JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Sur les lois qui régissent, à une première approximation, les ondes lumineuses propagées dans un milieu homogène et transparent d'une contexture quelconque

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 17 (1872), p. 167-176.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1872_2_17__167_0>

Sur les lois qui régissent, à une première approximation, les ondes lumineuses propagées dans un milieu homogène et transparent d'une contexture quelconque;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

(Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 8 janvier 1872.)

D'après la *Théorie des ondes lumineuses* qui se trouve résumée dans un article des *Comptes rendus* (t. LXV, p. 235, 5 août 1867), et développée dans un Mémoire du *Journal de Mathématiques* (t. XIII, 1868), les trois équations du mouvement de l'éther dans un corps transparent sont

$$(1)\quad \rho\frac{d^2u}{dt^2}+\rho_1\frac{d^2u_1}{dt^2}=(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx}+\mu\Delta_2 u,\quad \rho\frac{d^2v}{dt^2}+\ldots,\quad \rho\frac{d^2w}{dt^2}+\ldots:$$

λ, μ et ρ désignent les deux coefficients d'élasticité (*Leçons de Lamé*) et la densité de l'éther (supposé par cette théorie le même dans les corps que dans les espaces célestes); x, y, z les trois coordonnées d'équilibre d'une molécule d'éther par rapport à un système quelconque d'axes rectangulaires fixes; u, v, w les déplacements de cette molécule à l'époque t; θ la dilatation cubique $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}$, et Δ_2 l'expression symbolique $\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}$; enfin, ρ_1 la densité de la matière pondérable, et u_1, v_1, w_1 ses trois déplacements très-petits, donnés à une première approximation, avec neuf coefficients constants $\alpha,\ldots,\zeta_1$ par les formules

$$(2)\quad u_1=\alpha u+\zeta_1 v+\varepsilon w,\quad v_1=\beta v+\delta_1 w+\zeta u,\quad w_1=\gamma w+\varepsilon_1 u+\delta v.$$

Les trois coefficients α, β, γ sont positifs; car si l'on a, par exemple, $v = w = 0$, $u > 0$, l'éther, se mouvant dans le sens des x positifs, ne peut pas pousser la matière pondérable vers les x négatifs, et l'on doit avoir $u_1 > 0$.

Effectuons une transformation de coordonnées, en prenant de nouveaux axes rectangulaires des x', y', z' qui fassent avec les premiers des angles ayant les cosinus a, b, c pour celui des x'; a', b', c' pour celui des y'; a'', b'', c'' pour celui des z'. Les formules ordinaires de transformation et les relations (2) permettront d'obtenir les déplacements u'_1, v'_1, w'_1 de la matière pondérable par rapport aux nouveaux axes, en fonction de u_1, v_1, w_1, puis de u, v, w, et enfin en fonction des déplacements u', v', w' de l'éther suivant les nouveaux axes. On aura ainsi, entre u'_1, v'_1, w'_1 et u', v', w', des relations pareilles à (2), mais avec neuf nouveaux coefficients $\alpha', \ldots, \zeta'_1$, ayant pour valeurs

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + (\delta + \delta_1) bc + (\varepsilon + \varepsilon_1) ca + (\zeta + \zeta_1) ab,\\
\delta' &= \alpha a'a'' + \beta b'b'' + \gamma c'c'' + \delta b'c'' + \delta_1 c'b'' + \varepsilon c'a'' + \varepsilon_1 a'c''\\
&\qquad + \zeta a'b'' + \zeta_1 b'a'',\\
\delta'_1 &= \alpha a'a'' + \beta b'b'' + \gamma c'c'' + \delta_1 b'c'' + \delta c'b'' + \varepsilon_1 c'a'' + \varepsilon a'c''\\
&\qquad + \zeta_1 a'b'' + \zeta b'a'',\\
\beta' &= \alpha a'^2 + \ldots, \quad \varepsilon' = \alpha a''a + \ldots, \quad \varepsilon'_1 = \alpha a''a + \ldots,\\
\gamma' &= \alpha a''^2 + \ldots, \quad \zeta' = \alpha a a' + \ldots, \quad \zeta'_1 = \alpha a a' + \ldots.
\end{aligned}$$

Si l'on forme en particulier les trois sommes $\delta' + \delta'_1$, $\varepsilon' + \varepsilon'_1$, $\zeta' + \zeta'_1$, on trouve

$$(3)\left\{\begin{aligned}
\delta' + \delta'_1 &= 2(\alpha a'a'' + \beta b'b'' + \gamma c'c'') + (\delta + \delta_1)(b'c'' + c'b'')\\
&\quad + (\varepsilon + \varepsilon_1)(c'a'' + a'c'') + (\zeta + \zeta_1)(a'b'' + b'a''), \quad \varepsilon' + \varepsilon'_1 = \ldots.
\end{aligned}\right.$$

Or, en effectuant la même transformation de coordonnées sur l'ellipsoïde

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + (\delta + \delta_1) yz + (\varepsilon + \varepsilon_1) zx + (\zeta + \zeta_1) xy = 1,$$

on obtient précisément ces sommes pour coefficients respectifs de

$y'z'$, $z'x'$, $x'y'$, de telle sorte que, si l'on choisit pour nouveaux axes ceux de l'ellipsoïde, on aura $\delta' + \delta'_1 = 0$, $\varepsilon' + \varepsilon'_1 = 0$, $\zeta' + \zeta'_1 = 0$. Il existe donc un système d'axes rectangulaires par rapport auquel on a

$$\delta'_1 = -\delta', \quad \varepsilon'_1 = -\varepsilon', \quad \zeta'_1 = -\zeta';$$

ce qui, en effaçant les accents, réduit les formules (2) à

$$(4) \quad u_1 = \alpha u - \zeta v + \varepsilon w, \quad v_1 = \beta v - \delta w + \zeta u, \quad w_1 = \gamma w - \varepsilon u + \delta v.$$

Étudions la propagation d'ondes planes perpendiculaires à la direction qui fait avec ces axes des angles ayant pour cosinus m, n, p. Si τ désigne la durée de la vibration, ω la vitesse de propagation, m', n', p' les cosinus des angles de la vibration avec les axes, enfin I et ψ deux constantes, on aura

$$(5) \qquad \frac{u}{m'} = \frac{v}{n'} = \frac{w}{p'} = \mathrm{I}\cos\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{mx + ny + pz}{\omega} - \psi\right).$$

Ces valeurs de u, v, w, portées dans (4) et (1), donnent les trois équations

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\mathrm{U}m' + \rho_1\omega^2(\zeta n' - \varepsilon p')}{m} &= \frac{\mathrm{V}n' + \rho_1\omega^2(\delta p' - \zeta m')}{n} \\ &= \frac{\mathrm{W}p' + \rho_1\omega^2(\varepsilon m' - \delta n')}{p} = -(\lambda + \mu)\mathrm{S}mm', \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles je désigne par le symbole S la somme de trois termes analogues dont le premier est écrit après ce signe, et où j'ai fait, pour abréger,

$$(7) \quad \mathrm{U} = \mu - (\rho + \rho_1\alpha)\omega^2, \quad \mathrm{V} = \mu - (\rho + \rho_1\beta)\omega^2, \quad \mathrm{W} = \mu - (\rho + \rho_1\gamma)\omega^2.$$

Des deux premières (6) on déduit que m', n', p' sont respectivement proportionnels aux trois expressions

$$(8) \quad m\mathrm{VW} + \rho_1^2\omega^4(\mathrm{S}m\delta)\delta - \rho_1\omega^2(n\zeta\mathrm{W} - p\varepsilon\mathrm{V}), \quad n\mathrm{WU} + \ldots, \quad p\mathrm{UV} + \ldots,$$

qui, substituées à m', n', p' dans ces relations (6), les changent en la relation unique

$$(9) \quad (\lambda + \mu)[\mathrm{S}m^2\mathrm{VW} + \rho_1^2\omega^4(\mathrm{S}m\delta)^2] + [\mathrm{UVW} + \rho_1^2\omega^4\mathrm{SU}\delta^2] = 0.$$

Celle-ci, en y mettant au lieu de U, V, W leurs valeurs (7), devient l'équation aux vitesses de propagation, équation du troisième degré en ω^2.

Tous les corps transparents connus sont peu hétérotropes au point de vue optique, c'est-à-dire que les cinq quantités $\alpha-\beta$, $\beta-\gamma$, δ, ε, ζ sont très-petites. Si elles étaient nulles, ce qui donnerait $U=V=W$, l'équation (9), réduite à $(\lambda+\mu+U)U^2=0$, aurait deux racines égales et positives, obtenues en faisant $U=0$ et correspondant, comme on sait, à des vibrations transversales ou lumineuses : les mêmes cinq quantités étant en général très-petites, ces deux racines sont légèrement inégales, peu différentes de la valeur qu'elles ont dans le cas de l'isotropie, et correspondent à des vibrations quasi transversales. Lorsqu'on se borne à l'étude de ces vibrations, on peut, dans les expressions (8) et dans l'équation (9), ne conserver que les quantités du second ordre par rapport à U, V, W, δ, ε, ζ. En divisant en outre par le produit des trois facteurs $\rho+\rho_1\alpha$, $\rho+\rho_1\beta$, $\rho+\rho_1\gamma$, et appelant A^2, B^2, C^2, k^2 les rapports respectifs de μ à ces trois facteurs presque égaux et le quotient sensiblement constant de $\rho_1\omega^2$ par l'un d'eux, il vient ainsi, à fort peu près : 1° au lieu des expressions (8) auxquelles les cosinus m', n', p' sont proportionnels, celles-ci

$$(10)\qquad m(\omega^2-B^2)(\omega^2-C^2)+k^4(\mathrm{S}m\delta)\delta+k^2[n\zeta(\omega^2-C^2)-p\varepsilon(\omega^2-B^2)],\ldots;$$

2° au lieu de (9), l'équation bien plus simple

$$(11)\qquad \mathrm{S}m^2(\omega^2-B^2)(\omega^2-C^2)+k^4(\mathrm{S}m\delta)^2=0.$$

Les trois expressions approchées (10), respectivement multipliées par m, n, p et ajoutées, donnent, d'après (11), une somme nulle : les simplifications introduites, en altérant légèrement les rapports de m', n', p' et la valeur de ω, ont donc eu pour résultat de faire $\mathrm{S}mm'=0$, c'est-à-dire de rendre les vibrations rigoureusement transversales. La vraie valeur du petit angle, $\mathrm{S}mm'$, que fait la vibration avec le plan de l'onde, s'obtiendra en ajoutant terme à terme les trois rapports égaux (6), après avoir respectivement multiplié leurs numérateurs et leurs dénominateurs par m, n, p, puis en égalant le résultat au dernier membre de (6) : si l'on appelle K^2 une constante peu différente de A^2, B^2, C^2, par exemple leur moyenne, il viendra sensiblement

$$(12)\qquad Smm' = -\frac{\mu}{(\lambda+\mu)K^2}\left[S(A^2-K^2)mm' + k^2 Sm(\zeta n' - \varepsilon p')\right],$$

relation dans le second membre de laquelle les cosinus m', n', p' pourront être remplacés par leurs valeurs approchées tirées de (10) et (11).

Lorsque les coefficients δ, ε, ζ sont nuls, le milieu est optiquement symétrique par rapport aux plans coordonnés, c'est-à-dire tel qu'on peut changer en son opposé le sens d'un quelconque des axes, sans modifier les expressions (4) de u_1, v_1, w_1. Alors les formules (10) et (11) sont identiques à celles de Fresnel et contiennent les lois expérimentales connues de la double réfraction [*].

Mais revenons au cas général où δ, ε, ζ sont quelconques, et ajoutons les carrés développés des trois expressions (10), après les avoir respectivement multipliés par ω^2-A^2, ω^2-B^2, ω^2-C^2 : après quelques réductions, dont la plus difficile consiste dans l'emploi de l'identité

$$\begin{aligned}&S(\omega^2-A^2)[n\zeta(\omega^2-C^2)-p\varepsilon(\omega^2-B^2)]^2\\ &\quad=(\omega^2-A^2)(\omega^2-B^2)(\omega^2-C^2)\left[S\frac{m^2}{\omega^2-A^2}S\delta^2(\omega^2-A^2)-(Sm\delta)^2\right],\end{aligned}$$

on trouve un résultat égal au produit de

$$(\omega^2-A^2)(\omega^2-B^2)(\omega^2-C^2)+k^4 S\delta^2(\omega^2-A^2)$$

par le premier membre de (11), et par conséquent nul. Les expressions (10) étant proportionnelles à m', n', p', on peut donc poser la

[*] Dans le même cas d'un milieu symétrique et si l'on a en outre $\lambda+2\mu=0$ (hypothèse revenant à supposer nulle la vitesse de propagation, dans l'éther, des ondes longitudinales), l'équation (9) devient rigoureusement celle de Fresnel, et les expressions (8) se réduisent à $mA^2(\omega^2-B^2)(\omega^2-C^2),\ldots$: ces formules sont alors celles que M. Sarrau a étudiées au chapitre IV d'un Mémoire sur la lumière (*Journal de Mathématiques*, t. XIII, 1868) et desquelles il a déduit la théorie de la double réfraction de Fresnel, mais avec des vibrations quasi transversales perpendiculaires aux rayons lumineux, comme paraît l'exiger un calcul exact de la réflexion cristalline.

relation

$$(13) \qquad S(\omega^2 - A^2)m'^2 = 0, \quad \text{ou} \quad \omega^2 = SA^2 m'^2.$$

Si l'on porte, à partir de l'origine et dans la direction (m', n', p') de la vibration, une droite égale à l'inverse de la vitesse de propagation ω correspondante, les extrémités (x, y, z) de toutes les lignes pareilles constitueront, d'après (13), l'ellipsoïde, dit *d'élasticité*, $SA^2x^2 = 1$, *ellipsoïde qui ne dépend en rien des coefficients de non-symétrie* δ, ε, ζ. *On pourra donc obtenir le sens des vibrations correspondantes à une onde plane de direction donnée, en calculant, au moyen de l'équation* (11), *les deux vitesses de propagation possibles de cette onde plane, et en choisissant, parmi les demi-diamètres de l'intersection de l'ellipsoïde d'élasticité par le plan de l'onde* $Smx = 0$, *l'un de ceux dont la longueur sera égale à l'inverse de la vitesse trouvée.* Comme il y a dans une ellipse quatre demi-diamètres égaux, donnant deux directions distinctes également inclinées de part et d'autre des axes, le sens de la vibration ne sera pas ainsi complétement déterminé : cela provient de ce que l'équation aux vitesses (11) ne change pas lorsqu'on y change δ, ε, ζ en $-\delta$, $-\varepsilon$, $-\zeta$, et que, par suite, la même construction doit fournir les deux directions distinctes de la vibration dans deux milieux ne différant que par les signes de δ, ε, ζ. L'indétermination n'existe pas lorsque $Sm\delta = 0$, c'est-à-dire dans les milieux symétriques, et aussi, dans les autres milieux, pour les ondes planes parallèles à la direction $(\delta, \varepsilon, \zeta)$: en effet, l'équation aux vitesses (11) se réduit alors à celle de Fresnel, et l'on sait que les deux valeurs qu'elle donne à l'inverse de ω sont précisément celles du demi-grand axe et du demi-petit axe de l'intersection de l'ellipsoïde d'élasticité par le plan de l'onde $Smx = 0$. Mais, en général, le terme positif $k^4(Sm\delta)^2$, qui termine le premier membre de (11), augmente le produit des deux valeurs de ω^2 sans changer leur somme $S(B^2 + C^2)m^2$, de manière à diminuer leur différence : la somme des carrés des inverses des deux demi-diamètres de l'ellipse d'intersection suivant lesquels se font les vibrations est donc égale à celle des carrés des inverses des deux demi-axes de la même ellipse, ce qui, d'après une propriété connue de cette courbe, revient à dire que *les deux vibrations font, chacune avec l'axe de l'ellipse qui en est le plus voisin, deux angles égaux.*

Pour achever de déterminer géométriquement le sens (m', n', p') des vibrations, supposons que les axes des x, des y, des z, aient été choisis de manière à être respectivement ceux que l'on appelle de *plus grande*, de *moyenne* et de *plus petite élasticité*, c'est-à-dire tels que l'on ait $A^2 > B^2 > C^2$, et supposons en outre que les y positifs soient à droite des x positifs pour un observateur qui aurait les pieds à l'origine, la tête vers les z positifs et qui regarderait l'angle des xy positifs. Construisons, à partir de l'origine, une droite que j'appellerai *axe de non-symétrie* du milieu, d'une longueur ν égale au produit de $\sqrt{S\delta^2}$ par l'un des trois rapports sensiblement égaux $\frac{\rho_1}{\rho+\rho_1\alpha}, \frac{\rho_1}{\rho+\rho_1\beta}, \frac{\rho_1}{\rho+\rho_1\gamma}$, et prise dans la direction qui fait avec les axes respectifs des x, y, z des angles ayant leurs cosinus dans les mêmes rapports et de mêmes signes que δ, ε, ζ. J'admettrai d'abord que cet axe de non-symétrie coïncide avec celui des y positifs, ou que l'on ait $\delta = \zeta = 0$, $\varepsilon > 0$, et je considérerai des ondes planes presque parallèles au plan des zx. Les cosinus m, p, n' seront donc très-petits, et il suffira de calculer le rapport de p' à m', rapport sensiblement égal à la tangente de l'angle fait par la vibration avec les x positifs. Or la première et la troisième des expressions (10) donneront

$$(14) \qquad \frac{p'}{m'} = \frac{(\omega^2 - A^2)p + k^2\varepsilon m}{(\omega^2 - C^2)m - k^2\varepsilon p} = \frac{k^2\varepsilon}{\omega^2 - C^2},$$

le troisième membre se déduisant du second en vertu de l'équation (11), alors réduite à $(\omega^2 - A^2)(\omega^2 - C^2) = -k^4\varepsilon^2$; d'autre part, la même équation montre que ω^2 est compris entre A^2 et C^2, ou que $\omega^2 - C^2 > 0$. Le rapport de p' à m' est donc > 0, et les vibrations sont comprises dans l'angle des zx positifs ou dans celui des zx négatifs.

Comme l'intersection de l'ellipsoïde $SA^2x^2 = 1$ par le plan des zx a son grand axe suivant les z, il en résulte qu'*un observateur qui aurait les pieds à l'origine, le corps le long de l'axe de non-symétrie, et respectivement à sa gauche et à sa droite, devant lui, un demi-grand axe et un demi-petit axe de l'intersection de l'ellipsoïde d'élasticité par le plan de l'onde, verrait les vibrations se faire dans l'angle com-*

pris entre ces deux demi-axes. Concevons actuellement que l'axe de non-symétrie conserve la même longueur, mais tourne autour de l'origine d'une manière quelconque, en évitant seulement les quatre positions où il serait normal aux sections circulaires de l'ellipsoïde d'élasticité : il est évident, vu l'impossibilité d'un changement brusque de la direction (m', n', p'), que les vibrations se feront toujours, sur l'onde plane normale à cet axe, de la même manière par rapport au même observateur, et que la même loi continuera encore à s'observer si l'on passe, de cette onde plane, à d'autres faisant avec l'axe de non-symétrie des angles de plus en plus petits, jusqu'à ce qu'on arrive aux ondes parallèles à cet axe et pour lesquelles l'action de la non-symétrie s'annule.

Observons que, si φ désigne l'angle fait par la normale à l'onde avec l'axe de non-symétrie ν, on aura identiquement $k^2 \mathrm{S} m\delta = \omega^2 \nu \cos\varphi$ et par suite, à fort peu près, $k^4(\mathrm{S} m\delta)^2 = (\mathrm{S}\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2 m^2)\nu^2 \cos^2\varphi$. L'équation (11) développée pourra donc s'écrire

$$(15) \qquad \omega^4 - \omega^2 \mathrm{S}(\mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2) m^2 + (\mathrm{S}\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2 m^2)(1 + \nu^2 \cos^2\varphi) = 0.$$

D'après celle-ci, la somme des carrés des deux valeurs de ω^2 est $\mathrm{S}(\mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2)m^2$, expression indépendante de ν, et le produit des mêmes carrés est $(\mathrm{S}\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2 m^2)(1 + \nu^2 \cos^2\varphi)$, c'est-à-dire égal à sa valeur dans le cas d'un milieu symétrique augmentée dans le rapport de 1 à 1 + le carré de la projection de l'axe de non-symétrie sur la normale aux ondes.

En résumé, *quand on fait abstraction des pouvoirs dispersif et rotatoire, la constitution optique d'un milieu transparent est géométriquement définie au moyen d'un ellipsoïde, dit d'élasticité, et d'une droite de longueur donnée, ou axe de non-symétrie, que l'on doit concevoir menée, à partir du centre de l'ellipsoïde, dans une direction donnée également. Le milieu peut propager, parallèlement à un plan diamétral quelconque de l'ellipsoïde, deux systèmes d'ondes planes à vibrations quasi transversales. La direction des vibrations et la vitesse de propagation s'obtiennent : 1° en concevant un observateur qui, ayant les pieds au centre de l'ellipsoïde et le corps le long de l'axe de non-symétrie, se tournerait toujours de manière à voir respectivement* *devant lui, à sa gauche et à sa droite, un demi-grand axe et un demi-petit axe de l'intersection de l'ellipsoïde d'élasticité par le plan diamétral considéré, et 2° en traçant, entre ces deux demi-axes et dans la même ellipse d'intersection, les deux demi-diamètres dont les carrés des inverses ont même somme que les carrés des inverses des deux demi-axes, et ont pour produit le produit des carrés des inverses des deux mêmes demi-axes, multiplié par la somme de l'unité et du carré de la projection de l'axe de non-symétrie du milieu sur la normale aux ondes. Chacun des deux demi-diamètres ainsi construits donne, à fort peu près, par sa direction, l'orientation des vibrations correspondantes à l'un des deux systèmes d'ondes planes, et, par sa grandeur, l'inverse de la vitesse de propagation du même système d'ondes.*

La transparence du milieu pour les ondes planes propagées dans toutes les directions exige que les deux racines de (11) soient réelles, quels que soient m, n, p, sans quoi on n'aurait des valeurs réelles de u, v, w qu'en introduisant dans le dernier membre de (5) une exponentielle affectée d'un coefficient d'extinction. Pour résoudre l'équation (11), supposons toujours $A^2 > B^2 > C^2$, faisons

$$A^2 - B^2 = (A^2 - C^2)\cos^2\theta', \quad B^2 - C^2 = (A^2 - C^2)\sin^2\theta',$$

et appelons U′, U″ les deux angles que fait la normale à l'onde avec les deux droites situées dans le plan des zx et inclinées de θ' sur les x positifs. On aura, comme on voit d'ailleurs dans les traités de double réfraction, $\cos U' = m\cos\theta' + p\sin\theta'$, $\cos U'' = m\cos\theta' - p\sin\theta'$, d'où résulteront, pour m, p, et par suite pour $n^2 = 1 - p^2 - m^2$, des expressions en fonction de U′, U″ qui changeront (11) en

$$(15\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} 2\omega^2 = {} & (A^2 + C^2) - (A^2 - C^2)\cos U'\cos U'' \\ & \pm\sqrt{(A^2 - C^2)^2\sin^2 U'\sin^2 U'' - 4k^4(\mathrm{S}m\delta)^2}. \end{aligned}\right.$$

Pour $m = \cos\theta'$, $n = 0$, $p = \pm\sin\theta'$ (et, par suite, U′ ou U″ $= 0$), la condition de réalité exige qu'on ait $\mathrm{S}m\delta = 0$, ou $\delta = \zeta = 0$: *l'axe de non-symétrie doit donc coïncider avec celui de moyenne élasticité.* La quantité sous le radical de (15 *bis*) devient alors identiquement

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} & (A^2 - C^2)^2(\cos 2\theta' - \cos U'\cos U'')^2 \\ & \quad + [(A^2 - C^2)^2\sin^2 2\theta' - 4k^4\varepsilon^2]\, n^2, \end{aligned}\right.$$

expression dans laquelle on peut, d'après la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, remplacer $\cos 2\theta' - \cos U' \cos U''$ par $\sin U' \sin U'' \cos V'$, V' désignant le dièdre formé par les deux plans des angles U' et U''. Quand V' est droit, cette expression se réduit à son second terme, et n'est positive qu'autant que l'on a

$$(17) \qquad 2k^2\varepsilon < (A^2 - C^2)\sin 2\theta' \text{ (en valeur absolue)},$$

ou bien [à cause de $4k^4\varepsilon^2 = 4\omega^4\nu^2 =$ sensiblement $(A^2 + C^2)^2\nu^2$],

$$(18) \qquad \nu < \frac{A^2 - C^2}{A^2 + C^2}\sin 2\theta'.$$

Lorsque ε atteint sa valeur absolue maximum, l'expression (16) ne conserve que son premier terme : une des valeurs de ω^2 est alors indépendante de U', U'', et l'autre valeur devient égale à la première pour toutes les ondes planes dont les normales sont sur le cône $V' = 90°$.

Les cristaux des cinq premiers systèmes ont un de leurs axes minéralogiques perpendiculaire au plan des autres, et leur axe de non-symétrie optique, s'il existait, devrait être dans ce plan, vu l'absence de raisons pour qu'il se trouvât plutôt d'un côté que de l'autre; mais, ces cristaux coïncidant avec eux-mêmes lorsqu'on les fait tourner, autour de leur axe normal, d'angles égaux à 60, 90, 120 ou 180 degrés, l'existence d'un axe de non-symétrie entraînerait, dans le même plan, celle de plusieurs axes pareils, tandis qu'aucun milieu ne peut, d'après les lois établies ci-dessus, en avoir plus d'un. On a donc, chez tous ces cristaux, $\nu = 0$, et la lumière s'y propage et s'y polarise comme s'ils avaient trois plans rectangulaires de symétrie de contexture. Quant à ceux du sixième système, je ne vois pas de raison pour y supposer ε nul, et il faudrait des expériences précises, faites sur des rayons sensiblement perpendiculaires au plan des zx, c'est-à-dire au plan des deux axes optiques, pour trancher la question de savoir s'ils obéissent aux lois générales établies dans ce Mémoire ou à celles plus particulières de Fresnel.