JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

L. PAINVIN

Courbure en un point d'une surface définie par son équation tangentielle

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 17 (1872), p. 219-248.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1872_2_17__219_0>

Courbure en un point d'une surface définie par son équation tangentielle;

PAR M. L. PAINVIN.

1. Dans le Mémoire précédent, qui avait été présenté à l'Académie dans la séance du 18 juillet 1870, j'ai donné les formules, jusqu'alors inconnues, qui permettent de déterminer les éléments de l'arête de rebroussement d'une surface développable définie par ses deux équations tangentielles. Dans le présent Mémoire, présenté à l'Académie dans la séance du 2 octobre 1871, je m'occuperai de la détermination de la courbure en un point quelconque d'une surface définie par son équation tangentielle. Les formules que j'obtiens, et qui n'ont jamais été données, que je sache, pourront être très-utiles lorsque l'usage des coordonnées tangentielles sera plus répandu.

J'ai également résolu les deux questions suivantes :

1° Détermination des éléments d'une courbe définie par son équation tangentielle;

2° Détermination des éléments de l'arête de rebroussement d'une surface développable définie par son équation ponctuelle.

Ces deux questions seront l'objet d'un troisième Mémoire.

§ I.

2. Soit donnée l'équation, en coordonnées tangentielles, d'une surface (S),

$$f(u, v, w) = 0 \quad \text{ou} \quad f(u, v, w, r) = 0,$$

en rendant homogène le premier membre de cette équation; u, v, w

où $\frac{u}{r}, \frac{v}{r}, \frac{w}{r}$ sont les coordonnées d'un plan tangent quelconque à la surface S.

Nous adopterons les notations suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{llll}
f_1 = \frac{\partial f}{\partial u}, & f_2 = \frac{\partial f}{\partial v}, & f_3 = \frac{\partial f}{\partial w}, & f_4 = \frac{\partial f}{\partial r}, \\
f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, & f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, & f_{13} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w}, & f_{14} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial r}, \\
 & f_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, & f_{23} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w}, & f_{24} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial r}, \\
 & & f_{33} = \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}, & f_{34} = \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial r}, \\
 & & & f_{44} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2};
\end{array}\right.$$

$$(2)\qquad H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix}, \quad H_{rs} = \frac{dH}{df_{rs}}.$$

On a alors les identités suivantes, où l'on a fait $r = 1$ après les différentiations :

$$uf_1 + vf_2 + wf_3 + f_4 = mf,$$

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l}
uf_{11} + vf_{12} + wf_{13} + f_{14} = (m-1)f_1, \\
uf_{21} + vf_{22} + wf_{23} + f_{24} = (m-1)f_2, \\
uf_{31} + vf_{32} + wf_{33} + f_{34} = (m-1)f_3, \\
uf_{41} + vf_{42} + wf_{43} + f_{44} = (m-1)f_4,
\end{array}\right.$$

d'où

$$(3\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l}
f_1 H_{11} + f_2 H_{21} + f_3 H_{31} + f_4 H_{41} = \frac{H}{m-1} u, \\
f_1 H_{12} + f_2 H_{22} + f_3 H_{32} + f_4 H_{42} = \frac{H}{m-1} v, \\
f_1 H_{13} + f_2 H_{23} + f_3 H_{33} + f_4 H_{43} = \frac{H}{m-1} w, \\
f_1 H_{14} + f_2 H_{24} + f_3 H_{34} + f_4 H_{44} = \frac{H}{m-1},
\end{array}\right.$$

en supposant que m est le degré d'homogénéité de la fonction de f rendue homogène.

3. Si maintenant (u, v, w) est un plan tangent à la surface S, le point de contact de ce plan aura pour équation

$$Uf_1 + Vf_2 + Wf_3 + f_4 = 0,$$

avec la condition

$$(4) \qquad uf_1 + vf_2 + wf_3 + f_4 = 0;$$

U, V, W sont les coordonnées tangentielles variables. D'après cela, les coordonnées x, y, z de ce point seront

$$(5) \qquad x = -\frac{f_1}{f_4}, \quad y = -\frac{f_2}{f_4}, \quad z = -\frac{f_3}{f_4}.$$

Si a, b, c sont les angles, avec les axes de coordonnées supposés rectangulaires, de la normale à la surface au point $M(x, y, z)$, on aura

$$(6) \qquad \frac{\cos a}{u} = \frac{\cos b}{v} = \frac{\cos c}{w} = \frac{1}{\pm\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

Considérons une tangente MT dans le plan tangent (u, v, w), et désignons par α, β, γ les angles de cette tangente avec les axes de coordonnées, on devra avoir l'équation de condition

$$(7) \qquad u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0,$$

qui exprime que cette tangente est parallèle au plan (u, v, w).

En désignant par X, Y, Z les coordonnées variables d'un point de l'espace, on trouve facilement, pour l'équation du plan passant par cette tangente et par la normale MN en M,

$$(8) \qquad M(X - x) + N(Y - y) + P(Z - z) = 0,$$

après avoir posé

$$(9) \qquad \begin{cases} M = v\cos\gamma - w\cos\beta, \\ N = w\cos\alpha - u\cos\gamma, \\ P = u\cos\beta - v\cos\alpha. \end{cases}$$

Si l'on considère trois points consécutifs M, M', M'' de la section de la surface par le plan TMN, les coordonnées

$$\begin{array}{lll} x, & y, & z, \\ x + dx, & y + dy, & z + dz, \\ x + dx + \frac{1}{2}d^2x, & y + dy + \frac{1}{2}d^2y, & z + dz + \frac{1}{2}d^2z \end{array}$$

de ces trois points devront vérifier l'équation (8); on est ainsi conduit aux deux équations de condition

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{l} M\,dx + N\,dy + P\,dz = 0, \\ M d^2x + N d^2y + P d^2z = 0; \end{array} \right.$$

et le rayon de courbure en M de la section normale TMN aura pour valeur

$$(11) \quad R = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}}.$$

Il s'agit d'exprimer cette dernière quantité en fonction de u, v, w et des dérivées de la fonction $f(u, v, w)$.

4. Lorsqu'un point se déplace suivant une courbe tracée sur la surface f, les coordonnées u, v, w du plan tangent correspondant sont liées par deux relations; nous pourrons donc, pour cette courbe, regarder u, v, w comme des fonctions d'un paramètre arbitraire t; il est entendu que les *différentielles* que nous emploierons dans ce qui va suivre se rapporteront à la variation de l'arbitraire t.

Dans cette hypothèse, on a

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} df_1 = f_{11}du + f_{12}dv + f_{13}dw, \\ df_2 = f_{21}du + f_{22}dv + f_{23}dw, \\ df_3 = f_{31}du + f_{32}dv + f_{33}dw, \\ df_4 = f_{41}du + f_{42}dv + f_{43}dw; \end{array} \right.$$

de là on déduit, en multipliant par H_{1r}, H_{2r}, H_{3r}, H_{4r}, et ajoutant,

$$(12\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} H_{11}df_1 + H_{21}df_2 + H_{31}df_3 + H_{41}df_4 = H du,\\ H_{12}df_1 + H_{22}df_2 + H_{32}df_3 + H_{42}df_4 = H dv,\\ H_{13}df_1 + H_{23}df_2 + H_{33}df_3 + H_{43}df_4 = H dw,\\ H_{14}df_1 + H_{24}df_2 + H_{34}df_3 + H_{44}df_4 = 0. \end{array}\right.$$

Nous poserons ensuite

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} A = f_1 df_4 - f_4 df_1,\\ B = f_2 df_4 - f_4 df_2,\\ C = f_3 df_4 - f_4 df_3; \end{array}\right. \qquad (13\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} A' = f_2 df_3 - f_3 df_2,\\ B' = f_3 df_1 - f_1 df_3,\\ C' = f_1 df_2 - f_2 df_1; \end{array}\right.$$

du groupe (13) on déduit

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} dA = f_1 d^2 f_4 - f_4 d^2 f_1,\\ dB = f_2 d^2 f_4 - f_4 d^2 f_2,\\ dC = f_3 d^2 f_4 - f_4 d^2 f_3. \end{array}\right.$$

Ces notations admises, des expressions (5), n° 3, précédemment trouvées

$$x = -\frac{f_1}{f_4},\quad y = -\frac{f_2}{f_4},\quad z = -\frac{f_3}{f_4},$$

on conclut les valeurs qui suivent pour dx, dy, dz; d^2x, d^2y, d^2z :

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} dx = \dfrac{A}{f_4^2},\\ dy = \dfrac{B}{f_4^2},\\ dz = \dfrac{C}{f_4^2}, \end{array}\right. \qquad (15\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} d^2x = \dfrac{dA}{f_4^2} - 2\dfrac{A}{f_4^3}df_4,\\ d^2y = \dfrac{dB}{f_4^2} - 2\dfrac{B}{f_4^3}df_4,\\ d^2z = \dfrac{dC}{f_4^2} - 2\dfrac{C}{f_4^3}df_4. \end{array}\right.$$

L'expression (11) du rayon de courbure R prend alors la forme

$$(16)\quad f_4^2 R = \frac{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(BdC - CdB)^2 + (CdA - AdC)^2 + (AdB - BdA)^2}}.$$

5. Il nous faut maintenant calculer le numérateur et le dénomina-

teur de cette dernière fraction en supposant que les trois points consécutifs M, M′, M″ sont dans le plan normal TMN.

On a, dans cette hypothèse, à satisfaire aux relations

$$(17)\quad \begin{cases} 1^{\circ}) & u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0,\\ 2^{\circ}) & \mathrm{MA} + \mathrm{NB} + \mathrm{PC} = 0,\\ 3^{\circ}) & \mathrm{M}d\mathrm{A} + \mathrm{N}d\mathrm{B} + \mathrm{P}d\mathrm{C} = 0,\\ 4^{\circ}) & uf_1 + vf_2 + wf_3 + f_4 = 0,\\ 5^{\circ}) & f_1 du + f_2 dv + f_3 dw = 0,\\ 6^{\circ}) & d(f_1 du + f_2 dv + f_3 dw) = 0. \end{cases}$$

La relation 1°) exprime que la tangente (α, β, γ) est dans le plan (u, v, w); les égalités 2°) et 3°) expriment que les points M′, M″ sont dans le plan normal TMN, c'est-à-dire que les valeurs (15) et (15 *bis*) vérifient respectivement la première et la seconde des relations (10); les égalités 4°), 5°), 6°) expriment que u, v, w, et leurs variations du premier et du second ordre satisfont à l'équation $f(u, v, w) = 0$ de la surface donnée.

Écrivons à part les égalités 1°) et 4°), savoir :

$$(17\ bis)\quad \begin{cases} u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0,\\ uf_1 + vf_2 + wf_3 + f_4 = 0, \end{cases}$$

qui interviendront fréquemment dans les transformations que nous aurons à effectuer.

6. Pour calculer le *numérateur* de l'expression (16), nous utiliserons d'abord les relations 2°) et 5°) du groupe (17), savoir :

$$f_1 du + f_2 dv + f_3 dw = 0,$$
$$\mathrm{MA} + \mathrm{NB} + \mathrm{PC} = 0.$$

Eu égard aux identités (3) du n° 2 et aux valeurs (12) du n° 4, la première des équations qui précèdent pourra s'écrire

$$u\,df_1 + v\,df_2 + w\,df_3 + df_4 = 0;$$

quant à la seconde, elle devient, en y remplaçant A, B, C par leurs valeurs (13),

$$(\mathrm{M}f_1 + \mathrm{N}f_2 + \mathrm{P}f_3)\,df_4 - f_4(\mathrm{M}\,df_1 + \mathrm{N}\,df_2 + \mathrm{P}\,df_3) = 0;$$

puis, en mettant pour df_4 la valeur fournie par l'équation précédente, et pour f_4 la valeur que donne la seconde des équations (17 *bis*), on trouve, en tenant compte de la première des équations (17 *bis*),

$$\mathrm{M}'df_1 + \mathrm{N}'df_2 + \mathrm{P}'df_3 = 0,$$

après avoir posé

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{M}' &= f_3\cos\beta - f_2\cos\gamma,\\ \mathrm{N}' &= f_1\cos\gamma - f_3\cos\alpha,\\ \mathrm{P}' &= f_2\cos\alpha - f_1\cos\beta. \end{aligned}\right.$$

On constate aisément que

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{M}'\cos\alpha + \mathrm{N}'\cos\beta + \mathrm{P}'\cos\gamma = 0,\\ &u\mathrm{M}' + v\mathrm{N}' + w\mathrm{P}' = f_1\mathrm{M} + f_2\mathrm{N} + f_3\mathrm{P}; \end{aligned}\right.$$

$$(19\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} w\mathrm{N}' - v\mathrm{P}' &= f_4\cos\alpha,\\ u\mathrm{P}' - w\mathrm{M}' &= f_4\cos\beta,\\ v\mathrm{M}' - u\mathrm{N}' &= f_4\cos\gamma. \end{aligned}\right.$$

En joignant aux égalités 2°) et 5°) que nous venons de transformer la quatrième relation du groupe (12 *bis*), on a le système des trois équations

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} u\,df_1 + v\,df_2 + w\,df_3 &= -\,df_4,\\ \mathrm{M}'df_1 + \mathrm{N}'df_2 + \mathrm{P}'df_3 &= 0,\\ \mathrm{H}_{14}df_1 + \mathrm{H}_{24}df_2 + \mathrm{H}_{34}df_3 &= -\,\mathrm{H}_{44}df_4. \end{aligned}\right.$$

Si maintenant on résout ces trois équations par rapport à df_1, df_2, df_3, on trouve, pour df_1 par exemple,

$$df_1\begin{vmatrix} u & v & w\\ \mathrm{M}' & \mathrm{N}' & \mathrm{P}'\\ \mathrm{H}_{14} & \mathrm{H}_{24} & \mathrm{H}_{34} \end{vmatrix} = -\,df_4\begin{vmatrix} 1 & v & w\\ 0 & \mathrm{N}' & \mathrm{P}'\\ \mathrm{H}_{44} & \mathrm{H}_{24} & \mathrm{H}_{34} \end{vmatrix};$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned} df_4[H_{14}(vP' - wN') + H_{24}(wM' - uP') + H_{34}(uN' - vM')] \\ = - df_4[H_{44}(vP' - wN') - P'H_{24} + N'H_{34}]; \end{aligned}$$

puis, en ayant égard aux relations (19 *bis*) et aux valeurs (18),

$$\begin{aligned} f_4 df_1 (H_{14} \cos\alpha + H_{24} \cos\beta + H_{34} \cos\gamma) \\ = df_4[-f_4 H_{44} \cos\alpha - f_2 H_{24} \cos\alpha - f_3 H_{34} \cos\alpha \\ + f_1 H_{24} \cos\beta + f_1 H_{34} \cos\gamma]; \end{aligned}$$

si l'on tient compte de la dernière des identités (3 *bis*), il vient enfin

$$\begin{aligned} f_4 df_1 (H_{14} \cos\alpha + H_{24} \cos\beta + H_{34} \cos\gamma) \\ = f_1 df_4 (H_{14} \cos\alpha + H_{24} \cos\beta + H_{34} \cos\gamma) - \frac{H}{m-1} \cos\alpha\, df_4. \end{aligned}$$

De sorte que, si l'on pose

$$K = \frac{\dfrac{H}{m-1}}{H_{14} \cos\alpha + H_{24} \cos\beta + H_{34} \cos\gamma} df_4, \tag{21}$$

on obtient ainsi la première des relations du groupe (22) :

$$\left\{ \begin{aligned} A &= f_1 df_4 - f_4 df_1 = K \cos\alpha, \\ B &= f_2 df_4 - f_4 df_2 = K \cos\beta, \\ C &= f_3 df_4 - f_4 df_3 = K \cos\gamma; \end{aligned} \right. \tag{22}$$

d'où

$$\left\{ \begin{aligned} df_1 &= \frac{f_1}{f_4} df_4 - \frac{K}{f_4} \cos\alpha, \\ df_2 &= \frac{f_2}{f_4} df_4 - \frac{K}{f_4} \cos\beta, \\ df_3 &= \frac{f_3}{f_4} df_4 - \frac{K}{f_4} \cos\gamma. \end{aligned} \right. \tag{22 bis}$$

Des égalités (22) on déduit

$$A^2 + B^2 + C^2 = K^2,$$

ou

$$(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{3}{2}} = K^3. \tag{23}$$

7. Passons maintenant au calcul du *dénominateur* de l'expression (16).

Il nous faut d'abord introduire les relations (3°) et (6°) du groupe (17), savoir :

$$(24)\qquad \begin{cases} \mathrm{M}d\mathrm{A} + \mathrm{N}d\mathrm{B} + \mathrm{P}d\mathrm{C} = 0, \\ d[f_1 du + f_2 dv + f_3 dw] = 0, \end{cases}$$

ou

$$d[u df_1 + v df_2 + w df_3 + df_4] = 0.$$

On peut écrire la deuxième égalité sous la seconde forme indiquée, puisque $(f_1 du + f_2 dv + f_3 dw)$ et $(u df_1 + v df_2 + w df_3 + df_4)$ sont, à un facteur numérique près, des expressions identiques.

En substituant à $d\mathrm{A}$, $d\mathrm{B}$, $d\mathrm{C}$ leurs valeurs (14), on mettra la première des égalités (24) sous la forme

$$(25)\qquad (\mathrm{M}f_1 + \mathrm{N}f_2 + \mathrm{P}f_3)d^2 f_4 - f_4(\mathrm{M}d^2 f_1 + \mathrm{N}d^2 f_2 + \mathrm{P}d^2 f_3) = 0,$$

ou encore, d'après la seconde des relations (19),

$$(25\ bis)\qquad (u\mathrm{M}' + v\mathrm{N}' + w\mathrm{P}')d^2 f_4 - f_4(\mathrm{M}d^2 f_1 + \mathrm{N}d^2 f_2 + \mathrm{P}d^2 f_3) = 0.$$

Quant à la seconde des relations (24), elle devient d'abord, en effectuant la différentiation indiquée,

$$(26)\qquad u d^2 f_1 + v d^2 f_2 + w d^2 f_3 + d^2 f_4 + du\, df_1 + dv\, df_2 + dw\, df_3 = 0.$$

Calculons la quantité $(du\, df_1 + dv\, df_2 + dw\, df_3)$.

Nous obtiendrons d'abord du, dv, dw en remplaçant, dans les équations (12 *bis*), df_1, df_2, df_3 par leurs valeurs (22 *bis*); on trouve ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{H}du = \mathrm{H}_{11}\left(\frac{f_1}{f_4}df_4 - \frac{\mathrm{K}}{f_4}\cos\alpha\right) + \mathrm{H}_{21}\left(\frac{f_2}{f_4}df_4 - \frac{\mathrm{K}}{f_4}\cos\beta\right) \\ + \mathrm{H}_{31}\left(\frac{f_3}{f_4}df_4 - \frac{\mathrm{K}}{f_4}\cos\gamma\right) + \mathrm{H}_{41}\,df_4, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathrm{H}du = \frac{df_4}{f_4}(\mathrm{H}_{11}f_1 + \mathrm{H}_{21}f_2 + \mathrm{H}_{31}f_3 + \mathrm{H}_{41}f_4) \\ - \frac{\mathrm{K}}{f_4}(\mathrm{H}_{11}\cos\alpha + \mathrm{H}_{21}\cos\beta + \mathrm{H}_{31}\cos\gamma); \end{aligned}$$

ou, en ayant égard à la première des identités (3 *bis*),

$$f_4 \mathrm{H} du = \frac{\mathrm{H}}{m-1} u\, df_4 - \mathrm{K}(\mathrm{H}_{11}\cos\alpha + \mathrm{H}_{21}\cos\beta + \mathrm{H}_{31}\cos\gamma).$$

On trouvera de cette manière les valeurs suivantes pour du, dv, dw :

$$\begin{aligned}
f_4 du &= \frac{df_4}{m-1} u - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}(\mathrm{H}_{11}\cos\alpha + \mathrm{H}_{21}\cos\beta + \mathrm{H}_{31}\cos\gamma),\\
f_4 dv &= \frac{df_4}{m-1} v - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}(\mathrm{H}_{12}\cos\alpha + \mathrm{H}_{22}\cos\beta + \mathrm{H}_{32}\cos\gamma),\\
f_4 dw &= \frac{df_4}{m-1} w - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}(\mathrm{H}_{13}\cos\alpha + \mathrm{H}_{23}\cos\beta + \mathrm{H}_{33}\cos\gamma).
\end{aligned}$$

On déduit de là

$$\begin{aligned}
&f_4(du\,df_1 + dv\,df_2 + dw\,df_3)\\
&\quad = \frac{df_4}{m-1}(u\,df_1 + v\,df_2 + w\,df_3)\\
&\qquad - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}\left\{\begin{aligned}
&+(\mathrm{H}_{11}\cos\alpha + \mathrm{H}_{21}\cos\beta + \mathrm{H}_{31}\cos\gamma)\left(\frac{f_1}{f_4}df_4 - \frac{\mathrm{K}}{f_4}\cos\alpha\right)\\
&+(\mathrm{H}_{12}\cos\alpha + \mathrm{H}_{22}\cos\beta + \mathrm{H}_{32}\cos\gamma)\left(\frac{f_2}{f_4}df_4 - \frac{\mathrm{K}}{f_4}\cos\beta\right)\\
&+(\mathrm{H}_{13}\cos\alpha + \mathrm{H}_{23}\cos\beta + \mathrm{H}_{33}\cos\gamma)\left(\frac{f_3}{f_4}df_4 - \frac{\mathrm{K}}{f_4}\cos\gamma\right)
\end{aligned}\right\},
\end{aligned}$$

ou, en ayant égard à la première des égalités (20) et aux identités (3 *bis*),

$$\begin{aligned}
&f_4(du\,df_1 + dv\,df_2 + dw\,df_3)\\
&\quad = -\frac{df_4^2}{m-1} - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}\frac{df_4}{f_4}\left[\cos\alpha\left(\frac{\mathrm{H}}{m-1}u - f_4\mathrm{H}_{41}\right) + \cos\beta\left(\frac{\mathrm{H}}{m-1}v - f_4\mathrm{H}_{42}\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left. + \cos\gamma\left(\frac{\mathrm{H}}{m-1}w - f_4\mathrm{H}_{43}\right)\right]\\
&\qquad + \frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{H}f_4}(\mathrm{H}_{11}\cos^2\alpha + \mathrm{H}_{22}\cos^2\beta + \mathrm{H}_{33}\cos^2\gamma\\
&\qquad\qquad + 2\mathrm{H}_{12}\cos\alpha\cos\beta + 2\mathrm{H}_{13}\cos\alpha\cos\gamma + 2\mathrm{H}_{23}\cos\beta\cos\gamma).
\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta = {}&\mathrm{H}_{11}\cos^2\alpha + \mathrm{H}_{22}\cos^2\beta + \mathrm{H}_{33}\cos^2\gamma\\
&+ 2\mathrm{H}_{12}\cos\alpha\cos\beta + 2\mathrm{H}_{13}\cos\alpha\cos\gamma + 2\mathrm{H}_{23}\cos\beta\cos\gamma,
\end{aligned}\right.$$

et qu'on ait égard à la première des relations (17 *bis*) et à la valeur (21) de K, l'égalité précédente devient

$$f_4(du\,df_1 + dv\,df_2 + dw\,df_3) = -\frac{df_4^2}{m-1} + \frac{df_4^2}{m-1} + \frac{K^2}{Hf_4}\Delta,$$

et, par suite, l'équation (26) prend la forme définitive

$$(28)\qquad u\,d^2f_1 + v\,d^2f_2 + w\,d^2f_3 + d^2f_4 + \frac{K^2}{Hf_4^2}\Delta = 0.$$

8. Ceci établi, passons au calcul des binômes $(B\,dC - C\,dB)$, ... Les valeurs (13), (13 *bis*) et (14) nous donnent d'abord

$$\begin{aligned}
B\,dC - C\,dB &= f_4[C\,d^2f_2 - B\,d^2f_3 + A'd^2f_4],\\
C\,dA - A\,dC &= f_4[-C\,d^2f_1 + A\,d^2f_3 + B'd^2f_4],\\
A\,dB - B\,dA &= f_4[+B\,d^2f_1 - A\,d^2f_2 + C'd^2f_4];
\end{aligned}$$

mais on a, d'après les égalités (22),

$$(29)\qquad A = K\cos\alpha,\quad B = K\cos\beta,\quad C = K\cos\gamma;$$

de plus, en substituant les valeurs (22 *bis*) dans les équations (13 *bis*), on trouve, eu égard aux notations (18),

$$(29\ bis)\qquad A' = \frac{K}{f_4}M',\quad B' = \frac{K}{f_4}N',\quad C' = \frac{K}{f_4}P'.$$

D'après cela, il résulte

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned}
B\,dC - C\,dB &= Kf_4(\cos\gamma\,d^2f_2 - \cos\beta\,d^2f_3) + KM'd^2f_4,\\
C\,dA - A\,dC &= Kf_4(\cos\alpha\,d^2f_3 - \cos\gamma\,d^2f_1) + KN'd^2f_4,\\
A\,dB - B\,dA &= Kf_4(\cos\beta\,d^2f_1 - \cos\alpha\,d^2f_2) + KP'd^2f_4.
\end{aligned}\right.$$

Maintenant, de l'égalité (25 *bis*) tirons la valeur de d^2f_4 et substituons-la dans les expressions qui précèdent; on trouve, après quelques réductions d'une extrême facilité, où l'on fait intervenir les notations (9), (18) et les relations (19),

$$(31)\quad \begin{cases} BdC - CdB = Kf_4 M \dfrac{M' d^2f_1 + N' d^2f_2 + P' d^2f_3}{uM' + vN' + wP'}, \\ CdA - AdC = Kf_4 N \dfrac{M' d^2f_1 + N' d^2f_2 + P' d^2f_3}{uM' + vN' + wP'}, \\ AdB - BdA = Kf_4 P \dfrac{M' d^2f_1 + N' d^2f_2 + P' d^2f_3}{uM' + vN' + wP'}. \end{cases}$$

Enfin, substituant dans l'égalité (28) la valeur de d^2f_4 tirée de l'équation (25) ou (25 *bis*), il vient

$$(ud^2f_1 + vd^2f_2 + wd^2f_3)(Mf_1 + Nf_2 + Pf_3) \\ + f_4(Md^2f_1 + Nd^2f_2 + Pd^2f_3) + \frac{K^2}{Hf_4^2}\Delta(uM' + vN' + wP') = 0;$$

ou, en réduisant les termes des deux premiers groupes après avoir remplacé f_4 par $-(uf_1 + vf_2 + wf_3)$, puis en ayant égard aux valeurs (9) de M, N, P et à la première des relations (17 *bis*),

$$(32)\quad \begin{cases} (M'd^2f_1 + N'd^2f_2 + P'd^2f_3)(u^2 + v^2 + w^2) \\ \qquad + \dfrac{K^2}{Hf_4^2}\Delta(uM' + vN' + wP') = 0. \end{cases}$$

Si, dans les égalités (31), on remplace $(M'd^2f_1 + N'd^2f_2 + P'd^2f_3)$ par la valeur que fournit l'équation (32), on a définitivement

$$(33)\quad \begin{cases} BdC - CdB = -\dfrac{K^3\Delta}{Hf_4(u^2 + v^2 + w^2)} M, \\ CdA - AdC = -\dfrac{K^3\Delta}{Hf_4(u^2 + v^2 + w^2)} N, \\ AdB - BdA = -\dfrac{K^3\Delta}{Hf_4(u^2 + v^2 + w^2)} P. \end{cases}$$

Mais les valeurs (9) donnent

$$M^2 + N^2 + P^2 \\ = (u^2+v^2+w^2)(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma) - (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)^2,$$

ou, d'après la première des relations (17 *bis*),

$$(34) \qquad M^2 + N^2 + P^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

On déduit alors des égalités (33) et (34)

$$(35) \qquad \sqrt{(BdC - CdB)^2 + (CdA - AdC)^2 + (AdB - BdA)^2} = \frac{K^3\Delta}{Hf_4\sqrt{u^2+v^2+w^2}}.$$

9. La substitution des valeurs (23) et (35) dans l'expression (16) de R donne définitivement

$$(36) \qquad R = \frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{f_4} \cdot \frac{H}{\Delta},$$

ou, en remplaçant les lettres H et Δ par les valeurs qu'elles désignent,

$$bis) \quad R = \frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{f_4} \cdot \frac{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix}}{H_{11}\cos^2\alpha + H_{22}\cos^2\beta + H_{33}\cos^2\gamma + 2H_{12}\cos\alpha\cos\beta + 2H_{13}\cos\alpha\cos\gamma + 2H_{23}\cos\beta\cos\gamma},$$

ce qu'on peut encore écrire comme il suit :

$$(36\ ter) \qquad R = \frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{f_4} \cdot \frac{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & \cos\alpha \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & \cos\beta \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & \cos\gamma \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & 0 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 & 0 \end{vmatrix}};$$

il ne faut pas oublier qu'on doit toujours vérifier les deux relations

$$(37) \qquad \begin{cases} u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0, \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \end{cases}$$

Nous arrivons donc à cette conclusion :

Si l'on considère un plan tangent quelconque (u, v, w) *à la surface donnée et le point de contact* M *de ce plan, le rayon de courbure, en* M, *de la section faite par un plan normal passant par la tangente* $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ *sera donné par la formule* (36 *bis*) *ou son équivalente* (36 *ter*).

10. Il est maintenant facile d'obtenir les rayons de courbure principaux, c'est-à-dire les valeurs maximum et minimum de R, lorsque α, β, γ varient de manière à vérifier toujours les relations (37).

Posons

$$\rho = \frac{\mathrm{H}\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{\mathrm{R}.f_4}, \tag{38}$$

l'équation (36 *bis*) pourra s'écrire

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}_{11}\cos^2\alpha + \mathrm{H}_{22}\cos^2\beta + \mathrm{H}_{33}\cos^2\gamma\\ &\qquad + 2\mathrm{H}_{12}\cos\alpha\cos\beta + 2\mathrm{H}_{13}\cos\alpha\cos\gamma + 2\mathrm{H}_{23}\cos\beta\cos\gamma\\ &\quad = \rho(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma),\end{aligned}$$

ou

$$\left\{\begin{aligned}&(\mathrm{H}_{11}-\rho)\cos^2\alpha + (\mathrm{H}_{22}-\rho)\cos^2\beta + (\mathrm{H}_{33}-\rho)\cos^2\gamma\\ &\quad + 2\mathrm{H}_{12}\cos\alpha\cos\beta + 2\mathrm{H}_{13}\cos\alpha\cos\gamma + 2\mathrm{H}_{23}\cos\beta\cos\gamma = 0.\end{aligned}\right. \tag{39}$$

Il s'agit d'avoir le maximum ou le minimum de ρ, en supposant les variables $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ liées par la relation

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0. \tag{40}$$

En appliquant ici les règles connues, on est conduit aux égalités

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{(\mathrm{H}_{11}-\rho)\cos\alpha + \mathrm{H}_{12}\cos\beta + \mathrm{H}_{13}\cos\gamma}{u}\\ &= \frac{\mathrm{H}_{21}\cos\alpha + (\mathrm{H}_{22}-\rho)\cos\beta + \mathrm{H}_{23}\cos\gamma}{v}\\ &= \frac{\mathrm{H}_{31}\cos\alpha + \mathrm{H}_{32}\cos\beta + (\mathrm{H}_{33}-\rho)\cos\gamma}{w}.\end{aligned}\right. \tag{41}$$

Si l'on désigne par λ la valeur commune de ces rapports, on a les équations

$$(41\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} (H_{11}-\rho)\cos\alpha + H_{12}\cos\beta + H_{13}\cos\gamma - \lambda u = 0, \\ H_{21}\cos\alpha + (H_{22}-\rho)\cos\beta + H_{23}\cos\gamma - \lambda v = 0, \\ H_{31}\cos\alpha + H_{32}\cos\beta + (H_{33}-\rho)\cos\gamma - \lambda w = 0, \\ \qquad\qquad u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0; \end{array}\right.$$

l'élimination de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, λ, entre ces équations donne

$$(42)\qquad \begin{vmatrix} H_{11}-\rho & H_{12} & H_{13} & u \\ H_{21} & H_{22}-\rho & H_{23} & v \\ H_{31} & H_{32} & H_{33}-\rho & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on développe l'équation (42), on trouve

$$(42\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} \rho^2(u^2+v^2+w^2) \\ \quad -\rho\left\{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & u \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & v \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & w \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & 0 \\ u & v & w & 0 & 0 \end{vmatrix} + (u^2+v^2+w^2)(H_{11}+H_{22}+H_{33})\right\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - (m-1)^2 f_4^2 . H = 0, \end{array}\right.$$

après avoir remarqué qu'on a identiquement

$$\begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & u \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & v \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = (m-1)^2 f_4^2 . H.$$

Cette identité peut se démontrer comme il suit : on a

$$
\begin{vmatrix}
H_{11} & H_{12} & H_{13} & u \\
H_{21} & H_{22} & H_{23} & v \\
H_{31} & H_{32} & H_{33} & w \\
v & v & w & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{m-1}{H}
\begin{vmatrix}
H_{11} & H_{12} & H_{13} & \frac{H}{m-1} u - f_1 H_{11} - f_2 H_{12} - f_3 H_{13} \\
H_{21} & H_{22} & H_{23} & \frac{H}{m-1} v - f_1 H_{21} - f_2 H_{22} - f_3 H_{23} \\
H_{31} & H_{32} & H_{33} & \frac{H}{m-1} w - f_1 H_{31} - f_2 H_{32} - f_3 H_{33} \\
u & v & w & - f_1 u - f_2 v - f_3 w
\end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{(m-1) f_1}{H}
\begin{vmatrix}
H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\
H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\
H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\
u & v & w & 1
\end{vmatrix},
$$

en ayant égard aux identités (3 *bis*). On aura de même

$$
\begin{vmatrix}
H_{11} & H_{21} & H_{31} & u \\
H_{12} & H_{22} & H_{32} & v \\
H_{13} & H_{23} & H_{33} & w \\
H_{14} & H_{24} & H_{34} & 1
\end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{m-1}{H}
\begin{vmatrix}
H_{11} & H_{21} & H_{31} & \frac{H}{m-1} u - f_1 H_{11} - f_2 H_{21} - f_3 H_{31} \\
H_{12} & H_{22} & H_{32} & \frac{H}{m-1} v - f_1 H_{12} - f_2 H_{22} - f_3 H_{32} \\
H_{13} & H_{23} & H_{33} & \frac{H}{m-1} w - f_1 H_{13} - f_2 H_{23} - f_3 H_{33} \\
H_{14} & H_{24} & H_{34} & \frac{H}{m-1} - f_1 H_{14} - f_2 H_{24} - f_3 H_{34}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{(m-1) f_1}{H}
\begin{vmatrix}
H_{11} & H_{21} & H_{31} & H_{41} \\
H_{12} & H_{22} & H_{32} & H_{42} \\
H_{13} & H_{23} & H_{33} & H_{43} \\
H_{14} & H_{24} & H_{34} & H_{44}
\end{vmatrix}
= \frac{(m-1) f_1 . H^3}{H};
$$

d'où résulte immédiatement l'identité en question.

Ainsi :

Les valeurs de ρ (38), correspondant aux deux rayons de courbure principaux, seront données par l'équation (42) ou l'équation (42 bis); les directions des sections principales seront déterminées par les équations (41) après la substitution de la valeur correspondante de ρ.

Il est facile de démontrer, à l'aide des relations (41 *bis*), que les deux directions des sections principales sont rectangulaires; on opère, comme dans le cas analogue, des cordes principales dans les surfaces du second ordre.

Remarquons encore que :

Le produit des rayons de courbure principaux R_1, R_2 *est donné par la formule*

$$(43) \qquad R_1 R_2 = -\frac{(u^2+v^2+w^2)}{(m-1)^2 f_4^4} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix}.$$

Remarque. — On pourrait se proposer de chercher les conditions, pour qu'un point soit un ombilic, de déterminer les directions des lignes asymptotiques,...; je laisserai de côté toutes ces questions, dont la solution ne saurait d'ailleurs présenter aucune difficulté maintenant; je me contenterai d'avoir résolu la question fondamentale pour cette théorie, et d'indiquer plus loin la recherche des centres de courbure.

§ II.

11. Dans le paragraphe précédent, j'ai résolu la question que je m'étais proposée en introduisant les dérivées partielles du premier membre de l'équation qui définit la surface donnée; on a pu constater que les formules ainsi obtenues étaient remarquables par leur symétrie.

L'équation de la surface établit une relation entre les trois variables u, v, w, de sorte qu'on peut regarder l'une d'elles, w par exemple, comme une fonction déterminée des deux autres, u et v, qui seraient alors des variables indépendantes.

Or, dans un grand nombre de circonstances, il peut être avantageux, indispensable même, de se placer à ce dernier point de vue. Quoique les formules qu'on obtient alors soient bien moins élégantes que les premières, je crois cependant qu'il est nécessaire de les établir. C'est ce que je vais faire en abordant la question directement, sans tenir compte des résultats précédemment acquis.

12. Regardons donc w comme une fonction déterminée des deux variables u et v, et posons

$$(1)\quad \begin{cases} p = \dfrac{\partial w}{\partial u}, \\ q = \dfrac{\partial w}{\partial v}, \\ r = \dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \dfrac{\partial p}{\partial u}, \\ s = \dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial p}{\partial v} = \dfrac{\partial q}{\partial u}, \\ t = \dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \dfrac{\partial q}{\partial v}; \end{cases}$$

on aura alors

$$(2)\quad \begin{cases} dw = p\,du + q\,dv, \\ dp = r\,du + s\,dv, \\ dq = s\,du + t\,dv, \end{cases}$$

d'où

$$(2\ bis)\quad \begin{cases} du = \dfrac{t\,dp - s\,dq}{rt - s^2}, \\ dv = \dfrac{-s\,dp + r\,dq}{rt - s^2}. \end{cases}$$

Soient u, v, w les coordonnées d'un plan tangent fixe et M son point de contact, l'équation de ce point sera

$$p(\mathrm{U} - u) + q(\mathrm{V} - v) - (\mathrm{W} - w) = 0,$$

U, V, W étant les coordonnées tangentielles courantes; les coordonnées x, y, z du point M sont alors

$$(3)\quad x = \frac{p}{pu + qv - w},\quad y = \frac{q}{pu + qv - w},\quad z = -\frac{1}{pu + qv - w}.$$

13. Si le point se déplace sur une courbe tracée sur la surface, les coordonnées u, v, w du plan tangent correspondant varieront respectivement suivant une loi déterminée, de sorte qu'on pourra les considérer comme des fonctions d'une certaine arbitraire; c'est à la variation de cette arbitraire que se rapporteront les différentielles que nous emploierons dans la suite.

Différentions donc les équations (3); on trouve

$$(4)\qquad dx = \frac{A}{D^2},\quad dy = \frac{B}{D^2},\quad dz = \frac{C}{D^2},$$

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} d^2x &= \frac{dA}{D^2} - 2\frac{A}{D^3}dD,\\ d^2y &= \frac{dB}{D^2} - 2\frac{B}{D^3}dD,\\ d^2z &= \frac{dC}{D^2} - 2\frac{C}{D^3}dD,\end{aligned}\right.$$

après avoir posé

$$(6)\qquad D = pu + qv - w,$$

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= (qv - w)\,dp - pv\,dq,\\ B &= -qu\,dp + (pu - w)\,dp,\\ C &= u\,dp + v\,dq.\end{aligned}\right.$$

Or, si α, β, γ sont les angles, avec les axes de coordonnées, d'une tangente située dans le plan tangent (u, v, w), et si les trois points consécutifs M, M′, M″ correspondant aux coordonnées

$$\begin{array}{lll} x, & y, & z,\\ x + dx, & y + dy, & z + dz,\\ x + dx + \frac{1}{2}d^2x, & y + dy + \frac{1}{2}d^2y, & z + dz + \frac{1}{2}d^2z \end{array}$$

sont situés dans le plan normal passant par cette tangente, les différentielles (4) et (5) doivent vérifier les équations (10), n° 3, de sorte qu'on aura les équations de condition

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &MA + NB + PC = 0,\\ &M\,dA + N\,dB + P\,dC = 0,\end{aligned}\right.$$

après avoir posé

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} M &= v\cos\gamma - w\cos\beta,\\ N &= w\cos\alpha - u\cos\gamma,\\ P &= u\cos\beta - v\cos\alpha;\end{aligned}\right.$$

on a toujours

$$(9\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0,\\ &\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.\end{aligned}\right.$$

D'après la formule (11) du n° **3** et les valeurs (4) et (5) du n° **13**, le rayon de courbure R de cette section normale sera donné par la nouvelle formule

$$(10)\qquad R = \frac{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}}{D^2\sqrt{(B\,dC - C\,dB)^2 + (C\,dA - A\,dC)^2 + (A\,dB - B\,dA)^2}}.$$

Il nous reste à calculer maintenant le numérateur et le dénominateur de cette dernière expression.

14. Calcul du *numérateur* de l'expression (10) de R.

Ayons d'abord égard à la première des relations (8); en y remplaçant A, B, C par leurs valeurs, il vient

$$\begin{aligned} &M[(qv - w)\,dp - pv\,dq]\\ &\quad + N[-qu\,dp + (pu - w)\,dq] + P(u\,dp + v\,dq) = 0\end{aligned}$$

ou

$$dp[q(Mv - Nu) + Pu - Mw] + dq[p(Nu - Mv) + Pv - Nw] = 0.$$

Or on a, d'après les valeurs (9) et (9 *bis*),

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} vP - wN &= -(u^2+v^2+w^2)\cos\alpha,\\ wM - uP &= -(u^2+v^2+w^2)\cos\beta,\\ uN - vM &= -(u^2+v^2+w^2)\cos\gamma,\end{aligned}\right.$$

et l'égalité qui précède devient

$$dp(q\cos\gamma + \cos\beta) = dq(p\cos\gamma + \cos\alpha).$$

Nous sommes ainsi conduits à la relation

$$(12)\qquad \frac{dp}{\cos\alpha + p\cos\gamma} = \frac{dq}{\cos\beta + q\cos\gamma} = d\lambda,$$

d'où

$$dp = (\cos\alpha + p\cos\gamma)\, d\lambda,$$
$$dq = (\cos\beta + q\cos\gamma)\, d\lambda.$$

D'après cela, les valeurs (7) de A, B, C deviennent, eu égard aux relations (9 *bis*) et à la notation (6),

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= D\cos\alpha\, d\lambda,\\ B &= D\cos\beta\, d\lambda,\\ C &= D\cos\gamma\, d\lambda;\end{aligned}\right.$$

d'où l'on conclut

$$(14)\qquad (A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{3}{2}} = D^3.d\lambda^3.$$

15. Passons maintenant au calcul du *dénominateur* de l'expression (10).

La différentiation des équations (7) nous donne

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} dA &= -\,p(du\,dp + dv\,dq) + (qv - w)\,d^2p - pv\,d^2q,\\ dB &= -\,q(du\,dp + dv\,dq) - qu\,d^2p + (pu - w)d^2q,\\ dC &= (du\,dp + dv\,dq) + u\,d^2p + v\,d^2q.\end{aligned}\right.$$

Or, si l'on pose

$$(16)\ G = \frac{t(\cos\alpha + p\cos\gamma)^2 - 2s(\cos\alpha + p\cos\gamma)(\cos\beta + q\cos\gamma) + r(\cos\beta + q\cos\gamma)^2}{rt - s^2},$$

on trouve, eu égard aux valeurs (2 *bis*) et (12),

$$(17)\qquad du\,dp + dv\,dq = G\,d\lambda^2.$$

Par suite,

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} dA &= -\,pG\,d\lambda^2 + (qv - w)\,d^2p - pv\,d^2q,\\ dB &= -\,qG\,d\lambda^2 - qu\,d^2p + (pu - w)\,d^2q,\\ dC &= G\,d\lambda^2 + u\,d^2p + v\,d^2q;\end{aligned}\right.$$

et si l'on introduit les valeurs (13), on obtient les égalités

$$\frac{\mathrm{B}\,d\mathrm{C}-\mathrm{C}\,d\mathrm{B}}{\mathrm{D}\,d\lambda}=(\cos\beta+q\cos\gamma)\,\mathrm{G}\,d\lambda^2$$
$$+u[(\cos\beta+q\cos\gamma)\,d^2p-(\cos\alpha+p\cos\gamma)\,d^2q],$$
$$\frac{\mathrm{C}\,d\mathrm{A}-\mathrm{A}\,d\mathrm{C}}{\mathrm{D}\,d\lambda}=-(\cos\alpha+p\cos\gamma)\,\mathrm{G}\,d\lambda^2$$
$$+v[(\cos\beta+q\cos\gamma)\,d^2p-(\cos\alpha+p\cos\gamma)\,d^2q],$$
$$\frac{\mathrm{A}\,d\mathrm{B}-\mathrm{B}\,d\mathrm{A}}{\mathrm{D}\,d\lambda}=(p\cos\beta-q\cos\alpha)\,\mathrm{G}\,d\lambda^2$$
$$+w[(\cos\beta+q\cos\gamma)\,d^2p-(\cos\alpha+p\cos\gamma)\,d^2q].$$

Si l'on pose, pour un instant,

$$(\cos\beta+q\cos\gamma)\,d^2p-(\cos\alpha+p\cos\gamma)\,d^2q=\mu, \tag{19}$$

il vient

$$\left\{\begin{aligned}\mathrm{B}\,d\mathrm{C}-\mathrm{C}\,d\mathrm{B}&=\mathrm{D}\,d\lambda\,[\ \ (\cos\beta+q\cos\gamma)\,\mathrm{G}\,d\lambda^2+\mu u],\\ \mathrm{C}\,d\mathrm{A}-\mathrm{A}\,d\mathrm{C}&=\mathrm{D}\,d\lambda\,[-(\cos\alpha+p\cos\gamma)\,\mathrm{G}\,d\lambda^2+\mu v],\\ \mathrm{A}\,d\mathrm{B}-\mathrm{B}\,d\mathrm{A}&=\mathrm{D}\,d\lambda\,[\ (p\cos\beta-q\cos\alpha)\,\mathrm{G}\,d\lambda^2+\mu w].\end{aligned}\right. \tag{20}$$

Ayons égard maintenant à la seconde des équations de condition (8); en y substituant les valeurs (18), on trouve

$$\mathrm{G}\,d\lambda^2(-p\mathrm{M}-q\mathrm{N}+\mathrm{P})+d^2p[\mathrm{M}(qv-w)-qu\mathrm{N}+u\mathrm{P}]$$
$$+d^2q\,[-pv\mathrm{M}+(pu-w)\,\mathrm{N}+v\mathrm{P}]=0,$$

ou

$$\mathrm{G}\,d\lambda^2(-p\mathrm{M}-q\mathrm{N}+\mathrm{P})+d^2p[q(v\mathrm{M}-u\mathrm{N})+u\mathrm{P}-w\mathrm{M}]$$
$$+d^2q[p(u\mathrm{N}-v\mathrm{M})+v\mathrm{P}-w\mathrm{N}]=0,$$

ou, d'après les relations (11) et la notation (19),

$$\mathrm{G}\,d\lambda^2(-p\mathrm{M}-q\mathrm{N}+\mathrm{P})+\mu(u^2+v^2+w^2)=0.$$

De là on déduit

$$\mu=\frac{(p\mathrm{M}+q\mathrm{N}-\mathrm{P})}{u^2+v^2+w^2)}\,\mathrm{G}\,d\lambda^2, \tag{21}$$

et les égalités (20) deviennent alors

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
B\,dC - C\,dB &= DG\,d\lambda^3\left[\frac{pM+qN-P}{u^2+v^2+w^2}\,u + (\cos\beta + q\cos\gamma)\right],\\
C\,dA - A\,dC &= DG\,d\lambda^3\left[\frac{pM+qN-P}{u^2+v^2+w^2}\,v - (\cos\alpha + p\cos\gamma)\right],\\
A\,dB - B\,dA &= DG\,d\lambda^3\left[\frac{pM+qN-P}{u^2+v^2+w^2}\,w + (p\cos\beta - q\cos\alpha)\right].
\end{aligned}\right.$$

La somme des carrés des quantités entre parenthèses est

$$\begin{aligned}
&\frac{(pM+qN-P)^2}{u^2+v^2+w^2} + 2\frac{pM+qN-P}{u^2+v^2+w^2}(u\cos\beta + qu\cos\gamma - v\cos\alpha - pv\cos\gamma + wp\cos\beta - wq\cos\alpha)\\
&\quad + (\cos\beta + q\cos\gamma)^2 + (\cos\alpha + p\cos\gamma)^2 + (p\cos\beta - q\cos\alpha)^2;
\end{aligned}$$

or le terme du milieu, eu égard aux notations (9), se réduit à

$$+2\frac{pM+qN-P}{u^2+v^2+w^2}(-pM-qN+P);$$

il reste par conséquent

$$-\frac{(pM+qN-P)^2}{u^2+v^2+w^2} + (\cos\alpha + p\cos\gamma)^2 + (\cos\beta + q\cos\gamma)^2 + (p\cos\beta - q\cos\alpha)^2,$$

ou encore

$$\frac{\begin{aligned}(u^2+v^2+w^2)[p^2(\cos^2\beta + \cos^2\gamma) + q^2(\cos^2\alpha + \cos^2\gamma) - 2pq\cos\alpha\cos\beta + 2p\cos\alpha\cos\gamma\\ + 2q\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\alpha + \cos^2\beta] - (pM+qN-P)^2\end{aligned}}{u^2+v^2+w^2}.$$

Mais le numérateur de cette dernière fraction peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&p^2[(u^2+v^2+w^2)(\cos^2\beta + \cos^2\gamma) - M^2]\\
&+ q^2[(u^2+v^2+w^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\gamma) - N^2]\\
&+ [(u^2+v^2+w^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) - P^2]\\
&- 2pq[(u^2+v^2+w^2)\cos\alpha\cos\beta + MN]\\
&+ 2p[(u^2+v^2+w^2)\cos\alpha\cos\gamma + MP]\\
&+ 2q[(u^2+v^2+w^2)\cos\beta\cos\gamma + NP],
\end{aligned}$$

expression qui, eu égard aux relations (9 *bis*), se réduit à

$$p^2u^2 + q^2v^2 + w^2 + 2pquv - 2puw - 2qvw = (pu + qv - w)^2 = \mathrm{D}^2.$$

On a donc définitivement

$$(\mathrm{B}\,d\mathrm{C} - \mathrm{C}\,d\mathrm{B})^2 + (\mathrm{C}\,d\mathrm{A} - \mathrm{A}\,d\mathrm{C})^2 + (\mathrm{A}\,d\mathrm{B} - \mathrm{B}d\mathrm{A})^2 = \frac{\mathrm{D}^4\mathrm{G}^2d\lambda^6}{u^2+v^2+w^2},$$

ou enfin

$$(23)\quad \sqrt{(\mathrm{B}d\mathrm{C}-\mathrm{C}d\mathrm{B})^2+(\mathrm{C}d\mathrm{A}-\mathrm{A}d\mathrm{C})^2+(\mathrm{A}d\mathrm{B}-\mathrm{B}d\mathrm{A})^2} = \frac{\mathrm{D}^2\mathrm{G}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\,d\lambda^3.$$

16. Si l'on remplace, dans l'expression (10), les radicaux par leurs valeurs (14) et (23), il vient

$$\mathrm{R} = \frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{\mathrm{DG}};$$

c'est-à-dire enfin

$$(24)\quad \mathrm{R} = \frac{(rt-s^2)\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{(pu+qv-w)[t(\cos\alpha+p\cos\gamma)^2-2s(\cos\alpha+p\cos\gamma)(\cos\beta+q\cos\gamma)+r(\cos\beta+q\cos\gamma)^2]};$$

on a toujours à vérifier les deux relations

$$(25)\quad \begin{cases} u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0, \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \end{cases}$$

Par conséquent, *si l'on considère un plan tangent quelconque* (u, v, w), *et que* M *soit son point de contact, le rayon de courbure, en* M, *de la section faite par un plan normal passant par la tangente* ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) *sera donné par la formule* (24).

17. Il nous est maintenant facile de déterminer les rayons de courbure principaux.

Si l'on pose

$$(26)\quad \rho = \frac{(rt-s^2)\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{\mathrm{D.R}},$$

l'équation (24) pourra s'écrire

$$t(\cos\alpha + p\cos\gamma)^2 - 2s(\cos\alpha + p\cos\gamma)(\cos\beta + q\cos\gamma)$$
$$+ r(\cos\beta + q\cos\gamma)^2 = \rho(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma),$$

ou encore

$$(27)\left\{\begin{array}{l}(t-\rho)\cos^2\alpha+(r-\rho)\cos^2\beta+(tp^2-2spq+rq^2-\rho)\cos^2\gamma\\ \quad -2s\cos\alpha\cos\beta+2(tp-sq)\cos\alpha\cos\gamma+2(rq-sp)\cos\beta\cos\gamma=0;\end{array}\right.$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ doivent vérifier la relation

$$(27\ bis)\qquad u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0.$$

En appliquant ici les règles connues pour la recherche des valeurs maximum et minimum, on est conduit aux égalités

$$(28)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(t-\rho)\cos\alpha - s\cos\beta + (tp-sq)\cos\gamma}{u}\\ \quad = \dfrac{-s\cos\alpha + (r-\rho)\cos\beta + (rq-sp)\cos\gamma}{v}\\ \quad = \dfrac{(tp-sq)\cos\alpha + (rq-sp)\cos\beta + (tp^2-2spq+rq^2-\rho)\cos\gamma}{w}.\end{array}\right.$$

En désignant par k la valeur commune de ces rapports, puis éliminant $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ entre les équations ainsi obtenues et la première des relations (25), on trouve

$$\begin{vmatrix} t-\rho & -s & tp-sq & u \\ -s & r-\rho & rq-sp & v \\ tp-sq & rp-sp & tp^2-2spq+rq^2-\rho & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on développe cette dernière équation, il vient définitivement

$$(29)\quad \rho^2(u^2+v^2+w^2)-(\mathrm{T}r-2\mathrm{S}s+\mathrm{R}t)\rho+(pu+qv-w)^2(rt-s^2)=0,$$

après avoir posé

$$(30)\qquad\left\{\begin{array}{l}\mathrm{T}=(qv-w)^2+u^2(q^2+1),\\ \mathrm{R}=(pu-w)^2+v^2(p^2+1),\\ \mathrm{S}=pv(pv-w)+qu(pu-w)-uv.\end{array}\right.$$

Ainsi, *les valeurs de* ρ (26), *correspondant aux deux rayons de courbure principaux, seront données par l'équation* (29); *les directions des sections principales seront déterminées par les équations* (28) et (25) *après la substitution de la valeur correspondante de* ρ.

On trouve facilement pour le produit des rayons de courbure principaux

$$(31) \qquad R_1 R_2 = \frac{(rt - s^2)(u^2 + v^2 + w^2)^2}{(pu + qv - w)^4}.$$

18. Il est utile ici de chercher les conditions pour que le point de contact d'un plan tangent (u, v, w) soit un *ombilic* de la surface.

Pour cela, nous écrirons la valeur (24) de R sous la forme

$$R = \frac{(rt - s^2)\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}{pu + qv - w} \times \frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}{t(\cos\alpha + p\cos\gamma)^2 - 2s(\cos\alpha + p\cos\gamma)(\cos\beta + q\cos\gamma) + r(\cos\beta + q\cos\gamma)^2};$$

puis nous poserons

$$\frac{\cos\alpha + p\cos\gamma}{\cos\beta + q\cos\gamma} = \lambda;$$

d'où

$$\cos\alpha - \lambda\cos\beta = (\lambda q - p)\cos\gamma;$$

si l'on joint à cette équation la relation

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0,$$

on en tire

$$\cos\alpha = \frac{\lambda(qv - w) - pv}{\lambda u + v}\cos\gamma, \quad \cos\beta = \frac{-qu\lambda + pu - w}{\lambda u + v}\cos\gamma;$$

d'où

$$\cos\alpha + p\cos\gamma = \frac{D}{\lambda u + v}\lambda\cos\gamma, \quad \cos\beta + q\cos\gamma = \frac{D}{\lambda u + v}\cos\gamma.$$

L'expression de R devient alors

$$R = \frac{(rt - s^2)\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}{D^3} \cdot \frac{[\lambda(qv - w) - pv]^2 + [-qu\lambda + pu - w]^2 + (\lambda u + v)^2}{t\lambda^2 - 2s\lambda + r}.$$

Pour que le point considéré soit un ombilic, il faut que la valeur de R reste invariable lorsque λ varie; on est ainsi conduit aux conditions

$$\frac{(qv-w)^2+u^2(q^2+1)}{t}=\frac{pv(qv-w)+qu(pu-w)-uv}{s}=\frac{(pu-w)^2+v^2(p^2+1)}{r}.$$

Par conséquent, *les conditions nécessaires pour que le point de contact du plan tangent* (u, v, w) *soit un* ombilic *de la surface sont*

$$\frac{\mathrm{R}}{r}=\frac{\mathrm{S}}{s}=\frac{\mathrm{T}}{t}, \tag{32}$$

les quantités R, S, T *étant définies par les égalités* (30).

19. *Remarque.* — Si la surface considérée était une surface développable, les formules que nous venons d'établir, soit dans le premier paragraphe, soit dans le second, ne pourraient plus s'appliquer; c'est qu'en effet, dans le système des coordonnées tangentielles, une surface développable exige deux équations, et non plus une seule, pour être définie.

Le cas d'une surface développable définie par une seule équation ponctuelle et celui d'une courbe définie par une seule équation tangentielle seront l'objet d'un troisième Mémoire.

§ III.

Équation des centres de courbure principaux.

Ces calculs doivent faire suite à ceux du premier paragraphe.

20. Les équations ponctuelles de la normale en M sont

$$\frac{\mathrm{X}-x}{u}=\frac{\mathrm{Y}-y}{v}=\frac{\mathrm{Z}-z}{w},$$

X, Y, Z étant les coordonnées variables; d'où, en désignant par θ la valeur commune de ces rapports,

$$(44) \qquad \begin{cases} X = x + \theta u, \\ Y = y + \theta v, \\ Z = z + \theta w. \end{cases}$$

Si X, Y, Z sont regardées maintenant comme les coordonnées du point de rencontre de cette normale avec la normale infiniment voisine, ces quantités ne varient pas lorsqu'on fait varier le paramètre arbitraire dont dépendent u, v, w, et par suite x, y, z; on a donc, d'après cela,

$$(45) \quad dx + \theta du + u d\theta = 0, \quad dy + \theta dv + v d\theta = 0, \quad dz + \theta dw + w d\theta = 0.$$

Multiplions ces équations respectivement par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, et ajoutons; il vient

$$(46) \qquad \begin{cases} (dx\cos\alpha + dy\cos\beta + dz\cos\gamma) \\ \quad + \theta(\cos\alpha\, du + \cos\beta\, dv + \cos\gamma\, dw) = 0, \end{cases}$$

puisque la quantité $(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)$ est nulle.

Ayant égard aux relations (15), n° 4, (22), n° 6, et aux valeurs de du, dv, dw, écrites au n° 7 et à la notation (27), l'égalité précédente devient

$$\frac{K}{f_1'} + \theta\left[\frac{df_1}{(m-1)f_1}(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma) - \frac{K}{Hf_1}\Delta\right] = 0,$$

égalité qui se réduit à

$$(47) \qquad \theta = \frac{H}{f_1\Delta},$$

où l'on a

$$(47\ bis) \quad \begin{cases} \Delta = H_{11}\cos^2\alpha + H_{22}\cos^2\beta + H_{33}\cos^2\gamma \\ \qquad + 2H_{12}\cos\alpha\cos\beta + 2H_{13}\cos\alpha\cos\gamma + 2H_{23}\cos\beta\cos\gamma. \end{cases}$$

21. Pour que les relations (45) soient complétement vérifiées, il faut qu'on ait

$$\frac{dx + \theta du}{u} = \frac{dy + \theta dv}{v} = \frac{dz + \theta dw}{w};$$

en ayant encore égard aux relations (15), n° **4**, et (22), n° **6**, puis aux valeurs de *du*, *dv*, *dw*, n° **7**, ces dernières équations deviennent

$$\frac{\frac{K\cos\alpha}{f_4^2}+\theta\left[\frac{H}{m-1}\frac{df_4}{f_4}u-\frac{K}{f_4H}(H_{11}\cos\alpha+H_{12}\cos\beta+H_{13}\cos\gamma)\right]}{u}$$
$$=\frac{\frac{K\cos\beta}{f_4^2}+\theta\left[\frac{H}{m-1}\frac{df_4}{f_4}v-\frac{K}{f_4H}(H_{21}\cos\alpha+H_{22}\cos\beta+H_{23}\cos\gamma)\right]}{v}$$
$$=\frac{\frac{K\cos\gamma}{f_4^2}+\theta\left[\frac{H}{m-1}\frac{df}{f_4}w-\frac{K}{f_4H}(H_{31}\cos\alpha+H_{32}\cos\beta+H_{33}\cos\gamma)\right]}{w}.$$

Or ces égalités se réduisent évidemment à

$$(48)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\left(H_{11}-\frac{H}{f_4\theta}\right)\cos\alpha+H_{12}\cos\beta+H_{13}\cos\gamma}{u}\\ &=\frac{H_{21}\cos\alpha+\left(H_{22}-\frac{H}{f_4\theta}\right)\cos\beta+H_{23}\cos\gamma}{v}\\ &=\frac{H_{31}\cos\alpha+H_{32}\cos\beta+\left(H_{33}-\frac{H}{f_4\theta}\right)\cos\gamma}{w}.\end{aligned}\right.$$

L'identité de ces équations avec les équations (41) du n° **10** est manifeste; car, si l'on a égard à la valeur (47) de θ, on voit que

$$\frac{H}{f_4\theta}=\Delta;$$

d'un autre côté, si l'on multiplie les équations (41 *bis*), n° **10**, par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ respectivement et qu'on ajoute, il vient, comme cela doit être d'après les égalités (36) et (38),

$$\rho=\Delta.$$

Nous retrouvons ainsi les directions des sections principales.

22. D'après cela, ρ *étant une quelconque des racines de l'équa-*

tion (42) *ou* (42 *bis*), n° **10**, *les coordonnées* X, Y, Z *du centre de courbure correspondant seront*

$$(49)\quad \begin{cases} X = \dfrac{H}{f_4\rho}u - \dfrac{f_1}{f_4} = \dfrac{Hu - \rho f_1}{\rho f_4}, \\ Y = \dfrac{H}{f_4\rho}v - \dfrac{f_2}{f_4} = \dfrac{Hv - \rho f_2}{\rho f_4}, \\ Z = \dfrac{H}{f_4\rho}w - \dfrac{f_3}{f_4} = \dfrac{Hw - \rho f_3}{\rho f_4}; \end{cases}$$

et l'équation tangentielle de ce centre de courbure sera

$$(50)\quad H(Uu + Vv + Ww) - \rho(Uf_1 + Vf_2 + Wf_3 + f_4) = 0,$$

U, V, W *désignant les coordonnées tangentielles variables.*