JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. MANNHEIM

Démonstration géométrique d'une proposition due à M. Bertrand

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 17 (1872), p. 403-405.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1872_2_17__403_0>

Démonstration géométrique d'une proposition due à M. Bertrand;

PAR M. A. MANNHEIM.

Dans une *Note sur la théorie des normales à une même surface* [*], M. Bertrand généralise une proposition, qui lui est due, en établissant une relation entre les positions de deux normales à une surface menées aux extrémités de deux arcs infiniment petits égaux tracés sur cette surface à partir d'un point.

Je me propose aujourd'hui de montrer comment on arrive à cette relation en faisant usage du mode de représentation des normalies que j'ai fait connaître dans mon *Mémoire sur les pinceaux de droites* [**].

Soient o (*fig.* 1) le point de la surface à partir duquel on trace les directrices de deux normalies, θ l'angle de ces directrices, G la normale à la surface au point o, f_1, f_2 les centres de courbure principaux de la surface situés sur G.

La droite auxiliaire $f'_1 f'_2$ d'une normalie étant telle que l'angle $f'_2 o f'_1$ est droit, l'enveloppe des droites auxiliaires de toutes les normalies autour de o est une conique dont G est un des axes, dont f_1, f_2 sont les sommets, et dont le point o est un des foyers.

Supposons que $f'_1 f'_2$ et $f''_1 f''_2$ soient les deux droites auxiliaires correspondant aux deux normalies dont les directrices comprennent entre elles l'angle θ. Je prends, par rapport à G, la droite hj symétrique

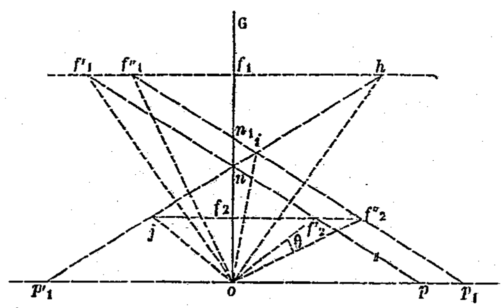
[*] *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XII, p. 343.

[**] *Id.*, 2e série, t. XVII, p. 109.

de $f_1'f_2'$: cette droite, les deux droites auxiliaires et f_1f_1', f_2f_2' sont des tangentes à la conique dont je viens de parler.

On sait que l'angle, sous lequel on voit du foyer d'une conique les segments interceptés sur des tangentes quelconques de cette courbe par deux tangentes fixes, est constant. D'après cela, l'angle $f_2''of_2'$ est

Fig. 1.



égal à l'angle *ion*; mais le premier de ces angles indique sur la figure l'angle que comprennent entre elles les directrices des normalies dont les droites auxiliaires sont $f_1'f_2'$, $f_1''f_2''$. Nous voyons ainsi que l'angle *ion* est égal à θ.

Les côtés de l'angle p'_1ip_1 déterminent sur les deux transversales op_1, on_1 des segments entre lesquels on a la relation

$$\left(\frac{1}{on}-\frac{1}{on_1}\right)\frac{1}{\sin ion}=\left(\frac{1}{op_1}+\frac{1}{op'_1}\right)\frac{1}{\sin p_1oi};$$

mais $op'_1=op$; on a donc

$$\operatorname{tang}\theta=\frac{\dfrac{1}{on}-\dfrac{1}{on_1}}{\dfrac{1}{op}+\dfrac{1}{op_1}}.$$

Si nous supposons que les directrices sont des courbes géodésiques : on, on_1 sont les rayons de première courbure, et op, op_1 les rayons de seconde courbure de ces directrices.

On peut alors écrire cette relation ainsi :

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\frac{\psi}{ds} - \frac{\psi'}{ds}}{\frac{\varphi}{ds} + \frac{\varphi'}{ds}},$$

en introduisant les angles de contingence de ces courbes et les angles que comprennent entre eux les plans osculateurs infiniment voisins.

Supprimons dans cette formule le facteur ds, il vient

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\psi - \psi'}{\varphi + \varphi'},$$

qui est la relation que l'on doit à M. Bertrand.