plans principaux, inclinaison comptée comme nous l'avons dit précédemment.

Dans le cas particulier où l'angle β est droit, on a simplement

$$\frac{1}{h} = \frac{\cos^2\alpha}{h_1} + \frac{\sin^2\alpha}{h_2}.$$

On peut remarquer que h est pour le point b le rayon de courbure géodésique de la courbe (b) qui est tracée sur (G).

Enfin on a le théorème suivant :

Théorème XVI. — *On prend, sur une trajectoire orthogonale* (b) *des génératrices de* (G), *deux points* b_1, b_2, *tels que les plans tangents en ces points fassent avec l'un des plans principaux des angles dont la différence soit égale à un droit. On parcourt sur* (b), *à partir de ces points, des arcs infiniment petits de même longueur; les plans tangents en* b_1 *et* b_2 *à* (G) *tournent alors respectivement d'un certain angle : la somme de ces angles est constante, quelle que soit la position des points* b_1, b_2 *sur* (b).

Si l'on se reporte aux démonstrations que j'ai données des propriétés d'un pinceau quelconque, on aura, par cela même, les démonstrations des théorèmes précédents.

Remarquons en terminant que la Géométrie, à propos d'un sujet déjà souvent étudié, m'a permis d'énoncer un grand nombre de théorèmes absolument nouveaux, et qu'elle indique aussi les éléments que l'on doit considérer dans l'étude des surfaces réglées ainsi que les systèmes de coordonnées qu'il serait avantageux d'introduire.