JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LAGUERRE

Mémoire de géométrie analytique

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 17 (1872), p. 1-54.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1872_2_17__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Mémoire de géométrie analytique;

PAR M. LAGUERRE.

SECTION PREMIÈRE.

ÉQUATION MIXTE D'UNE COURBE.

1. Je supposerai, dans tout ce qui va suivre, les différentes figures que j'aurai à considérer rapportées à un système de coordonnées rectilignes quelconque.

Soient une courbe arbitraire C tracée dans un plan, et M un point quelconque de ce plan; j'appelle x et y ses coordonnées.

Menons du point M une tangente à la courbe, et soit k le coefficient angulaire de cette tangente; la quantité k (qui généralement est susceptible de plusieurs valeurs) est une fonction des coordonnées variables x et y.

Cette fonction, il est facile de le voir, ne peut être prise arbitrairement et doit satisfaire à une équation aux différences partielles linéaire et du premier ordre, qu'on peut établir de la façon suivante.

Appelons, pour un instant, X et Y les coordonnées courantes de la tangente menée du point M à la courbe; son équation sera

$$(1) \qquad Y - y = k(X - x).$$

Pour que les différentes droites représentées par cette équation, lorsqu'on y fait varier x et y, enveloppent une courbe, il faut et il suffit que la droite obtenue, en remplaçant le point M par un point infiniment voisin, coupe la première en un point fixe, quelle que soit la direction du déplacement; il est clair, d'ailleurs, que ce point fixe est le point de contact de la tangente avec la courbe.

Différentions successivement l'équation (1), par rapport à x et y, en supposant X et Y constantes; il vient

$$-0 = \frac{dk}{dx}(X - x) - k \quad \text{et} \quad -1 = \frac{dk}{dy}(X - x).$$

D'où, en éliminant $X - x$ entre ces deux relations,

$$\frac{dk}{dx} + k\frac{dk}{dy} = 0.$$

Telle est l'équation aux différences partielles à laquelle doit satisfaire la fonction k, pour qu'elle représente le coefficient angulaire d'une tangente menée du point (x, y) à une courbe quelconque tracée dans le plan.

Cette équation a pour intégrale générale

$$y - kx = f(k),$$

la caractéristique f désignant une fonction arbitraire de la variable; et, telle est en termes finis, la relation à laquelle doit satisfaire k.

Il est facile de trouver directement cette relation. En effet,

$$Y - y = k(X - x)$$

étant l'équation de la tangente menée du point M à la courbe, $y - kx$ est l'ordonnée du point où cette tangente coupe l'axe des y; la valeur de cette ordonnée ne dépend évidemment que de la valeur de k. On a donc

$$y - kx = f(k).$$

2. Lorsque la courbe donnée est algébrique, $f(k)$ est généralement une irrationnelle susceptible de m valeurs et racine d'une équation

algébrique de degré m. Cette équation est d'ailleurs irréductible si la courbe ne se décompose pas en courbes de degré inférieur.

k satisfait donc à une équation de la forme

$$(2)\quad A_0(y-kx)^m + A_1(y-kx)^{m-1} + \ldots + A_{m-1}(y-kx) + A_m = 0,$$

$A_0, A_1, \ldots, A_m$ désignant des polynômes entiers en k d'un degré quelconque.

Le nombre m indique combien on peut mener de droites tangentes à la courbe et parallèles à une direction donnée. Quant à la classe de la courbe, elle est indiquée par le degré en k de l'équation précédente, degré qui est généralement égal à m, mais qui peut lui être supérieur lorsque la courbe est tangente à la droite de l'infini.

Ce cas particulier mis de côté, on voit que, dans l'équation (2), A_0 est un nombre que l'on peut supposer égal à l'unité, et $A_1, A_2, \ldots, A_m$ des polynômes entiers en k et respectivement des degrés $1, 2, \ldots, m$.

Si, pour rendre l'équation homogène, nous posons

$$k = \frac{\mu}{\lambda},$$

on voit que la relation précédente peut être mise, pour une courbe de classe n, sous la forme

$$(3)\quad \begin{cases} 0 = (\lambda y - \mu x)^n + n(A\lambda + B\mu)(\lambda y - \mu x)^{n-1} \\ \quad + \frac{n(n-1)}{1.2}(\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2)(\lambda y - \mu x)^{n-2} + \ldots, \end{cases}$$

ou encore, en réunissant dans un même terme les coefficients de la même puissance de λ,

$$a\lambda^n + nb\lambda^{n-1}\mu + \frac{n(n-1)}{1.2}c\lambda^{n-2}\mu^2 - \ldots + nh\lambda\mu^{n-1} + k\mu^n = 0.$$

3. La relation précédente, qui, pour chaque point du plan, donne les coefficients angulaires des tangentes que l'on peut mener de ce point à une courbe donnée, définit complétement cette courbe.

Je la désignerai, dans tout ce qui suit, sous le nom d'*équation mixte* de la courbe.

Une telle équation s'écrira de la façon suivante :

$$F(\lambda, \mu, \lambda y - \mu x) = 0,$$

F désignant une fonction homogène et entière, mais du reste entièrement arbitraire, des trois variables que comporte son expression; ou encore, en mettant seulement en évidence les variables λ et μ,

$$f(\lambda, \mu) = 0,$$

f désignant une fonction homogène de ces variables.

Le plus souvent, pour mettre en évidence les coefficients du polynôme $f(\lambda, \mu)$, j'emploierai la notation commode de M. Cayley, en désignant par

$$(a, b, c, \ldots \between \lambda, \mu)^n$$

le polynôme

$$a\lambda^n + nb\lambda^{n-1}\mu + \frac{n(n-1)}{1.2}c\lambda^{n-2}\mu^2 + \ldots;$$

en sorte que l'équation mixte générale des courbes de la classe n sera

$$(a, b, c, \ldots \between \lambda, \mu)^n = 0.$$

4. Il est facile de passer de l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles à son équation mixte.

En effet,

$$y\xi - x\eta = \zeta$$

étant l'équation d'une droite quelconque tracée dans le plan, l'équation tangentielle d'une courbe est la relation, homogène par rapport aux trois variables,

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

à laquelle doivent satisfaire ξ, η et ζ pour que la droite soit tangente à la courbe. Si l'on déduit de l'équation de la tangente la valeur de son coefficient angulaire et la valeur de l'ordonnée au point où elle coupe l'axe des y, on obtient les deux relations suivantes :

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{\mu}{\lambda}, \quad y - \frac{\mu}{\lambda}x = \frac{\zeta}{\xi},$$

d'où

$$\frac{\xi}{\lambda} = \frac{\eta}{\mu} = \frac{\lambda y - \mu x}{\zeta};$$

en substituant ces valeurs de ξ, η et ζ de l'équation précédente, il vient

$$\Phi(\lambda, \mu, \lambda y - \mu x) = 0,$$

équation de la courbe donnée.

Dans le plus grand nombre de cas, il sera plus commode de calculer directement l'équation mixte d'une courbe, que de la tirer de son équation tangentielle. Mais je veux déduire, de ce qui précède, une conséquence très-simple qui nous sera utile par la suite.

3. Considérons plusieurs courbes dont les équations tangentielles soient

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \ldots,$$

et une autre courbe dont l'équation s'obtienne en égalant à zéro une fonction entière des polynômes qui forment les premiers membres des équations précédentes, et soit par exemple

$$f(A, B, C, \ldots) = 0.$$

Cela posé, il résulte immédiatement de la proposition précédente, que

$$\mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{C} = 0$$

étant les équations mixtes des premières courbes, l'équation mixte de la dernière est

$$f(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots) = 0.$$

Ainsi, l'équation mixte générale des courbes de $n^{ième}$ classe inscrites dans un polygone de n^2 côtés est

$$P + \rho Q = 0,$$

ρ désignant un coefficient arbitraire et

$$P = 0, \quad Q = 0$$

représentant deux quelconques de ces courbes.

6. De l'équation mixte d'une courbe, il est facile de déduire son équation en coordonnées cartésiennes.

En effet, soit $f(\lambda, \mu) = 0$ cette équation; la courbe est évidemment le lieu des points d'où l'on peut lui mener deux tangentes coïncidantes. Donc, si l'on désigne par Δ le discriminant de la forme $f(\lambda, \mu)$,

$$\Delta = 0$$

est l'équation de la courbe en coordonnées cartésiennes.

On retrouve ainsi la méthode donnée par M. Cayley pour passer de l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles à son équation en coordonnées cartésiennes.

Ce qui précède suppose que la courbe n'a pas de singularités. En effet, si elle a une tangente double ou une tangente d'inflexion, on voit que chaque point de l'une quelconque de ces droites jouit de la propriété que deux des tangentes que l'on peut mener de ce point à la courbe se confondent; chacun de ces points satisfait donc à l'équation précédente.

Pour s'en tenir aux singularités ordinaires, on voit que si l'on désigne par $U = 0$ l'équation (cartésienne) de la courbe, par $T = 0$ l'équation de l'ensemble des tangentes doubles et par $I = 0$ l'équation de l'ensemble des tangentes d'inflexion, on a

$$\Delta = UT^2I^3.$$

7. Soit

$$f(\lambda, \mu) = (a, b, c, \ldots \between \lambda, \mu)^n$$

l'équation mixte d'une courbe de classe n.

Il est clair, d'après ce qui précède, que a, b, c,... sont des fonctions de x et de y qui ne peuvent être choisies arbitrairement; et, en effet, $f(\lambda, \mu)$ étant une fonction de $(\lambda y - \mu x)$, l'on doit avoir identiquement

$$\lambda \frac{df}{dx} - \mu \frac{df}{dy} = 0.$$

On doit, dans la plupart des questions qui se présentent, avoir égard aux relations entre les coefficients qui résultent de l'équation précédente, et l'étude de ces relations conduit elle-même à des résultats dignes d'intérêt; mais, dans un grand nombre de cas, — et ce sont ces cas particuliers que j'étudie spécialement dans ce Mémoire, — on peut, pour ainsi dire, les laisser de côté, ou du moins ne les faire intervenir que d'une façon indirecte.

8. La proposition fondamentale, sur laquelle je m'appuierai constamment dans ce qui suit peut s'énoncer ainsi.

Proposition. — *Soit un nombre quelconque de courbes représentées par les équations mixtes*

$$f_0(\lambda, \mu) = 0, \quad f_1(\lambda, \mu) = 0, \quad f_2(\lambda, \mu) = 0, \ldots.$$

Si l'on considère un invariant quelconque I *des formes* $f_0, f_1, f_2, \ldots$, *l'équation*

$$\mathrm{I} = 0$$

représente une courbe dont le degré est précisément égal au poids de l'invariant.

Démonstration. — Je rappellerai brièvement ce qu'on nomme *poids d'un invariant.* Si, dans les formes données, on remplace l'une des variables, λ par exemple, par λt, l'invariant relatif aux nouvelles formes que l'on obtient ainsi est égal à l'invariant primitif I, multiplié par une certaine puissance de λ; l'exposant de cette puissance est le poids de l'invariant.

Ceci posé, mettant en évidence toutes les variables dans les équations mixtes des courbes, écrivons-les sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{F}_0(\lambda, \mu, \lambda y - \mu x) = 0,\\
&\mathrm{F}_1(\lambda, \mu, \lambda y - \mu x) = 0,\\
&\mathrm{F}_2(\lambda, \mu, \lambda y - \mu x) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Si, dans les polynômes qui forment les premiers membres de ces équations, nous remplaçons respectivement x et y par tx et ty, nous obtenons les polynômes suivants :

$$\mathrm{F}_0(\lambda, \mu, \lambda t y - \mu t x), \quad \mathrm{F}_1(\lambda, \mu, \lambda t y - \mu t x), \quad \mathrm{F}_2(\lambda, \mu, \lambda t y - \mu t x), \ldots.$$

Le nouvel invariant I' déduit de ces formes, comme I l'était des premières, contient t à une puissance dont le degré est celui de la courbe représentée par l'équation

$$I = 0.$$

Posons maintenant

$$\lambda y - \mu x = \lambda', \quad \lambda y + \mu x = \mu',$$

en effectuant une substitution linéaire, dont le déterminant

$$\omega = 2xy$$

est indépendant de t.

On déduit de là

$$\lambda = \frac{\lambda' + \mu'}{2y}, \quad \mu = \frac{\mu' - \lambda'}{2x},$$

et les formes précédentes deviennent

$$F_0\left(\frac{\lambda' + \mu'}{2y}, \frac{\mu' - \lambda'}{2x}, \lambda' t\right), \quad F_1\left(\frac{\lambda' + \mu'}{2y}, \frac{\mu' - \lambda'}{2x}, \lambda' t\right), \dots$$

L'invariant I'', relatif à ce système de formes et analogue à I', lui est égal, à un facteur près, qui, étant une puissance de déterminant ω de la substitution, est indépendant de t.

Dans I'', t entre évidemment à un degré égal au poids de l'invariant; la proposition est donc démontrée.

Remarque I. — La démonstration précédente suppose que les coefficients des polynômes $f_0(\lambda, \mu), f_1(\lambda, \mu), \dots$ ont la forme la plus générale (compatible avec les relations nécessaires qui existent entre eux). Dans des cas particuliers, le degré de la courbe représentée par l'équation

$$I = 0$$

peut *s'abaisser;* mais alors la droite de l'infini fait partie de la courbe.

Remarque II. — Ce que je viens de dire s'applique aux covariants que l'on peut déduire des formes

$$f_0(\lambda, \mu), \quad f_1(\lambda, \mu), \dots$$

Les équations que l'on obtient en égalant à zéro les différents coefficients d'un covariant représentent des courbes d'un degré égal au poids de ce covariant.

9. J'ai cru devoir, pour plus de clarté, employer dans ce Mémoire les coordonnées rectilignes.

Si l'on voulait employer les coordonnées triangulaires symétriques, il suffirait, dans les formules précédentes, de rétablir l'homogénéité en introduisant une troisième variable z.

Rien n'est à changer, si ce n'est la signification géométrique qu'on doit attribuer à l'équation mixte de la courhe. Mais il est, je crois, inutile d'insister sur ce sujet.

SECTION II.

PROPRIÉTÉS DES COURBES DE TROISIÈME CLASSE.

10. Considérons une courbe de troisième classe K^3, et soit

$$U = (a, b, c, d \between \lambda, \mu)^3 = 0$$

son équation mixte.

La forme U n'a qu'un invariant; c'est le discriminant

$$D = a^2 d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 3b^2c^2 - 6abcd.$$

L'équation

$$D = 0$$

est, comme nous l'avons vu, l'équation en coordonnées cartésiennes de la courbe K^3; elle est du degré 6, ce nombre étant le poids du discriminant.

Pour obtenir les points de rebroussement de K^3, il faut chercher les points du plan pour lesquels l'équation

$$(1) \qquad U = 0$$

a trois racines égales.

Considérons le covariant $(ac-b^2)\lambda^2+(ad-bc)\lambda\mu+(bd-c^2)\mu^2$; les conditions nécessaires et suffisantes pour l'égalité des trois racines de l'équation (1) sont les suivantes :

$$ac-b^2=0,\quad ad-bc=0,\quad bd-c^2=0,$$

équations de trois courbes du quatrième ordre (n° **8**, *Rem. II*).

Les 9 points de rebroussement de K^3 sont donc les points communs à ces trois courbes.

Il est clair qu'on peut trouver une infinité de courbes du quatrième ordre passant par ces 9 points. Pour avoir leur expression générale, considérons, en même temps que la courbe K^3, une courbe de seconde classe arbitraire K^2 et dont l'équation mixte soit

$$V=(A, B, C\between\lambda, \mu)^2=0.$$

Posons

$$I=A(bd-c^2)-B(ad-bc)+C(ac-b^2)\ [*].$$

I est un invariant des formes U et V, de poids égal à 4. L'équation

$$I=0$$

représente donc une courbe du quatrième ordre δ^4; elle est évidemment satisfaite quand on pose

$$bd-c^2=0,\quad ad-bc=0,\quad ac-b^2=0;$$

elle passe donc par les 9 points de rebroussement de K^3.

11. Cherchons directement les points où elle coupe cette courbe. Pour tout point de K^3, l'équation (1) a deux racines égales, et, en vertu de la propriété fondamentale des invariants, on peut supposer que la valeur commune de ces racines soit zéro, ou bien poser

$$a=0,\quad b=0.$$

---

[*] Salmon, *Algèbre supérieure*, p. 170.

I devient alors égale à

$$-Ac^2;$$

pour que cette quantité s'annule, il faut que l'on ait

$$c^2 = 0,$$

c'est-à-dire que le point pris sur K^3 soit un point de rebroussement, ou bien que

$$A = 0,$$

c'est-à-dire que la tangente menée en ce point à K^3 touche aussi K^2.

La courbe $\mathfrak{Z}^4$ rencontre donc K^3 aux 9 points de rebroussement (chacun de ces points comptant pour deux, comme on le savait *a priori*) et aux 6 points de contact des tangentes communes à K^3 et à K^2.

D'où la proposition suivante :

Théorème. — *Étant données une courbe de troisième classe* K^3 *et une courbe de seconde classe* K^2, *les* 6 *points où les tangentes communes à ces courbes touchent* K^3 *et les* 9 *points de rebroussement de* K^3 *sont sur une même courbe de quatrième ordre* $\mathfrak{Z}^4$.

12. Si l'on prend au hasard, sur K^3, 5 points α, ces 5 points et les 9 points de rebroussement de la courbe déterminent une courbe du quatrième ordre qui rencontre K^3 en un sixième point β. D'un autre côté, les 5 tangentes menées à K^3 par les points α déterminent une courbe de seconde classe K^2; K^2 et K^3 ont une sixième tangente commune. Son point de contact avec K^3, étant sur une courbe du quatrième ordre passant par les 5 points α et les 9 points de rebroussement, se confond avec β.

D'où le théorème suivant, réciproque de la proposition précédente :

Théorème. — *Si par les* 9 *points de rebroussement d'une courbe de troisième classe* K^3, *on mène une courbe quelconque du quatrième ordre, cette courbe rencontre* K^3 *en* 6 *points* [*] *distincts des points de*

[*] Ces points sont, en général, distincts des points de rebroussement; mais, dans des cas particuliers, un certain nombre d'entre eux peuvent venir se confondre avec quelques-uns de ces derniers.

rebroussement; les tangentes menées à K^3 *par ces* 6 *points touchent une même conique.*

13. La conique K^2 peut se composer d'un couple de points P et Q. La courbe $\mathfrak{J}^4$ passe alors par les 6 points de rebroussement de K^3 et les 6 points de contact des tangentes qu'on peut lui mener des points P et Q. Je dis, de plus, qu'elle passe par ces points eux-mêmes.

En effet, pour l'un quelconque de ces points, la tangente menée de ce point à K^2 est indéterminée, l'équation

$$V = 0$$

est satisfaite identiquement, et l'on a

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

Mais, dans ces hypothèses, I s'annule évidemment, la proposition est donc démontrée.

En se reportant au paragraphe précédent, on déduit de là le théorème suivant :

Théorème. — *Étant pris sur une courbe de troisième classe* K^3 3 *points* a, a' *et* a'', *tels que les tangentes en ces points concourent en un même point* A, *toute courbe du quatrième ordre qui passe par les* 9 *points de rebroussement de* K^3 *et les* 3 *points* a, a' *et* a'' *passe par le point* A; *elle rencontre* K^3 *en* 3 *autres points, et les tangentes en ces points se coupent en un même point* B, *qui est également situé sur la courbe du quatrième ordre.*

14. Menons, dans le plan de K^3, une droite quelconque A, les tangentes menées à la courbe aux 6 points α, où elle est coupée par A, touchent une même conique K^2 qui est la polaire de A.

Dans ce cas, la courbe du quatrième ordre $\mathfrak{J}^4$ passant par les 6 points de contact α qui sont en ligne droite, il est clair que cette courbe se décompose en la droite A et une courbe du troisième ordre $\mathfrak{K}^3$ passant par les 9 points de rebroussement. Cette courbe, d'ailleurs, est complétement déterminée, puisque par les points de rebroussement d'une courbe de troisième classe on ne peut faire passer qu'une courbe de troisième ordre, et elle demeure toujours la même, de quelque façon que l'on choisisse la droite A.

Son équation est facile à obtenir; considérons, par exemple, la conique polaire de la droite de l'infini, et soit

$$(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H} \between \lambda, \mu)^2 = 0$$

son équation mixte; d'après ce que je viens de dire, on voit que l'équation

$$\mathfrak{F}(bd - c^2) - \mathfrak{G}(ad - bc) + \mathfrak{H}(ac - b^2) = 0$$

s'abaisse au troisième degré; c'est précisément l'équation de la courbe $\mathfrak{K}^3$.

15. Si la droite A est tangente à la hessienne de K^3, sa conique polaire se compose de 2 points; ces 2 points, d'après ce que j'ai dit ci-dessus (n° **13**), se trouvent sur $\mathfrak{z}^4$, qui, dans ce cas, se compose de la tangente à la hessienne et de la courbe $\mathfrak{K}^3$. Comme ils sont en dehors de la droite, ils se trouvent nécessairement sur $\mathfrak{K}^3$; on retrouve ainsi cette proposition bien connue de M. Cayley :

Le lieu des couples de points qui constituent les coniques polaires des tangentes à la hessienne d'une courbe de troisième classe est la courbe du troisième ordre qui passe par ses 9 points de rebroussement.

16. On peut encore supposer que la conique K^2 se réduise à un point double.

Soient ξ et η les coordonnées de ce point; son équation mixte sera

$$-(y - \eta)\mu + \lambda(x - \xi) = 0,$$

ou en posant, pour abréger, $y - \eta = Y$ et $x - \xi = X$,

$$(-Y, X \between \lambda, \mu)^1 = 0.$$

D'où, pour l'équation de la conique K^2 (considérée comme point double),

$$(Y^2, -XY, X^2 \between \lambda, \mu)^2 = 0.$$

On a alors

$$\mathrm{I} = (ac - b^2)\mathrm{X}^2 + (ad - bc)\mathrm{XY} + (bd - c^2)\mathrm{Y}^2,$$

expression dans laquelle, si l'on considère X et Y comme les variables, on reconnaît immédiatement le covariant quadratique de U.

L'équation

$$\mathrm{I} = 0$$

représente une courbe du quatrième ordre $\mathfrak{S}^4$ qui passe par les 9 points de rebroussement de K^3 et qui touche cette courbe aux points de contact des tangentes issues du point donné ; on voit, de plus, à l'inspection de l'équation précédente, qu'elle a ce point pour point double, et que les coefficients angulaires des tangentes au point double sont les racines de l'équation

$$(ac - b^2)\lambda^2 + (ad - bc)\lambda\mu + (ad - c^2)\mu^2 = 0,$$

obtenue en égalant à zéro le covariant quadratique de U.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Si, par un point donné* M, *on mène les tangentes à une courbe de troisième classe* K^3, *on peut tracer une courbe du quatrième degré* $\mathfrak{S}^4$ *qui passe par les* 9 *points de rebroussement de* K^3, *touche cette courbe aux* 3 *points de contact des tangentes et a le point* M *pour point double.*

17. On sait que l'on peut, de différentes façons, partager les 9 points de rebroussement de K^3 en 3 groupes de 3 points, a_1, a_2 et a_3, b_1, b_2 et b_3, c_1, c_2 et c_3, de telle sorte que, dans chacun de ces groupes, les tangentes à la courbe concourent en un même point. Soient A, B, C les points de rencontre correspondant aux groupes précédents.

Supposons que la conique K^2 se compose du point A pris 2 fois ; 2 des points de rencontre de $\mathfrak{S}^4$ avec K^3 viennent se confondre alors au point a_1, et, comme 2 de ces points s'y trouvaient déjà confondus, on trouve en tout 4 points d'intersection réunis au point a_1. D'où l'on conclut que $\mathfrak{S}^4$ a ce point pour point double; comme le même raisonnement peut être fait relativement aux points a_2 et a_3, et, comme d'ailleurs (*voir* n° **16**) $\mathfrak{S}^4$ présente un point double en A, l'on voit que cette courbe du quatrième ordre a 4 points doubles; elle se résout donc en un couple de coniques.

On déduit de là les propositions suivantes [*] :

Soient a_1, a_2 *et* a_3 3 *points de rebroussement d'une courbe de troisième classe* K^3, *tels que les tangentes en ces points concourent en un même point* A; *si, par les points* a_1, a_2, a_3, A *et par un cinquième point de rebroussement* b_1 *on mène une conique, cette conique* $\mathfrak{B}$ *rencontre* K^3 *en* 2 *autres points de rebroussement de la courbe* b_2 *et* b_3, *et les tangentes aux points* b_1, b_2 *et* b_3 *concourent en un même point* B *qui se trouve également sur la conique* $\mathfrak{B}$.

Les 3 *autres points de rebroussement* c_1, c_2, c_3 *de la courbe sont également sur une conique* $\mathfrak{C}$, *qui passe par les points* a_1, a_2, a_3, A *et par le point* C, *où se coupent les tangentes de rebroussement aux points* c, c_1 *et* c_2.

En désignant par m, n, p, q 4 points situés sur une conique, appelons pour un instant *rapport anharmonique* de ces points le rapport anharmonique du faisceau suivant lequel ces points sont vus d'un point quelconque de la conique, et désignons-le par la notation

$$R(m, n; p, q).$$

Cela posé, en désignant par ρ et ρ^2 les deux racines imaginaires de l'unité, on a, en considérant les points a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, A, B, situés sur la conique $\mathfrak{B}$, les relations suivantes :

$$R(A, a_3;\ a_1, a_2) = -\rho,$$
$$R(A, B;\ a_1, a_2) = \rho^2,$$

et les relations analogues que l'on obtient en permutant entre eux les points a_1, a_2 et a_3.

---

[*] Comme le développement de ces questions se rattache plutôt à la géométrie pure qu'à la géométrie analytique, j'ai, pour abréger, supprimé quelques démonstrations que le lecteur rétablira facilement.

Pour les points situés sur la conique $\mathfrak{C}$, on a de même les relations

$$\begin{aligned} R(A, a_3;\, a_1, a_2) &= -\rho^2, \\ R(A, C;\ a_1, a_2) &= \rho. \end{aligned}$$

J'ajouterai encore la remarque suivante :

Si, par les points A, B, C et deux points de rebroussement d'un même groupe, tels que a_1 et a_2, on fait passer une conique, le pôle de la droite $a_1 a_2$ relativement à cette conique est le troisième point de rebroussement du groupe, c'est-à-dire a_3.

Le développement des relations qui ont lieu entre les points de rebroussement d'une courbe de troisième classe donnerait lieu à quelques remarques intéressantes; mais ce n'est pas ici le lieu de les exposer. M. Hesse a déjà donné d'élégantes propositions sur ce sujet dans le *Journal de Crelle* (t. XXXVI).

18. Parmi le grand nombre de propositions particulières que l'on peut déduire de la proposition du n° **11**, je me contenterai de donner la suivante :

Considérons un point de rebroussement r de la courbe K^3 et une courbe du quatrième ordre composée de la tangente de rebroussement en ce point et d'une courbe du troisième ordre passant par les 8 autres points de rebroussement r'. La tangente en r rencontre la courbe en 3 points α distincts du point r, et les tangentes en ces points concourent en un même point ρ situé sur la courbe du troisième ordre $\mathfrak{R}^3$ qui passe par les 9 points de rebroussement.

En appliquant la proposition déjà citée, on aura le théorème suivant :

Si, par les 8 points r', on mène une courbe quelconque du troisième ordre, cette courbe coupe K^3 en 2 points distincts des points r'; les tangentes menées en ces points à K^3 se coupent sur la tangente de rebroussement au point r. La courbe du troisième ordre passe en outre par ce point de rencontre et par le point ρ, qui est ainsi le neuvième point fixe, commun à toutes les courbes du troisième ordre qui passent par les 8 points r'.

19. Considérons maintenant deux courbes de troisième classe K^3 et K'^3, et soient

$$U = (a, b, c, d \between \lambda, \mu)^3 = 0$$

et

$$U' = (a', b', c', d' \between \lambda, \mu)^3 = 0$$

leurs équations mixtes.

Ces deux courbes ont 9 tangentes communes, et l'équation mixte générale des courbes de troisième classe, qui touchent ces 9 droites est

$$U + \rho U' = 0,$$

ρ désignant un paramètre arbitraire.

20. Pour éviter d'inutiles répétitions, je transcrirai d'abord le tableau suivant des divers invariants des formes U et U':

$$\begin{aligned}
D &= a^2 d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 3b^2c^2 - 6abcd,\\
D' &= a'^2 d'^2 + 4a'c'^3 + 4d'b'^3 - 3b'^2c'^2 - 6a'b'c'd',\\
H &= d'(a^2d + 2b^3 - 3abc) - 3c'(b^2c + abd - 2ac^2)\\
&\quad + 3b'(2b^2d - bc^2 - acd) - a'(3bcd - ad^2 - 2c^3),\\
H' &= d(a'^2d' + 2b'^3 - 3a'b'c') - 3c(b'^2c' + a'b'd' - 2a'c'^2)\\
&\quad + 3b(2b'^2d' - b'c'^2 - a'c'd') - a(3b'c'd' - a'd'^2 - 2c'^3),\\
I &= 2(ac - b^2)(b'd' - c'^2) + 2(bd - c^2)(a'c' - b'^2)\\
&\quad - (ad - bc)(a'd' - b'c'),\\
J &= ad' - 3bc' + 3cb' - da',\\
R &= (ad')^3 - 9(ad')^2(bc') + 27(ca')^2(cd') + 27(db')^2(ab')\\
&\quad - 81(ab')(bc')(cd') - 27(ad')(ab')(cd') \text{ [*]}.
\end{aligned}$$

21. Les plus importants de ces invariants sont d'abord les deux

[*] Je désigne ici, suivant l'usage, par les symboles (ad'), (ab'),..., les binômes alternés

$$ad' - da', \quad ab' - ba', \ldots.$$

discriminants D et D'; en les égalant à zéro, on a les équations cartésiennes des deux courbes K^3 et K'^3; l'équation d'une courbe quelconque du troisième ordre K_ρ^3, tangente aux 9 tangentes communes aux 2 premières, s'obtiendra en égalant à zéro le discriminant de

$$U + \rho U';$$

elle peut se mettre sous la forme

$$D + 2\rho H + \rho^2(J^2 - 6I) + 2\rho^3 H' + \rho^4 D' = 0. \tag{2}$$

22. Le tableau précédent renferme 2 *combinants* R et J.

R est le résultant des 2 formes U et U'; l'équation

$$R = 0$$

représente évidemment l'ensemble des 9 tangentes communes aux 2 courbes, droites qui touchent aussi toutes les autres courbes du faisceau.

Pour un point de rebroussement de K^3, l'équation

$$U = 0$$

ayant trois racines égales, on peut supposer

$$a = b = c = 0;$$

dans ces hypothèses, R devient

$$-d^3 a'^3,$$

et J devient

$$-da';$$

pour tout point de rebroussement de K^3, on a donc

$$R - J^3 = 0; \tag{3}$$

si maintenant on remarque que, R et J, étant des combinants, ne changent pas de valeur quand on y remplace U par $U + \rho U'$, on en conclut que l'équation précédente représente le lieu des points de rebroussement de toutes les courbes du faisceau.

Ceci suppose que l'on n'ait pas *identiquement*

$$R - J^3 = 0.$$

Je reviendrai plus loin sur ce sujet.

23. Considérons une courbe de troisième classe K^3 et ses 9 tangentes de rebroussement; on peut inscrire, dans le polygone formé par ces 9 droites, une infinité de courbes de troisième classe qui, toutes, auront les 9 premières tangentes pour tangentes de rebroussement. Le lieu des points de rebroussement se confond alors avec les tangentes elles-mêmes, et l'on a

$$J = 0.$$

D'où cette conséquence remarquable :

Si deux courbes de troisième classe ont les mêmes tangentes de rebroussement, l'invariant J *relatif à ces deux courbes est identiquement nul.*

Réciproquement, si cet invariant est identiquement nul, les deux courbes ont mêmes tangentes de rebroussement.

24. Cette proposition peut s'énoncer de la façon suivante pour les courbes du troisième ordre.

Si, par les 9 points d'inflexion d'une courbe du troisième ordre, on fait passer un faisceau de courbes, ce faisceau détermine sur une sécante fixe quelconque une division en involution.

Chaque groupe de 3 points de cette involution peut être considéré comme déterminé par les racines d'une équation de la forme

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d + \rho(a'x^2 + 3b'x^2 + 3c'x + d') = 0;$$

cela posé, l'invariant

$$ad' - 3bc' + 3cb' - da'$$

est toujours nul, *quelle que soit la position de la sécante.*

25. Si l'on égale à zéro l'invariant H, l'équation

$$H = 0$$

représente une courbe du sixième ordre, $\mathfrak{H}^6$.

Pour trouver les points de rencontre de cette courbe avec K^3, faisons

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0.$$

H se réduit alors à

$$2a'c^3.$$

Cette quantité s'annule pour

$$c^3 = 0;$$

donc la courbe $\mathfrak{H}^6$ passe par les points de rebroussement de K^3 et elle la touche en ces points, puisque chaque point d'intersection doit compter pour 3.

Cette quantité s'annule encore pour

$$a' = 0;$$

donc $\mathfrak{H}^6$ passe par les 9 points de contact des tangentes communes à K^3 et à K'^3.

Les courbes $\mathfrak{H}^6$ et K^3 n'ont d'ailleurs, évidemment, aucun autre point commun.

Laissons la courbe K'^3 fixe, et remplaçons la courbe K^3 par la courbe variable K^3_ρ, dont l'équation cartésienne est

$$(2) \qquad D + 2\rho H + \rho^2(J^2 - 6I) + 2\rho^3 H' + \rho^4 D' = 0;$$

la courbe que je viens de considérer est remplacée par une courbe $\mathfrak{H}^6_\rho$, dont l'équation est

$$(3) \qquad H + \rho(J^2 - 6I) + 3\rho^2 H' + 2\rho^3 D' = 0;$$

les courbes K^3_ρ et $\mathfrak{H}^6_\rho$ se rencontrent :

1° Aux points de contact des tangentes communes à K'^3 et à K^3_ρ;

2° Aux points de rebroussement de K^3_ρ, chacun de ces derniers comptant 3 fois.

Si l'on élimine la variable ρ entre les équations précédentes, l'équation obtenue en égalant le résultant à zéro représente donc :

1° Les 9 tangentes communes aux courbes K_ρ^3;

2° Le lieu de leurs points de rebroussement de ces courbes, ce dernier lieu étant pris 3 fois.

Remarquons maintenant que, le premier membre de l'équation (3) étant la dérivée par rapport à ρ du premier membre de l'équation (2), le résultant de ces deux équations est le discriminant de (2).

Ce discriminant ne peut donc différer que par un facteur constant du produit

$$R(R - G^3)^3,$$

puisque, comme nous l'avons vu,

$$R - G^3 = 0$$

est l'équation du lieu des points de rebroussement des courbes K_ρ^3.

Ces résultats sont d'ailleurs d'accord avec la théorie bien connue des formes cubiques simultanées.

26. Les considérations précédentes s'étendent sans difficulté à des courbes d'une classe quelconque.

Soient un faisceau de courbes de $n^{\text{ième}}$ classe tangentes à n^2 droites fixes, et

$$U = (a, b, c, \ldots, h, k, l \between \lambda, \mu)^n = 0,$$
$$U' = (a', b', c', \ldots, h', k', l' \between \lambda, \mu)^n = 0$$

les équations mixtes de deux courbes de ce faisceau, K^n et K'^n.

Soit, en outre, D le discriminant de la forme U.

Posons

$$H = a'\frac{dD}{da} + b'\frac{dD}{db} + \ldots + k'\frac{dD}{dk} + l'\frac{dD}{dl}.$$

H est un invariant des formes U et U', dont le poids est égal à $n(n-1)$, et par conséquent l'équation

$$H = 0$$

représente une courbe $\mathfrak{H}^{n(n-1)}$ de degré $n(n-1)$.

Pour trouver ses points de rencontre avec K^n, il faut faire, dans l'invariant H,

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0.$$

D'après un beau théorème de Joachimsthal [*], D est de la forme

$$b^2\Delta + a\varphi + a^2\psi + \ldots,$$

Δ désignant le discriminant de la forme

$$(b, c, \ldots, h, k, l \between \lambda, \mu)^{n-1}.$$

En tenant compte de cette expression, on voit que, dans les hypothèses données, la valeur de H se réduit à

$$a'\varphi_0,$$

φ_0 désignant la valeur de φ quand on y fait

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0.$$

Or l'on a en général

$$\varphi = -4c\Delta + b\left(d\frac{d}{dc} + \ldots\right)\Delta;$$

on a donc

$$\varphi_0 = -4c\Delta_0,$$

Δ_0 désignant la valeur de Δ dans les mêmes hypothèses que ci-dessus.

D'après le théorème déjà mentionné de Joachimsthal, on a

$$\Delta = c^2\nabla + b\Phi + b^2\Psi + \ldots,$$

∇ désignant le discriminant de la forme

$$(c, d, \ldots, k, l \between \lambda, \mu)^{n-2}.$$

---

[*] SALMON, *Alg. sup.*, p. 80.

On en déduit

$$\Delta_0 = c^2 \nabla ;$$

d'où l'on voit que la valeur de H se réduit à

$$- 4a'c^3 \nabla .$$

27. Cette valeur s'annule :

1° Quand l'on a

$$a' = 0.$$

Donc la courbe $\mathfrak{J}^{n(n-1)}$ passe par les n^2 points, où les tangentes communes aux courbes du réseau touchent K^n.

2° Quand on a

$$\nabla = 0.$$

C'est ce qui a lieu pour les points doubles de K^n; car, en ces points, l'équation

$$U = 0,$$

outre la racine double égale à zéro, a une autre racine double que l'on peut supposer infinie; mais on a alors

$$l = 0 \quad \text{et} \quad k = 0,$$

et par conséquent

$$\nabla = 0,$$

puisque, dans ce cas, l'équation

$$(c, d, \ldots, k, l \between \lambda, \mu)^{n-2} = 0$$

a aussi une racine double.

3° Quand on a

$$c^3 = 0.$$

Donc la courbe considérée passe par les points de rebroussement de K^n, et, comme ces points comptent 3 fois, la courbe lui est tangente en chacun d'eux.

Nous avons ainsi tous les points d'intersection des courbes K^n et

$\mathfrak{z}^{n(n-1)}$. Chacun des points doubles de K^n doit, en effet, être compté au moins deux fois. Or le nombre total des points d'intersection est $[n(n-1)]^2$, ou m^2, si l'on pose

$$n(n-1) = m.$$

D'après une formule de Plücker, on a

$$m(m-1) = n + 2d + 3r,$$

en désignant respectivement par d et par r le nombre des points doubles et des points de rebroussement de K^n.

On en déduit

$$m^2 = m + n + 2d + 3r = n^2 + 2d + 3r.$$

Les m^2 points d'intersection se composent donc :

1° Des n^2 points de contact des tangentes communes à K^n et K'^n;

2° Des d points doubles (chacun d'eux étant compté deux fois);

3° Des r points de rebroussement (chacun d'eux étant compté 3 fois).

28. Quelques remarques sur les résultats précédents ne seront pas inutiles.

On sait que les points d'intersection des deux courbes de degré $n(n-1)$, K^n et $\mathfrak{z}^{n(n-1)}$ ne sont pas indépendants entre eux; en conservant les mêmes notations que ci-dessus [*],

$$\frac{(m-1)(m-2)}{1.2} - d - r$$

de ces points sont déterminés par les autres.

De même les tangentes communes aux deux courbes de classe n, K^n et K'^n, ne sont pas non plus indépendantes entre elles;

$$\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$$

d'entre elles sont déterminées par les autres.

---

[*] Clebsch et Gordan, *Th. von der Abelschen Functionen*, p. 35.

Les deux nombres précédents sont égaux, car ils indiquent tous deux le *genre* de la courbe K^n. On déduit de là la proposition suivante :

Étant donnée une courbe de n classe K^n, si l'on mène une courbe quelconque de degré $n(n-1)$, qui passe par les points doubles de K^n et la touche en chacun de ses points de rebroussement, cette courbe rencontre K^n en n^2 points distincts de ses points singuliers; les tangentes menées à K^n, en ces n^2 points, sont tangentes à une autre courbe de même classe.

29. Considérons maintenant le faisceau de courbes considéré plus haut (n° **26**). Soit K_ρ^n l'une quelconque des courbes de ce faisceau, et

$$U + \rho U' = 0$$

son équation mixte. En désignant par $F(\rho)$ le discriminant de cette équation (discriminant pris par rapport à λ et μ),

$$F(\rho) = 0$$

est l'équation cartésienne de K_ρ^n.

La courbe $\mathfrak{g}^{n(n-1)}$ relative à K_ρ^n a pour équation

$$\frac{dF}{d\rho} = 0.$$

Soit W le discriminant de $F(\rho)$ (discriminant pris par rapport à ρ);

$$W = 0$$

est le résultat de l'élimination de ρ entre les deux équations précédentes. Nous obtenons ainsi l'enveloppe des courbes du faisceau; d'autre part, en se reportant à ce que j'ai dit dans le n° **27** sur l'intersection des courbes $\mathfrak{g}^{n(n-1)}$ et K^n, on voit que cette enveloppe se compose :

1° Des n^2 tangentes communes;

2° Du lieu des points doubles des courbes du faisceau, ce lieu étant compté deux fois;

3° Du lieu des points de rebroussement de ces courbes, ce lieu étant compté trois fois.

Si donc on désigne respectivement par

$$\mathfrak{C} = 0, \quad \mathfrak{D} = 0, \quad \mathfrak{R} = 0$$

les équations du système des tangentes communes, du lieu des points doubles et du lieu des points de rebroussement, on a

$$W = \mathfrak{C}\mathfrak{D}^2\mathfrak{R}^3 \text{ [*]}.$$

Du poids connu des invariants $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{R}$, on conclut que le lieu des points doubles des courbes du faisceau est du degré $2n(n-2)(n-3)$ et le lieu des points de rebroussement du degré $3n(n-2)$.

30. Je reviens maintenant au cas spécial d'un faisceau de courbes de troisième classe. L'équation générale d'une courbe de ce faisceau est

$$(2) \qquad D + 2\rho H + \rho^2(J^2 - 6I) + 2\rho^3 H' + \rho^4 D' = 0;$$

et l'on voit que par chaque point du plan passent quatre courbes du faisceau.

Il est facile de trouver les coefficients angulaires des tangentes à ces courbes au point donné. En effet, en désignant pour un instant par

$$f(\lambda, \mu) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(\lambda, \mu) = 0$$

les équations mixtes des courbes K^3 et K'^3, l'équation

$$f(\lambda, \mu) + \rho\varphi(\lambda, \mu) = 0,$$

où x et y ont été remplacées par les valeurs des coordonnées du point, détermine les tangentes menées de ce point à une courbe quelconque du faisceau. L'ensemble de ces tangentes forme un faisceau d'involution, et les droites doubles de cette involution sont précisément les droites cherchées; on les obtient, comme l'on sait, en égalant à zéro

[*] On déduit de là une proposition importante sur les formes binaires donnée par M. Salmon, d'après M. Cayley, je crois, mais sans démonstration (*High Algebra*, p. 149 de l'édition anglaise).

le Jacobien des deux formes f et φ, et l'équation qui donne des coefficients angulaires des tangentes est

$$\begin{vmatrix} \frac{df}{d\lambda} & \frac{df}{d\mu} \\ \frac{d\varphi}{d\lambda} & \frac{d\varphi}{d\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on met en évidence les coefficients de U et de U', cette équation devient

$$\Upsilon = (6ab' - ba'),\ 3(ac' - ca'),\ ad' - da' + 3bc' - 3cb',\ 3(bd' - db'),\ 6(cd' - dc')\,\big)(\lambda, \mu)^4 = 0;$$

et si l'on désigne par S et T l'invariant quadratique et l'invariant cubique de la forme Υ, on a

$$S = 3J^2, \quad T = J^3 - 2R,$$

J et R ayant la même signification que dans les numéros précédents.

31. Par un point quelconque M du plan passent, comme nous l'avons vu, quatre courbes du faisceau. Voyons comment on peut déterminer le rapport anharmonique des tangentes à ces courbes en ce point. Soit k ce rapport anharmonique, si nous posons

$$k + \frac{1}{k} = z,$$

z sera racine de l'équation

$$S^3[(z+2)(2z-5)^2] - 4 \cdot 27 T^2 (z-1)^3 = 0;$$

S et T désignant, comme précédemment, l'invariant quadratique et l'invariant cubique de Υ.

Si l'on remplace S et T par les expressions données ci-dessus, on obtient l'équation

$$(3) \qquad J^6[(z+2)(2z-5)^2] - 4(J^3 - 2R)^2 (z-1)^3 = 0.$$

32. Si nous supposons que la valeur du rapport anharmonique k soit donnée, l'équation précédente est l'équation du lieu des points tels que les quatre courbes du faisceau, qui se croisent en ce point, aient un rapport anharmonique donné.

On voit que ce lieu se compose de deux courbes du neuvième degré

$$J^3(2z-5)\sqrt{z+2}+2\sqrt[3]{(z-1)^3}(J^3-2R)=0$$

et

$$J^3(2z-5)\sqrt{z+2}-2\sqrt[3]{(z-1)^3}(J^3-2R)=0.$$

Réciproquement, toute courbe dont l'équation est de la forme

$$\alpha R+\beta J^3=0,$$

α et β désignant des constantes, représente une courbe telle que les quatre courbes du faisceau, qui se croisent en chacun de ses points, ont un rapport anharmonique constant.

Les cas particuliers les plus remarquables sont les suivants :

1° Si le rapport est harmonique; on a alors

$$z+2=0,$$

et le lieu se réduit à la courbe du neuvième degré, dont l'équation est

$$J^3-2R=0;$$

2° Si le rapport anharmonique est égal à une racine imaginaire de l'unité négative; on a alors

$$z-1=0,$$

et le lieu se réduit à la courbe du troisième degré, dont l'équation est

$$J=0.$$

33. Les résultats précédents supposent que J n'est pas identiquement nul. Nous avons vu que ce cas se présentait lorsque les courbes du faisceau avaient mêmes tangentes de rebroussement.

L'équation (3) donne alors

$$z=1.$$

D'où cette conséquence :

Si l'on considère les courbes de troisième classe qui ont les mêmes tangentes de rebroussement, par tout point du plan passent quatre de ces courbes, le rapport anharmonique de ces quatre courbes est constant, quelle que soit la position du point, et égal à une racine imaginaire de l'unité négative.

34. J'ai montré (**22**) que l'équation du lieu des points de rebroussement des courbes de troisième classe, qui forment un faisceau, était

$$R - J^2 = 0.$$

Ceci suppose toutefois que cette équation n'a pas lieu identiquement. Ce cas peut effectivement se présenter.

Soit

$$U = (a, b, c, d \between \lambda, \mu)^3 = 0$$

l'équation mixte d'une courbe de troisième classe K^3; soient ξ, η les coordonnées d'un point M du plan, dont l'équation mixte sera

$$(-Y, X \between \lambda, \mu)^1 = 0,$$

si l'on pose pour abréger

$$Y = y - \eta \quad \text{et} \quad X = x - \xi.$$

Considérons le faisceau de courbes de troisième classe, dont l'équation est

$$(a, b, c, d \between \lambda, \mu)^3 + \rho(-Y^3, XY^2, -X^2Y, X^3 \between \lambda, \mu)^3 = 0,$$

ρ désignant un paramètre arbitraire.

Pour abréger, je poserai

$$(a, b, c, d \between \lambda, \mu)^3 = f(\lambda, \mu),$$

et

$$h(\lambda, \mu) = (ac - b^2)\lambda^2 + \ldots,$$
$$g(\lambda, \mu) = (a^2d + 2b^3 - 3abc)\lambda^3 + \ldots.$$

$h(\lambda, \mu)$ et $g(\lambda, \mu)$ sont, comme on le voit, le covariant quadratique et le covariant cubique de $f(\lambda, \mu)$; je n'ai écrit que le premier terme de leur développement.

Cela posé, on voit immédiatement que l'équation

$$f(X, Y) = 0$$

représente l'ensemble des tangentes que l'on peut mener du point (ξ, η) à la courbe; que R et J sont respectivement égaux à $f^3(X, Y)$ et $f(X, Y)$; la relation

$$R - J^3 = 0$$

est donc satisfaite identiquement.

Résultat facile à prévoir, car l'équation (2) devient dans ce cas

$$D + 2\rho g(X, Y) + \rho^2[f(X, Y)]^2 = 0. \tag{4}$$

Le discriminant de cette équation (considérée comme étant du quatrième degré) est évidemment nul, puisqu'elle a deux racines égales à l'infini; d'autre part, on sait que ce discriminant est égal, à un facteur numérique près, à

$$R(R - J^3)^2;$$

on devait donc trouver $R - J^3 = 0$.

Si l'on égale à zéro le discriminant de l'équation (4) (considérée comme une équation du second degré), on obtiendra l'équation de l'enveloppe des courbes du faisceau. Cette enveloppe ne comprendra pas les tangentes communes servant de base au faisceau, parce que les courbes les touchent en des points fixes; elle se réduira donc au lieu des points de rebroussement qui devra être compté trois fois.

Donc le discriminant de l'équation (4) est un cube parfait; et, en effet, il a pour valeur

$$g^2(X, Y) - Df^2(X, Y),$$

quantité qui, d'après un théorème bien connu de M. Cayley, est égale à

$$-4h^3(X, Y).$$

Le lieu des points de rebroussement est donc la courbe du sixième degré, dont l'équation est

$$h(X, Y) = 0.$$

SECTION III.

PROPRIÉTÉS DES COURBES DE QUATRIÈME CLASSE.

35. Soit une courbe de quatrième classe K^4 et

$$U = (a, b, c, d, e \between \lambda, \mu)^4 = 0$$

son équation mixte. La forme U a deux invariants fondamentaux S et T, dont je transcris ci-dessous les valeurs,

$$S = ae - 4bd + 3c^2,$$
$$T = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.$$

Ces invariants étant respectivement d'un poids égal à 4 et d'un poids égal à 6, les équations

$$S = 0 \quad \text{et} \quad T = 0$$

représentent respectivement des courbes du quatrième et du sixième ordre. Ces courbes, que j'appellerai $\mathfrak{s}^4$ et $\mathfrak{T}^6$, jouissent des propriétés remarquables déjà signalées par M. Clebsch [*].

Pour trouver les points de rencontre de $\mathfrak{s}^4$ et de K^4, faisons, dans S, a et b égaux à zéro, S devient alors égal à

$$3c^2;$$

cette quantité s'annule pour $c = 0$, et ne s'annule que dans ce cas. Donc la courbe $\mathfrak{s}^4$ passe par les 24 points de rebroussement de la courbe K^4 et ne coupe la courbe qu'en ces points.

Dans les mêmes hypothèses, T se réduit à

$$-c^3;$$

d'où cette conséquence :

La courbe $\mathfrak{T}^6$ touche K^4 en chacun de ses 24 points de rebroussement et n'a d'ailleurs aucun point commun avec elle.

---

[*] *Über symbolische Darstellung algebraischer Formen* (CRELLE, t. 59).

Ainsi les points de rebroussement de K^4 sont les points d'intersection des deux courbes $\mathfrak{s}^4$ et $\mathfrak{T}^6$.

36. Par chaque point M du plan, on peut mener quatre tangentes à K^4. Cherchons le rapport anharmonique de ces tangentes. Soit k ce rapport anharmonique. Si nous posons

$$k + \frac{1}{k} = z,$$

nous voyons, comme au n° **31**, que z est racine de l'équation

$$S^3[(z+2)(2z-3)^2] - 4.27T^2(z-1)^3 = 0,$$

S et T ayant la même signification qu'au paragraphe précédent.

L'équation

$$\alpha S^3 + \beta T^2 = 0,$$

où α et β désignent des constantes arbitraires, représente donc le lieu d'un point tel, que les tangentes menées de ce point à K^4 forment un faisceau ayant un rapport anharmonique donné.

Les cas particuliers les plus remarquables sont les suivants :

1° Quand $k = 0$, d'où $z = \infty$; on obtient alors

$$S^3 - 27T^2 = 0;$$

c'est, en coordonnées cartésiennes, l'équation de la courbe K^4;

2° Quand $k = -1$, d'où $z = 2$; le rapport est alors anharmonique, et l'équation se réduit à

$$T = 0;$$

la courbe $\mathfrak{T}^6$ est donc le lieu des points tels, que les tangentes menées à la courbe forment un faisceau harmonique;

3° Quand $k = \rho$, ρ étant une racine cubique de l'unité négative; on a alors $z - 1 = 0$, et l'équation se réduit à

$$S = 0;$$

la courbe $\mathfrak{s}^4$ est donc le lieu des points tels, que le rapport anharmonique des tangentes menées à la courbe est égal à une racine cubique de l'unité négative.

37. Pour étudier les points doubles de la courbe K^4, considérons en même temps une autre courbe de quatrième classe K'^4, dont l'équation mixte soit

$$U' = (a', b', c', d', e' \between \lambda, \mu)^4;$$

et posons

$$\begin{aligned} I &= ae' - 4bd' + 6cc' - 4db' + ea', \\ J &= e'(ac - b^2) - 2d'(ad - bc) + c'(ae + 2bd - 3c^2) \\ &\quad - 2b'(be - cd) + a'(ce - d^2). \end{aligned}$$

I et J sont deux invariants des formes U et U'.

Si nous égalons à zéro le nouvel invariant $\Omega = 2SJ - 3TI$, comme cet invariant est d'un poids égal à 10, l'équation

$$(1) \qquad 2SJ - 3TI = 0$$

représentera une courbe du dixième degré $\mathcal{A}^{10}$.

Pour avoir les points de rencontre de cette courbe avec K^4, faisons

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0,$$

Ω devient alors

$$6c^2(-3c^2c' + 2b'cd + a'ce - a'd^2) + 3c^3(6cc' - 4db' + ea'),$$

ou en réduisant

$$3c^2a'(3ce - 2d^2).$$

Cette quantité s'annule

1° Quand

$$a' = 0;$$

donc $\mathcal{A}^{10}$ passe par les 16 points de contact des tangentes communes aux courbes K^4 et K'^4;

2° Quand l'on a

$$c^2 = 0;$$

donc $\mathcal{A}^{10}$ passe par les 28 points de rebroussement de K^4, chacun de ces points comptant pour deux, comme on le savait *à priori;*

3° Quand l'on a

$$3ce - 2d^2 = 0,$$

ce qui a lieu aux points doubles de K^4; en effet, pour ces points, l'équation

$$U = 0,$$

outre la racine double égale à zéro, a une autre racine double que l'on peut supposer infinie, ce qui revient à poser

$$e = 0, \quad d = 0,$$

auquel cas l'expression précédente s'annule.

Chacun de ces 28 points doubles doit d'ailleurs évidemment être compté deux fois.

On a aussi tous les points d'intersection de K^4 et de $\mathcal{A}^{10}$, car ces points sont au nombre de 120, et l'on a bien

$$120 = 16 + 2.24 + 2.28.$$

D'où la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Étant données une courbe de quatrième classe* K^4 *et une autre courbe arbitraire de même classe* K'^4, *les* 16 *points où les tangentes communes à ces courbes touchent* K^4 *et les* 52 *points singuliers de* K^4 *sont situés sur une même courbe du dixième degré* $\mathcal{A}^{10}$.

38. Les 120 points d'intersection des courbes $\mathcal{A}^{10}$ et K^4 ne sont pas indépendants entre eux; comme on le sait,

$$\frac{11.10}{2} - 52 \text{ [*]}$$

sont déterminés par les autres.

---

[*] Cf. CLEBSCH et GORDAN, *loc. cit.*

Des 16 points d'intersection distincts des points singuliers de K^4, 13 suffisent donc pour déterminer les autres; remarquons maintenant que les 13 tangentes en ces points suffisent pour déterminer aussi 16 tangentes communes à K^4 et à un faisceau de courbes de quatrième classe.

De là résulte le théorème suivant :

Si par les 52 points singuliers d'une courbe de quatrième classe K^4, *on fait passer une courbe quelconque du dixième ordre, cette courbe rencontre* K^4 *en 16 points distincts des points singuliers; les tangentes menées en ces 16 points à* K^4 *touchent une autre courbe de quatrième classe.*

39. La courbe de quatrième classe K'^4 peut se décomposer en une courbe de classe inférieure et en un point ou en un système de points. On démontrerait, comme au n° **13**, que la courbe $\mathcal{A}^{10}$ passe par ces points.

En particulier, si K'^4 se résout en un système de 4 points, on a la proposition suivante :

Si, par quatre points (α), *on mène des tangentes à une courbe de quatrième classe* K^4, *les 16 points de contact des tangentes et les 52 points singuliers de la courbe sont situés sur une même courbe du dixième ordre* $\mathcal{A}^{10}$, *qui passe par les quatre points* (α).

40. Lorsqu'on coupe une courbe de quatrième classe K^4 par une droite A, les tangentes, aux 12 points de rencontre de A avec K^4, touchent une même courbe de troisième classe K^3, qui est la polaire de A.

Adjoignons à cette dernière courbe un point arbitraire M; l'ensemble de K^3 et M constitue une courbe de quatrième classe.

La courbe $\mathcal{A}^{10}$ correspondante passe par les points de contact des tangentes communes à K^3 et à K^4, c'est-à-dire par les 12 points de rencontre de A avec K^4; elle contient donc cette droite tout entière, et se résout en la droite A et une courbe du neuvième ordre $\mathcal{B}^9$. Cette courbe passe d'ailleurs par les 52 points singuliers de K^4, les 4 points de contact des tangentes menées de M à K^4 et en outre par le point M (Cf., n° **39**).

On peut donc énoncer les propositions suivantes :

THÉORÈME I. — *Si d'un point* M *pris dans le plan d'une courbe de quatrième classe* K^4, *on mène des tangentes à la courbe, les* 4 *points de contact et les* 52 *points singuliers de* K^4 *sont situés sur une même courbe du neuvième ordre, qui passe en outre par le point* M.

THÉORÈME II. — *Si, par les* 52 *points singuliers d'une courbe de quatrième classe* K^4, *on mène une courbe quelconque du neuvième ordre, cette courbe rencontre* K^4 *en* 4 *points distincts des points singuliers, les tangentes en ces points à la courbe* K^4 *se coupent en un même point* M, *qui se trouve sur la courbe du neuvième ordre.*

41. On peut choisir la droite A de telle façon que sa polaire se décompose en une conique et un point ϖ; nous prenons, du reste, le point M arbitrairement dans le plan. La courbe $\mathcal{A}^{10}$ se compose alors de la droite A et de la courbe $\mathcal{B}^9$ correspondante au point M; d'après ce que nous avons vu, le point ϖ doit se trouver sur $\mathcal{A}^{10}$, et, comme il est en dehors de la droite A, il est nécessairement situé sur $\mathcal{B}^9$.

On trouve dans le plan 21 points ϖ, qui sont évidemment caractérisés par la propriété que les tangentes que l'on peut mener de chacun d'eux à K^4 ont leurs 4 points de contact en ligne droite; ces 21 points se trouvent donc sur la courbe $\mathcal{B}^9$, quelle que soit la position du point M.

D'où la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Toutes les courbes du neuvième ordre qui passent par les* 52 *points singuliers d'une courbe de quatrième classe passent en outre par* 21 *points fixes; ces points fixes sont les points qui jouissent de la propriété que les tangentes menées de chacun d'eux à* K^4 *ont leurs points de contact en ligne droite.*

42. Je m'arrête ici dans l'étude de l'invariant [*]

$$2SJ - 3TI;$$

[*] Je signalerai cependant encore, en passant, le cas important où l'invariant quadratique I est identiquement nul; alors la courbe $\mathcal{A}^{10}$ se décompose en S^4 et en une courbe du sixième ordre $\mathcal{S}^6$ sur laquelle sont, dans ce cas, situés les 28 points doubles de la courbe K^4 et les 28 points doubles de K^{14}.

les théorèmes auxquels cette étude nous a conduits comprennent, dans leur énoncé, tous les points singuliers de la courbe.

Pour étudier en particulier les points doubles de K^4, je considérai le covariant du sixième ordre de U,

$$\begin{aligned}V = (&a^2d + 2b^3 - 3abc,\ a^2e + 2abd - 9ac^2 + 6b^2c,\\ &5abe - 15acd + 10b^2d,\ 10b^2e - 10d^2a,\\ &-5ade + 15bce - 10bd^2,\ -ae^2 - 2bde + 9ce^2 - bcd^2,\\ &3cde - 2d^3 - be^2 \between \lambda, \mu)^6.\end{aligned}$$

Pour que l'équation

$$U = 0$$

ait deux couples de racines égales, il faut et il suffit que tous les coefficients du covariant V se réduisent à zéro.

Le poids de ce covariant étant égal à 9, en égalant à zéro ses coefficients, on obtient l'équation d'autant de courbes du neuvième ordre, qui toutes passent par les 28 points doubles de la courbe.

43. Considérons en particulier le coefficient de $\lambda^3\mu^3$, l'équation

$$ad^2 - eb^2 = 0$$

représente, comme nous venons de le voir, une courbe du neuvième degré passant par les 28 points doubles de K^4.

La forme remarquable de cette équation donne lieu à d'importantes conséquences; on voit, en effet, facilement que

$$a = 0$$

est l'équation du faisceau des tangentes menées à la courbe par le point x_∞ situé à l'infini sur l'axe des x.

De même

$$b = 0$$

est l'équation du faisceau des tangentes menées à la courbe par le point y_∞ situé à l'infini sur l'axe des y.

Supposons que ces points soient deux points doubles de la courbe; alors a et b seront deux carrés parfaits, et si l'on pose

$$a = \alpha^2 \quad \text{et} \quad b = \beta^2,$$

l'équation de la courbe du neuvième ordre deviendra

$$\alpha^2 d^2 - \beta b^2 = 0,$$

équation qui se décomposera en deux autres

$$\alpha d - \beta b = 0$$

et

$$\alpha d + \beta b = 0.$$

Dans ce fait analytique se trouve l'origine des beaux théorèmes donnés par Steiner sur les points doubles des courbes de quatrième classe [*]; mais, pour en développer toutes les conséquences, il est nécessaire d'étudier plus complétement le covariant V.

44. Considérons, en même temps que la courbe K^4, une conique quelconque K^2 dont l'équation mixte soit

$$(A, B, C \between \lambda, \mu)^2 = 0.$$

De cette forme et du covariant V, on déduit l'invariant suivant :

$$\begin{aligned} I = {} & (a^2d - 3abc + 2b^3)C^3 - (a^2e + 2abd - 9ac^2 + 6b^2c)BC^2 \\ & + (abe - 3acd + 2b^2d)AC^2 + (4abe - 12acd + 8b^2d)B^2C \\ & + 6(ad^2 - b^2e)ABC + 4(ad^2 - b^2e)B^3 - (ade - 3bce + 2bd^2)A^2C \\ & - (4ade - 12bce + 8bd^2)AB^2 + (ae^2 + 2bde - 9c^2e + 6cd^2)BA^2 \\ & - (be^2 - 3cde + 2d^3)A^3. \end{aligned}$$

---

[*] Il est presque inutile d'ajouter que Steiner les a énoncés pour les tangentes doubles des courbes du quatrième ordre.

Cet invariant étant d'un poids égal à 9, l'équation

$$I = 0$$

représente une courbe du neuvième ordre $\mathfrak{S}^9$.

1° Lorsque l'on fait

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0,$$

I se réduit à

$$(2d^2 - 3ce)(3Bc - Ad)A^2;$$

cette quantité s'annule pour

$$e = 0 \quad \text{et} \quad d = 0;$$

donc la courbe $\mathfrak{S}^9$ passe par les 28 points doubles de K^4. Elle s'annule aussi pour

$$A^2 = 0;$$

donc $\mathfrak{S}^9$ touche K^4 aux 8 points de contact des tangentes communes à K^4 et à K^2.

2° Considérons les 8 tangentes communes à K^4 et à K^2; ces droites se coupent en 28 points. Pour chacun de ces points, les équations

$$(a, b, c, d, e \between \lambda, \mu)^4 = 0$$

et

$$(A, B, C \between \lambda, \mu)^2 = 0$$

ont deux racines communes, qu'on peut supposer égales respectivement à zéro et à l'infini, ce qui revient à poser

$$a = 0, \quad e = 0, \quad A = 0, \quad C = 0;$$

I s'annule dans cette hypothèse, donc la courbe $\mathfrak{S}^9$ passe par les points de rencontre des 8 tangentes communes.

De là résulte la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Étant données une courbe de quatrième classe* K^4 *et une courbe de seconde classe* K^2, *on peut construire une courbe du* *neuvième ordre* $\mathfrak{S}^9$, *qui passe par les* 28 *points doubles de* K^4, *par les* 28 *points de rencontre des* 8 *tangentes communes à* K^4 *et à* K^2, *et qui touche* K^4 *aux points de contact de ces tangentes.*

45. Pour calculer l'équation de la courbe $\mathfrak{S}^9$, nous pourrons toujours supposer que, par une substitution linéaire des variables, on ait mis le polynôme qui, égalé à zéro, donne l'équation de la conique K^2 sous la forme

$$\mathcal{F}\lambda\mu;$$

par la même substitution, le polynôme qui, égalé à zéro, donne l'équation de la courbe de quatrième classe K^4, deviendra

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E} \between \lambda, \mu)^4.$$

La valeur de l'invariant I, relative aux deux formes précédentes, est, à un facteur numérique près,

$$\mathcal{F}^3(\mathcal{A}\mathcal{D}^2 - \mathcal{E}\mathcal{B}^2);$$

si l'on désigne par ω le déterminant de la substitution employée, on aura, en vertu de la propriété fondamentale des invariants, à un facteur numérique près,

$$I = \omega^{-9}.\mathcal{F}^3(\mathcal{A}\mathcal{D}^2 - \mathcal{E}\mathcal{B}^2);$$

l'équation de la courbe $\mathfrak{S}^9$ sera donc

$$\omega^{-9}\mathcal{F}^3(\mathcal{A}\mathcal{D}^2 - \mathcal{E}\mathcal{B}^2) = 0.$$

46. Supposons la conique K^2 composée du système des deux points M et M', dont les coordonnées sont respectivement

$$\xi, \eta \quad \text{et} \quad \xi', \eta'.$$

Posons, pour un instant,

$$x - \xi = X, \quad y - \eta = Y, \quad x - \xi' = X', \quad y - \eta' = Y'.$$

L'équation de la conique K^2 (ou de l'ensemble des deux points) est

$$(-Y\lambda + X\mu)(-Y'\lambda + X'\mu) = 0.$$

Faisons la substitution suivante :

$$\begin{aligned} \lambda &= X'\lambda' - X\mu', \\ \mu &= Y'\lambda' - Y\mu' \end{aligned}$$

de déterminant

$$\omega = XY' - YX'.$$

Par cette substitution, l'équation des points M, M' devient

$$\omega^2\lambda\mu = 0;$$

si l'équation mixte de K^4 est

$$F(\lambda, \mu) = 0,$$

cette équation devient, après la transformation,

$$F(X'\lambda' - X\mu', Y'\lambda' - Y\mu') = 0,$$

ou, en développant,

$$[F(X', Y'),\ \Phi', \ldots,\ \Phi,\ F(X, Y) \between \lambda, \mu)]^4,$$

Φ et Φ' désignant deux polynômes entiers en X, Y, X', Y', dont on peut se dispenser d'écrire la valeur.

Les quantités $\mathcal{I}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ étant ainsi déterminées, on en déduit

$$I = \frac{1}{\omega^3}[F(X', Y')\Phi^2 - F(X, Y)\Phi'^2],$$

expression qui, malgré la présence de ω en dénominateur, est un polynôme entier en X, Y, X' et Y'.

Si les points donnés M et M' sont deux points doubles de la courbe, comme les équations

$$\begin{aligned} F(X, Y) &= 0, \\ F(X', Y') &= 0 \end{aligned}$$

représentent respectivement les faisceaux de tangentes menées de ces points à la courbe, les polynômes $F(X, Y)$ et $F(X', Y')$ sont des carrés parfaits; et, si l'on pose

$$F(X, Y) = W^2,$$
$$F(X', Y') = W'^2;$$

l'équation de la courbe $\mathfrak{Z}^9$ devient

$$\frac{W'^2\Phi^2 - W^2\Phi'^2}{\omega^3} = 0,$$

ou bien

$$\frac{(\Phi W' - W\Phi')(\Phi W' + W\Phi')}{\omega^3} = 0.$$

$\mathfrak{Z}^9$ se décompose ainsi, comme nous le verrons tout à l'heure, en une courbe du troisième ordre et une courbe du sixième ordre.

Remarque. — Il est clair que, si la courbe K^4 a une tangente double pour chacun des points où cette tangente coupe la courbe, le polynôme

$$F(X, Y)$$

est un carré parfait; on peut donc appliquer la proposition précédente, soit à un couple de ces points, soit à un de ces points et un point double.

47. On sait, depuis les beaux travaux de Steiner et de M. Hesse, qu'une courbe de quatrième classe peut être considérée (et cela de soixante-trois façons différentes) comme l'enveloppe de coniques qui lui sont quadruplement tangentes.

Si

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = 0$$

sont les équations tangentielles de deux coniques d'un de ces groupes, l'équation de la courbe K^4 peut se mettre sous la forme

$$AB = C^2,$$

en désignant par

$$C = 0$$

l'équation d'une troisième conique.

En se reportant à ce que j'ai dit au n° 5, on voit immédiatement que c'est aussi la forme de l'équation mixte de la courbe, si l'on suppose que

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

soient les équations mixtes de trois coniques.

Soient respectivement

$$a_0\lambda^2 + 2b_0\lambda\mu + c_0\mu^2 = 0, \tag{1}$$

$$\alpha_0\lambda^2 + 2\beta_0\lambda\mu + \gamma_0\mu^2 = 0, \tag{2}$$

$$A_0\lambda^2 + 2B_0\lambda\mu + C_0\mu^2 = 0 \tag{3}$$

ces équations mixtes.

L'équation mixte de la courbe de quatrième classe K^4 sera

$$\left\{\begin{aligned} &(a_0\lambda^2 + 2b_0\lambda\mu + c_0\mu^2)(\alpha_0\lambda^2 + 2\beta_0\lambda\mu + \gamma_0\mu^2) \\ &\quad = (A_0\lambda^2 + 2B_0\lambda\mu + C_0\mu^2)^2; \end{aligned}\right. \tag{4}$$

ou bien encore, si l'on pose

$$\begin{aligned} a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2 = {} & (a_0\lambda^2 + 2b_0\lambda\mu + c_0\mu^2) \\ & + 2\rho(A_0\lambda^2 + 2B_0\lambda\mu + C_0\mu^2) \\ & + \rho^2(\alpha_0\lambda^2 + 2\beta_0\lambda\mu + \gamma_0\mu^2), \\ \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2 = {} & (a_0\lambda^2 + 2b_0\lambda\mu + c_0\mu^2) \\ & + 2\theta(A_0\lambda^2 + 2B_0\lambda\mu + C_0\mu^2) \\ & + \theta^2(\alpha_0\lambda^2 + 2\beta_0\lambda\mu + \gamma_0\mu^2), \\ A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 = {} & (a_0\lambda^2 + 2b_0\lambda\mu + c_0\mu^2) \\ & + (\rho + \theta)(A_0\lambda^2 + 2B_0\lambda\mu + C_0\mu^2) \\ & + \rho\theta(\alpha_0\lambda^2 + 2\beta_0\lambda\mu + \gamma_0\mu^2), \end{aligned}$$

θ et ρ désignant deux paramètres variables arbitraires,

$$(a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2)(\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2) = (A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2)^2.$$

Les équations

$$a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2 = 0 \tag{5}$$

et

$$\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2 = 0 \tag{6}$$

représentent deux quelconques des coniques du groupe quadruplement tangentes à K^4; les 8 tangentes aux 8 points de contact des deux coniques touchent une troisième conique, dont l'équation est

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 = 0. \tag{7}$$

On peut donner à ρ six valeurs telles que la conique représentée par l'équation (1) se décompose en un système de 2 points; ces points sont évidemment des points doubles de la courbe, et l'on obtient ainsi les 12 points doubles qui appartiennent au groupe considéré.

48. Ce qui précède peut être présenté d'une façon plus nette en employant les considérations exposées par M. Aronhold dans son Mémoire *sur les Courbes du quatrième ordre* [*].

On sait qu'en général trois courbes de seconde classe quelconques peuvent être considérées comme les polaires de trois droites du plan par rapport à une certaine courbe de troisième classe.

Les courbes déterminées par les équations (1), (2) et (3) sont ainsi les polaires de trois droites relativement à une courbe de troisième classe bien déterminée K^3 [**].

Soient

$$p = 0, \quad \varpi = 0, \quad P = 0$$

les équations de ces droites.

La conique déterminée par l'équation (5) est la polaire de la droite

$$p + 2\rho P + \rho^2\varpi = 0;$$

[*] *Comptes rendus mensuels de l'Académie de Berlin*, juin 1864.

[**] *Voir* HERMITE : *Sur le résultant de trois formes quadratiques ternaires* (*Journal de Crelle*, t. LVII).

toutes les droites déterminées par cette équation, lorsqu'on y fait varier ρ, enveloppent une conique C^2 dont l'équation est

$$p\varpi - P^2 = 0.$$

De là les conséquences suivantes :

1° Toute droite tangente à la conique C^2 a pour polaire, par rapport à K^3, une conique quadruplement tangente à K^4 et appartenant au groupe considéré.

2° Si l'on considère deux droites tangentes à C^2, leurs coniques polaires sont quadruplement tangentes à K^4; les 8 tangentes menées aux points de contact touchent une même conique, qui est la polaire de la corde joignant les points où les droites touchent C^2.

3° Les six couples de points doubles appartenant au groupe sont les coniques polaires des tangentes communes à C^2 et à la hessienne de K^3.

49. Je vais maintenant démontrer que, si la conique K^2 est une des coniques données par l'équation (7), en d'autres termes, si cette conique est la polaire d'une droite du plan par rapport à K^3, la courbe $\mathfrak{Z}^9$ se décompose en une courbe du troisième ordre et une courbe du sixième ordre.

A cet effet, posons

$$B^2 - AC = \Delta,$$

et effectuons la substitution

$$\begin{aligned} \lambda &= (\sqrt{\Delta} - B)\lambda' + (\sqrt{\Delta} + B)\mu', \\ \mu &= A\lambda' - A\mu', \end{aligned}$$

propre à réduire à un rectangle la forme $A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2$, et de déterminant

$$\omega = -2A\sqrt{\Delta}.$$

Soient

$$\begin{gathered} 2B'\lambda\mu, \\ a'\lambda^2 + 2b'\lambda\mu + c'\mu^2, \\ \alpha'\lambda^2 + 2\beta'\lambda\mu + \gamma'\mu^2 \end{gathered}$$

ce que deviennent respectivement, après la transformation, les formes

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2, \quad a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2, \quad \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2.$$

Les équations mixtes des courbes K^2 et K^4 deviendront

$$2B'\lambda\mu = 0,$$
$$(a'\lambda^2 + 2b'\lambda\mu + c'\mu^2)(\alpha'\lambda^2 + 2\beta'\lambda\mu + \gamma'\mu^2) - B'^2\lambda^2\mu^2 = 0,$$

et l'équation, en coordonnées cartésiennes de 3^9 sera, d'après ce que j'ai dit plus haut,

$$\omega^{-9} B'^3 [a'\alpha'(b'\gamma' + c'\beta')^2 - c'\gamma'(b'\alpha' + a'\beta')^2] = 0,$$

ou encore

$$\omega^{-9} B'^3 (a'\gamma' - c'\alpha')(b'^2\alpha'\gamma' - \beta'^2 a'c') = 0.$$

50. En effectuant les calculs, on trouve

$$B' = 2A\Delta,$$
$$b' = A(2Bb - Ca - Ac),$$
$$\beta' = A(2B\beta - C\alpha - A\gamma).$$

Mettons maintenant l'équation précédente sous la forme suivante :

$$(8) \qquad \omega^{-9} B'^2 B'(a'\gamma' - c'\alpha')[b'^2(\alpha'\gamma' - \beta'^2) - \beta'^2(a'c' - b'^2)] = 0.$$

Je remarque que le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

est un invariant des trois formes (5), (6) et (7); on a donc

$$B'(a'\gamma' - c\alpha') = -\begin{vmatrix} 0 & B' & 0 \\ a' & b' & c' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = -\omega^3 \begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}.$$

On a de même

$$\alpha'\gamma' - \beta'^2 = \omega^2(\alpha\gamma - \beta^2) \quad \text{et} \quad a'c' - b'^2 = \omega^2(ac - b^2);$$

d'où

$$b'^2(\alpha'\gamma' - \beta'^2) - \beta'^2(a'c' - b'^2)$$
$$= A^2\omega^2[(2Bb - Ca - Ac)(\alpha\gamma - \beta^2) - (2B\beta - C\alpha - A\gamma)(ac - b^2)].$$

Remplaçons, dans l'équation (8), ω, B',... par leurs valeurs; elle deviendra, toutes réductions faites,

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \times [(2Bb - Ca - Ac)^2(\alpha\gamma - \beta^2) - (2B\beta - C\alpha - A\gamma)^2(ac - b^2)] = 0.$$

51. Avant d'examiner la relation précédente, il est bon de revenir sur quelques points de la théorie des sections coniques.

Considérons trois coniques

$$p, \quad \varpi, \quad P,$$

et soient, comme ci-dessus,

$$(a, b, c \between \lambda, \mu)^2 = 0, \quad (\alpha, \beta, \gamma \between \lambda, \mu)^2 = 0, \quad (A, B, C \between \lambda, \mu)^2 = 0$$

leurs équations mixtes.

Les invariants fondamentaux de ce système de formes sont :

1° Les discriminants

$$ac - b^2, \quad \alpha\gamma - \beta^2, \quad AC - B^2,$$

qui, égalés à zéro, donnent les équations cartésiennes des coniques :

2° Les invariants simultanés quadratiques

$$A\gamma + C\alpha - 2B\beta, \quad Ac + Ca - 2Bb, \quad a\gamma + c\alpha - 2b\beta.$$

L'équation

$$A\gamma + C\alpha - 2B\beta = 0$$

représente une conique; de chacun des points de cette courbe les tangentes menées aux deux coniques P et ϖ forment un faisceau harmonique.

L'équation des tangentes communes à P et à ϖ s'obtient en égalant à zéro le résultant des formes

$$(\alpha, \beta, \gamma \between \lambda, \mu)^2 \quad \text{et} \quad (A, B, C \between \lambda, \mu)^2.$$

D'après un beau théorème de M. Boole, cette équation peut se mettre sous la forme

$$(A\gamma + C\alpha - 2B\beta)^2 - 4(\alpha\gamma - \beta^2)(AC - B^2) = 0.$$

Les invariants $Ac + Ca - 2Bb$ et $a\gamma + c\alpha - 2b\beta$ ont une signification analogue relativement aux systèmes de coniques P, p et p, ϖ.

3° L'invariant gauche G, dont la valeur est

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}.$$

L'équation

$$G = 0$$

représente une courbe de troisième ordre; c'est évidemment le lieu des points tels, que les tangentes menées de ces points aux trois coniques données forment un faisceau en involution.

Il est clair qu'on peut remplacer une de ces coniques par une quelconque des courbes dont l'équation est

$$\rho(A, B, C \between \lambda, \mu)^2 + \theta(a, b, c \between \lambda, \mu)^2 + \varphi(\alpha, \beta, \gamma \between \lambda, \mu)^2 = 0,$$

ρ, θ et φ désignant des constantes arbitraires.

Cette courbe jouit d'un grand nombre de propriétés remarquables qui sont dues, pour la plupart, à M. Cayley.

52. D'après le résultat auquel je suis parvenu dans les nos **49** et **50**, on voit que, dans le cas considéré, la courbe $\mathfrak{S}^9$ se décompose en une courbe de troisième ordre Q^3, dont l'équation est

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

et une courbe de sixième ordre Q^6, dont l'équation est

$$(2Bb - Ca - Ac)^2(\alpha\gamma - \beta^2) - (2B\beta - C\alpha - A\gamma)^2(ac - b^2) = 0.$$

53. Étudions d'abord la courbe Q^3; pour abréger le discours, j'emploierai les expressions suivantes.

J'appellerai coniques F^2 les différentes coniques qui sont les polaires des droites du plan relativement à la courbe de troisième classe K^3; les coniques F^2 forment un réseau.

J'appellerai coniques G^2 les coniques qui sont les polaires, par rapport à K^3, des droites tangentes à C^2; ces coniques G^2 sont des positions particulières des coniques F^2, chacune d'elles est quadruplement tangente à K^4.

D'après ce que j'ai dit plus haut, on voit que la courbe Q^3 peut être définie par les propriétes suivantes :

Si l'on prend d'une façon quelconque trois coniques F^2, *le lieu des points, d'où l'on voit ces coniques suivant un faisceau en involution, est la courbe* Q^3.

Étant données deux coniques quelconques F^2, *les points de rencontre des tangentes communes à ces deux courbes sont situés sur* Q^3.

Étant donnée une conique quelconque G^2, *les quatre tangentes, aux points où cette courbe touche* K^4 *se coupent en* 6 *points situés sur* Q^3.

La courbe Q^3 *est le lieu des couples de points qui font partie des coniques* F^2.

Elle passe par les 12 *points doubles de* K^4 *qui appartiennent au groupe considéré.*

La courbe Q^3 est la corrélative de la courbe désignée par G dans le Mémoire de Steiner.

54. La courbe Q^3, qui passe par les 12 points doubles du groupe, est complétement déterminée et ne dépend pas de la conique K^2.

Il n'en est pas de même de la courbe Q^6.

La courbe $\mathfrak{s}^9$, qui se compose des courbes Q^3 et Q^6, devant passer par les 28 points doubles de la courbe et Q^3 ne contenant que 12 de ces points, les 16 autres sont situés sur Q^6.

L'équation de cette courbe peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}&[(2Bb - Ca - Ac)^2 - 4(AC - B^2)(ac - b^2)](\alpha\gamma - \beta^2)\\ = &[(2B\beta - C\alpha - A\gamma)^2 - 4(AC - B^2)(\alpha\gamma - \beta^2)](ac - b^2).\end{aligned}$$

D'où, si l'on se reporte à ce que j'ai dit plus haut (nº **51**), les conclusions suivantes, qui concordent d'ailleurs avec ce qui a été établi généralement pour la courbe $\mathfrak{s}^9$:

THÉORÈME. — *Étant données deux coniques quelconques p et ϖ, quadruplement tangentes à K^4 et appartenant au groupe considéré, les quatre tangentes aux points de contact de p rencontrent les quatre tangentes aux points de contact de ϖ en 16 points; ces 16 points et les 16 points doubles, qui n'appartiennent pas au groupe, sont situés sur une même courbe du sixième ordre, qui passe en outre par les 4 points d'intersection des coniques p et ϖ et touche K^4 aux 8 points où cette courbe est touchée par les coniques.*

55. Reprenons l'équation de Q^6

$$(2Bb - Ac - Ca)^2(\alpha\gamma - \beta^2) = (2B\beta - A\gamma - C\alpha)^2(ac - b^2),$$

et supposons que chacune des coniques p et ϖ se réduise à un couple de points (qui seront des points doubles du groupe).

On aura alors

$$\alpha\gamma - \beta^2 = V^2,$$

V étant l'équation de la droite qui joint les deux points en lesquels se résout la conique ϖ; on aura de même

$$ac - b^2 = V_1^2,$$

et l'équation précédente deviendra

$$(2Bb - Ac - Ca^2)V^2 = (2B\beta - A\gamma - C\alpha)^2 W^2;$$

la courbe Q^6 se décompose, dans ce cas, en deux courbes du troisième ordre analogues à Q^3 et dont les équations sont

$$\begin{aligned}(2Bb - Ca - Ac)V + (2B\beta - C\alpha - A\gamma)W = 0,\\ (2Bb - Ca - Ac)V - (2B\beta - C\alpha - A\gamma)W = 0.\end{aligned}$$

56. Soient d et d' une couple quelconque de points doubles d'une courbe de quatrième classe K^4; ces points définissent un groupe de 12 points doubles (G), dont ils font eux-mêmes partie, et les 12 points du groupe sont situés sur une des courbes du troisième ordre de Steiner.

Soit Δ un troisième point double de la courbe; je supposerai, pour simplifier la démonstration, que d et d' soient respectivement les points situés à l'infini sur l'axe des x et sur l'axe des y, et que Δ soit l'origine des coordonnées.

Cela posé, l'origine étant un point double, en faisant dans l'équation mixte de K^4

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y = 0,$$

le résultat doit être un carré parfait; cette équation est donc de la forme

$$\begin{aligned}(\mu x - \lambda y)^4 + 4(\alpha\lambda + \beta\mu)(\mu x - \lambda y)^3 + 6(a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2)(\mu x - \lambda y)^2\\ + 4(A\lambda^3 + 3B\lambda^2\mu + 3C\lambda\mu^2 + D\mu^2)(\mu x - \lambda y)^2\\ + (P\lambda^2 + 2Q\lambda\mu + R\mu^2)^2 = 0,\end{aligned}$$

$Px^2 + 2Qxy + Ry^2 = 0$ étant l'équation des tangentes menées à la courbe par le point Δ.

Les points situés à l'infini sur l'axe des x et sur l'axe des y étant des points doubles de la courbe, les coefficients de λ^4 et de μ^4 dans l'équation précédente sont des carrés parfaits, et l'on peut poser, par exemple,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} P^2 - 4Ay + 6ay^2 - 4\alpha y^3 + y^4 = (y^2 - 2\alpha y + h)^2,\\ R^2 + 4Dx + 6cx^2 + 4\beta x^3 + x^4 = (x^2 + 2\beta x + k)^2,\end{aligned}\right.$$

d'où, en particulier, on déduit la relation suivante :

$$(10) \qquad P^2 k^2 - R^2 h^2 = 0.$$

Les coefficients de $4\lambda^3\mu$ et de $4\lambda\mu^3$, dans l'équation mixte de K^4, sont respectivement

$$PQ - 3By + Ax - 3axy + 3by^2 - \beta y^3 + 3\alpha xy^2 - y^3 x$$

et

$$RQ + 3Cx - Dy - 3cxy + 3bx^2 + \alpha x^3 - 3\beta x^2 y - x^3 y.$$

Il résulte de là, et de ce que j'ai dit plus haut, que l'équation de la courbe Q^6 est

$$\begin{aligned}&(y^2 - 2\alpha y + h)\\ &\quad\times(RQ + 3Cx - Dy - 3cxy + 3bx^2 + \alpha x^3 - 3\beta x^2 y - x^3 y)\\ &+(x^2 + 2\beta x + k)\\ &\quad\times(PQ - 3By + Ax - 3axy + 3by^2 - \beta y^3 + 3\alpha xy^2 - y^3 x) = 0,\end{aligned}$$

et l'équation de Q^3

$$\begin{aligned}&(y^2 - 2\alpha y + h)\\ &\quad\times(RQ + 3Cx - Dy - 3cxy + 3bx^2 + \alpha x^3 - 3\beta x^2 y - x^3 y)\\ &-(x^2 + 2\beta x + k)\\ &\quad\times(PQ - 3By + Ax - 3axy + 3by^2 - \beta x^3 + 3\alpha xy^2 - y^3 x) = 0.\end{aligned}$$

Cette dernière équation est en apparence du sixième degré; mais, en vertu des relations (9), ce degré s'abaisse au troisième.

57. Les premiers membres des équations précédentes, quand l'on y fait

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y = 0,$$

se réduisent respectivement à

$$Q(hR + kP) \quad \text{et à} \quad Q(hR - kP).$$

De l'équation (10), il résulte que l'une des quantités précédentes est nulle [*]; le point Δ se trouve donc sur la courbe Q^3 ou sur la courbe Q^6.

Il est clair, d'après ce que j'ai dit précédemment, qu'il se trouve sur Q^3 s'il fait partie du groupe (G), et sur Q^6 dans le cas contraire.

Dans le premier cas, l'on a

$$hR - kP = 0;$$

or c'est là la condition nécessaire pour que les six droites représentées par les équations

$$\begin{gathered} y^2 - 2\alpha y + h = 0, \\ x^2 + 2\beta x + k = 0, \\ Px^2 + 2Qxy + Ry^2 \end{gathered}$$

soient tangentes à une même conique; et, d'ailleurs, ces droites sont les tangentes que l'on peut mener à la courbe par les trois points doubles A, B, C.

D'où cette propriété due à Steiner :

Si le point Δ appartient au groupe (G), les 6 tangentes que l'on peut mener à la courbe des points d, d' et Δ touchent une même conique.

58. Supposons maintenant que le point Δ n'appartienne pas au groupe (G); on a alors

$$hR + kP = 0;$$

soit Γ l'une quelconque des tangentes menées du point C à la courbe, et

$$Px - y(Q + \sqrt{Q^2 - PR}) = 0$$

son équation; l'équation de la seconde de ces tangentes Γ' sera

$$Px - y(Q - \sqrt{Q^2 - PR}) = 0.$$

---

[*] Je suppose, pour abréger la discussion, qu'aucune des quantités P, Q, R ne soit nulle; c'est évidemment le cas général.

Appelons Γ_0 la conjuguée harmonique de Γ' par rapport aux deux axes $d\Delta$ et $d'\Delta$, l'équation de cette droite sera

$$Px + y(Q - \sqrt{Q^2 - PR}) = 0,$$

l'ensemble des droites Γ et Γ_0 ayant pour équation

$$Px^2 - 2\sqrt{Q^2 - PR}\,xy - Ry^2 = 0.$$

L'égalité

$$hR + kP = 0$$

exprime précisément la relation nécessaire pour que les droites Γ et Γ_0 et les 4 tangentes que l'on peut mener à la courbe par les points d et d' touchent une même conique.

On peut donc, en groupant ensemble les résultats précédents, énoncer la proposition suivante :

Étant pris, sur une courbe de quatrième classe, 2 points doubles d et d', ces 2 points déterminent 10 autres points doubles de la courbe qui forment, avec les premiers, un groupe (G) de 12 points situés sur une même courbe du troisième ordre.

Soient Δ un point double de la courbe différent de d et de d', et Γ et Γ' les tangentes menées à ce point. La droite Γ et les tangentes menées par d et d' déterminent une conique. Cela posé :

1° Si Δ fait partie du groupe G, la droite Γ' se confond avec la deuxième tangente que l'on peut mener du point Δ à la conique;

2° Si Δ ne fait pas partie de ce groupe, la droite Γ' et cette deuxième tangente sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites Δd et $\Delta d'$.