JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE MATHIEU

Mémoire sur l'intégration des équations aux différences partielles de la Physique mathématique

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 17 (1872), p. 249-323.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1872_2_17__249_0>

Mémoire sur l'intégration des équations aux différences partielles de la Physique mathématique;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

Désignons par u une fonction des trois coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point ou seulement de ses deux coordonnées x et y, selon que la question que l'on traite se rapporte à trois ou à deux dimensions, et posons

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \quad \text{ou} \quad = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2}.$$

Les principales équations aux différences partielles que l'on rencontre dans la Physique mathématique sont les suivantes

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0, \quad \Delta\Delta u = 0, \quad \Delta u = -a^2 u, \\ \dfrac{du}{dt} = a^2 \Delta u, \quad \dfrac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \Delta u, \end{cases}$$

dans lesquelles t désigne le temps. La fonction u, qui représente une température, un potentiel ou un déplacement moléculaire, satisfait à une de ces équations dans l'intérieur d'un corps terminé par une surface σ ou dans l'intérieur d'une surface plane limitée par une ligne s. De plus, u et ses dérivées du premier ordre doivent varier d'une manière continue dans cet espace.

Laplace considéra le premier l'équation $\Delta u = 0$, et reconnut que le potentiel d'une masse quelconque extérieure à un certain volume satisfait à cette équation dans l'intérieur de ce volume. Toutefois, l'expression analytique de ce potentiel ne pouvait encore être considérée comme l'intégrale générale de cette équation; mais cette intégrale est donnée par le théorème suivant :

Toute fonction u de x, y, z qui satisfait à l'équation $\Delta u = 0$ dans l'intérieur d'un volume terminé par une surface σ, et qui varie dans cet espace d'une manière continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre, peut être considérée comme le potentiel d'une couche infiniment mince de matière distribuée sur la surface σ.

Ainsi l'intégrale de $\Delta u = 0$ est

$$\int \frac{\rho}{r} d\sigma,$$

r étant la distance d'un point quelconque (x, y, z) intérieur à σ à un point (α, β, γ) situé sur l'élément $d\sigma$ de la surface, et ρ une fonction arbitraire de α, β, γ. On peut concevoir un système de coordonnées dans lequel la surface σ soit représentée par la constance d'une des trois coordonnées, et alors ρ est une fonction arbitraire des deux coordonnées restantes.

Comme l'électricité se distribue à la surface des corps, ce théorème se présente fort naturellement dans la théorie de l'électricité statique; aussi était-il évidemment connu de Poisson, le créateur de cette théorie; mais c'est à Green que l'on doit de l'avoir énoncé avec précision et de l'avoir démontré dans son Mémoire sur l'électricité.

On voit par là, une fois de plus, combien la démonstration des phénomènes physiques est de nature à perfectionner l'Analyse.

Ensuite, dans un Mémoire inséré dans ce Journal (tome XIV, 1869) et qui est relatif à l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\Delta\Delta u = 0$, j'ai donné l'intégrale générale de cette équation qui est établie par le théorème suivant :

Toute fonction u qui satisfait à l'équation

$$\Delta\Delta u = 0$$

dans l'intérieur d'une surface σ, et qui y est continue ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres, est la somme du premier potentiel d'une couche infiniment mince de matière distribuée sur σ et du second potentiel d'une semblable couche distribuée sur la même surface.

Dans le Mémoire actuel, je me propose de trouver les intégrales générales des autres équations aux différences partielles de la Physique mathématique dans des corps de forme quelconque, en les supposant continues ainsi que leurs dérivées du premier ordre.

Ainsi, par exemple, si une fonction u satisfait à l'équation

$$(2) \qquad \frac{du}{dt} = a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right)$$

dans l'intérieur d'une surface σ et satisfait aux conditions précédentes de continuité, elle est donnée par la formule

$$(3) \qquad u = \int \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} f(r + 2a\varepsilon\sqrt{t}, \theta, \psi)\, e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon\, d\sigma,$$

f étant une fonction arbitraire de trois quantités, r la distance du point (x, y, z) intérieur à σ à l'élément $d\sigma$, et θ, ψ étant deux coordonnées propres à déterminer un point de cette surface.

En général, s'il s'agit de questions d'équilibre, pour les résoudre complétement il faudra se donner une ou deux conditions à la surface; s'il s'agit au contraire de questions dans lesquelles entre le temps, il faudra en plus se donner une ou deux conditions initiales.

Il est évident qu'à l'aide de nos formules on ne pourra immédiatement résoudre toutes ces questions, et que la détermination des fonctions arbitraires qui y entrent pourra présenter beaucoup de difficultés; mais, indépendamment de l'intérêt théorique qu'elles présentent, nos formules pourront être utiles dans un grand nombre de circonstances.

C'est ce que l'on peut reconnaître d'après mon Mémoire sur l'équation $\Delta\Delta u = 0$; car, après avoir donné l'intégrale générale de cette équation au moyen de fonctions arbitraires, j'en ai fait des applications, et j'ai montré comment on pouvait en conclure complétement l'intégrale dans des cas particuliers, c'est-à-dire déterminer les fonctions arbitraires.

On doit encore remarquer que l'on n'est parvenu à intégrer les équations (1) que dans des cas très-particuliers de la surface σ ou de la ligne s qui limitent le corps ou la surface plane dont on s'occupe.

Nos formules, au contraire, sont applicables quelle que soit la surface σ ou la ligne s et quand même on n'en connaîtrait pas la définition géométrique. Ainsi imaginons un corps isotrope terminé par une surface quelconque σ, sa température satisfera à l'équation (2) et sera donnée par la formule (3). Prenons pour f différentes formes de fonctions, nous aurons autant de distributions possibles de température, et l'on pourra dans chacune d'elles déterminer l'état initial et l'état de la surface; puis, en retournant ces questions, on pourra supposer donnés l'état initial et la température de la surface et déterminer la température en un point quelconque du corps. Cette méthode inverse d'intégration appliquée à nos formules pourrait servir à résoudre au moins approximativement des questions proposées. C'est d'ailleurs ce que l'on peut voir par l'usage que M. de Saint-Venant a fait de la méthode inverse d'intégration dans son beau Mémoire sur la torsion des prismes. (*Mémoires des Savants étrangers*, t. XIX, 1856.)

De différentes expressions analytiques qui satisfont aux équations aux différences partielles de la Physique.

1. Considérons d'abord la plus simple des équations de la Physique mathématique

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

et désignons par

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

le carré de la distance du point (x, y, z) à un point fixe (a, b, c). Nous allons nous proposer d'abord de trouver une fonction de r qui satisfasse à l'équation (1).

Transportons les axes de coordonnées rectangulaires parallèlement à eux-mêmes au point (a, b, c), et si nous désignons encore par x, y, z les trois coordonnées dans ce nouveau système, l'équation (1) ne changera pas. Prenons ensuite des coordonnées sphériques ayant leur centre au point (a, b, c), et nous aurons

$$\frac{d\left(r^2 \frac{du}{dr}\right)}{dr} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2u}{d\psi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\left(\frac{du}{d\theta}\sin\theta\right)}{d\theta} = 0,$$

θ étant l'angle de r avec un axe fixe mené par le centre et ψ l'angle formé par le plan de cet axe et de r avec un plan fixe mené par l'axe.

Si u ne dépend que de r, l'équation (1) se réduit à

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$u = \frac{C}{r} + C',$$

C et C′ étant des constantes.

D'après cela, désignons par $d\varpi$ l'élément d'un volume ϖ, par (a, b, c) les coordonnées d'un point de cet élément, et par ρ une fonction de a, b, c; l'expression

$$\text{(A)} \qquad \int \frac{\rho}{r} d\varpi,$$

dans laquelle l'intégration s'étend à tous les éléments du volume ϖ, satisfait à l'équation (1) en dehors du volume ϖ, puisque chaque élément de l'intégrale y satisfait.

Ainsi se présente l'expression du potentiel. On sait que Laplace la considéra d'abord et vérifia qu'elle satisfait à l'équation (1). Mais nous avons voulu commencer par appliquer à une question connue la méthode qui nous servira dans ce qui va suivre.

Si nous imaginons que la matière soit distribuée sur une surface σ au lieu de remplir un volume ϖ, nous aurons, au lieu de l'expression précédente, l'intégrale

$$\text{(B)} \qquad \int \frac{\rho}{r} d\sigma,$$

(a, b, c) étant un point de l'élément de surface $d\sigma$ et l'intégrale s'étendant à tous les éléments de la surface; ρ, fonction de a, b, c, représente la densité de la matière multipliée par l'épaisseur infiniment mince de la couche et s'appelle simplement la *densité*.

Passons au cas où l'équation (1) se réduit à deux variables et devient

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0. \tag{2}$$

Faisons alors

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2,$$

et cherchons une fonction de r qui satisfasse à l'équation (2). Transportons les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes au point (a, b), l'équation (2) ne changera pas; puis prenons des coordonnées polaires, en posant

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha;$$

l'équation (2) deviendra

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{dx^2} = 0,$$

et si u ne dépend que de r, on a

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = 0,$$

et par suite

$$u = C\log r + C',$$

C et C′ étant des constantes.

D'après cela, si l'on désigne par $d\omega$ l'élément d'une surface plane ou par ds l'élément d'une courbe qui limite cette surface, et par (a, b) les coordonnées rectangulaires de l'élément $d\omega$ ou ds, les expressions

$$\int \log r\,\rho\,d\omega, \quad \int \log r\,\rho\,ds, \tag{C}$$

dans lesquelles ρ est fonction de (a, b), satisferont à l'équation (2).

2. Au lieu de commencer par supposer que la solution de l'équation (1) ne dépend que de r, imaginons qu'elle ne dépende que de θ, angle de r avec une droite fixe, nous aurons

$$\frac{d\left(\frac{du}{d\theta}\sin\theta\right)}{d\theta}=0,$$

et par suite

$$u=\mathrm{C}\log\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}+\mathrm{C}'.$$

On en peut conclure que les expressions

$$u=\int\log\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\rho\,d\varpi,\quad u=\int\log\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\rho\,d\sigma,$$

où l'on adopte les mêmes notations que dans les formules (A) et (B), satisfont à l'équation (1).

On voit de même que les expressions

$$u=\int\alpha\rho\,d\omega,\quad u=\int\alpha\rho\,ds,$$

où l'on adopte les notations des formules (C) et où α est l'angle de r avec une droite fixe, sont des intégrales de l'équation (2).

3. Considérons ensuite l'équation

(3) $$\Delta\Delta u=0.$$

Cherchons les fonctions de la distance r du point (x, y, z) au point (a, b, c) qui satisfont à cette équation. Transportons encore l'origine des coordonnées au point (a, b, c), et cette équation ne changera pas. Posons ensuite

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}=v,$$

et l'équation (3) se réduira à

$$\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dv}{dr}=0,$$

ou, en remplaçant v, à

$$\frac{d^4u}{dr^4}+\frac{4}{r}\frac{d^3u}{dr^3}=0.$$

L'intégrale de cette équation différentielle est

$$u=Cr+C'r^2+\frac{C''}{r}+C'''.$$

En particulier, $\frac{1}{r}$ et r satisfont à l'équation (3), et l'on en conclut que l'expression

$$\int r\rho\, d\varpi,$$

qui s'appelle le *second potentiel* de la masse $\int\rho\, d\varpi$ par rapport au point (x, y, z), satisfait à l'équation (3) en dehors de cette masse.

Nous avons d'ailleurs démontré, dans notre Mémoire sur l'équation $\Delta\Delta u=0$ (t. XIV de ce *Journal*, 2e série), le théorème suivant : *Toute fonction u qui satisfait à l'équation $\Delta\Delta u=0$ dans l'intérieur d'une surface σ et qui y est continue, ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres, est la somme du premier potentiel d'une couche de matière distribuée sur σ et du second potentiel d'une autre couche distribuée sur la même surface.*

Examinons le cas où l'équation (3) ne renferme que les deux coordonnées rectangulaires x, y et se réduit à

$$\frac{d^4u}{dx^4}+2\frac{d^4u}{dx^2\,dy^2}+\frac{d^4u}{dy^4}=0. \tag{4}$$

Cherchons les fonctions qui satisfont à cette équation et qui ne dépendent que de

$$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}.$$

Transportons les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes au point (a, b), et en posant

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}=v,$$

l'équation (4) deviendra

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} = 0.$$

On tire de là

$$r\frac{dv}{dr} = C, \qquad v = C\log r + C',$$

$$r\frac{du}{dr} = C\int r\log r\,dr + \frac{C'r^2}{2} + C'',$$

et, comme on a

$$\int r\log r\,dr = \frac{r^2}{2}\left(\log r - \frac{1}{2}\right),$$

on en conclut facilement

$$u = Ar^2\log r + Br^2 + C\log r + D,$$

A, B, C, D étant des constantes arbitraires. Ainsi les deux expressions

$$\int r^2\log r\rho\,d\omega, \quad \int r^2\left(\log r - \frac{1}{2}\right)\rho\,d\omega,$$

dans lesquelles $d\omega$ est l'élément d'une surface plane ω et ρ une fonction de a, b coordonnées de $d\omega$, et dont nous avons appelé la dernière le *second potentiel* dans le Mémoire cité, satisfont à l'équation (4).

Nous avons donné aussi, dans ce Mémoire, l'intégrale générale de l'équation (4) au moyen d'un théorème semblable à celui que nous venons d'énoncer pour l'équation (3).

4. Occupons-nous maintenant de l'équation

$$\Delta u = -\alpha^2 u. \tag{5}$$

En supposant que u ne soit fonction que de r, et transportant les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes au point (a, b, c), on a

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = -\alpha^2 u,$$

ou

$$\frac{d^2(ru)}{dr^2} + \alpha^2(ru) = 0, \tag{a}$$

et l'on en conclut, en désignant par C et C' deux constantes arbitraires,

$$u = \frac{C \sin \alpha r + C' \cos \alpha r}{r}.$$

Imaginons des masses m, m', m'',... qui se réduisent à des points matériels ou dont les volumes sont infiniment petits; désignons par (a, b, c) les coordonnées d'une quelconque de ces masses; alors r sera la distance de cette masse au point (x, y, z). Puisque $\frac{\cos \alpha r}{r}$ est une solution de l'équation (5), on satisfera également à cette équation en posant

$$u = \Sigma m \frac{\cos \alpha r}{r},$$

le signe Σ de sommation s'étendant à toutes les masses m, m', m'',.... On pourrait faire sur cette expression une théorie toute semblable à celle qui a été donnée par Gauss et Green pour le potentiel; et, en y faisant $\alpha = 0$, on aurait la théorie même du potentiel.

Nous démontrerons d'ailleurs dans ce Mémoire le théorème suivant, qui fournit l'intégrale générale de l'équation (5) :

Toute fonction qui satisfait à l'équation

$$\Delta u = - \alpha^2 u$$

dans l'intérieur d'une surface σ *et qui* y *varie d'une manière continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre, peut être donnée par la formule*

$$\int \frac{\cos \alpha r}{r} \rho \, d\sigma, \tag{b}$$

(a, b, c) *étant les coordonnées de l'élément* $d\sigma$ *de la surface,* ρ *une fonction de* a, b, c *et* r *la distance du point* (x, y, z) *à* $d\sigma$.

En faisant $\alpha = 0$, on a un théorème connu (Mémoire sur l'équation $\Delta \Delta u = 0$, t. XIV de ce *Journal*, p. 380).

Il est bon de rappeler comment l'équation (5) se présente dans les questions de Physique. On a l'équation

$$\frac{dv}{dt} = m^2 \Delta v,$$

qui régit la température d'un corps solide, dont nous supposerons la surface σ entretenue à la température zéro ou rayonnant dans l'espace, ou on a l'équation

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = m^2 \Delta v,$$

qui régit les petits mouvements d'un gaz enfermé dans la même surface. Alors on pose l'une des deux formules

$$(c) \qquad v = e^{-\alpha^2 m^2 t} u,$$

$$(d) \qquad v = (\mathrm{A} \sin \alpha m t + \mathrm{B} \cos \alpha m t) u,$$

et l'on obtient

$$\Delta u = -\alpha^2 u.$$

α est une quantité que l'on détermine par la condition que l'on ait sur la surface σ

$$u = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dn} = lu,$$

l étant une constante et dn l'élément de la normale à la surface σ. La quantité v est la somme d'une infinité de solutions telles que (c) et (d), que l'on appelle *solutions simples*. Mais la quantité u de la solution simple n'est pas l'intégrale générale de $\Delta u = -\alpha^2 u$, elle n'en est qu'un cas particulier; ainsi, pour l'obtenir, il faut donner dans l'expression (b) à ρ une forme particulière.

Examinons le cas où u ne dépend pas de z et où l'équation (5) se réduit à

$$(6) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = -\alpha^2 u.$$

On a, au lieu de l'équation (a),

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = -\alpha^2 u,$$

et l'intégrale de cette équation est

$$\mathrm{C}\int_0^\pi \cos(\alpha r \cos\omega)\, d\omega + \mathrm{C}'\int_0^\pi \cos(\alpha r \cos\omega)\log(r \sin^2\omega)\, d\omega.$$

Posons

$$N = \int_0^\pi \cos(\alpha r \cos\omega) \log(r \sin^2\omega)\, d\omega;$$

nous démontrerons plus loin le théorème suivant :

Toute fonction qui satisfait à l'équation (6) *dans l'intérieur d'une ligne s et qui y varie d'une manière continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre, est exprimée par la formule*

$$\int N\rho\, ds,$$

ρ étant une fonction de a, b, coordonnées de l'élément ds, et r la distance du point (x, y) à l'élément ds.

L'équation (6) se présente de la même manière que (5) dans les questions de Physique mathématique.

5. Considérons l'équation

$$(7)\qquad \frac{d^4u}{dx^4} + 2\frac{d^4u}{dx^2\,dy^2} + \frac{d^4u}{dy^4} = \alpha^4 u,$$

que l'on obtient en posant

$$v = u(A \sin\alpha^2 mt + B\cos\alpha^2 mt)$$

dans l'équation qui régit le mouvement vibratoire des plaques

$$\frac{d^2v}{dt^2} + m^2\left(\frac{d^4v}{dx^4} + 2\frac{d^4v}{dx^2\,dy^2} + \frac{d^4v}{dy^4}\right) = 0.$$

En introduisant une quantité u', on peut remplacer l'équation proposée par les deux suivantes :

$$\alpha^2 u' = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}, \quad \alpha^2 u = \frac{d^2u'}{dx^2} + \frac{d^2u'}{dy^2};$$

Posons

$$U = \frac{u + u'}{2}, \quad V = \frac{u - u'}{2},$$

et nous en conclurons

$$u = U + V,$$

U et V étant donnés par les formules

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = -\alpha^2 V, \quad \frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} = \alpha^2 U.$$

L'expression la plus générale de V est, d'après le numéro précédent,

$$V = \int\int_0^\pi \cos(\alpha r \cos\omega) \log(r \sin^2\omega) d\omega\, \rho\, ds;$$

celle de U sera

$$U = \int\int_0^\pi \cos(\alpha\sqrt{-1}\, r \cos\omega) \log(r \sin^2\omega) d\omega\, \rho_1\, ds,$$

que l'on déduit de V en remplaçant α par $\alpha\sqrt{-1}$ et la fonction ρ par une autre fonction ρ_1, et l'intégrale générale de l'équation (7) est la somme de ces deux expressions. Mais, pour le problème des plaques vibrantes, ρ et ρ_1, qui se trouvent dans l'expression de u, ne sont pas des fonctions arbitraires de a, b, coordonnées de ds.

6. Examinons l'équation

$$(8) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = \alpha^2 \Delta u,$$

que l'on rencontre dans les mouvements très-petits d'un gaz ou dans le mouvement vibratoire d'un corps solide.

Si u ne dépend que de r, on aura

$$\frac{d^2(ru)}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d^2(ru)}{dr^2}.$$

L'intégrale de cette équation est bien connue, et l'on a

$$u = \frac{\varphi(r + \alpha t) + \psi(r - \alpha t)}{r},$$

en désignant par φ et ψ deux fonctions arbitraires.

On peut déduire de là que, dans l'intérieur d'une surface σ, l'expression

$$\int \frac{\varphi(r+\alpha t)}{r}\rho\, d\sigma + \int \frac{\psi(r-\alpha t)}{r}\rho_1\, d\sigma,$$

dans laquelle ρ et ρ_1 sont des fonctions des coordonnées a, b, c de l'élément $d\sigma$ et r la distance de $d\sigma$ au point (x, y, z), est une intégrale de l'équation (8). Toutefois nous verrons que cette expression n'a pas la généralité suffisante pour être l'intégrale générale de l'équation (8), et que cette intégrale est

$$u = \int \frac{f(r+\alpha t, \theta, \psi) + \mathrm{F}(r-\alpha t, \theta, \psi)}{r}\, d\sigma,$$

f et F étant des fonctions arbitraires de trois variables, et θ, ψ étant deux coordonnées particulières qui servent à déterminer un point de la surface σ.

Si l'équation (8) ne se rapporte qu'à deux dimensions, elle se réduit à

$$(9) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = \alpha^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right),$$

qui donne le mouvement vibratoire d'une membrane.

Si u ne dépend que de r, on a

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \alpha^2\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right),$$

qui a pour intégrale

$$u = \int_0^\pi f(r\cos\omega + \alpha t)\, d\omega + \int_0^\pi \mathrm{F}(r\cos\omega + \alpha t)\log(r\sin^2\omega)\, d\omega.$$

(*Voir* un Mémoire de Poisson, 19e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 227). Nous verrons que l'intégrale générale de l'équation (9) dans l'intérieur d'une courbe s peut se mettre sous la forme

$$u = \int\int_0^\pi \mathrm{F}(r\cos\omega + \alpha t, v)\log(r\sin^2\omega)\, d\omega\, ds,$$

F étant une fonction arbitraire de deux variables et v une coordonnée qui sert à déterminer un point de la courbe s.

7. Passons à l'équation

$$\frac{du}{dt} = a^2 \Delta u. \tag{1}$$

Supposons d'abord qu'elle se rapporte à trois dimensions. Si u ne dépendait que de r, cette équation se réduirait à

$$a^2\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr}\right) = \frac{du}{dt},$$

qui peut s'écrire

$$a^2\frac{d^2(ru)}{dr^2} = \frac{d(ru)}{dt}.$$

On connaît l'intégrale générale de cette équation, qui a été donnée par Laplace et Fourier, et l'on en conclut

$$ru = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(r-\alpha)^2}{4a^2t}}}{\sqrt{t}} f(\alpha)\,d\alpha,$$

ou

$$ru = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} f(r + 2as\sqrt{t})\,ds,$$

$f(x)$ étant une fonction arbitraire.

Posons

$$\varphi(r, t, \theta, \psi) = \frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} f(r + 2as\sqrt{t}, \theta, \psi)\,ds,$$

en désignant par θ, ψ deux coordonnées propres à déterminer un point de la surface σ, et nous aurons une intégrale de l'équation (1) en posant

$$u = \int \varphi(r, t, \theta, \psi)\,d\sigma. \tag{2}$$

Nous verrons plus loin que cette intégrale a toute la généralité voulue.

Considérons ensuite le cas où l'équation (1) ne se rapporte qu'à deux dimensions et se réduit à

$$(3)\qquad \frac{du}{dt} = a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right).$$

Si u ne dépend que de r, on a

$$a^2\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right) = \frac{du}{dt}.$$

L'intégrale de cette équation est

$$u = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} f(r\cos\omega + 2a\alpha\sqrt{t})\,d\omega\, e^{-\alpha^2}d\alpha$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} \mathrm{F}(r\cos\omega + 2a\alpha\sqrt{t})\log(r\sin^2\omega)\,d\omega\, e^{-\alpha^2}d\alpha.$$

(*Voir* Poisson, 19e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 245).

Posons

$$\psi(r, t, v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} \mathrm{F}(r\cos\omega + 2a\alpha\sqrt{t}, v)\log(r\sin^2\omega)\,d\omega\, e^{-\alpha^2}d\alpha,$$

$\mathrm{F}(r, v)$ étant une fonction arbitraire de deux variables et v une coordonnée propre à déterminer un point de la courbe s qui limite l'espace dans lequel a lieu l'équation (3). Nous satisferons à cette équation en faisant

$$u = \int \psi(r, t, v)\,ds,$$

et nous verrons que cette expression représente la solution générale.

8. Posons, en général,

$$\Delta\Delta u = \Delta^2 u,\quad \Delta\Delta^2 u = \Delta^3 u, \ldots;$$

nous aurions pu, dans ce Mémoire, nous occuper plus généralement d'équations de la forme

$$\mathrm{A}\Delta^p u + \mathrm{B}\Delta^q u + \ldots = au^r + bu^s + \ldots,$$

ou de celle-ci :

$$A\Delta^p u + B\Delta^q u + \ldots = a\frac{d^r u}{dt^r} + b\frac{d^s u}{dt^s} + \ldots,$$

en désignant par A, B,..., a, b,... des constantes. Mais, afin d'éviter des complications qui n'auraient pas d'utilité, nous préférons nous borner aux équations que l'on rencontre en Physique mathématique.

Sur l'équation $\Delta v = -\alpha^2 v$.

9. Imaginons un volume ϖ dont l'élément est $d\varpi$, terminé par une surface σ dont on désigne l'élément par $d\sigma$; si v et w, ainsi que leurs dérivées, sont des fonctions continues des coordonnées rectangulaires x, y, z dans l'intérieur du volume ϖ, on a cette équation, que l'on attribue à Green, quoiqu'elle ait été employée auparavant par Poisson,

$$\int v\Delta w\, d\varpi - \int w\Delta v\, d\varpi = \int v\frac{dw}{dn}d\sigma - \int w\frac{dv}{dn}d\sigma,$$

dn étant l'élément de normale à la surface menée vers l'extérieur du corps, et les intégrales se rapportant au volume entier ou à toute la surface.

Prenons pour w la fonction $\frac{\cos\alpha r}{r}$, r étant la distance du point (x, y, z) au point (a, b, c) situé dans l'élément $d\varpi$; on aura (n° 4)

$$\Delta w = -\alpha^2 w.$$

Si le point (x, y, z) est situé en dehors du volume ϖ, la fonction w satisfait à la condition de continuité indiquée, et l'on a, d'après la formule ci-dessus, en mettant a, b, c au lieu de x, y, z dans v,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &-\alpha^2\int v\frac{\cos\alpha r}{r}d\varpi - \int\frac{\cos\alpha r}{r}\Delta v\, d\varpi \\ &\quad = -\int v\frac{d\frac{\cos\alpha r}{r}}{dn'}d\sigma + \int\frac{\cos\alpha r}{r}\frac{dv}{dn'}d\sigma; \end{aligned}\right.$$

dn' est l'élément de normale comptée vers l'intérieur du corps, et dans le second membre r représente la distance du point (x, y, z) à l'élément $d\sigma$.

Si le point (x, y, z) est à l'extérieur de σ, l'équation précédente est applicable au volume renfermé entre σ et une sphère σ' infiniment petite, dont le point (x, y, z) est le centre. On aura donc

$$-\alpha^2\int v\frac{\cos\alpha r}{r}d\varpi-\int\frac{\cos\alpha r}{r}\Delta v\,d\varpi=-\int v\frac{d\frac{\cos\alpha r}{r}}{dn'}d\sigma+\int\frac{\cos\alpha r}{r}\frac{dv}{dn'}d\sigma$$
$$-\int v\frac{d\frac{\cos\alpha \mathrm{R}}{\mathrm{R}}}{d\mathrm{R}}d\sigma'+\int\frac{\cos\alpha\mathrm{R}}{\mathrm{R}}\frac{dv}{d\mathrm{R}}d\sigma',$$

R étant le rayon de la sphère; car les intégrales du premier membre rapportées au volume infiniment petit de la sphère sont négligeables; la quatrième intégrale du second membre est négligeable aussi, et la troisième est égale à

$$v\int(\alpha\mathrm{R}\sin\alpha\mathrm{R}+\cos\alpha\mathrm{R})\frac{d\sigma'}{\mathrm{R}^2},$$

ou, en faisant tendre R vers zéro, à $4\pi v$, dans lequel on remet dans v x, y, z au lieu de a, b, c.

Donc on a, si le point (x, y, z) est intérieur au volume ϖ,

$$(2)\qquad\left\{\begin{aligned}&-\alpha^2\int v\frac{\cos\alpha r}{r}d\varpi-\int\frac{\cos\alpha r}{r}\Delta v\,d\varpi\\&=-\int v\frac{d\frac{\cos\alpha r}{r}}{dn'}d\sigma+\int\frac{\cos\alpha r}{r}\frac{dv}{dn'}d\sigma+4\pi v.\end{aligned}\right.$$

10. Posons

$$(3)\qquad \mathrm{V}=\int\frac{\cos\alpha r}{r}\mathrm{D}\,d\Pi,$$

$d\Pi$ étant l'élément d'un volume Π, dont la masse est $\mathrm{D}\,d\Pi$; D est par conséquent une fonction des coordonnées a, b, c de l'élément $d\Pi$. On a

$$(4)\qquad \Delta\mathrm{V}=-\alpha^2\mathrm{V}$$

pour tout point situé en dehors du volume auquel se rapporte l'intégrale; cherchons quelle est la valeur de ΔV pour un point de ce volume.

Décrivons une très-petite sphère qui renferme dans son intérieur le point (x, y, z), et posons

$$V = v + v',$$

v' étant la partie de V qui correspond au volume de la petite sphère et v étant la partie restante.

On a d'abord

$$(a) \qquad \Delta v = -\alpha^2 v;$$

si l'on désigne par $d\tau$ l'élément de volume de la sphère, on aura

$$v' = \int \frac{\cos \alpha r}{r} D\, d\tau,$$

ou, en développant $\cos \alpha r$ par rapport aux puissances de r, qui est très-petit,

$$v' = \int \frac{1}{r} D\, d\tau - \frac{\alpha^2}{2} \int r D\, d\tau + \ldots.$$

Le Δ du deuxième terme et des suivants est négligeable, et l'on sait que le Δ du premier terme est égal à $-4\pi D$. On a donc

$$(b) \qquad \Delta v' = -4\pi D,$$

en remplaçant dans D les quantités a, b, c par x, y, z. Il en résulte, en ajoutant (a) et (b) et remarquant que v' est infiniment petit,

$$(c) \qquad \Delta V + \alpha^2 V = -4\pi D.$$

Dans l'expression

$$\int \frac{\sin \alpha r}{r} D\, d\Pi,$$

la quantité qui se trouve sous le signe d'intégration ne devient pas infinie pour $r=0$, et cette expression satisfait, en dedans comme en dehors du volume Π, à l'équation (4).

11. Voyons ce que deviennent les équations (1) et (2) appliquées à l'expression (3). D'après l'équation (c), on a

$$\int \Delta V \frac{\cos\alpha r}{r} d\Pi = -\int \frac{\alpha^2 V + 4\pi D}{r} \cos\alpha r\, d\Pi = -\alpha^2 \int V \frac{\cos\alpha r}{r} d\Pi - 4\pi V.$$

Donc, si le volume ϖ renferme le volume Π et si le point (x, y, z) est situé en dehors du premier volume, on a, d'après la formule (1),

$$(5) \qquad 4\pi \int \frac{\cos\alpha r}{r} D\, d\Pi = -\int V \frac{d\frac{\cos\alpha r}{r}}{dn'} d\sigma + \int \frac{\cos\alpha r}{r} \frac{dV}{dn'} d\sigma.$$

Si le volume ϖ renferme encore le volume Π, mais que le point (x, y, z) soit situé à l'intérieur du premier volume, on a, d'après la formule (2),

$$(6) \quad 4\pi \int \frac{\cos\alpha r}{r} D\, d\Pi = -\int V \frac{d\frac{\cos\alpha r}{r}}{dn'} d\sigma + \int \frac{\cos\alpha r}{r} \frac{dV}{dn'} d\sigma + 4\pi V.$$

12. Énonçons maintenant ce théorème important :

Imaginons un volume limité par une surface σ. On peut toujours distribuer sur cette surface une couche de matière dont la densité ρ soit telle que l'expression

$$\int \frac{\cos\alpha r}{r} \rho\, d\sigma,$$

où r représente la distance du point (x, y, z) à l'élément $d\sigma$, ait une valeur donnée sur la surface.

Quand on suppose $\alpha = 0$, on a un théorème bien connu de Gauss, et quand α est différent de zéro, le théorème peut se démontrer de la même manière. (*Voir* le cinquième volume des *OEuvres de Gauss*, p. 232-237.)

La démonstration se décompose en les parties suivantes :

1° Si une couche de matière a une masse donnée et que la densité ρ

ait partout le même signe; si, de plus, on pose

$$v = \int \frac{\cos \alpha r}{r} \rho \, d\sigma, \quad \Omega = \int (v - 2\mathrm{U}) \rho \, d\sigma,$$

U étant une fonction de x, y, z, dont les valeurs sont données sur σ, Ω est susceptible d'un minimum pour lequel $v - \mathrm{U}$ a une valeur constante.

2° Si la densité peut changer de signe, on montre ensuite que $v - \mathrm{U}$ peut également avoir une valeur constante, la masse de la couche étant donnée.

3° On peut, quand la masse est arbitraire, s'arranger pour que $v - \mathrm{U}$ ait une valeur constante donnée sur la surface, et, par suite, il est clair enfin que v peut avoir sur la surface une valeur donnée et variable d'un point à l'autre.

13. Supposons une fonction v qui satisfait à l'équation

$$\Delta v = - \alpha^2 v$$

dans l'intérieur d'une surface et qui varie d'une manière continue dans cet espace, ainsi que ses dérivées du premier ordre.

On a, d'après la formule (2),

$$(7) \qquad o = - \int v \frac{d \frac{\cos \alpha r}{r}}{dn'} d\sigma + \int \frac{\cos \alpha r}{r} \frac{dv}{dn'} d\sigma + 4\pi v.$$

Considérons l'expression qui se rapporte à une masse distribuée sur la surface σ

$$\mathrm{V} = \int \frac{\cos \alpha r}{r} \rho \, d\sigma;$$

en supposant d'abord que la masse soit à l'intérieur de σ et occupe le volume Π, on aura, d'après (6), en remplaçant $\frac{d}{dn'}$ par $-\frac{d}{dn}$,

$$4\pi \int \frac{\cos \alpha r}{r} \mathrm{D} \, d\Pi = \int \mathrm{V} \frac{d \frac{\cos \alpha r}{r}}{dn} d\sigma - \int \frac{\cos \alpha r}{r} \frac{d\mathrm{V}}{dn} d\sigma + 4\pi \mathrm{V}.$$

Faisons approcher les masses de la surface σ jusqu'à ce qu'elles viennent s'appliquer sur cette surface et y former une couche de densité ρ; $\frac{dV}{dn}$ ne cessera pas de varier d'une manière continue, le premier membre de l'équation précédente se réduira à $4\pi V$ et l'on aura

$$(8) \qquad o = \int V \frac{d\frac{\cos\alpha r}{r}}{dn} d\sigma - \int \frac{\cos\alpha r}{r} \frac{dV}{dn} d\sigma.$$

Or, d'après le théorème du numéro précédent, on peut disposer de ρ de manière que V ait une valeur donnée sur la surface. Supposons donc que V ait sur σ la même valeur que φ, et, en retranchant (8) de (7), nous aurons

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\cos\alpha r}{r} \left(\frac{d\varphi}{dn'} + \frac{dV}{dn}\right) d\sigma.$$

Donc nous avons le théorème suivant :

Toute fonction qui satisfait à l'intérieur d'une surface σ à l'équation

$$\Delta u = -\alpha^2 u,$$

et qui y est continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre, a pour expression

$$(d) \qquad \int \frac{\cos\alpha r}{r} \rho \, d\sigma,$$

ρ étant une fonction arbitraire des coordonnées de l'élément $d\sigma$.

Dans ce théorème, la surface σ, qui limite l'espace continu considéré, n'est pas astreinte à former une surface continue; elle peut, au contraire, être composée de plusieurs surfaces fermées. Si la surface σ se réduit à une seule surface fermée, nous aurons occasion de reconnaître qu'à l'expression (d) on peut substituer l'expression

$$(e) \qquad \int \frac{\sin\alpha r}{r} \rho_1 \, d\sigma.$$

Il est aisé de reconnaître que la dérivée, par rapport à la normale à la surface, de l'expression (d) varie d'une manière discontinue quand on traverse la surface σ, tandis que la même dérivée de l'expression (e) est continue dans ce passage. Donc, si les deux expressions (d) et (e) se confondent à l'intérieur de la surface σ, elles se séparent au dehors.

14. Les raisonnements qui précèdent peuvent être facilement étendus à la théorie de l'équation

$$\Delta v = -\alpha^2 v,$$

réduite à deux coordonnées.

Nous avons vu (nº 4) que les expressions

$$M = \int_0^\pi \cos(\alpha r \cos\omega)\, d\omega, \quad N = \int_0^\pi \cos(\alpha r \cos\omega) \log(r \sin^2\omega)\, d\omega$$

satisfont à cette équation, et par une démonstration semblable à celle du numéro précédent, on obtiendra le théorème suivant :

Si une fonction satisfait à l'équation

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = -\alpha^2 v$$

dans l'intérieur d'une surface plane limitée par une courbe s, et qu'elle y soit continue ainsi que ses dérivées du premier ordre, cette fonction peut être mise sous la forme

$$(f) \qquad \int N \rho\, ds,$$

en désignant par ρ une fonction des coordonnées de l'élément ds.

Si la ligne s se réduit à une seule ligne fermée, nous donnerons des exemples où l'on peut remplacer dans le théorème précédent l'expression (f) par l'expression plus simple

$$(g) \qquad \int M \rho\, ds.$$

Il est aisé de démontrer que les dérivées de l'expression (f) varient d'une manière discontinue quand le point (x, y, z) traverse la courbe s, tandis que celles de (g) restent contenues dans ce passage.

Développements en séries des quantités M *et* N.

15. Les quantités

$$M = \int_0^\pi \cos(ar\cos\omega)d\omega, \quad N = \int_0^\pi \cos(ar\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)d\omega$$

satisfont à l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = -a^2u, \tag{1}$$

et nous allons donner des développements en séries de M et N.

Prenons des coordonnées polaires, en posant

$$x = R\cos\alpha, \quad y = R\sin\alpha,$$

et soient α, R les coordonnées polaires d'une extrémité de la distance r et α_1, A les coordonnées polaires de l'autre extrémité. Nous avons

$$r^2 = A^2 - 2AR\cos(\alpha - \alpha_1) + R^2$$

et

$$\frac{1}{\pi}M = 1 - \frac{a^2r^2}{2^2} + \frac{a^4r^4}{(2.4)^2} - \ldots \pm \frac{a^{2p}r^{2p}}{(2.4.6\ldots 2p)^2} + \ldots.$$

Posons $\alpha - \alpha_1 = \theta$, et nous aurons, en faisant $\sqrt{-1} = i$,

$$r^2 = (A - Re^{\theta i})(A - Re^{-\theta i}).$$

Élevons à la puissance n, et nous aurons

$$(A - Re^{\theta i})^n = A^n - nA^{n-1}Re^{\theta i} + \frac{n(n-1)}{1.2}A^{n-2}R^2e^{2\theta i} - \ldots,$$

$$(A - Re^{-\theta i})^n = A^n - nA^{n-1}Re^{-\theta i} + \frac{n(n-1)}{1.2}A^{n-2}R^2e^{-2\theta i} - \ldots;$$

puis en multipliant, nous obtenons

$$r^{2n} = P_{0,n} + 2P_{1,n}\cos\theta + 2P_{2,n}\cos 2\theta + \ldots,$$

si nous posons

$$P_{0,n} = A^{2n} + n^2 A^{2n-2} R^2 + \left(\frac{n(n-1)}{1.2}\right)^2 A^{2n-4} R^4 + \ldots,$$

$$P_{1,n} = -nA^{2n-1}R - \frac{n(n-1)}{1.2} A^{2n-3} R^3 - \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,\frac{R^5}{a^5} - \ldots,$$

$$P_{2,n} = \frac{n(n-1)}{1.2} A^{2n-2} R^2 + n\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} A^{2n-4} R^4$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4} A^{2n-6} R^6 + \ldots,$$

$$P_{3,n} = -\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} A^{2n-3} R^3 - n\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} A^{2n-5} R^5$$
$$- \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{2.3.4.5} A^{2n-7} R^7 + \ldots,$$

....

Nous aurons donc

$$\frac{1}{\pi} M = 1 - \frac{a^2}{2^2}(A^2 + R^2 - 2AR\cos\theta)$$
$$+ \frac{a^4}{(2.4)^2}\left[A^4 + 4A^2R^2 + R^4 - 4(A^3R + AR^3)\cos\theta + 2A^2R^2\cos 2\theta\right]$$
$$- \frac{a^6}{(2.4.6)^2}\left[A^6 + 9A^4R^2 + 9A^2R^4 + R^6\right.$$
$$- 6(A^5R + 3A^3R^3 + AR^5)\cos\theta$$
$$\left. + 6(A^4R^2 + A^2R^4)\cos 2\theta - 2A^3R^3\cos 3\theta\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Désignons par $Q_n(R)$ la fonction suivante :

$$Q_n(R) = R^n\left[1 - \frac{\left(\frac{a}{2}R\right)^2}{1(n+1)} + \frac{\left(\frac{a}{2}R\right)^4}{1.2(n+1)(n+2)} - \frac{\left(\frac{a}{2}R\right)^6}{1.2.3(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\right],$$

qui est une solution de l'équation différentielle

$$R^2 \frac{d^2Q}{dR^2} + R\frac{dQ}{dR} - (n^2 - a^2R^2)Q = 0;$$

on reconnaît sans difficulté que la quantité $\frac{1}{\pi}M$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}M = Q_0(A)Q_0(R) &+ 2\frac{a^2}{2^2}Q_1(A)Q_1(R)\cos\theta \\ &+ 2\frac{a^4}{(2.4)^2}Q_2(A)Q_2(R)\cos 2\theta + \ldots \\ &+ 2\frac{a^{2n}}{(2.4.6\ldots 2n)^2}Q_n(A)Q_n(R)\cos n\theta + \ldots,\end{aligned}$$

formule remarquable et dont nous aurons occasion de faire des applications.

Multiplions les deux membres par $\cos n\alpha_1\, d\alpha_1$ et intégrons de 0 à 2π; nous aurons

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos(ar\cos\omega)d\omega\cos n\alpha_1\, d\alpha_1 = \frac{2\pi a^{2n}}{(2.4.6\ldots 2n)^2}Q_n(A)Q_n(R)\cos n\alpha.$$

Or $Q_n(R)$, au lieu d'être exprimé par une série, peut l'être par la formule

$$Q_n(R) = \frac{2.4.6\ldots(2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}R^n\int_0^{\pi}\sin^{2n}\omega\cos(aR\cos\omega)d\omega;$$

on a donc une intégrale double exprimée par le produit de deux intégrales simples.

16. Le développement analogue de N en série est plus difficile à obtenir. Nous avons

$$N = \log r\int_0^{\pi}\cos(ar\cos\omega)d\omega + 2\int_0^{\pi}\cos(ar\cos\omega)\log\sin\omega\, d\omega.$$

Considérons d'abord le cas où a est nul; N se réduit à

$$N_0 = \pi \log r + 2\int_0^\pi \log \sin\omega\, d\omega$$
$$= \pi \log r - 2\pi \log 2$$ (*Calcul intégral* de M. Bertrand, p. 147).

On a d'ailleurs

$$r^2 = A^2\left(1 - \frac{R}{A}e^{\theta i}\right)\left(1 - \frac{R}{A}e^{-\theta i}\right),$$

et en prenant les logarithmes

$$\log r = \log A - \frac{R}{A}\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{R^2}{A^2}\cos 2\theta - \ldots - \frac{1}{n}\frac{R^n}{A^n}\cos n\theta - \ldots;$$

donc on a

$$\frac{1}{\pi}N_0 = \log A - 2\log 2 - \frac{R}{A}\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{R^2}{A^2}\cos 2\theta - \ldots - \frac{1}{n}\frac{R^n}{A^n}\cos n\theta - \ldots.$$

Cherchons maintenant à passer au cas où a n'est pas nul. N satisfait à l'équation (1), et si nous adoptons des coordonnées polaires, cette équation se change en la suivante :

$$\frac{d^2u}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{du}{dR} + \frac{1}{R^2}\frac{d^2u}{d\alpha^2} = -a^2u. \tag{2}$$

Commençons par déterminer une solution de cette équation qui soit le produit d'une fonction de R par une fonction de α, et posons

$$u = Q(R)T(\alpha), \tag{3}$$

nous trouverons que l'on a

$$T(\alpha) = A\cos n\alpha + B\sin n\alpha,$$

n étant entier afin que $T(\alpha)$ ait pour période 2π, et Q satisfaisant à l'équation

$$R^2\frac{d^2Q}{dR^2} + R\frac{dQ}{dR} + (a^2R^2 - n^2)Q = 0, \tag{4}$$

et la solution de cette équation différentielle est

$$CQ_n(R) + C'Q'_n(R),$$

en posant

$$Q'_n(R) = R^{-n}\left[1 + \frac{\left(\frac{a}{2}R\right)^2}{1(n-1)} + \frac{\left(\frac{a}{2}R\right)^4}{1\;2(n-1)(n-2)} - \ldots\right].$$

(Voir *Mémoire sur la membrane elliptique*, t. XIII, p. 141.)

$Q_n(R)$ renferme le facteur R^n et $Q'_n(R)$ le facteur R^{-n}. A la vérité, lorsque n est entier, la forme de la seconde expression n'est plus admissible; mais, comme elle l'est pour toute autre valeur de n, il résulte de la continuité qu'il existe une solution qui renferme R^{-n} en facteur et que nous désignerons par $Q'_n(R)$. Dans le cas de $n = 0$, nous poserons

$$Q'_0(R) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(aR\cos\omega)\log(R\sin^2\omega)\,d\omega,$$

qui est une solution de l'équation (4) pour $n = 0$.

L'expression de N qui satisfait à l'équation (2) doit être la somme d'une infinité de quantités telles que (3). Supposons $R < A$; pour $a = 0$, N doit se réduire à l'expression que nous avons trouvée pour N_0; or, pour $a = 0$, $Q_n(R)$ et $Q'_n(R)$ se réduisent à R^n et R^{-n}; donc les fonctions $Q_n(R)$ entrent seules dans le développement de N, et l'on peut poser

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}N = EQ_0(R) &+ E_1Q_1(R)(D_1\cos\alpha + F_1\sin\alpha) + \ldots\\ &+ E_nQ_n(R)(D_n\cos n\alpha + F_n\sin n\alpha) + \ldots,\end{aligned}$$

les quantités E, D, F étant des constantes.

N est fonction de $\alpha - \alpha_1 = \theta$, et l'on en peut facilement conclure que le développement précédent peut s'écrire

$$\frac{1}{\pi}N = EQ_0(R) + E_1Q_1(R)\cos\theta + \ldots + E_nQ_n(R)\cos n\theta + \ldots.$$

Si l'on regarde R comme constant, chaque terme de N doit pouvoir être considéré comme le produit d'une fonction de A par une fonction de θ, et l'on doit avoir

$$E_n = CQ_n(A) + C'Q'_n(A),$$

C et C' étant deux constantes; mais E_n doit se réduire à $-\frac{1}{n}\frac{1}{A^n}$ pour $a = 0$; donc on a simplement

$$E_n = -\frac{1}{n} Q'_n(A),$$

et l'on a enfin cette formule remarquable

$$\frac{1}{\pi} N = Q'_0(A) Q_0(R) - Q'_1(A) Q_1(R) \cos\theta - \ldots - \frac{1}{n} Q'_n(A) Q_n(R) \cos n\theta - \ldots.$$

Remarquons que, R étant supposé plus petit que A, les quantités A et R entrent de la même manière dans le développement de M, et entrent, au contraire, d'une manière différente dans le développement de N.

17. Les développements de M et N, que nous venons d'obtenir, naissent de la considération des coordonnées polaires. Si x et y sont des coordonnées rectilignes rectangulaires et que nous posions

$$x = c\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}\cos\alpha, \quad y = c\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2}\sin\alpha,$$

pour prendre α et β comme nouvelles coordonnées, l'équation $\beta =$ const. ou l'équation

$$\frac{x^2}{(e^\beta + e^{-\beta})^2} + \frac{y^2}{(e^\beta - e^{-\beta})^2} = \frac{c^2}{4},$$

dans laquelle on suppose β un paramètre variable, représentera des ellipses homofocales, et l'équation $\alpha =$ const. ou cette autre

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha} - \frac{y^2}{\sin^2\alpha} = c^2,$$

dans laquelle α est un paramètre variable, représentera une série d'hyperboles homofocales entre elles et avec les ellipses.

Nous allons maintenant nous occuper des développements de M et N suivant des séries qui proviennent de la considération des coordonnées α et β.

Si aux coordonnées x et y on substitue les coordonnées α, β, l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = -a^2 u$$

se change en la suivante

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2} = -a^2c^2\left[\left(\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}\right)^2 - \cos^2\alpha\right] u$$

(voir *Membrane elliptique*, t. XIII de ce *Journal*, p. 146), et, si l'on suppose que u soit le produit d'une fonction de α par une fonction de β, et qu'on pose en conséquence

$$u = \mathrm{P}(\alpha)\mathrm{Q}(\beta),$$

P et Q seront donnés par les deux équations différentielles du second ordre

$$(a) \qquad \frac{d^2\mathrm{P}}{d\alpha^2} + (\mathrm{R} - 2h^2\cos 2\alpha)\mathrm{P} = 0,$$

$$\frac{d^2\mathrm{Q}}{d\beta^2} - [\mathrm{R} - h^2(e^{2\beta} + e^{-2\beta})]\mathrm{Q} = 0,$$

h étant égal à $\frac{ac}{2}$ et R étant une constante.

R est une constante qui doit être telle, que P ait 2π pour période. (Nous avons appris à déterminer cette quantité dans le Mémoire cité.) Pour $h = 0$, P se réduit à

$$\mathrm{C}\cos\sqrt{\mathrm{R}}\,\alpha + \mathrm{C}'\sin\sqrt{\mathrm{R}}\,\alpha,$$

C et C' étant des constantes, et R se réduit au carré d'un nombre entier; mais, quand h n'est pas nul, la solution générale de l'équation (a) n'est pas périodique, et l'on a deux sortes de solutions de cette équation : les unes que nous avons désignées par $\mathrm{P}_2(\alpha)$, et qui se réduisent à $\cos g\alpha$ pour $h = 0$; les autres, désignées par $\mathrm{P}_1(\alpha)$, qui se réduisent à $\sin g\alpha$ pour $h = 0$; et, quoique R se réduise à g^2 dans ces deux solutions pour $h = 0$, il n'y a pas cependant la même valeur, de sorte que $P_2(\alpha)$ et $P_1(\alpha)$ sont les solutions de deux équations différentielles distinctes. Nous représenterons par

$$P_2(\alpha, g), \quad P_1(\alpha, g)$$

les deux fonctions P, qui se réduisent à $\cos g\alpha$ et $\sin g\alpha$ pour $h = 0$.

r étant la distance de deux points dont les coordonnées dans le système elliptique sont α, β et α_1, b, nous aurons

$$r^2 = \frac{c^2}{4}\left[(e^\beta + e^{-\beta})\cos\alpha - (e^b + e^{-b})\cos\alpha_1\right]^2 + \frac{c^2}{4}\left[(e^\beta - e^{-\beta})\sin\alpha - (e^b - e^{-b})\sin\alpha_1\right]^2.$$

Après avoir rappelé ces principes, nous allons donner les développements des quantités

$$M = \int_0^\pi \cos(ar\cos\omega)\,d\omega, \quad N = \int_0^\pi \cos(ar\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)\,d\omega,$$

sans nous étendre sur les considérations qui nous y ont conduit.

On a

$$\begin{aligned}
M = {} & P_2(\alpha, 0)P_2(\alpha_1, 0)Q_2(\beta, 0)Q_2(b, 0) \\
& + 8\frac{h^2}{2^2}\left[P_2(\alpha, 1)P_2(\alpha_1, 1)Q_2(\beta, 1)Q_2(b, 1)\right. \\
& \qquad\qquad \left. + P_1(\alpha, 1)P_1(\alpha_1, 1)Q_1(\beta, 1)Q_1(b, 1)\right] \\
& + 8\frac{h^4}{(2.4)^2}\left[P_2(\alpha, 2)P_2(\alpha_1, 2)Q_2(\beta, 2)Q_2(b, 2)\right. \\
& \qquad\qquad \left. + P_1(\alpha, 2)P_1(\alpha_1, 2)Q_1(\beta, 2)Q_1(b, 2)\right] \\
& + 8\frac{h^6}{(2.4.6)^2}\left[P_2(\alpha, 3)P_2(\alpha_1, 3)Q_2(\beta, 3)Q_2(b, 3)\right. \\
& \qquad\qquad \left. + P_1(\alpha, 3)P_1(\alpha_1, 3)Q_1(\beta, 3)Q_1(b, 3)\right] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Il y a une remarque à faire sur les valeurs des expressions de P et Q.

Dans notre Mémoire sur la membrane elliptique, les fonctions P et Q ne sont pas complétement définies; elles le sont seulement à un facteur constant près, qui se réduit à l'unité pour $h = 0$. Ainsi, par exemple, d'après la formule donnée dans ce Mémoire, en ne prenant que les termes en h^0 et h^2, on réduit $P_2(\alpha, 1)$ et $P_1(\alpha, 1)$ à

$$P_2(\alpha, 1) = \cos\alpha - \frac{h^2}{8}\cos 3\alpha, \quad P_1(\alpha, 1) = \sin\alpha - \frac{h^2}{8}\sin 3\alpha,$$

et dans l'expression de M il faut faire

$$P_2(\alpha, 1) = \cos\alpha - \frac{h^2}{8}(\cos 3\alpha + \cos\alpha),$$
$$P_1(\alpha, 1) = \sin\alpha - \frac{h^2}{8}(\sin 3\alpha - \sin\alpha);$$

ce sont les premières expressions multipliées respectivement par

$$1 - \frac{h^2}{8}, \quad 1 + \frac{h^2}{8}.$$

D'après la manière dont Q_2 et Q_1 se déduisent de P_2 et P_1, on a

$$Q_2(\beta, 1) = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} - \frac{h^2}{8}\left(\frac{e^{3\beta} + e^{-3\beta}}{2} + \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2}\right),$$
$$Q_1(\beta, 1) = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} - \frac{h^2}{8}\left(\frac{e^{3\beta} - e^{-3\beta}}{2} - \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2}\right).$$

L'indétermination que nous laissons subsister dans l'expression de M sera cependant sans inconvénient dans les applications que nous aurons à en faire.

Pour déduire de la formule que nous venons de donner pour M celle qui est relative aux coordonnées polaires et que nous avons obtenue précédemment, il suffit de faire $c = 0$, en se rappelant que l'on a $h = \frac{ac}{2}$, puisque l'on a pour $c = 0$

$$Q_2(\beta, g) = Q_1(\beta, g),$$

et que, lorsque c tend vers zéro, les quantités

$$\frac{c^g}{2^{g-1}} Q_2(\beta, g), \quad \frac{c^g}{2^{g-1}} Q_1(\beta, g)$$

tendent vers l'expression que nous avons représentée par $Q_g(R)$ dans le n° **15**.

18. Donnons ensuite le développement de N. Dans le cas où a est nul, N se réduit à

$$N_0 = \pi(\log r - 2\log 2).$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} r^2 = & \frac{c^2}{4}[(e^\beta + e^{-\beta})\cos\alpha - (e^b + e^{-b})\cos\alpha_1]^2 \\ & + \frac{c^2}{4}[(e^\beta - e^{-\beta})\sin\alpha - (e^b - e^{-b})\sin\alpha_1]^2, \end{aligned}$$

et cette expression peut se décomposer en facteurs de la manière suivante :

$$\begin{aligned} r^2 = \frac{c^2 e^{2b}}{4}\Big[&\left(1 - e^\beta e^{-(\alpha-\alpha_1)\sqrt{-1}} e^{-b}\right)\left(1 - e^{-\beta} e^{-(\alpha+\alpha_1)\sqrt{-1}} e^{-b}\right) \\ &\left(1 - e^\beta e^{(\alpha-\alpha_1)\sqrt{-1}} e^{-b}\right)\left(1 - e^{-\beta} e^{(\alpha+\alpha_1)\sqrt{-1}} e^{-b}\right)\Big]. \end{aligned}$$

Supposons $b > \beta$ et prenons les logarithmes des deux membres en appliquant la formule

$$\log(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \ldots,$$

et nous aurons

$$\begin{aligned} \log r = \log\frac{ce^b}{2} - \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{e^b}\cos\alpha\cos\alpha_1 - \ldots - \frac{1}{g}\frac{e^{g\beta}+e^{-g\beta}}{e^{gb}}\cos g\alpha\cos g\alpha_1 - \ldots \\ - \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{e^b}\sin\alpha\sin\alpha_1 - \ldots - \frac{1}{g}\frac{e^{g\beta}-e^{-g\beta}}{e^{gb}}\sin g\alpha\sin g\alpha_1 - \ldots. \end{aligned}$$

Ainsi l'on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}N_0 = \log\frac{ce^b}{8} & - 2\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}e^{-b}\cos\alpha\cos\alpha_1 - \ldots \\ & - \frac{2}{g}\frac{e^{g\beta} + e^{-g\beta}}{2}e^{-gb}\cos g\alpha\cos g\alpha_1 - \ldots \\ & - 2\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2}e^{-b}\sin\alpha\sin\alpha_1 - \ldots \\ & - \frac{2}{g}\frac{e^{g\beta} - e^{-g\beta}}{2}e^{-gb}\sin g\alpha\sin g\alpha_1 - \ldots. \end{aligned}$$

Examinons ce que deviennent les fonctions P_1, P_2, Q_1, Q_2 pour $a = 0$. Alors

$$P_2(\alpha, g) \text{ se réduit à } \cos g\alpha, \qquad Q_2(\beta, g) \text{ à } \frac{e^{g\beta} + e^{-g\beta}}{2};$$

$$P_1(\alpha, g) \text{ se réduit à } \sin g\alpha, \qquad Q_1(\beta, g) \text{ à } \frac{e^{g\beta} - e^{-g\beta}}{2};$$

$P_2(\alpha, 0)$ et $Q_2(\beta, 0)$ se réduisent à l'unité; quant à la fonction $P_1(\alpha, 0)$, elle est nulle, quel que soit α.

L'équation qui donne Q est

$$\frac{d^2Q}{d\beta^2} - [R - h^2(e^{2\beta} + e^{-2\beta})]Q = 0,$$

et pour $a = 0$, on a $h = 0$, $R = g^2$; donc la solution générale de cette équation se réduit à

$$Q = Ce^{g\beta} + C'e^{-g\beta};$$

on en déduit pour solutions particulières

$$Q_2 = \frac{e^{g\beta} + e^{-g\beta}}{2}, \quad Q_1 = \frac{e^{g\beta} - e^{-g\beta}}{2},$$

et, de plus,

$$Q' = e^{-g\beta},$$

que nous pourrons écrire

$$Q' = Q_2 - Q_1.$$

Quand h est quelconque, en posant

$$m = R - 2h^2,$$

nous aurons

$$Q_1 = \beta + m\frac{\beta^3}{2.3} + (m^2 - 24h^2)\frac{\beta^5}{2.3.4.5} + \ldots,$$

$$Q_2 = 1 + m\frac{\beta^2}{1.2} + (m^2 - 8h^2)\frac{\beta^4}{2.3.4} + \ldots.$$

$P_1(\alpha, g)$ et $P_2(\alpha, g)$ ont 2π pour période, et les fonctions $Q_2(\beta, g)$ et

$Q_1(\beta, g)$, qui se déduisent des deux précédentes par le changement de α en $\beta\sqrt{-1}$, ont $2\pi\sqrt{-1}$ pour période. Si la quantité R, qui entre dans la fonction Q_1 ou Q_2, ne la rend pas périodique, nous la représenterons par

$$Q_1[\beta, R] \quad \text{ou} \quad Q_2[\beta, R].$$

Le terme général de N_0 renferme en facteur e^{-gb}; donc le terme de N, qui correspond au terme

$$-\frac{2}{g}\frac{e^{g\beta}+e^{-g\beta}}{2}e^{-gb}\cos g\alpha\cos g\alpha_1,$$

qui appartient à N_0, doit renfermer en facteur une fonction, que nous désignerons par $Q'(b, R_g)$, de la forme

$$(c) \qquad AQ_2(b, g) - BQ_1[b, R_g],$$

R_g étant la quantité R qui se trouve dans $P_2(\alpha, g)$, et A, B étant des constantes qui se réduisent à l'unité pour $h = 0$. Et le terme de N, qui correspond au terme

$$-\frac{2}{g}\frac{e^{g\beta}-e^{-g\beta}}{2}e^{-gb}\sin g\alpha\sin g\alpha_1,$$

qui appartient à N_0, renferme en facteur une fonction, que nous désignerons par $Q'\{b, R'_g\}$, de la forme

$$(d) \qquad DQ_2[b, R'_g] - EQ_1(b, g),$$

R'_g étant la quantité R qui se trouve dans $P_1(\alpha, g)$, et D, E étant des constantes qui se réduisent à l'unité pour $h = 0$.

Pour $g = 0$, la fonction $Q'(b, R_g)$ n'est plus de la forme (c). Quand on y fait $h = 0$, cette fonction satisfait à l'équation

$$\frac{d^2Q}{d\beta^2} = 0, \quad \text{d'où} \quad Q = C + C'\beta;$$

et pour $h = 0$, $Q'(\beta, R_0)$ se réduit à

$$\log\frac{c}{8} + \beta \quad \text{ou} \quad \log\frac{ce^\beta}{8},$$

qui est le premier terme de N_0. Donc, pour une valeur quelconque de h, on aura

$$(e) \qquad Q'(b, R_0) = A \log\frac{c}{g} Q_2(b, o) + BQ_1[b, R_0],$$

A et B étant des constantes qui se réduisent à l'unité pour $h = o$.

D'après cela, on a pour le développement de N, lorsque β est $< b$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}N = Q_2(\beta, o)Q'(b, R_0)P_2(\alpha, o)P_2(\alpha_1, o)&\\ - 2Q_2(\beta, 1)Q'(b, R_1)P_2(\alpha, 1)P_2(\alpha_1, 1)&\\ - 2Q_1(\beta, 1)Q'\{b, R'_1\}P_1(\alpha, 1)P_1(\alpha_1, 1)&\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ -\frac{2}{g}Q_2(\beta, g)Q'(b, R_g)P_2(\alpha, g)P_2(\alpha_1, g) - \ldots&\\ -\frac{2}{g}Q_1(\beta, g)Q'\{b, R'_g\}P_1(\alpha, g)P_1(\alpha_1, g) - \ldots.&\end{aligned}$$

Il faut remarquer que dans cette formule les fonctions Q' n'ont pas été complétement définies, parce que nous n'avons rien dit des constantes A, B, D, E qui entrent dans (c), (d), (e), si ce n'est qu'elles se réduisent à l'unité pour $h = o$.

Développements en séries des quantités $\frac{\sin ar}{r}$, $\frac{\cos ar}{r}$.

19. Les quantités

$$K = \frac{\sin ar}{ar}, \quad L = \frac{\cos ar}{r},$$

dans lesquelles r désigne la distance du point (x, y, z) à un point fixe (α, β, γ), satisfont, comme nous avons vu (n° 4), à l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = -a^2u.$$

Prenant des coordonnées sphériques, nous poserons

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta\cos\psi, \quad z = R\sin\theta\sin\psi,$$

et si A, θ', ψ' sont les coordonnées sphériques de la seconde extrémité de r, nous aurons

$$\alpha = \mathrm{A}\cos\theta',\quad \beta = \mathrm{A}\sin\theta'\cos\psi',\quad \gamma = \mathrm{A}\sin\theta'\sin\psi'.$$

Nous aurons, par suite,

$$r^2 = \mathrm{A}^2 - 2\mathrm{AR}\cos\omega + \mathrm{R}^2$$

en posant

$$\cos\omega = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi').$$

Calculons d'abord K; nous aurons

$$\mathrm{K} = 1 - \frac{a^2r^2}{2.3} + \frac{a^4r^4}{2.3.4.5} - \frac{a^6r^6}{2.3.4.5.6.7} + \ldots,$$

ou

$$\begin{aligned}\mathrm{K} = 1 &- a^2\frac{\mathrm{A}^2+\mathrm{R}^2-2\mathrm{AR}\cos\omega}{1.2.3}\\ &+ \frac{a^4}{2.3.4.5}[(\mathrm{A}^2+\mathrm{R}^2)^2 - 4\mathrm{AR}(\mathrm{A}^2+\mathrm{R}^2)\cos\omega + 4\mathrm{A}^2\mathrm{R}^2\cos^2\omega]\\ &- \frac{a^6}{2.3\ldots7}[(\mathrm{A}^2+\mathrm{R}^2)^3 - 6\mathrm{AR}(\mathrm{A}^2+\mathrm{R}^2)^2\cos\omega + 12\mathrm{A}^2\mathrm{R}^2\cos^2\omega\\ &\qquad\qquad - 8\mathrm{A}^3\mathrm{R}^3\cos^3\omega]\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Ordonnant par rapport aux puissances de $\cos\omega$, nous aurons

$$\begin{aligned}\mathrm{K} = 1 &- \frac{a^2(\mathrm{A}^2+\mathrm{R}^2)}{2.3} + \frac{a^4}{2.3.4.5}(\mathrm{A}^2+\mathrm{R}^2)^2 - \frac{a^6}{2.3\ldots7}(\mathrm{A}^2+\mathrm{R}^2)^3 + \ldots\\ &+ a^2\cos\omega\left[\frac{2\mathrm{AR}}{2.3} - \frac{a^2}{2.3.4.5}4\mathrm{AR}(\mathrm{A}^2+\mathrm{R}^2)\right.\\ &\qquad\qquad \left. + \frac{a^6}{2.3\ldots7}6\mathrm{AR}(\mathrm{A}^2+\mathrm{R}^2)^2 - \ldots\right]\\ &+ a^4\cos^2\omega\left[\frac{4\mathrm{A}^2\mathrm{R}^2}{2.3.4.5} - \frac{a^2}{2.3\ldots7}12\mathrm{A}^2\mathrm{R}^2(\mathrm{A}^2+\mathrm{R}^2) + \ldots\right]\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Les X_n de Legendre sont donnés par la formule

$$X_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2\ldots n}\left[\cos^n\omega - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-2}\omega + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}\cos^{n-4}\omega - \ldots\right],$$

et en faisant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots$, on obtient

$$X_1 = \cos\omega, \quad \frac{1.2}{1.3}X_2 = \cos^2\omega - \frac{1}{3},$$

$$\frac{1.2.3}{1.3.5}X_3 = \cos^3\omega - \frac{3}{5}\cos\omega,$$

$$\frac{1.2.3.4}{1.3.5.7}X_4 = \cos^4\omega - \frac{4.3}{2.7}\cos^2\omega + \frac{4.3.2.1}{2.4.7.5}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

De ces équations on peut déduire successivement $\cos\omega, \cos^2\omega, \cos^3\omega, \ldots$ en fonction de $X_1, X_2, \ldots$, et l'on obtient

$$\cos\omega = X_1, \quad \cos^2\omega = \frac{1.2}{2.3}X_2 + \frac{1}{3},$$

$$\cos^3\omega = \frac{1.2.3}{1.3.5}X_3 + \frac{3}{5}X_1,$$

$$\cos^4\omega = \frac{1.2.3.4}{1.3.5.7}X_4 + \frac{6}{7}\frac{1.2}{1.3}X_2 + \frac{1}{5},$$

$$\cos^5\omega = \frac{1.2.3.4.5}{1.3.5.7.9}X_5 + \frac{10}{9}\frac{1.2.3}{1.3.5}X_3 + \frac{3}{7}X_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En substituant ces expressions dans la formule qui donne K et en posant, en général,

$$T_n(R) = R^n\left[1 - \frac{a^2}{2(2n+3)}R^2 + \frac{a^4}{2.4(2n+3)(2n+5)}R^4 - \frac{a^6}{2.4.6(2n+3)(2n+5)(2n+7)}R^6 + \ldots\right],$$

on trouvera facilement cette formule remarquable

$$K = T_0(A)T_0(R) + \frac{a^2}{3}T_1(A)T_1(R)X_1 + \frac{a^4}{3^2.5}T_2(A)T_2(R)X_2$$
$$+ \frac{a^6}{3^2.5^2.7}T_3(A)T_3(R)X_3 + \frac{a^8}{3^2.5^2.7^2.9}T_4(A)T_4(R)X_4$$
$$+ \frac{a^{10}}{3^2.5^2 7^2.9^2.11}T_5(A)T_5(R)X_5 + \ldots.$$

Remarque. — Multiplions les deux membres de cette formule par $X_n \sin\omega\, d\omega$; en intégrant de o à π et remarquant que l'on a

$$\int_0^\pi X_n X_p \sin\omega\, d\omega = 0,$$

si n et p sont deux nombres entiers différents, on aura

$$\int_0^\pi \frac{\sin ar}{r} X_n \sin\omega\, d\omega$$
$$= \frac{a^{2n+1}}{3^2.5^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)} T_n(A)T_n(R)\int_0^\pi X_n^2 \sin\omega\, d\omega.$$

D'ailleurs on a

$$\int_0^\pi X_n^2 \sin\omega\, d\omega = \frac{2}{2n+1}.$$

(Voir *Calcul intégral* de M. Bertrand, p. 548.) On a donc

$$\int_0^\pi \frac{\sin ar}{r} X_n \sin\omega\, d\omega = \frac{2a^{2n+1}}{3^2.5^2\ldots(2n+1)^2} T_n(A)T_n(R).$$

$T_n(A)$ et $T_n(R)$ peuvent être regardés comme des intégrales définies; car on a

$$T_n(R) = \frac{1}{2}\,\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots 2n} R^n \int_0^\pi \cos(Ra\cos\omega)\sin^{2n+1}\omega\, d\omega \text{ [*]}.$$

20. Occupons-nous ensuite de la fonction

$$L = \frac{\cos ar}{r}.$$

---

[*] D'après une formule de Legendre, ces deux quantités peuvent aussi s'exprimer sous forme finie. (*Voir* notre *Cours de Physique mathématique*, n° 88.)

Dans le cas où a est nul, on a, en supposant $R < A$, le développement bien connu

$$(f) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{A} + \frac{R}{A^2}X_1 + \frac{R^2}{A^3}X_2 + \ldots + \frac{R^n}{A^{n+1}}X_n + \ldots.$$

Cherchons à passer au cas où a n'est pas nul. L satisfait à l'équation

$$\Delta u = -a^2 u.$$

Si nous adoptons des coordonnées sphériques, cette équation prend la forme suivante :

$$\frac{d\left(R^2\frac{du}{dR}\right)}{dR} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2u}{d\psi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\frac{du}{d\theta}\sin\theta}{d\theta} = -a^2R^2u.$$

Cherchons une solution de cette équation qui ne dépende que de R et ω. Pour y arriver, prenons pour l'axe polaire des coordonnées sphériques un rayon qui passe par l'extrémité (α, β, γ) de r; alors ω sera égal à θ, et u, ne dépendant que de R et ω, sera donné par l'équation

$$\frac{d\left(R^2\frac{du}{dR}\right)}{dR} + \frac{1}{\sin\omega}\frac{d\left(\sin\omega\frac{du}{d\omega}\right)}{d\omega} = -a^2R^2u.$$

Particularisons encore cette solution en supposant qu'elle soit le produit d'une fonction de R par une fonction X_n; posons

$$(g) \qquad u = F(R)X_n.$$

Comme X_n satisfait à l'équation

$$\frac{1}{\sin\omega}\frac{d\left(\sin\omega\frac{dX_n}{d\omega}\right)}{d\omega} + n(n+1)X_n = 0,$$

F(R) est donné par l'équation

$$\frac{d\left(R^2\frac{dF}{dR}\right)}{dR} - [n(n+1) - a^2R^2]F = 0.$$

Si ensuite on désigne par C et C′ deux constantes arbitraires, on a

$$F = CT_n(R) + C'S_n(R),$$

$T_n(R)$ étant la fonction ainsi désignée dans ce qui précède, et $S_n(R)$ ayant pour valeur

$$S_n(R) = R^{-n-1}\left[1 + \frac{a^2R^2}{2(2n-1)} + \frac{a^4R^4}{2.4(2n-1)(2n-3)} + \frac{a^6R^6}{2.4.6(2n-1)(2n-3)(2n-5)} + \ldots\right].$$

Les termes de la série qui compose L doivent être de la forme de l'expression (g), et, comme le terme général de L doit être composé en A et ω, comme il l'est en R et ω, si l'on désigne son rang par $n+1$, il sera de la forme

$$[BT_n(A) + B'S_n(A)][CT_n(R) + C'S_n(R)]X_n,$$

B et B′ étant deux constantes arbitraires. Pour $a = 0$, il devient

$$\left(BA^n + B'\frac{1}{A^{n+1}}\right)\left(CR^n + C'\frac{1}{R^{n+1}}\right)X_n;$$

mais pour $a = 0$, L se réduit à $\frac{1}{r}$, son développement à (f) et le terme en question à

$$\frac{1}{A^{n+1}}R^nX_n.$$

Ainsi l'on a

$$B = 0, \quad B' = 1, \quad C = 1, \quad C' = 0,$$

et le terme général de L est

$$S_n(A)T_n(R)X_n.$$

Donc enfin l'on a, si R est $<$ A, la formule suivante :

$$L = S_0(A)T_0(R) + S_1(A)T_1(R)X_1 + \ldots + S_n(A)T_n(R)X_n + \ldots.$$

Nous allons donner des applications des développements précédents.

Intégration de l'équation $\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=-a^2u$ dans l'intérieur d'un cercle.

21. Supposons qu'une fonction u satisfasse à l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=-a^2u \tag{1}$$

dans l'intérieur d'un cercle de rayon H, et que sa valeur soit donnée sur le contour de ce cercle; nous allons montrer comment on pourra la déterminer.

D'après le théorème du n° **14**, la fonction u peut être mise sous la forme

$$u=\int N\rho\, ds,\quad \text{avec}\quad N=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(ar\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)\,d\omega, \tag{2}$$

ds désignant l'élément de la circonférence du cercle et l'intégrale se rapportant à la circonférence entière; de plus, ρ désigne une fonction d'un point du contour.

Supposons que les deux axes rectangulaires passent par le centre du cercle, et prenons des coordonnées polaires en posant

$$x=R\cos\alpha,\quad y=R\sin\alpha;$$

les coordonnées d'un point quelconque du cercle seront H et α_1, que nous ferons varier de 0 à 2π. Alors on a

$$r^2=H^2-2HR\cos(\alpha-\alpha_1)+R^2,\quad ds=H\,d\alpha_1,$$

et, ρ étant une fonction de α_1 qui n'est assujettie qu'à rester invariable quand on augmente α_1 de 2π, on pourra poser

$$\rho=A_0+A_1\cos\alpha_1+B_1\sin\alpha_1+A_2\cos2\alpha_1+B_2\sin2\alpha_1+\ldots.$$

D'ailleurs, R étant $<$ H, on a (n° **16**)

$$\frac{1}{\pi}\mathrm{N} = \mathrm{Q}_0(\mathrm{R})\mathrm{Q}'_0(\mathrm{H}) - \mathrm{Q}_1(\mathrm{R})\mathrm{Q}'_1(\mathrm{H})(\cos\alpha\cos\alpha_1 + \sin\alpha\sin\alpha_1) - \ldots$$
$$- \frac{1}{n}\mathrm{Q}_n(\mathrm{R})\mathrm{Q}'_n(\mathrm{H})(\cos n\alpha\cos n\alpha_1 + \sin n\alpha\sin n\alpha_1) - \ldots,$$

et, comme on a

$$\int_0^{2\pi}\cos n\alpha_1\cos p\alpha_1\,d\alpha_1 = 0,$$
$$\int_0^{2\pi}\sin n\alpha_1\sin p\alpha_1\,d\alpha_1 = 0,$$
$$\int_0^{2\pi}\sin n\alpha_1\cos p\alpha_1\,d\alpha_1 = 0,$$

si n et p sont deux entiers quelconques, distincts toutefois dans les deux premières intégrales, on obtient

$$\frac{1}{\pi}\int \mathrm{N}\rho\,ds = \mathrm{A}_0\mathrm{Q}_0(\mathrm{R})\mathrm{Q}'_0(\mathrm{H})\,2\pi\mathrm{H} - \mathrm{Q}_1(\mathrm{R})\mathrm{Q}'_1(\mathrm{H})\pi\mathrm{H}(\mathrm{A}_1\cos\alpha + \mathrm{B}_1\sin\alpha) - \ldots$$
$$- \frac{1}{n}\mathrm{Q}_n(\mathrm{R})\mathrm{Q}'_n(\mathrm{H})\pi\mathrm{H}(\mathrm{A}_n\cos n\alpha + \mathrm{B}_n\sin n\alpha) - \ldots.$$

Cette série peut s'écrire plus simplement

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \int \mathrm{N}\rho\,ds = \mathrm{C}_0\mathrm{Q}_0(\mathrm{R}) &+ (\mathrm{C}_1\cos\alpha + \mathrm{D}_1\sin\alpha)\mathrm{Q}_1(\mathrm{R}) + \ldots \\ &+ (\mathrm{C}_n\cos n\alpha + \mathrm{D}_n\sin n\alpha)\mathrm{Q}_n(\mathrm{R}) + \ldots, \end{aligned}\right.$$

$\mathrm{C}_0, \mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{D}_0, \mathrm{D}_1, \ldots$ étant des coefficients que l'on déterminera par la condition que cette série soit sur le contour du cercle une fonction donnée de α.

22. Supposons ensuite que la fonction u satisfasse à l'équation (1) dans l'intervalle compris entre deux cercles concentriques, et que sa valeur soit donnée sur les contours de ces deux cercles.

Désignons par h le rayon du plus petit cercle et par H celui du plus grand. Représentons par r la distance du point (x, y) à un point quelconque du cercle extérieur, et par r_1 la distance de ce point à un point quelconque du cercle intérieur. D'après le théorème du n° **14**, u pourra être mis sous la forme

$$u = \int N\rho H d\alpha_1 + \int N_1 \rho_1 h d\alpha_1,$$

ρ et ρ_1 étant des fonctions de α_1, qui ont 2π pour période, et N et N_1 ayant pour valeurs

$$N = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(ar\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)\,d\omega,$$

$$N_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(ar_1\cos\omega)\log(r_1\sin^2\omega)\,d\omega.$$

La première intégrale qui compose u peut être représentée par la série (3), et il reste à nous occuper de la seconde.

Comme h est $< R$, on aura

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}N_1 = {} & Q'_0(R)\,Q_0(h) - \dots \\ & - \frac{1}{n}Q'_n(R)\,Q_n(h)(\cos n\alpha\cos n\alpha_1 + \sin n\alpha\sin n\alpha_1) - \dots,\end{aligned}$$

et le calcul qui a conduit à la formule (3) nous donnera

$$\begin{aligned}\int N_1\rho_1 h\,d\alpha_1 = {} & E_0Q'_0(R) + (E_1\cos\alpha + F_1\sin\alpha)\,Q'_1(R) + \dots \\ & + (E_n\cos n\alpha + F_n\sin n\alpha)\,Q'_n(R) + \dots.\end{aligned}$$

Nous aurons donc

$$\begin{aligned}u = {} & C_0Q_0(R) + \dots + (C_n\cos n\alpha + D_n\sin n\alpha)\,Q_n(R) + \dots \\ & + E_0Q'_0(R) + \dots + (E_n\cos n\alpha + F_n\sin n\alpha)\,Q'_n(R) + \dots,\end{aligned}$$

et l'on pourra déterminer les coefficients d'après les deux conditions que u soit une fonction donnée de α pour $R = h$ et une autre fonction de α pour $R = H$.

23. Dans le premier cas que nous venons d'examiner et où la fonction u satisfait à l'équation (1) dans tout l'espace renfermé dans le cercle de rayon H, la fonction u peut être mise sous la forme plus simple

$$(4) \qquad u = \int M\rho\,ds \quad \text{avec} \quad M = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(ar\cos\omega)\,d\omega.$$

En effet, on a (n° **15**)

$$M = Q_0(H)Q_0(R) + \dots$$
$$+ 2\frac{a^{2n}}{(2.4.6\dots 2n)^2} Q_n(H)\,Q_n(R)\cos n(\alpha - \alpha_1) + \dots,$$

et le raisonnement qui nous a conduit à la formule (3) nous donnera de même

$$\int M\rho\, ds = C_0 Q_0(R) + \dots + (C_n \cos n\alpha + D_n \sin n\alpha)\, Q_n(R) + \dots,$$

C_0, C_1, D_1,... étant des coefficients indéterminés.

Mais si la fonction u satisfait à l'équation (1) seulement dans un espace annulaire, la formule (4) ne peut plus être adoptée.

Intégration de l'équation $\Delta u = -a^2 u$ dans l'intérieur d'une ellipse.

24. Supposons qu'une fonction satisfasse à l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = -a^2 u \tag{1}$$

dans l'intérieur d'une ellipse, et que sa valeur soit donnée sur le contour de cette ellipse.

Représentons la fonction u par

$$\int N\rho\, ds, \tag{2}$$

ds étant un élément du contour. Adoptant les notations du n° **17**, posons

$$x = c\,\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}\cos\alpha, \quad y = c\,\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2}\sin\alpha,$$

et représentons par

$$\beta = b$$

l'équation de l'ellipse du contour; un point de ce contour aura dans le système elliptique pour coordonnées la constante b et la variable α_1, qui peut varier de 0 à 2π.

La coordonnée β d'un point quelconque pris dans l'intérieur de l'ellipse étant $< b$, nous aurons (n° **18**)

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\mathrm{N} = {} & \mathrm{Q}_2(\beta, 0)\,\mathrm{Q}'(b, \mathrm{R}_0)\,\mathrm{P}_2(\alpha, 0)\,\mathrm{P}_2(\alpha_1, 0) + \ldots \\ & - \frac{2}{g}\mathrm{Q}_2(\beta, g)\,\mathrm{Q}'(b, \mathrm{R}_g)\,\mathrm{P}_2(\alpha, g)\,\mathrm{P}_2(\alpha_1, g) - \ldots \\ & - \frac{2}{g}\mathrm{Q}_1(\beta, g)\,\mathrm{Q}'\{b, \mathrm{R}'_g\}\,\mathrm{P}_1(\alpha, g)\,\mathrm{P}_1(\alpha_1, g) - \ldots. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a, en désignant par x_1, y_1 les coordonnées rectilignes d'un point du contour,

$$ds = d\alpha_1 : \sqrt{\left(\frac{d\alpha_1}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_1}{dy_1}\right)^2} = c\sqrt{\left(\frac{e^b + e^{-b}}{2}\right)^2 - \cos^2\alpha_1}\, d\alpha_1$$

et

$$(b)\qquad u = \int \mathrm{N}\rho c \sqrt{\left(\frac{e^b + e^{-b}}{2}\right)^2 - \cos^2\alpha_1}\, d\alpha_1.$$

ρ n'est fonction que de α_1, et la quantité

$$\rho c \sqrt{\left(\frac{e^b + e^{-b}}{2}\right)^2 - \cos^2\alpha_1}$$

peut être mise sous la forme

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned} & \mathrm{A}_0\mathrm{P}_2(\alpha_1, 0) + \mathrm{A}_1\mathrm{P}_2(\alpha_1, 1) + \mathrm{A}_2\mathrm{P}_2(\alpha_1, 2) + \ldots + \mathrm{A}_g\mathrm{P}_2(\alpha_1, g) + \ldots \\ & \qquad + \mathrm{B}_1\mathrm{P}_1(\alpha_1, 1) + \mathrm{B}_2\mathrm{P}_1(\alpha_1, 2) + \ldots + \mathrm{B}_g\mathrm{P}_1(\alpha_1, g) + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Désignons ensuite par P et P′ deux quelconques des fonctions P_1 et P_2; elles satisfont aux deux équations

$$\frac{d^2\mathrm{P}}{d\alpha^2} + (\mathrm{R} - 2h^2\cos 2\alpha)\,\mathrm{P} = 0,$$

$$\frac{d^2\mathrm{P}'}{d\alpha^2} + (\mathrm{R}' - 2h^2\cos 2\alpha)\,\mathrm{P}' = 0.$$

En les combinant, on a

$$\mathrm{P}'\frac{d^2\mathrm{P}}{d\alpha^2} - \mathrm{P}\frac{d^2\mathrm{P}'}{d\alpha^2} + (\mathrm{R} - \mathrm{R}')\,\mathrm{P}\mathrm{P}' = 0.$$

Multiplions par $d\alpha$ et intégrons de o à 2π; nous aurons

$$\left(P'\frac{dP}{d\alpha} - P\frac{dP'}{d\alpha}\right)_0^{2\pi} + (R - R')\int_0^{2\pi} PP'd\alpha = 0.$$

Or P, P', et par suite leurs dérivées, ont pour période 2π; donc, si R est différent de R' ou P de P', l'équation précédente se réduit à

$$(d) \qquad \int_0^{2\pi} PP'd\alpha = 0.$$

Substituons les séries (a) et (c) dans la formule (b) et nous trouverons

$$(e)\left\{\begin{aligned} \int N\rho ds = {} & C_0 P_2(\alpha,0)Q_2(\beta,0) + C_1 P_2(\alpha,1)Q_2(\beta,1) + \ldots + C_g P_2(\alpha,g)Q_2(\beta,g) + \ldots \\ & + D_1 P_1(\alpha,1)Q_1(\beta,1) + \ldots + D_g P_1(\alpha,g)Q_1(\beta,g) + \ldots \end{aligned}\right.$$

Si la valeur de u est donnée pour $\beta = b$, on déterminera facilement les coefficients C et D, en s'appuyant sur la formule (d).

Au lieu d'adopter la formule (2), on peut prendre

$$u = \int M\rho\, ds,$$

et l'on trouvera pour son développement la série du second membre de la formule (e), dont les coefficients pourront être déterminés par la condition du contour.

25. Supposons ensuite que la fonction u satisfasse à l'équation (1) dans l'intervalle compris entre deux ellipses homofocales, et que sa valeur soit donnée sur les contours de ces deux ellipses.

Soient respectivement

$$\beta = b, \quad \beta = f$$

les équations de l'ellipse extérieure et de l'ellipse intérieure. D'après le théorème du n° **14**, u pourra être mis sous la forme

$$u = \int N\rho\, ds + \int N_1\rho_1\, ds_1,$$

la première intégrale se rapportant à l'ellipse extérieure et la seconde à l'ellipse intérieure. La première intégrale est donnée par la formule (e), et il reste à nous occuper de la seconde.

Comme la coordonnée β d'un point quelconque renfermée entre les deux ellipses est $> f$, N_1 se développe de la manière suivante (n° **18**):

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} N_1 = & Q_2(f, o) Q'(\beta, R_0) P_2(\alpha, o) P_2(\alpha_1, o) + \dots \\ & - \frac{2}{g} Q_2(f, g) Q'(\beta, R_g) P_2(\alpha, g) P_2(\alpha_1, g) - \dots \\ & - \frac{2}{g} Q_1(f, g) Q'\{\beta, R'_g\} P_1(\alpha, g) P_1(\alpha_1, g) - \dots\end{aligned}$$

On en conclura facilement que l'on a

$$\begin{aligned}\int N_1 \rho_1 ds_1 = & E_0 P_2(\alpha, o) Q'(\beta, R_0) + \dots + E_g P_2(\alpha, g) Q'(\beta, R_g) + \dots \\ & + \dots + F_g P_1(\alpha, g) Q'\{\beta, R'_g\} + \dots\end{aligned}$$

Donc on aura

$$\begin{aligned}u = & P_2(\alpha,o)[C_0 Q_2(\beta,o) + E_0 Q'(\beta,R_0)] + \dots + P_2(\alpha,g)[C_g Q_2(\beta,g) + E_g Q'(\beta,R_g)] + \dots \\ & + \dots + P_1(\alpha,g)[D_g Q_1(\beta,g) + F_g Q'\{\beta,R'_g\}] + \dots\end{aligned}$$

En se rappelant la définition des fonctions Q' données au n° **18**, on en conclura

$$\begin{aligned}u = & P_2(\alpha,o)[A_0 Q_2(\beta,o) + B_0 Q_1[\beta,R_0]] + \dots + P_2(\alpha,g)[A_g Q_2(\beta,g) + B_g Q_1[\beta,R_g]] + \dots \\ & + \dots + P_1(\alpha,g)[A'_g Q_1(\beta,g) + B'_g Q_2[\beta,R'_g]] + \dots\end{aligned}$$

et l'on pourra déterminer les coefficients A_g, B_g, A'_g, B'_g d'après les deux conditions que u soit une fonction donnée de α pour $\beta = b$ et $\beta = f$.

Intégration de l'équation $\Delta u = -a^2 u$ dans l'intérieur d'une sphère.

26. Supposons qu'une fonction u satisfasse à l'équation

$$\Delta u = -a^2 u \tag{1}$$

dans l'intérieur d'une sphère du rayon A et que sa valeur soit donnée sur la surface de cette sphère; il s'agit de la déterminer.

D'après le théorème démontré au n° **13**, la fonction u peut être mise sous la forme

$$(2) \qquad u = \int \frac{\cos ar}{r} \rho\, d\sigma,$$

ρ désignant une fonction d'un point de la surface, r la distance d'un point de la surface au point (x, y, z); de plus $d\sigma$ est l'élément de la surface, et l'intégrale se rapporte à la surface entière de la sphère.

Supposons que les axes rectangulaires passent par le centre de la sphère, et prenons des coordonnées sphériques, en posant

$$x = \mathrm{R}\cos\theta, \quad y = \mathrm{R}\sin\theta\cos\psi, \quad z = \mathrm{R}\sin\theta\sin\psi;$$

les coordonnées sphériques d'un point quelconque de la surface de la sphère seront A, θ_1, ψ_1, et la distance r du point (x, y, z) à ce point de la sphère sera donnée par la formule

$$r^2 = \mathrm{A}^2 - 2\mathrm{AR}\cos\omega + \mathrm{R}^2$$

avec

$$\cos\omega = \cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos(\psi - \psi_1);$$

de plus on aura

$$d\sigma = \mathrm{A}^2\sin\theta_1\, d\theta_1\, d\psi_1.$$

R étant $<$ A, on a (n° **20**)

$$(3) \qquad \frac{\cos ar}{r} = \mathrm{S}_0(\mathrm{A})\mathrm{T}_0(\mathrm{R}) + \mathrm{S}_1(\mathrm{A})\mathrm{T}_1(\mathrm{R})\mathrm{X}_1 + \ldots + \mathrm{S}_n(\mathrm{A})\mathrm{T}_n(\mathrm{R})\mathrm{X}_n + \ldots;$$

ρ est une fonction d'un point de la surface de la sphère. Or désignons par Y_n la fonction

$$\mathrm{Y}_n = \sum_{l=0}^{l=n} (\mathrm{A}_l\cos l\psi + \mathrm{B}_l\sin l\psi)\,\Theta_{n,l}$$

avec

$$\Theta_{n,l} = \cos^l\theta\Big[\cos^{n-l}\theta - \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-l-2}\theta + \frac{(n-l)(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\cos^{n-l-4}\theta - \ldots\Big],$$

et représentons par Y'_n ce que devient Y_n quand on y remplace θ et ψ par θ_1 et ψ_1; d'après un théorème bien connu de Laplace, ρ peut être développé en une série de cette forme

$$(4) \qquad \rho = Y'_0 + Y'_1 + Y'_2 + \ldots + Y'_n + \ldots .$$

Substituons dans la formule (2) les séries (3) et (4) et employons les formules

$$\int X_n Y'_p \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\psi_1 = 0, \qquad \int X_n Y'_n \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\psi_1 = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n;$$

nous aurons

$$(5) \qquad u = T_0(R)\, J_0 + T_1(R)\, J_1 + \ldots + T_n(R)\, J_n + \ldots,$$

en désignant par J_n une fonction telle que Y_n, et qui renferme $2n+1$ constantes arbitraires.

Alors on déterminera les coefficients renfermés dans les Y_n de cette série, en se servant de la condition que, pour $R = A$, la série a une valeur donnée $F(\theta, \psi)$; d'où résulte

$$T_0(A) J_0 + T_1(A) J_1 + \ldots + T_n(A) J_n + \ldots = F(\theta, \psi).$$

Au lieu de représenter la fonction u par la formule (2), on pourrait la représenter par la formule

$$(6) \qquad u = \int \frac{\sin ar}{r} \rho\, d\sigma;$$

car, si l'on suit littéralement les raisonnements qui précèdent, au lieu de la formule (3), on aura la suivante (n° **19**) :

$$\frac{\sin ar}{ar} = T_0(A) T_0(R) X_0 + \frac{a^2}{3} T_1(A) T_1(R) X_1 + \frac{a^4}{3^2 . 5} T_2(A) T_2(R) X_2 + \ldots,$$

et l'on sera encore conduit à la formule (5).

27. Supposons ensuite qu'une fonction u satisfasse à l'équation (1) seulement dans l'intervalle compris entre la sphère de rayon A et une sphère concentrique de rayon plus petit α; on suppose, de plus, sa valeur donnée sur les surfaces des deux sphères, et il s'agit d'en déduire la fonction u.

La formule (6) n'est plus admissible; mais on sait, au contraire, que la fonction peut être représentée par la formule (2). En conséquence, posons

$$u = \int \frac{\cos ar}{r} \rho A^2 \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\psi_1 + \int \frac{\cos ar_1}{r_1} \rho' \alpha^2 \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\psi_1,$$

r et r_1 étant les distances du point dont les coordonnées sphériques sont R, θ, ψ, et situé entre les deux sphères aux points situés sur les deux sphères, et dont les coordonnées sont A, θ_1, ψ_1 et α, θ_1, ψ_1.

D'après le numéro précédent, on aura

$$\int \frac{\cos ar}{r} \rho A^2 \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\psi_1 = T_0(R) J_0 + T_1(R) J_1 + \ldots + T_n(R) J_n + \ldots.$$

Ensuite, comme α est $< R$, on aura

$$\frac{\cos ar_1}{r_1} = T_0(\alpha) S_0(R) + T_1(\alpha) S_1(R) X_1 + \ldots + T_n(\alpha) S_n(R) X_n + \ldots,$$

et l'on trouvera de la même manière

$$\int \frac{\cos ar_1}{r_1} \rho' \alpha^2 \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\psi_1 = S_0(R) Y_0 + S_1(R) Y_1 + \ldots,$$

les fonctions Y_0, Y_1,... étant des Y_n, semblables à ceux du n° **26**.

Enfin on déterminera les coefficients renfermés dans les fonctions J_n et Y_n, en s'appuyant sur ce que la fonction u a des valeurs données pour $R = A$ et $R = \alpha$.

Intégration de l'équation $\frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \Delta u$ dans le cas de deux dimensions.

28. Imaginons une fonction qui satisfasse dans l'intérieur d'une courbe s à l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2 u}{dt^2} = m^2 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} \right),$$

qui est celle qui régit la vibration transversale d'une membrane.

38..

Nous avons vu dans le n° **6** que l'on a une solution de cette équation en posant

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} u &= \int \psi(r, t, \alpha_1)\,ds,\\ \psi(r, t, \alpha_1) &= \int_0^\pi \mathrm{F}(r\cos\omega + mt, \alpha_1)\log(r\sin^2\omega)\,d\omega, \end{aligned}\right.$$

F étant une fonction arbitraire de deux variables et α_1 une coordonnée propre à déterminer un point de la courbe s. Il ne reste plus qu'à voir si cette formule a la généralité suffisante, et c'est ce que nous allons vérifier en l'appliquant au cas où la courbe s du contour est un cercle, une ellipse, ou composée soit de deux cercles concentriques, soit de deux ellipses homofocales.

29. Supposons d'abord que le contour soit un cercle, et adoptons des coordonnées polaires R et α dont l'origine soit au centre du cercle; la coordonnée angulaire α d'un point du contour est la quantité qui détermine un point quelconque de ce contour, et que nous avons appelée α_1.

Prenons pour $\mathrm{F}(r, \alpha_1)$ une fonction paire en r donnée par une série de la forme suivante :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{F}(r, \alpha_1) = {} & \mathrm{A}_{0,0}\cos(\lambda_{0,0}r) + \mathrm{A}_{0,1}\cos(\lambda_{0,1}r) + \mathrm{A}_{0,2}\cos(\lambda_{0,2}r) + \ldots\\ & + \cos\alpha_1[\mathrm{A}_{1,0}\cos(\lambda_{1,0}r) + \mathrm{A}_{1,1}\cos(\lambda_{1,1}r) + \ldots]\\ & + \sin\alpha_1[\mathrm{B}_{1,0}\cos(\lambda_{1,0}r) + \mathrm{B}_{1,1}\cos(\lambda_{1,1}r) + \ldots]\\ & + \cos 2\alpha_1[\mathrm{A}_{2,0}\cos(\lambda_{2,0}r) + \ldots]\\ & + \sin 2\alpha_1[\mathrm{B}_{2,0}\cos(\lambda_{2,0}r) + \ldots]\\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Remplaçons r par $r\cos\omega + mt$, et, en n'écrivant que le terme général, nous aurons

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(r\cos\omega + mt, \alpha) = \ldots & + \mathrm{A}_{n,p}\cos n\alpha\cos[\lambda_{n,p}(r\cos\omega + mt)]\\ & + \mathrm{B}_{n,p}\sin n\alpha\cos[\lambda_{n,p}(r\cos\omega + mt)] + \ldots. \end{aligned}$$

De là il résulte

$$\psi(r, t, \alpha_1) = \ldots + (A_{n,p}\cos n\alpha_1 + B_{n,p}\sin n\alpha_1)\cos(\lambda_{n,p} mt) \times \int_0^\pi \cos(\lambda_{n,p} r\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)d\omega + \ldots.$$

Or, R étant plus petit que le rayon A du cercle de contour, on a (*voir* n° **16**)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\lambda r\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)d\omega\\ &\quad = Q_0(R,\lambda)Q'_0(A,\lambda) - \ldots\\ &\qquad - \frac{1}{n}Q_n(R,\lambda)Q'_n(A,\lambda)(\cos n\alpha\cos n\alpha_1 + \sin n\alpha\sin n\alpha_1) - \ldots,\end{aligned}$$

en indiquant dans les fonctions Q la quantité λ qui y entre.

On a donc

$$\begin{aligned}\psi(r, t, \alpha_1) &= \ldots + (A_{n,p}\cos n\alpha_1 + B_{n,p}\sin n\alpha_1)\cos(\lambda_{n,p} mt)\\ &\quad\times\left[Q_0(R)Q'_0(A) - \ldots - \frac{1}{n}Q_n(R)Q'_n(A)\cos n(\alpha - \alpha_1) - \ldots\right]\\ &\quad+ \ldots\ldots,\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}u &= \int_0^{2\pi}\psi(r, t, \alpha_1)A\,d\alpha_1\\ &= \ldots - (A_{n,p}\cos n\alpha + B_{n,p}\sin n\alpha)\frac{A}{n}\pi^2 Q'_n(A)Q_n(R)\cos(\lambda_{n,p} mt) - \ldots,\end{aligned}$$

et cette formule peut s'écrire plus simplement

$$(a)\qquad u = \ldots + (C_{n,p}\cos n\alpha + D_{n,p}\sin n\alpha)Q_n(R, \lambda_{n,p})\cos(\lambda_{n,p} mt) + \ldots.$$

On trouve bien dans le second membre la solution générale de l'équation (1) dans le cas où $\frac{du}{dt}$ est nul pour $t = 0$. (*Voir* mon *Mémoire de la membrane elliptique*, t. XIII de ce Journal, p. 143.)

Si, au contraire, u est nul pour $t = 0$, on prendra pour $F(r, \alpha)$ une fonction impaire par rapport à r, et l'on posera

$$(3)\quad \begin{cases} F(r,\alpha_1) = A'_{0,0}\sin(\lambda_{0,0}r) + A'_{0,1}\sin(\lambda_{0,1}r) + \ldots \\ \qquad + \cos\alpha_1[A'_{1,0}\sin(\lambda_{1,0}r) + A'_{1,1}\sin(\lambda_{1,1}r) + \ldots] \\ \qquad + \sin\alpha_1[B'_{1,0}\sin(\lambda_{1,0}r) + \ldots] \\ \qquad + \cos 2\alpha_1[A'_{2,0}\sin(\lambda_{2,0}r) + \ldots] \\ \qquad + \sin 2\alpha_1[B'_{2,0}\sin(\lambda_{2,0}r) + \ldots] \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et, par le calcul précédent, on trouvera

$$(b)\quad u = \ldots + (C'_{n,p}\cos n\alpha + D'_{n,p}\sin n\alpha)Q_n(R,\lambda_{n,p})\sin(\lambda_{n,p}mt) + \ldots$$

Enfin, dans le cas le plus général, u est la somme des séries (a) et (b).

Si u désigne le déplacement transversal d'un point d'une membrane circulaire de rayon A, les quantités λ se déterminent d'après la condition que $Q_n(R,\lambda)$ soit nul pour $R = A$, et à chaque valeur entière de n correspondent une infinité de valeurs de λ.

Les coefficients C, D, C', D', qui se trouvent dans les séries (a) et (b), se déterminent, par un calcul bien connu, d'après les conditions que u et $\frac{du}{dt}$ aient des valeurs données pour $t = 0$. D'après les valeurs que l'on en déduit, on pourrait démontrer que les séries (2) et (3) sont convergentes; nous pourrons revenir sur ce point dans une autre occasion.

30. Supposons maintenant que la courbe s se compose de la même circonférence de rayon A et d'une circonférence de rayon plus petit a. La fonction u satisfait donc à l'équation (1) dans l'intervalle compris entre ces deux cercles.

Nous prendrons pour solution la formule

$$u = \int \psi(r,t,\alpha_1)A\,d\alpha_1 + \int \psi_1(r_1,t,\alpha_1)a\,d\alpha_1;$$

la première intégrale est définie d'après ce qui précède, et pour la seconde nous posons

$$\psi_1(r_1,t,\alpha_1) = \int_0^\pi F_1(r_1\cos\omega + mt, \alpha_1)\log(r_1\sin^2\omega)\,d\omega,$$

r_1 désignant la distance d'un point (x, y) compris entre les deux cercles à un point du contour intérieur.

En changeant les lettres A et B en $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dans $\psi(r, t, \alpha_1)$ pour désigner d'autres constantes, nous aurons, si $F_1(r_1, \alpha)$ est pair en r_1,

$$\psi_1(r_1, t, \alpha_1) = \ldots + (\mathcal{A}_{n,p}\cos n\alpha_1 + \mathcal{B}_{n,p}\sin n\alpha_1)\cos(\lambda_{n,p}mt)$$
$$\times \int_0^\pi \cos(\lambda_{n,p} r_1 \cos\omega)\log(r_1 \sin^2\omega)d\omega + \ldots.$$

Le rayon a étant $< R$, on aura

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\lambda r_1 \cos\omega)\log(r_1 \sin^2\omega)d\omega$$
$$= Q_0(a,\lambda)Q'_0(R,\lambda) - \ldots - \frac{1}{n}Q_n(a,\lambda)Q'_n(R,\lambda)\cos n(\alpha - \alpha_1) - \ldots,$$

et, par suite, on a

$$\int \psi_1(r, t, \alpha_1)\,a\,d\alpha_1$$
$$= \ldots - (\mathcal{A}_{n,p}\cos n\alpha + \mathcal{B}_{n,p}\sin n\alpha)\frac{a\pi^2}{n}Q_n(a)Q'_n(R)\cos(\lambda_{n,p}mt) - \ldots,$$

ou, plus simplement,

$$= \ldots + (\mathcal{C}_{n,p}\cos n\alpha + \mathcal{D}_{n,p}\sin n\alpha)Q'_n(R, \lambda_{n,p})\cos(\lambda_{n,p}mt) - \ldots.$$

Donc l'expression de u est de cette forme

$$u = \ldots + (C_{n,p}\cos n\alpha + D_{n,p}\sin n\alpha)Q_n(R, \lambda_{n,p})\cos(\lambda_{n,p}mt) + \ldots$$
$$+ (\mathcal{C}_{n,p}\cos n\alpha + \mathcal{D}_{n,p}\sin n\alpha)Q'_n(R, \lambda_{n,p})\cos(\lambda_{n,p}mt) + \ldots$$

Si u est assujetti à s'annuler sur les deux contours, le coefficient de $\cos(\lambda_{n,p}mt)$ est assujetti à la même condition. On doit donc faire

$$\frac{\mathcal{D}_{n,p}}{\mathcal{C}_{n,p}} = \frac{D_{n,p}}{C_{n,p}},$$

et $\lambda_{n,p}$, ainsi que le rapport de $C_{n,p}$ à $\mathcal{C}_{n,p}$, est donné par les deux équations

$$C_{n,p}Q_n(A, \lambda_{n,p}) + \mathcal{C}_{n,p}Q'_n(A, \lambda_{n,p}) = 0,$$
$$C_{n,p}Q_n(a, \lambda_{n,p}) + \mathcal{C}_{n,p}Q'_n(a, \lambda_{n,p}) = 0.$$

La dernière expression de u a été obtenue dans la supposition que $\frac{du}{dt}$ soit nul pour $t=0$, ou que les fonctions $F(r,\alpha)$ et $F_1(r,\alpha)$ sont paires par rapport à r. Suivant ce qui a été fait au numéro précédent, on prendra dans le cas général pour $F(r,\alpha)$, $F_1(r,\alpha)$ des fonctions impaires en r, et l'on ajoutera l'expression qui en résulte pour u à l'expression précédente.

31. Passons au cas où la fonction u satisfait à l'équation (1) dans l'intérieur d'une ellipse. Appliquons la formule (A).

Adoptant les notations des n^{os} **17** et **24**, on aura

$$\beta = b$$

pour l'équation du contour de l'ellipse; β étant constant sur ce contour, la coordonnée α est propre à déterminer un point de ce contour, et nous la représentons sur cette ligne par α_1. Nous avons

$$u = \int \psi(r, t, \alpha_1)\, c\sqrt{\left(\frac{e^b+e^{-b}}{2}\right)^2 - \cos^2\alpha_1}\, d\alpha_1.$$

La fonction $F(r,\alpha_1)$ étant arbitraire, posons

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned} c\sqrt{\left(\frac{e^b+e^{-b}}{2}\right)^2 - \cos^2\alpha_1}\, F(r,\alpha_1) = {} & A_{0,0} P_2(\alpha_1, 0, \lambda_{0,0}) \cos(\lambda_{0,0} r) \\ & + A_{0,1} P_2(\alpha_1, 0, \lambda_{0,1}) \cos(\lambda_{0,1} r) + \ldots \\ & + [A_{1,0} P_2(\alpha_1, 1, \lambda_{1,0}) \cos(\lambda_{1,0} r) \\ & \quad + A_{1,1} P_2(\alpha_1, 1, \lambda_{1,1}) \cos(\lambda_{1,1} r) + \ldots] \\ & + [B_{1,0} P_1(\alpha_1, 1, \lambda'_{1,0}) \cos(\lambda'_{1,0} r) + \ldots] \\ & + [A_{2,0} P_2(\alpha_1, 2, \lambda_{2,0}) \cos(\lambda_{2,0} r) + \ldots] \\ & + [B_{2,0} P_1(\alpha_1, 2, \lambda'_{2,0}) \cos(\lambda'_{2,0} r) + \ldots] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

a fonction $P(\alpha, g, \lambda)$ étant donnée par l'équation

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2} + (R - 2\lambda^2 c^2 \cos 2\alpha) P = 0,$$

dans laquelle R est une constante choisie de manière que P ait pour période 2π et qui se réduit au carré g^2 d'un nombre entier pour $c = 0$.

On en conclura (n° **28**)

$$c\sqrt{\left(\frac{e^b+e^{-b}}{2}\right)^2 - \cos^2\alpha_1}\,\psi(r, t, \alpha_1) = \ldots$$
$$+ A_{g,i} P_2(\alpha_1, g, \lambda_{g,i}) \int_0^\pi \cos[\lambda_{g,i}(r\cos\omega + mt)] \log(r\sin^2\omega)\, d\omega + \ldots$$
$$+ B_{g,i} P_1(\alpha_1, g, \lambda'_{g,i}) \int_0^\pi \cos[\lambda'_{g,i}(r\cos\omega + mt)] \log(r\sin^2\omega)\, d\omega + \ldots$$

ou

$$= \ldots + A_{g,i} P_2(\alpha_1, g, \lambda_{g,i}) \cos(\lambda_{g,i} mt) \int_0^\pi \cos(\lambda_{g,i} r\cos\omega) \log(r\sin^2\omega)\, d\omega + \ldots$$
$$+ B_{g,i} P_1(\alpha_1, g, \lambda'_{g,i}) \cos(\lambda'_{g,i} mt) \int_0^\pi \cos(\lambda'_{g,i} r\cos\omega) \log(r\sin^2\omega)\, d\omega + \ldots$$

On tire de là

$$u = \ldots + A_{g,i} \cos(\lambda_{g,i} mt) \int_0^{2\pi} P_2(\alpha_1, g, \lambda_{g,i}) \int_0^\pi \cos(\lambda_{g,i} r\cos\omega) \log(r\sin^2\omega)\, d\omega\, d\alpha_1 + \ldots$$
$$+ B_{g,i} \cos(\lambda'_{g,i} mt) \int_0^{2\pi} P_1(\alpha_1, g, \lambda'_{g,i}) \int_0^\pi \cos(\lambda'_{g,i} r\cos\omega) \log(r\sin^2\omega)\, d\omega\, d\alpha_1 + \ldots$$

Or, β étant $< b$, on a (n° **18**), λ étant le même dans toutes les fonctions P,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\lambda r\cos\omega) \log(r\sin^2\omega)\, d\omega$$
$$= Q_2(\beta, 0) Q'(b, R_0) P_2(\alpha, 0) P_2(\alpha_1, 0)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- \frac{2}{g} Q_2(\beta, g) Q'(b, R_g) P_2(\alpha, g) P_2(\alpha_1, g)$$
$$- \frac{2}{g} Q_1(\beta, g, Q'\{b, R'_g\} P_1(\alpha, g) P_1(\alpha_1, g) - \ldots$$

Or, si λ est le même dans deux fonctions P, dont on désigne la seconde par P', on a (n° **24**)

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{PP}' d\alpha = 0.$$

Donc u se réduit à

$$u = \ldots - \frac{2}{g} \mathrm{A}_{g,i} \cos(\lambda m t) \mathrm{Q}_2(\beta, g, \lambda) \mathrm{P}_2(\alpha, g, \lambda) \mathrm{Q}'(b, \mathrm{R}_g, \lambda) \int_0^{2\pi} \mathrm{P}_2(\alpha_1, g)^2 d\alpha_1 - \ldots$$
$$- \frac{2}{g} \mathrm{B}_{g,i} \cos(\lambda' m t) \mathrm{Q}_1(\beta, g, \lambda') \mathrm{P}_1(\alpha, g, \lambda') \mathrm{Q}'\{b, \mathrm{R}'_g, \lambda'\} \int_0^{2\pi} \mathrm{P}_1(\alpha_1, g)^2 d\alpha_1 - \ldots$$

et l'on peut écrire plus simplement

$$u = \ldots + \mathrm{H}_{g,i} \mathrm{P}_2(\alpha, g, \lambda_{g,i}) \mathrm{Q}_2(\beta, g, \lambda_{g,i}) \cos(\lambda_{g,i} m t) + \ldots$$
$$+ \mathrm{K}_{g,i} \mathrm{P}_1(\alpha, g, \lambda'_{g,i}) \mathrm{Q}_1(\beta, g, \lambda'_{g,i}) \cos(\lambda'_{g,i} m t) + \ldots,$$

H et K désignant de nouvelles constantes arbitraires.

En mettant dans la formule (c) des sinus au lieu des cosinus, on aurait une formule toute semblable à la précédente, mais dans laquelle les cosinus des arcs multiples de t seraient remplacés par les sinus des mêmes arcs. Dans le cas le plus général, u est la somme des deux séries obtenues.

Si u est nul sur le contour de l'ellipse, les quantités λ et λ' sont déterminées par les deux équations

$$\mathrm{Q}_2(b, g, \lambda) = 0, \quad \mathrm{Q}_1(b, g, \lambda') = 0,$$

et au nombre entier g correspondent une infinité de valeurs de λ et λ'.

D'ailleurs la forme que nous venons de trouver pour u est précisément celle que nous avons obtenue dans notre Mémoire sur la membrane elliptique pour la vibration transversale de cette membrane. (T. XIII de ce Journal, p. 200.)

32. Si la courbe s se compose de la même ellipse $\beta = b$ et d'une ellipse homofocale plus petite $\beta = h$, on opérera comme dans les numéros précédents et l'on trouvera, si $\frac{du}{dt}$ s'annule pour $t=0$,

$$u = \ldots + P_2(\alpha, g, \lambda)\,[C\,Q_2(\beta, g, \lambda) + D\,Q'(\beta, R_g, \lambda)]\cos(\lambda m t) + \ldots$$
$$+ P_1(\alpha, g, \lambda')\,[C'Q_1(\beta, g, \lambda') + D'Q'\{\beta, R'_g, \lambda'\}]\cos(\lambda' m t) + \ldots$$

Si u est assujetti à s'annuler sur les deux contours $\beta = b$, $\beta = h$, on déterminera λ et $\frac{D}{C}$ par les deux équations

$$CQ_2(b, g, \lambda) + DQ'(b, R_g, \lambda) = 0,$$
$$CQ_2(h, g, \lambda) + DQ'(h, R_g, \lambda) = 0,$$

et l'on calculera λ' et $\frac{D'}{C'}$ de la même manière.

En se rappelant la définition des fonctions Q' données au n° **18**, on préférera à l'expression précédente la suivante

$$u = \ldots + P_2(\alpha, g, \lambda)\,[C\,Q_2(\beta, g, \lambda) + D\,Q_1[\beta, R_g, \lambda]]\cos(\lambda m t) + \ldots$$
$$+ P_1(\alpha, g, \lambda)\,[C'Q_1(\beta, g, \lambda') + D'Q_2[\beta, R'_g, \lambda']]\cos(\lambda' m t) + \ldots,$$

C, D, C', D' étant encore des constantes; et les quantités Q qui se trouvent dans cette dernière formule sont entièrement déterminées.

De ce qui précède, on conclut le théorème suivant:

Théorème. — *Si une fonction u de deux coordonnées rectangulaires x, y et du temps t satisfait à l'équation*

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = m^2\left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2}\right)$$

dans l'intérieur d'une courbe s, cette fonction est de la forme

$$u = \int \psi(r, t, v)\, ds$$

avec

$$\psi(r, t, v) = \int_0^\pi F(r\cos\omega + mt, v)\log(r\sin^2\omega)\, d\omega,$$

en désignant par $F(r, v)$ *une fonction arbitraire de deux variables et par v une coordonnée propre à déterminer un point du contour.* De plus si l'on prend $F(r, v)$ impair en r, u sera nul pour $t = 0$, et si l'on prend $F(r, v)$ pair en r, $\frac{du}{dt}$ sera nul pour $t = 0$.

En effet si $F(r, v)$ est impair en r, on a

$$\psi(r, o, v) = \int_0^\pi F(r\cos\omega, v)\log(r\sin^2\omega)d\omega,$$

qui est nul, puisque pour $\omega = \omega'$ et $\omega = \pi - \omega'$, on a deux éléments égaux et de signe contraire; donc $u = 0$ pour $t = 0$.

Si $F(r, v)$ est pair en r, sa dérivée par rapport à r sera impaire, et l'on en conclut de même que $\frac{du}{dt} = 0$ pour $t = 0$.

Sur l'équation $\frac{d^2u}{dt^2} = m^2\Delta u$ dans le cas de trois dimensions.

33. Imaginons une fonction qui satisfait dans l'intérieur d'une surface σ à l'équation

$$\frac{d^2u}{dt^2} = m^2\Delta u, \tag{1}$$

qu'on rencontre dans l'étude des petits mouvements d'un gaz ou dans celle du mouvement vibratoire d'un corps solide.

Nous avons vu, dans le n° **6**, que l'on a une solution de cette équation en posant

$$u = \int \frac{f(r + mt, \theta, \psi) + F(r - mt, \theta, \psi)}{r} d\sigma, \tag{2}$$

f et F étant deux fonctions arbitraires de trois variables et θ, ψ deux coordonnées propres à déterminer un point de la surface σ. Il reste à vérifier que cette formule a la généralité suffisante, et c'est ce que nous allons faire en supposant que σ soit une sphère.

Il est aisé de voir que u peut se décomposer en les deux parties

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{\chi(r + mt, \theta, \psi) + \chi(r - mt, \theta, \psi)}{r} d\sigma, \\ u_2 &= \int \frac{\mu(r + mt, \theta, \psi) - \mu(r - mt, \theta, \psi)}{r} d\sigma, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

χ et μ étant deux nouvelles fonctions de trois variables.

Remarquons que u_2 est une fonction qui s'annule pour $t=0$ et que la dérivée de u_1 par rapport à t jouit de la même propriété.

On peut décomposer les fonctions u_1 et u_2 elles-mêmes en deux parties, en prenant pour les fonctions $\chi(r, \theta, \psi)$ et $\mu(r, \theta, \psi)$ successivement des fonctions paires et des fonctions impaires par rapport à r.

Dans le cas où la surface σ est une sphère, on prendra des coordonnées sphériques dont l'origine soit au centre de la sphère, et l'on posera

$$(4) \qquad x = \mathrm{R}\cos\theta, \quad y = \mathrm{R}\sin\theta\cos\psi, \quad z = \mathrm{R}\sin\theta\sin\psi.$$

Nous prendrons donc pour les coordonnées θ et ψ, qui se trouvent dans les formules (2) et (3), les quantités θ, ψ définies par les équations (4); toutefois, sur la surface de la sphère, nous les désignerons par θ' et ψ'.

Posons, comme au n° **26**,

$$\Theta_{n,l} = \cos^l\theta\left[\cos^{n-l}\theta - \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-l-2}\theta + \ldots\right],$$

et alors la quantité

$$\sum_{l=0}^{l=n}(\mathrm{A}_l\cos l\psi + \mathrm{B}_l\sin l\psi)\Theta_{n,l},$$

qui renferme $2n+1$ constantes, est un Y_n.

Supposons d'abord $\chi(r, \theta, \psi)$ pair en r dans u_1 et faisons

$$(5)\left\{\begin{aligned} 2\chi(r,\theta,\psi) &= \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta_{n,l}\cos l\psi[\mathrm{A}_{n,l,0}\cos(\rho_{n,0}r)+\ldots+\mathrm{A}_{n,l,i}\cos(\rho_{n,i}r)+\ldots] \\ &+ \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta_{n,l}\sin l\psi[\mathrm{B}_{n,l,0}\cos(\rho_{n,0}r)+\ldots+\mathrm{B}_{n,l,i}\cos(\rho_{n,i}r)+\ldots].\end{aligned}\right.$$

A chaque valeur de n donnée par le premier Σ correspondent des valeurs de l données par le second Σ comprises entre 0 et n. De plus, à chaque valeur de n correspondent une infinité de valeurs de la constante ρ.

Désignons par Θ' ce que devient Θ quand on y remplace θ par θ', et nous aurons

$$\frac{\chi(r+mt,\theta',\psi')+\chi(r-mt,\theta',\psi')}{r}$$
$$=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta'_{n,l}\cos l\psi'\left[\mathrm{A}_{n,l,0}\frac{\cos(\rho_{n,0}r)}{r}\cos(m\rho_{n,0}t)+\ldots+\mathrm{A}_{n,l,i}\frac{\cos(\rho_{n,i}r)}{r}\cos(m\rho_{n,i}t)+\ldots\right]$$
$$+\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta'_{n,l}\sin l\psi'\left[\mathrm{B}_{n,l,0}\frac{\cos(\rho_{n,0}r)}{r}\cos(m\rho_{n,0}t)+\ldots+\mathrm{B}_{n,l,i}\frac{\cos(\rho_{n,i}r)}{r}\cos(m\rho_{n,i}t)+\ldots\right].$$

Or, pour un point quelconque intérieur à la sphère, R étant plus petit que le rayon a de cette sphère, on a (nº **20**)

$$(a)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\cos(\rho r)}{r}&=\mathrm{S}_0(a,\rho)\mathrm{T}_0(\mathrm{R},\rho)+\mathrm{S}_1(a,\rho)\mathrm{T}_1(\mathrm{R},\rho)\mathrm{X}_1+\ldots\\&+\mathrm{S}_n(a,\rho)\mathrm{T}_n(\mathrm{R},\rho)\mathrm{X}_n+\ldots,\end{aligned}\right.$$

X_n étant une fonction entière de

$$\cos\omega=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\psi-\psi').$$

Les fonctions $\Theta_{n,l}\cos l\psi$, $\Theta_{n,l}\sin l\psi$ étant des cas particuliers des fonctions Y_n, on a, n et p étant deux nombres entiers différents,

$$\int\mathrm{X}_p\Theta'_{n,l}\cos l\psi'd\sigma=0,\quad\int\mathrm{X}_p\Theta'_{n,l}\sin l\psi'd\sigma=0,$$
$$\int\mathrm{X}_n\Theta'_{n,l}\cos l\psi'd\sigma=\frac{4\pi}{2n+1}\Theta_{n,l}\cos l\psi,$$
$$\int\mathrm{X}_n\Theta'_{n,l}\sin l\psi'd\sigma=\frac{4\pi}{2n+1}\Theta_{n,l}\sin l\psi.$$

Donc on a

$$\begin{aligned}u_1=\ldots&+\mathrm{A}_{n,l,i}\mathrm{S}_n(a,\rho_{n,i})\mathrm{T}_n(\mathrm{R},\rho_{n,i})\cos(m\rho_{n,i}t)\int\mathrm{X}_n\Theta'_{n,l}\cos l\psi'd\sigma+\ldots\\&+\mathrm{B}_{n,l,i}\mathrm{S}_n(a,\rho_{n,i})\mathrm{T}_n(\mathrm{R},\rho_{n,i})\cos(m\rho_{n,i}t)\int\mathrm{X}_n\Theta'_{n,l}\sin l\psi'd\sigma+\ldots,\end{aligned}$$

et ensuite

$$u_1 = \ldots + \mathrm{A}_{n,l,i}\frac{4\pi}{2n+1}\,\mathrm{S}_n(a,\rho_{n,i})\mathrm{T}_n(\mathrm{R},\rho_{n,i})\cos(m\rho_{n,i}t)\Theta_{n,l}\cos l\psi + \ldots$$
$$+ \mathrm{B}_{n,l,i}\frac{4\pi}{2n+1}\,\mathrm{S}_n(a,\rho_{n,i})\mathrm{T}_n(\mathrm{R},\rho_{n,i})\cos(m\rho_{n,i}t)\Theta_{n,l}\sin l\psi + \ldots,$$

ou, plus simplement,

$$u_1 = \ldots + \mathrm{C}_{n,l,i}\mathrm{T}_n(\mathrm{R},\rho_{n,i})\Theta_{n,l}\cos l\psi\cos(m\rho_{n,i}t) + \ldots$$
$$+ \mathrm{D}_{n,l,i}\mathrm{T}_n(\mathrm{R},\rho_{n,i})\Theta_{n,l}\sin l\psi\cos(m\rho_{n,i}t) + \ldots.$$

Cette expression peut s'écrire

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} u_1 &= \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta_{n,l}\cos l\psi\sum_{\rho}\cos(m\rho_{n,i}t)\mathrm{C}_{n,l,i}\mathrm{T}_n(\mathrm{R},\rho_{n,i}) \\ &+ \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta_{n,l}\sin l\psi\sum_{\rho}\cos(m\rho_{n,i}t)\mathrm{D}_{n,l,i}\mathrm{T}_n(\mathrm{R},\rho_{n,i}).\end{aligned}\right.$$

Supposons que u, qui satisfait à l'équation (1), ait sa dérivée nulle pour $t=0$, et que u s'annule sur la surface de la sphère. Alors la valeur de u sera donnée par l'expression précédente, et tous les termes seront nuls pour $\mathrm{R}=a$, en sorte que les quantités ρ seront données par l'équation

$$(b)\qquad \mathrm{T}_n(a,\rho) = 0.$$

Supposons, en second lieu, $\chi(r,\theta,\psi)$ impair en r dans u_1, et faisons

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} 2\chi(r,\theta,\psi) &= \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta_{n,l}\cos l\psi[\mathrm{A}_{n,l,0}\sin(\rho_{n,0}r) + \ldots + \mathrm{A}_{n,l,i}\sin(\rho_{n,i}r) + \ldots] \\ &+ \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta_{n,l}\sin l\psi[\mathrm{B}_{n,l,0}\sin(\rho_{n,0}r) + \ldots + \mathrm{B}_{n,l,i}\sin(\rho_{n,i}r) + \ldots].\end{aligned}\right.$$

Nous aurons à faire des calculs tout semblables aux précédents. Au lieu de la formule (a), on aura à appliquer la formule

$$\frac{\sin(\rho r)}{r} = \mathrm{T}_0(a)\mathrm{T}_0(\mathrm{R})\mathrm{X}_0 + \frac{\rho^2}{3}\mathrm{T}_1(a)\mathrm{T}_1(\mathrm{R})\mathrm{X}_1 + \ldots$$
$$+ \frac{\rho^{2n}}{3^2.5^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)}\mathrm{T}_n(a)\mathrm{T}_n(\mathrm{R})\mathrm{X}_n + \ldots,$$

et l'on trouvera

$$u_1 = \ldots + \frac{4\pi\rho_{n.i}^{2n}}{3^2.5^2\ldots(2n+1)^2}\mathrm{A}_{n,l,i}\mathrm{T}_n(a, \rho_{n,i})\mathrm{T}_n(\mathrm{R}, \rho_{n,i})\cos(m\rho_{n,i}t)\Theta_{n,l}\cos l\psi + \ldots$$
$$+ \frac{4\pi\rho_{n,i}^{2n}}{3^2.5^2\ldots(2n+1)^2}\mathrm{B}_{n,l,i}\mathrm{T}_n(a, \rho_{n,i})\mathrm{T}_n(\mathrm{R}, \rho_{n,i})\cos(m\rho_{n,i}t)\Theta_{n,l}\sin l\psi + \ldots$$

par suite, on arrivera encore à la formule (6).

Toutefois considérons le cas où u est nul sur la surface de la sphère; alors on aura l'équation (b), et, comme $\mathrm{T}_n(a, \rho_{n,i})$ se trouve en facteur dans le terme général, on en conclura que u_1 sera nul.

Donc si $\chi(r, \theta, \psi)$ est impair en r dans l'expression de u_1, et que cette expression s'annule à la surface de la sphère, elle s'annulera pour tout point intérieur à cette sphère.

Passons à l'expression de u_2. Supposons d'abord $\mu(r, \theta, \psi)$ impair en r, et prenons pour $\mu(r, \theta, \psi)$ l'expression (7), nous trouverons pour u_2 une formule toute semblable à la formule (6), avec le seul changement de $\cos(m\rho t)$ en $\sin(m\rho t)$.

Si l'on suppose, au contraire, $\mu(r, \theta, \psi)$ pair en r et qu'on représente cette fonction par le second membre de la formule (5), on arrivera encore à la même formule. Mais, suivant une remarque précédente, le terme général renferme $\mathrm{T}_n(a, \rho_{n,i})$ en facteur; ce qui fait que u_2 s'annule en tout point intérieur à la surface, s'il s'annule à la surface.

34. Supposons ensuite que la surface σ se compose encore de la même sphère de rayon a et de plus d'une sphère concentrique de rayon $b < a$. Ainsi la fonction u satisfait à l'équation (1) dans l'espace renfermé entre les deux sphères.

Pour éviter des longueurs inutiles, supposons que $\frac{du}{dt}$ soit nul pour $t=0$, et l'on réduira alors u à

$$u_1=\int\frac{\chi(r+mt,\theta,\psi)+\chi(r-mt,\theta,\psi)}{r}d\sigma$$
$$+\int\frac{\chi_1(r_1+mt,\theta,\psi)+\chi_1(r_1-mt,\theta,\psi)}{r_1}d\sigma_1,$$

σ étant la sphère de rayon a, σ_1 la sphère de rayon b, et r_1 est la distance du point (x, y, z) à un point de la sphère de rayon b, situé sur l'élément $d\sigma_1$.

On commencera par prendre pour $\chi(r, \theta, \psi)$ la formule (5), et la première intégrale qui compose u_1 sera égale au second membre de la formule (6).

On prendra ensuite pour $\chi_1(r_1, \theta, \psi)$ l'expression semblable

$$\begin{aligned}2\chi_1(r_1,\theta,\psi)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta_{n,l}\cos l\psi\,[&A'_{n,l,o}\cos(\rho_{n,o}r_1)+\ldots\\ &+A'_{n,l,i}\cos(\rho_{n,i}r_1)+\ldots]\\ +\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta_{n,l}\sin l\psi\,[&B'_{n,l,o}\cos(\rho_{n,o}r_1)+\ldots\\ &+B'_{n,l,i}\cos(\rho_{n,i}r_1)+\ldots].\end{aligned}$$

Comme R est $> b$, on a

$$\frac{\cos(\rho r_1)}{r_1}=S_0(R,\rho)T_0(b,\rho)+S_1(R,\rho)T_1(b,\rho)X_1+\ldots$$
$$+S_n(R,\rho)T_n(b,\rho)X_n+\ldots,$$

et l'on trouvera pour la seconde partie de u_1

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta_{n,l}\cos l\psi\sum_{\rho}\cos(m\rho_{n,i}t)\,C'_{n,l,i}S_n(R,\rho_{n,i})$$
$$+\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=n}^{l=n}\Theta_{n,l}\sin l\psi\sum_{\rho}\cos(m\rho_{n,i}t)\,D'_{n,l,i}S_n(R,\rho_{n,i}).$$

Enfin u est la somme de cette expression et du second membre de la formule (6). Si u est nul sur les deux sphères ou pour $R = a$ et $R = b$, on aura les équations

$$\frac{C'}{C} = \frac{D'}{D},$$
$$C_{n,l,i} T_n(a, \rho_{n,i}) + C'_{n,l,i} S_n(a, \rho_{n,i}) = 0,$$
$$C_{n,l,i} T_n(b, \rho_{n,i}) + C'_{n,l,i} S_n(b, \rho_{n,i}) = 0,$$

desquelles on pourra déduire les rapports $\frac{C'}{C}$, $\frac{D'}{D}$ et la quantité ρ.

Ainsi nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La solution générale de l'équation*

$$\frac{d^2u}{dt^2} = m^2 \Delta u,$$

dans l'intérieur d'une surface σ, *est donnée par la formule*

$$u = \int \frac{f(r + mt, \theta, \psi) + F(r - mt, \theta, \psi)}{r} d\sigma,$$

f *et* F *étant des fonctions arbitraires de trois variables et* θ, ψ *étant deux coordonnées qui servent à déterminer un point de la surface* σ.

Sur l'équation $\frac{du}{dt} = m^2 \Delta u$.

35. Imaginons un corps dont la surface σ soit maintenue à une température donnée, et désignons par U la température d'équilibre vers laquelle tend le corps d'après la température de la surface. La température V du corps satisfait à l'équation

$$(1) \qquad \frac{dV}{dt} = m^2 \Delta V.$$

Désignons par (α, β, γ) un point de la surface σ; la condition à la surface pourra s'écrire

$$V_\sigma = \chi(\alpha, \beta, \gamma).$$

Enfin, si l'on se donne l'état initial du corps, on aura dans l'intérieur de σ

$$(V)_{t=0} = f(x, y, z);$$

de plus, pour $t = \infty$, V doit se réduire à U.

Quant à U, il satisfait aux équations

$$\Delta U = 0, \quad U_\sigma = \chi(\alpha, \beta, \gamma).$$

Pour calculer V, on commencera par déterminer U, puis on posera

$$V = U + u;$$

en sorte que u est donné par les équations

$$\frac{du}{dt} = m^2 \Delta u, \quad u_\sigma = 0, \quad (u)_{t=0} = f(x, y, z) - U,$$

et à mesure que t grandit, u tend vers zéro.

Nous avons dit (n° **7**) et nous devons vérifier que la solution générale de l'équation (1) est

$$V = \int \Phi(r, t, \theta, \psi)\, d\sigma$$

avec

$$\Phi(r, t, \theta, \psi) = \frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} F(r + 2ms\sqrt{t}, \theta, \psi)\, ds,$$

θ, ψ étant deux coordonnées qui déterminent un point de la surface σ.

Posons

$$F(r, \theta, \psi) = f(r, \theta, \psi) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mu(\theta, \psi),$$

et nous aurons

$$\Phi(r, t, \theta, \psi) = \frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} f(r + 2ms\sqrt{t}, \theta, \psi)\, ds + \frac{1}{r}\mu(\theta, \psi).$$

V pourra ainsi se décomposer en les deux parties U et u, et l'on fera

$$U = \int \frac{\mu(\theta, \psi)}{r} d\sigma,$$

$$u = \int \varphi(r, t, \theta, \psi)\, d\sigma$$

avec

$$\varphi(r, t, \theta, \psi) = \frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} f(r + 2ms\sqrt{t}, \theta, \psi)\, ds.$$

Nous allons vérifier cette formule, en l'appliquant à la sphère. Adoptons les notations des numéros précédents, et posons

$$\begin{aligned} f(r,\theta,\psi) = \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n} \Theta_{n,l}\cos l\psi [&A_{n,l,0}\cos(\rho_{n,0}r) + \ldots + A_{n,l,i}\cos(\rho_{n,i}r) + \ldots \\ &+ a_{n,l,0}\sin(\rho_{n,0}r) + \ldots + a_{n,l,i}\sin(\rho_{n,i}r) + \ldots] \\ + \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n} \Theta_{n,l}\sin l\psi [&B_{n,l,0}\cos(\rho_{n,0}r) + \ldots + B_{n,l,i}\cos(\rho_{n,i}r) + \ldots \\ &+ b_{n,l,0}\sin(\rho_{n,0}r) + \ldots + b_{n,l,i}\sin(\rho_{n,i}r) + \ldots]. \end{aligned}$$

Le terme général de $\varphi(r, t, \theta, \psi)$ est donc

$$\begin{aligned} &A_{n,l,i}\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\rho_{n,i}(r + 2ms\sqrt{t})\, e^{-s^2} ds . \Theta_{n,l}\cos l\psi \\ &+ a_{n,l,i}\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty} \sin\rho_{n,i}(r + 2ms\sqrt{t})\, e^{-s^2} ds . \Theta_{n,l}\cos l\psi \\ &+ B_{n,l,i}\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\rho_{n,i}(r + 2ms\sqrt{t})\, e^{-s^2} ds . \Theta_{n,l}\sin l\psi \\ &+ b_{n,l,i}\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty} \sin\rho_{n,i}(r + 2ms\sqrt{t})\, e^{-s^2} ds . \Theta_{n,l}\sin l\psi. \end{aligned}$$

En désignant par θ', ψ' les coordonnées θ, ψ pour un point de la surface σ, nous aurons, pour le terme général de $\varphi(r, t, \theta', \psi')$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r}\Theta'_{n,l}(A_{n,l,i}\cos l\psi' + B_{n,l,i}\sin l\psi')\int_{-\infty}^{\infty} \cos\rho_{n,i}(r + 2ms\sqrt{t})\, e^{-s^2} ds \\ &+ \frac{1}{r}\Theta'_{n,l}(a_{n,l,i}\cos l\psi' + b_{n,l,i}\sin l\psi')\int_{-\infty}^{\infty} \sin\rho_{n,i}(r + 2ms\sqrt{t})\, e^{-s^2} ds. \end{aligned}$$

Or on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\rho\,(r + 2ms\sqrt{t})\, e^{-s^2} ds = \cos(\rho r) \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\rho ms\sqrt{t})\, e^{-s^2} ds$$
$$= \sqrt{\pi}\cos(\rho r)\, e^{-m^2\rho^2 t},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin\rho\,(r + 2ms\sqrt{t})\, e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}\sin(\rho r)\, e^{-m^2\rho^2 t}.$$

Donc le terme général de $\varphi(r, t, \theta', \psi')$ est

$$\Theta'_{n,l}\,(\mathrm{A}_{n,l,i}\cos l\psi' + \mathrm{B}_{n,l,i}\sin l\psi')\,\frac{\cos(\rho r)}{r}\sqrt{\pi}\, e^{-m^2\rho^2 t}$$
$$+ \Theta'_{n,l}\,(a_{n,l,i}\cos l\psi' + b_{n,l,i}\sin l\psi')\,\frac{\sin(\rho r)}{r}\sqrt{\pi}\, e^{-m^2\rho^2 t}.$$

Or on a, en désignant par a le rayon de la sphère,

$$\frac{\cos(\rho r)}{r} = \mathrm{S}_0(a, \rho)\,\mathrm{T}_0(\mathrm{R}, \rho) + \ldots + \mathrm{S}_n(a, \rho)\,\mathrm{T}_n(\mathrm{R}, \rho)\,\mathrm{X}_n + \ldots$$
$$\frac{\sin(\rho r)}{r} = \mathrm{T}_0(a, \rho)\,\mathrm{T}_0(\mathrm{R}, \rho) + \ldots$$
$$+ \frac{\rho^{2n}}{3^2.5^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)}\mathrm{T}_n(a, \rho)\,\mathrm{T}_n(\mathrm{R}, \rho)\,\mathrm{X}_n + \ldots.$$

Multiplions $\varphi(r, t, \theta', \psi')$ par $d\sigma$ et intégrons dans toute l'étendue de la sphère, nous aurons pour le terme général de u

$$\sqrt{\pi}\, e^{-m^2\rho^2 t}\int \Theta'_{n,l}(\mathrm{A}_{n,l,i}\cos l\psi' + \mathrm{B}_{n,l,i}\sin l\psi')\,\mathrm{X}_n d\sigma\,\mathrm{S}_n(a, \rho)\,\mathrm{T}_n(\mathrm{R}, \rho)$$
$$+ \sqrt{\pi}\, e^{-m^2\rho^2 t}\int \Theta'_{n,l}(a_{n,l,i}\cos l\psi' + b_{n,l,i}\sin l\psi')\,\mathrm{X}_n d\sigma\,\mathrm{T}_n(a, \rho)\,\mathrm{T}_n(\mathrm{R}, \rho)$$
$$\times \frac{\rho^{2n}}{3^2.5^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)}.$$

Or on a, en général,

$$\int \Theta'_{n,l}\cos l\psi'\,\mathrm{X}_n d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1}\,\Theta_{n,l}\cos l\psi,$$

et une formule semblable dans laquelle le cosinus est remplacé par un sinus; on en conclut que la seconde partie du terme général équivaut à la première et que ce terme peut s'écrire

$$\Theta_{n,l}(\mathrm{C}\cos l\psi + \mathrm{D}\sin l\psi)\,\mathrm{T}_n(\mathrm{R}, \rho)\,e^{-m^2\rho^2 t},$$

C et D étant deux constantes arbitraires.

Donc enfin on a

$$u = \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta_{n,l}\cos l\psi \sum_{\rho} \mathrm{C}_{n,l,i}\mathrm{T}_n(\mathrm{R}, \rho)\,e^{-m^2\rho^2 t}$$
$$+\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta_{n,l}\sin l\psi \sum_{\rho} \mathrm{D}_{n,l,i}\mathrm{T}_n(\mathrm{R}, \rho)\,e^{-m^2\rho^2 t},$$

formule dans laquelle ρ est mis pour $\rho_{n,i}$.

Si u est nul sur la sphère de rayon a, ρ est donné par l'équation

$$\mathrm{T}_n(a, \rho) = 0,$$

et à chaque valeur de n correspondent une infinité de valeurs de ρ, désignées par $\rho_{n,1}, \rho_{n,2}, \ldots$

On traiterait de la même manière le cas où la surface σ se composerait de deux sphères concentriques.

Si une sphère rayonne dans un espace dont la température soit constante, on peut supposer que cette température soit zéro, en choisissant l'échelle thermométrique, et la température du corps sera donnée par l'expression précédente de u.

Sur l'équation $\frac{du}{dt} = m^2\Delta u$ *pour deux dimensions.*

36. L'équation

$$\frac{d\mathrm{V}}{dt} = m^2\left(\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{V}}{dy^2}\right)$$

convient au mouvement de la température dans un cylindre indéfini, dans la supposition que cette température reste la même tout le long d'une droite parallèle à une génératrice.

Supposons donc un cylindre dont la surface soit maintenue à une température donnée, et désignons par U la température d'équilibre vers laquelle tend le corps d'après la température de la surface. On posera

$$V = U + u;$$

u satisfera à l'équation

$$\frac{du}{dt} = m^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right);$$

il sera nul à la surface, et il tendra vers zéro, quand t grandira indéfiniment.

Prenons pour V l'expression donnée au n° **7**

$$V = \int \Phi(r, t, \alpha_1)\, ds$$

avec

$$\Phi(r, t, \alpha_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} F(r\cos\omega + 2m\beta\sqrt{t}, \alpha_1)\log(r\sin^2\omega)\, d\omega \,.\, e^{-\beta^2} d\beta,$$

$F(r, \alpha_1)$ étant une fonction arbitraire de deux variables et α_1 une coordonnée propre à déterminer un point de la courbe s.

Faisons

$$F(r, \alpha) = f(r, \alpha) + \theta(\alpha),$$

et nous aurons, en posant

$$\varphi(r, t, \alpha_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} f(r\cos\omega + 2m\beta\sqrt{t}, \alpha_1)\log(r\sin^2\omega)\, d\omega . e^{-\beta^2} d\beta,$$

l'équation

$$\Phi(r, t, \alpha_1) = \varphi(r, t, \alpha_1) + \pi^{\frac{3}{2}}\theta(\alpha_1)(\log r - 2\log 2).$$

Ainsi V se décompose en les deux parties suivantes, dont la première tend vers zéro, quand t grandit indéfiniment, si la fonction $\theta(\alpha)$ a été convenablement choisie,

$$u = \int \varphi(r, t, \alpha_1)\, ds,$$
$$U = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2}\int \log r . \theta(\alpha_1)\, ds - \frac{2\pi^3}{2}\log 2\int \theta(\alpha_1)\, ds.$$

Le second terme de U est constant; U satisfait à $\Delta U = 0$, et, d'après un théorème démontré dans mon Mémoire sur l'équation $\Delta\Delta u = 0$ (t. XIV de ce Journal, 1869), on peut écrire plus simplement

$$U = \int \log r.\theta(\alpha_1)\, ds,$$

$\theta(\alpha)$ étant une fonction arbitraire de α.

En l'appliquant au cas où s est un cercle, nous montrerons que la formule qui donne u a dans tous les cas la généralité suffisante.

Mais auparavant remarquons qu'on peut réduire la fonction $F(r, \alpha)$ à être paire en r; car si cette fonction est impaire, $\varphi(r, t, \alpha)$ est nul. En effet, on a

$$\begin{aligned}\varphi(r, t, \alpha) = &\int_0^\infty \int_0^\pi F(r\cos\omega + 2m\beta\sqrt{t}, \alpha)\log(r\sin^2\omega)\, d\omega\, e^{-\beta^2} d\beta \\ &+ \int_{-\infty}^0 \int_0^\pi F(r\cos\omega + 2m\beta\sqrt{t}, \alpha)\log(r\sin^2\omega)\, d\omega\, e^{-\beta^2} d\beta,\end{aligned}$$

et la seconde intégrale, par des transformations faciles, peut être remplacée par

$$\int_0^\infty \int_0^\pi F(-r\cos\omega - 2m\beta'\sqrt{t}, \alpha)\log(r\sin^2\omega')\, d\omega'\, e^{-\beta'^2} d\beta';$$

donc si $F(r, \alpha)$ est impair en r, on a

$$\varphi(r, t, \alpha) = 0.$$

37. Supposons que la courbe s soit un cercle, et posons

$$\begin{aligned}F(r, \alpha) = &A_{0,0}\cos(\lambda_{0,0} r) + A_{0,1}\cos(\lambda_{0,1} r) + A_{0,2}\cos(\lambda_{0,2} r) + \dots \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \cos n\alpha_1 [A_{n,0}\cos(\lambda_{n,0} r) + \dots + A_{n,i}\cos(\lambda_{n,i} r) + \dots] \\ &+ \sin n\alpha_1 [B_{n,0}\cos(\lambda_{n,0} r) + \dots] \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\end{aligned}$$

fonction paire en r, et nous aurons pour le terme général de

$$\int_0^\pi F(r\cos\omega + 2m\beta\sqrt{t}, \alpha)\log(r\sin^2\omega)\, d\omega$$

l'expression

$$(A_{n,i}\cos n\alpha_1 + B_{n,i}\sin n\alpha_1)\cos(2m\lambda_{n,i}\beta\sqrt{t})\int_0^\pi \cos(\lambda_{n,i} r\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)d\omega.$$

On en conclut, pour le terme général de $\varphi(r, t, \alpha_1)$,

$$(A_{n,i}\cos n\alpha_1 + B_{n,i}\sin n\alpha_1)e^{-m^2\lambda^2 t}\sqrt{\pi}\int_0^\pi \cos(\lambda r\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)d\omega.$$

Or, R étant plus petit que le rayon a du cercle de contour, on a

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\lambda r\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)d\omega$$
$$= Q_0'(a, \lambda)Q_0(R, \lambda) - \ldots - \frac{1}{n}Q_n'(a, \lambda)Q_n(R, \lambda)\cos n(\alpha - \alpha_1) - \ldots.$$

Donc le terme général de u est

$$-e^{-m^2\lambda^2 t}\pi^{\frac{3}{2}}\frac{1}{n}Q_n'(a,\lambda)Q_n(R,\lambda)\int_0^{2\pi}(A_{n,i}\cos n\alpha_1 + B_{n,i}\sin n\alpha_1)\cos n(\alpha - \alpha_1)d\alpha_1,$$

ou

$$-\frac{\pi^{\frac{5}{2}}}{n}Q_n'(a, \lambda)e^{-m^2\lambda^2 t}Q_n(R, \lambda)(A_{n,i}\cos n\alpha + B_{n,i}\sin n\alpha),$$

et l'on peut écrire

$$u = \Sigma Q_n(R, \lambda)(A_{n,i}\cos n\alpha + B_{n,i}\sin n\alpha)e^{-m^2\lambda^2 t},$$

n ayant toutes les valeurs entières $0, 1, 2, \ldots, \infty$, et à chaque valeur de n correspondant une infinité de valeurs de λ.

Si u est nul sur le contour du cercle s, les quantités λ sont données par l'équation

$$Q_n(R, \lambda) = 0.$$

Nous pourrions maintenant appliquer la formule qui vient de nous servir au cas où la courbe s est une ellipse ou au cas où elle se compose soit de deux cercles concentriques, soit de deux ellipses homofocales; mais nous nous en dispenserons, car cette application n'offre plus aucune difficulté après les considérations dans lesquelles nous sommes entré dans les nos **30, 31, 32**.

Des équations aux différences partielles qui se rapportent aux corps cristallisés.

Supposons que l'on ait à considérer une des équations

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha^2 \dfrac{d^2u}{dx^2} + \beta^2 \dfrac{d^2u}{dy^2} + \gamma^2 \dfrac{d^2u}{dz^2} = -m^2 u, \\ \alpha^2 \dfrac{d^2u}{dx^2} + \beta^2 \dfrac{d^2u}{dy^2} + \gamma^2 \dfrac{d^2u}{dz^2} = \dfrac{1}{m^2} \dfrac{d^2u}{dt^2}, \\ \alpha^2 \dfrac{d^2u}{dx^2} + \beta^2 \dfrac{d^2u}{dy^2} + \gamma^2 \dfrac{d^2u}{dz^2} = \dfrac{1}{m^2} \dfrac{du}{dt}. \end{cases}$$

Posons $x = \alpha x'$, $y = \beta y'$, $z = \gamma z'$, et nous aurons les équations

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx'^2} + \dfrac{d^2u}{dy'^2} + \dfrac{d^2u}{dz'^2} = -m^2 u, \\ \dfrac{d^2u}{dx'^2} + \dfrac{d^2u}{dy'^2} + \dfrac{d^2u}{dz'^2} = \dfrac{1}{m^2} \dfrac{d^2u}{dt^2}, \\ \dfrac{d^2u}{dx'^2} + \dfrac{d^2u}{dy'^2} + \dfrac{d^2u}{dz'^2} = \dfrac{1}{m^2} \dfrac{du}{dt}. \end{cases}$$

D'après cela, si l'on satisfait à une des équations (2) en posant

$$u = f(r), \quad r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

on satisfera aussi à l'équation (1) correspondante en posant

$$u = f(\rho), \quad \rho = \sqrt{\left(\frac{x-a}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z-c}{\gamma}\right)^2}.$$

On passe donc facilement des intégrales des équations (2) à celles des équations (1). Ainsi, par exemple, on a ce théorème :

Si u représente la température d'un corps cristallisé, ou, plus généralement, si u satisfait à l'équation

$$\alpha^2 \frac{d^2u}{dx^2} + \beta^2 \frac{d^2u}{dy^2} + \gamma^2 \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{du}{dt},$$

dans l'intérieur d'une surface σ, cette fonction peut être mise sous la forme

$$u = \int f(\rho, t, \theta, \psi)\, d\sigma, \quad \textit{avec} \quad f(\rho, t, \theta, \psi) = \frac{1}{\rho}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(\rho + 2s\sqrt{t}, \theta, \psi)\, e^{-s^2} ds.$$

ce qui est un théorème que nous avons donné précédemment dans le cas où α, β, γ se réduisent à l'unité.