JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. MANNHEIM

Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 17 (1872), p. 109-166.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1872_2_17__109_0>

Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces;

PAR M. A. MANNHEIM [*].

Les recherches optiques ont conduit à l'étude des systèmes de droites. Tous les géomètres connaissent le théorème de Malus généralisé par Dupin; mais c'est Hamilton qui, dans sa théorie *Of systems of rays*, a le premier donné à cette étude tout le développement qu'elle comporte.

Dans un premier supplément à cette théorie, inséré dans les *Transactions of the royal Irish Academy*, Hamilton est arrivé à des propriétés des pinceaux encore peu connues aujourd'hui. L'étude générale des systèmes de rayons rectilignes a été reprise analytiquement par Kummer dans un beau Mémoire qui a paru en 1860 (t. 57 du *Journal de Crelle*) : les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, en contiennent une traduction faite par M. Dewulf.

Ce Mémoire renferme certaines propriétés trouvées par Hamilton et d'autres que ce Géomètre n'avait pas remarquées. En terminant, M. Kummer s'attache à montrer la relation intime qui existe entre l'étude des systèmes de rayons et la théorie de la courbure des surfaces.

Dans le présent Mémoire, j'étudierai les pinceaux de droites d'une façon toute géométrique; non-seulement les propriétés des pinceaux sont intéressantes, mais il est utile de les connaître pour pouvoir employer les pinceaux comme élément dans les démonstrations, ainsi que j'aurai l'occasion de le faire plus tard.

Actuellement j'étudierai les pinceaux en eux-mêmes; pour cela j'introduirai les surfaces gauches formées respectivement par une droite du pinceau et chacune des droites infiniment voisines.

---

[*] Ce Mémoire a été présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 16 mai 1870.

Ces surfaces, que j'appelle *élémentaires*, seront représentées par de simples lignes droites : *droites auxiliaires*. C'est en 1864 [*] que j'ai présenté à la Société philomathique la construction de la droite auxiliaire d'une surface réglée et l'emploi d'une ou plusieurs droites auxiliaires pour la démonstration de quelques propriétés de ces surfaces.

Dans le troisième Volume de son *Traité de Géométrie descriptive*, M. de la Gournerie a exposé, en les étendant, les résultats que j'avais communiqués sur ce sujet à la Société philomathique.

Malgré l'introduction de la droite auxiliaire dans un ouvrage didactique, je crois utile de commencer ce Mémoire en rappelant ce qui est relatif à cette droite.

Je considère ensuite les surfaces élémentaires d'un pinceau représentées par leurs droites auxiliaires. Toutes les propriétés d'un pinceau se démontrent alors aisément au moyen d'une figure plane, dans laquelle apparaissent toujours une droite et une circonférence de cercle. Cette figure permet de retrouver des propriétés connues et d'autres entièrement nouvelles.

Le pinceau formé par les normales infiniment voisines d'une surface est très-intéressant à examiner. Une surface élémentaire de ce pinceau, surface que j'ai appelée *normalie*, représentée par sa droite auxiliaire, donne lieu à une figure sur laquelle se trouvent groupés tous les éléments relatifs à la théorie de la courbure des surfaces.

On est ainsi amené, non-seulement à une nouvelle exposition de cette théorie, à de nombreux résultats dus à MM. Joachimsthal, Bertrand, Bonnet, Lamarle, Catalan, etc., mais encore à des propriétés qui n'avaient pas été signalées dans les études si nombreuses faites sur ce sujet.

§ I. — Notions préliminaires.

De la droite auxiliaire.

Le *Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite* que M. Chasles a publié dans la *Correspondance mathématique de Quetelet*,

[*] Séances des 2, 23 avril et 7 mai.

t. XI, avait surtout pour objet de montrer les avantages que la théorie du rapport anharmonique apporte dans l'étude de la Géométrie; l'égalité de deux rapports anharmoniques donne, en effet, immédiatement une expression de la loi de variation des plans tangents d'une surface réglée.

Cette loi de variation des plans tangents est aussi mon point de départ; mais j'abandonne tout de suite l'expression analytique de cette loi pour sa représentation géométrique. C'est cette représentation qui me donne ce que j'appelle la « droite auxiliaire ».

Prenons une génératrice G d'une surface gauche; tout plan mené par cette droite touche cette surface au point où il est rencontré par la génératrice infiniment voisine de G, c'est-à-dire en un point unique. Pour tout point de G on a pour plan tangent celui qui est déterminé par ce point et par la génératrice infiniment voisine de G. Nous avons donc des points sur la génératrice G et les plans tangents en ces points, qui se correspondent de telle façon qu'à un point correspond un plan tangent et à tout plan mené par G ne correspond qu'un point de contact.

Afin de fixer les positions de ces points et de ces plans, prenons pour origines un point o sur G et le plan tangent en ce point à la surface gauche; les points de la génératrice seront déterminés par leurs distances à o et les plans tangents en ces points par leurs inclinaisons sur le plan tangent en o.

Soient y la distance d'un point quelconque de G au point o et Y l'angle que font entre eux les plans tangents en ces points.

En vertu de la correspondance dont je viens de parler, on doit avoir

$$y \operatorname{tang} Y + \lambda y + \mu \operatorname{tang} Y + \nu = 0,$$

dans laquelle λ, μ, ν sont des constantes.

Cette relation satisfait à la condition de donner pour chaque valeur de y une direction bien déterminée pour le plan tangent au point dont on prend la distance à o, et pour toute valeur de Y une seule valeur de y.

Remarquons maintenant que, y et Y devant s'annuler en même temps, la relation précédente ne doit pas renfermer la constante ν.

La loi de variation des plans tangents aux différents points de G peut donc s'écrire

$$y + \lambda \frac{y}{\operatorname{tang} Y} + \mu = 0. \tag{1}$$

Posons

$$\frac{y}{\operatorname{tang} Y} = x,$$

cette relation devient

$$y + \lambda x + \mu = 0,$$

équation d'une ligne droite A (*fig.* 1), p. 115, rapportée à G prise pour axe des y et à la perpendiculaire menée du point o à cette droite prise comme axe des x.

Pour un point quelconque a' de A on a dans le triangle oaa' :

$$oa = aa' \operatorname{tang} aa'o$$

ou

$$y = x \operatorname{tang} aa'o,$$

et comme $y = x \operatorname{tang} Y$ nous voyons que l'angle $aa'o$ n'est autre que Y.

Mais l'angle $aa'o$ est égal à l'angle xoa'; on aura donc l'angle Y correspondant au point a, c'est-à-dire l'angle que le plan tangent en a fait avec le plan tangent en o, en prenant l'inclinaison du rayon vecteur oa' sur l'axe des x.

Ainsi, pour un point quelconque a de la génératrice G, on a l'angle que le plan tangent en ce point à la surface gauche fait avec le plan tangent en o en mesurant l'inclinaison sur l'axe des x du rayon vecteur obtenu en joignant l'origine o au point a' qui se projette en a.

La droite A au moyen de laquelle on peut construire les inclinaisons des plans tangents à la surface gauche représente géométriquement la loi de variation exprimée par la relation (1). Nous l'appellerons *droite auxiliaire* relative au point o.

Lorsque le point a s'éloigne du point o, y croît ainsi que Y. Si a est arrivé en n le rayon vecteur correspondant est l'axe des y. Par suite, le plan tangent en ce point est perpendiculaire au plan tangent en o ou, en d'autres termes, le plan tangent en o est normal en n. Ainsi :

THÉORÈME I. — *Pour une génératrice* G *d'une surface gauche, la droite auxiliaire* A *relative au point* o *coupe cette génératrice au point où le plan tangent en* o *est normal à la surface gauche.*

Lorsque a s'est éloigné indéfiniment, le rayon vecteur correspondant est la parallèle à A menée du point o. L'inclinaison de A sur l'axe des x est donc l'angle que le plan tangent au point qui est à l'infini sur G fait avec le plan tangent en o. Le plan tangent à l'infini est normal à la surface gauche au point c obtenu en projetant sur G le pied de la perpendiculaire oc' abaissée du point o sur A. Ce point c, dont la considération est très-utile, comme nous le verrons par la suite, a été signalé pour la première fois par M. Chasles [*] qui l'a nommé *point central.*

Nous désignerons avec Bour le plan tangent en ce point sous le nom de *plan central.* D'après ce qui précède :

THÉORÈME II. — *Le plan central, pour la génératrice* G, *fait avec le plan tangent en* o *un angle qui est mesuré par l'inclinaison sur l'axe des* x *de la perpendiculaire abaissée du point* o *sur la droite auxiliaire relative à ce point.*

Pour une même génératrice d'une surface gauche on a des droites auxiliaires relatives aux différents points de cette droite. Dans tous les cas, le point central est le même sur G, puisque c'est le point de contact de la surface gauche avec le plan mené par G perpendiculairement au plan tangent à l'infini. Si nous plaçons notre origine au point c, la droite auxiliaire correspondante sera parallèle à G, car pour obtenir le point central nous avons vu qu'il fallait projeter sur G le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite auxiliaire relative à ce point.

La loi de variation des plans tangents, étant exprimée par l'équation de la droite auxiliaire, est donc dans le cas particulier où l'origine est au point central,

$$x = k,$$

[*] *Correspondance mathématique de Quetelet* (loc. cit.).

k étant une constante, où

$$\frac{y}{\operatorname{tang} Y} = k.$$

On peut écrire $\operatorname{tang} Y = \frac{y}{k}$ et l'on voit alors que :

Théorème III. — *Un plan quelconque étant mené par une génératrice d'une surface gauche, la distance du point où il est tangent à la surface au point central c relatif à la génératrice est proportionnelle à la tangente trigonométrique de l'inclinaison de ce plan sur le plan tangent en c.* (Chasles [*].)

La constante k est appelée *paramètre de distribution des plans tangents*. Elle se trouve construite sur la figure; elle est égale à cc'.

Puisque c est un point déterminé de G, et que cc' est une longueur constante, le point c' est déterminé aussi. Donc :

Théorème IV. — *Toutes les droites auxiliaires relatives aux différents points d'une même génératrice passent par un même point.*

Ce point c' étant connu, on a la droite auxiliaire A' relative à un point quelconque o' en élevant du point c' une perpendiculaire à la droite qui joint ce point au point o'.

Problème I. — *Connaissant trois points o, a, b d'une génératrice* G *d'une surface gauche et les plans tangents en ces points à cette surface, construire : la droite auxiliaire relative au point o, l'inclinaison sur le plan tangent en o du plan tangent en un point quelconque de* G, *le point central et le paramètre de distribution des plans tangents pour la génératrice* G.

Du point o (*fig.* 1), menons les droites oa', ob' faisant avec ox des angles respectivement égaux aux angles que les plans tangents en a et en b font avec le plan tangent en o. Ces droites rencontrent aux points a' et b' les perpendiculaires menées des points a et b à G : la droite A qui joint ces deux points est la droite auxiliaire relative au point o.

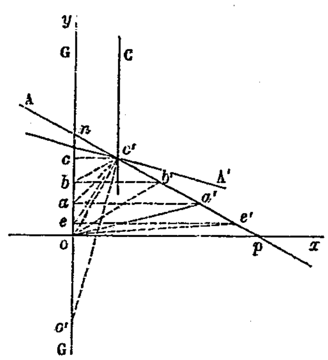
Au point quelconque e de G élevons la perpendiculaire ee' sur cette droite : l'angle xoe' mesure l'inclinaison du plan tangent en e sur le plan tangent en o.

---

[*] *Correspondance mathématique de Quetelet* (loc. cit.).

Abaissons du point o la perpendiculaire oc' sur cette droite : le pied de cette perpendiculaire projeté en c sur G donne le point central; la distance cc' est le paramètre de distribution des plans tangents cherchés.

FIG. 1.



Le problème I se trouve ainsi résolu. Je vais en donner une deuxième solution. Pour cela je vais établir ce théorème qui plus loin nous sera souvent utile :

THÉORÈME V. — *Du point central c sur une génératrice G d'une surface gauche, on élève une perpendiculaire cc' égale au paramètre de distribution des plans tangents à cette surface : l'angle sous lequel on voit du point c' un segment ba de G est égal à l'angle compris entre le plan tangent en b et le plan tangent en a.*

c étant le point central sur la génératrice G d'une surface gauche, et cc' étant le paramètre de distribution, la droite auxiliaire relative au point c est la droite C menée du point c' parallèlement à G. L'angle $cc'a$ est égal à l'angle compris entre le plan tangent en c et le plan tangent en a; de même $cc'b$ est égal à l'angle compris entre le plan tangent en c et le plan tangent en b. Par suite, l'angle $bc'a$, différence de ces deux angles, est égal à l'angle compris entre le plan tangent en b et le plan tangent en a.

Revenons à notre deuxième solution du problème II. Nous connaissons les plans tangents aux trois points a, b, o, et les angles qu'ils font entre eux. Décrivons sur oa un segment capable de l'angle que le plan tangent en o fait avec le plan tangent en a. De même pour o et b : les deux circonférences ainsi déterminées se coupent au point c'. Le pied c de la perpendiculaire, abaissé de ce point sur G, est le point central, et cc' est le paramètre de distribution.

La droite qui joint le point c' à un point quelconque e de G fait avec cc' un angle qui est égal à l'angle que le plan tangent en e fait avec le plan central.

Au lieu de construire le point central et le paramètre de distribution, on peut se proposer de chercher :

Problème II. — *Quelles sont les expressions de la distance co et de la longueur cc', en fonction de ao, bo, et des angles que font, avec le plan tangent en o, les plans tangents en a et b.*

Prenons la droite G pour axe de y, et la perpendiculaire ox pour axe des abscisses. Appelons a et b les ordonnées des points a' et b', α et β, les angles que les plans tangents en a et b font avec le plan tangent en o. Les abscisses des points a' et b' sont $\frac{a}{\tang\alpha}$ et $\frac{b}{\tang\beta}$.

L'équation de la droite A est

$$y=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a\tang\beta}-\frac{1}{b\tang\alpha}}x-\frac{\frac{1}{\tang\alpha}-\frac{1}{\tang\beta}}{\frac{1}{a\tang\beta}-\frac{1}{b\tang\alpha}}.$$

L'équation de la perpendiculaire oc' est

$$y=-\frac{\frac{1}{a\tang\beta}-\frac{1}{b\tang\alpha}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}x.$$

En résolvant ces deux équations par rapport à x et y pour avoir les coordonnées de leur point de rencontre c', on trouve

$$(2)\qquad x \text{ ou } cc'=\frac{\left(\frac{1}{\tang\alpha}-\frac{1}{\tang\beta}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{a\tang\beta}-\frac{1}{b\tang\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2},$$

$$y \text{ ou } oc=\frac{\left(\frac{1}{\tang\alpha}-\frac{1}{\tang\beta}\right)\left(\frac{1}{b\tang\alpha}-\frac{1}{a\tang\beta}\right)}{\left(\frac{1}{a\tang\beta}-\frac{1}{b\tang\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2}.$$

On a aussi l'ordonnée à l'origine

$$(4)\qquad on = \frac{\dfrac{1}{\operatorname{tang}\beta} - \dfrac{1}{\operatorname{tang}\alpha}}{\dfrac{1}{a\operatorname{tang}\beta} - \dfrac{1}{b\operatorname{tang}\alpha}},$$

l'abscisse à l'origine

$$(5)\qquad op = \frac{\dfrac{1}{\operatorname{tang}\alpha} - \dfrac{1}{\operatorname{tang}\beta}}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}.$$

Lorsque les angles α et β diffèrent d'un angle droit

$$\operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\beta = -1$$

et l'on a alors

$$(6)\qquad \frac{1}{on} = \frac{\sin^2\alpha}{a} + \frac{\cos^2\alpha}{b},$$

$$(7)\qquad \frac{1}{op} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\sin 2\alpha.$$

On peut encore arriver à la droite auxiliaire de la manière suivante.

Le théorème III, que l'on démontre dans tous les cours de Géométrie descriptive, va nous servir maintenant de point de départ.

Soit G (*fig.* 1) une génératrice d'une surface gauche. Au point central c, élevons une perpendiculaire à G, et portons sur cette droite, à partir du point c, une longueur cc' égale à la constante qui entre dans l'énoncé du théorème III.

L'angle $cc'o$, d'après ce théorème, est l'angle que le plan tangent en o fait avec le plan tangent en c. De même, on a pour le point a l'angle que le plan tangent en ce point fait avec le plan central; par suite, les plans tangents en a et en o comprennent entre eux l'angle $ac'o$. Je mène du point o la droite oa', faisant, avec aa', un angle égal à cet angle $ac'o$.

De cette construction, il résulte que les points $oac'a'$ appartiennent à une même circonférence; mais l'angle oaa' est droit : donc il en est de même de l'angle $oc'a'$. Ainsi, le point a' est sur la perpendiculaire A, menée du point c' à oc'; comme le point a est arbitraire, tous les points tels que a' appartiennent à la même droite A.

L'angle xoa' est égal à l'angle $aa'o$; mais celui-ci, dans la circonférence $oac'a'$, a même mesure que l'angle $ac'o$. Nous voyons donc que l'angle xoa' est égal à l'angle que font entre eux les plans tangents en a et en o.

Nous avons ainsi la droite auxiliaire A relative au point o, et nous retrouvons la propriété que cette droite possède de permettre de construire les inclinaisons des plans tangents aux différents points de G sur le plan tangent en o.

Enfin, voici une troisième manière d'arriver à la droite auxiliaire.

Considérons une génératrice G (*fig.* 1) d'une surface gauche (G), et le paraboloïde de raccordement le long de cette droite qui a, pour l'un de ses plans directeurs, un plan perpendiculaire à G. On sait que ce paraboloïde a pour sommet le point central c sur G, qu'il a même paramètre de distribution pour la génératrice G et pour la génératrice perpendiculaire à cette droite, menée du point c; enfin, que, sur cette dernière droite, le point c est aussi un point central.

Les deux systèmes de génératrices de ce paraboloïde sont des droites perpendiculaires à G et des droites du même système que cette génératrice.

Une quelconque des génératrices de ce dernier système entraîne la connaissance de tous les plans tangents à la surface (G) aux différents points de G. Le plan tangent en un point a de cette droite est, en effet, le plan contenant G et la perpendiculaire à cette droite issue du point a qui s'appuie sur la génératrice dont je viens de parler. Mais cette génératrice du même système que G nécessite l'emploi de deux plans de projection pour être bien représentée de position par rapport à G.

Nous allons choisir parmi les génératrices de notre paraboloïde celle qui sera bien définie, au moyen d'une seule projection, sur un plan tangent à (G). La projection de cette génératrice sera la droite auxiliaire relative au point de contact de ce plan tangent.

Prenons pour plan horizontal de projection le plan tangent en o à la surface (G), et pour plan vertical un plan perpendiculaire à G mené du point o. Sur le plan horizontal, toutes les génératrices du même système que G se projettent suivant les droites passant par un même point n situé sur G.

Soit np la droite représentant les deux projections d'une même génératrice : cette droite est, comme je vais le montrer, la droite auxiliaire relative au point o.

Prenons un point a sur G. La génératrice passant en ce point, qui est perpendiculaire à G, a pour projection horizontale aa', et pour projection verticale oa'. Le plan tangent en a a donc pour trace verticale oa'; et comme il est perpendiculaire au plan vertical de projection, poa' mesurent l'angle qu'il fait avec le plan horizontal, c'est-à-dire avec le plan tangent en o. Nous voyons donc déjà que la droite np permet de construire les inclinaisons des différents plans tangents aux points de G sur le plan tangent en o.

Cherchons le point central sur G. Pour cela, menons la perpendiculaire commune à G et à la droite projetée suivant np. La projection verticale de cette perpendiculaire est oc'; sa projection horizontale est cc', et par suite, d'après ce que nous avons dit plus haut, son pied c sur G est le point central relatif à cette génératrice.

Cherchons le paramètre de distribution des plans tangents à la surface (G) pour G.

Ce paramètre est le même que pour le paraboloïde de raccordement, et, d'après ce que nous avons dit tout à l'heure, il est égal au paramètre de distribution des plans tangents à ce paraboloïde pour la génératrice dont les projections sont (oc', cc'). Le point central sur cette droite a pour projection (o, c); le plan central est le plan $c'o$G; le plan tangent en c' au paraboloïde est déterminé par la droite (oc', cc') et par la droite projetée en np : l'angle de ces deux plans est l'angle de G et de la droite projetée suivant np.

Si nous désignons cet angle par ξ, le paramètre de distribution est égal à $\frac{oc'}{\tang\xi}$. Comme G est perpendiculaire au plan vertical de projection, ξ est le complément de l'angle que fait avec le plan vertical la droite projetée suivant np. La tangente de ce dernier angle est $\frac{no}{np}$: le paramètre cherché est donc $\frac{oc' \times no}{np}$.

Mais les triangles semblables onp et $cc'o$ donnent $\frac{no}{np} = \frac{cc'}{oc'}$; introduisant cette valeur de $\frac{no}{np}$ dans l'expression du paramètre, nous voyons que celui-ci est égal à cc'. Nous retrouvons donc, pour la droite np, les propriétés de la droite auxiliaire.

Il nous reste à voir comment est placée dans l'espace la génératrice projetée suivant np. Cette droite est dans le plan mené par op, et qui est également incliné sur les deux plans de projection. Ce plan, qui est tangent en p à notre paraboloïde, fait un angle de 45 degrés avec le plan tangent en o. Nous voyons donc qu'on obtient *la droite auxiliaire relative au point o, en projetant sur le plan tangent en ce point la droite suivant laquelle notre paraboloïde de raccordement est coupé par le plan mené par op, et faisant avec le plan tangent en o un angle de 45 degrés.*

On peut bien mener ainsi deux plans tangents; mais ils donnent simplement deux droites symétriques par rapport à G. On peut employer l'une ou l'autre de ces droites comme droite auxiliaire.

Pour la génératrice op, o est le point central, op est le paramètre de distribution, puisque le plan tangent en p fait un angle de 45 degrés avec le plan tangent en o. Appelons o_1 un point situé sur op et infiniment voisin du point o; le paramètre de distribution op est la limite du rapport de la distance oo_1 à l'angle compris entre le plan tangent en o et le plan tangent en o_1.

Si nous désignons cet angle par X, on a

$$\operatorname{tang} X = \frac{oo_1}{op};$$

et remplaçant op par sa valeur (7), il vient

$$\operatorname{tang} X = \frac{oo_1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \sin 2\alpha. \tag{8}$$

Nous avons ainsi l'expression de l'angle dont tourne le plan tangent en o, lorsqu'on passe de ce point au point o_1, étant donnés les plans tangents aux trois points o, a, b; les plans tangents en a et b étant rectangulaires.

§ II. — Des pinceaux de droites.

Les droites que je considérerai sont celles qui sont déterminées par la connaissance d'un de leurs points; toutes ces droites sont donc assujetties à deux conditions.

En prenant une de ces droites et toutes celles qui lui sont infiniment voisines, on aura ce que j'appellerai un *pinceau de droites*.

J'adopterai l'expression de *pinceau*, ainsi que plusieurs autres dérivant de l'optique. M. Kummer les a déjà employées dans son étude générale des systèmes de rayons rectilignes.

Ainsi je dirai *rayons d'un pinceau* au lieu de droites d'un pinceau.

Coupons un pinceau par une surface quelconque (S); soit a le point où cette surface coupe le rayon G. Prenons sur ce rayon deux points b et c et portons sur tous les rayons du pinceau à partir des points où ils rencontrent (S) des longueurs constantes égales à ab et ac.

Les points tels que b appartiendront à une surface $(S)_1$ et les points tels que c à une surface $(S)_2$.

Les rayons infiniment voisins du pinceau peuvent être considérés comme les différentes positions d'une droite G que l'on déplace en l'assujettissant à avoir trois de ses points a, b, c sur trois surfaces données : (S), $(S)_1$, $(S)_2$.

Tout autre point de G, pendant les déplacements de cette droite, restera sur une surface que j'ai appelée *surface trajectoire*. Il est facile de voir que les *normales aux surfaces trajectoires de tous les points d'une droite issues des différents points de cette droite appartiennent à une hyperboloïde* [*].

Cette hyperboloïde admet deux génératrices réelles ou imaginaires perpendiculaires à G. Les points f_1, f_2 où ces droites coupent G sont des points dont les surfaces trajectoires $(F)_1$, $(F)_2$ sont tangentes aux rayons du pinceau. Nous arrivons ainsi à cette propriété fondamentale:

Théorème VI. — *Les rayons d'un pinceau sont tangents à deux surfaces réelles ou imaginaires.* (Malus) [**].

---

[*] *Voir* la Note placée à la fin de ce Mémoire.

[**] *Journal de l'École Polytechnique*, 14e cahier.

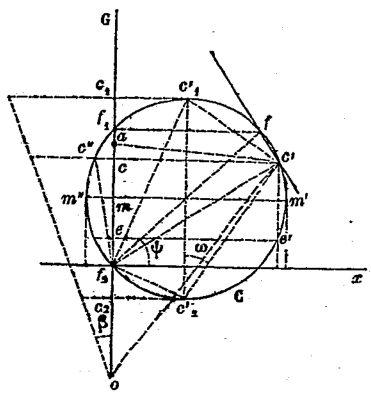
Nous appellerons ces surfaces *surfaces focales*. Les points de contact d'un rayon avec les surfaces focales seront nommés *foyers* du rayon et les plans tangents en ces points aux surfaces focales seront désignés sous le nom de *plans focaux* (Kummer, *loc. cit.*).

C'est en nous appuyant sur le théorème VI qu'au moyen de droites auxiliaires nous allons trouver un grand nombre de propriétés des pinceaux.

Soient G (*fig.* 2) un rayon d'un pinceau, f_1 et f_2 les foyers de ce rayon. Quel que soit le rayon infiniment voisin de G, il détermine avec cette droite un élément de surface gauche, *surface élémentaire du pinceau*, donnant lieu à une droite auxiliaire relative à une origine prise sur G.

Si nous prenons f_2 pour origine, les droites auxiliaires de toutes les surfaces élémentaires passeront par un même point f, puisque ces surfaces sont tangentes en f_1 et f_2 aux surfaces focales.

FIG. 2.



Traçons la droite auxiliaire fc' pour une des surfaces élémentaires du pinceau, le point central sur G s'obtient comme nous savons, en projetant en c sur cette droite le pied de la perpendiculaire c' abaissée du point f_2 sur la droite auxiliaire fc'.

L'angle $f_2 c' f$ étant droit, les points tels que c' sont sur la circonférence qui contient les trois points f_2, f_1, f.

Les points centraux, d'après cela, occupent sur G la portion de cette droite qui est la projection du diamètre de cette circonférence. Nous voyons donc que :

THÉORÈME VII. — *Les points centraux de toutes les surfaces élémentaires d'un pinceau se trouvent sur un segment déterminé du rayon de ce pinceau.* (KUMMER.)

M. Kummer appelle *points limites* les points c_1, c_2, qui limitent ce segment de G. En appelant $2d$ la longueur de ce segment, et ψ l'angle que font entre eux les plans focaux, on a, dans le triangle $f_2 f_1 f$:

$$f_1 f_2 = 2d \sin\psi,$$

et l'on voit que :

THÉORÈME VIII. — *La distance focale est égale à la distance qui sépare les points limites multipliés par le sinus de l'angle que font entre eux les plans focaux.*

La surface élémentaire dont la droite auxiliaire est fc' a son paramètre de distribution de ses plans tangents égal à cc' ; de même, pour une autre surface élémentaire, on aura un point tel que c' sur la circonférence qui passe par les points f_1, f_2, f. On voit donc que :

THÉORÈME IX. — *Si dans un plan passant par un rayon d'un pinceau on porte, sur des perpendiculaires à ce rayon élevées des points centraux des surfaces élémentaires et à partir de ces points, des longueurs égales aux paramètres de distribution de ces surfaces, les extrémités des longueurs ainsi portées sont sur une circonférence* C *passant par les foyers du rayon.*

Propriété remarquable qui subsiste pour un pinceau dont les foyers sont imaginaires.

Les plans centraux correspondant aux points limites ont été nommés par M. Kummer *plans principaux*. L'angle compris entre ces plans étant égal à $c'_2 f_2 c'_1$ est droit. Nous voyons donc que :

THÉORÈME X. — *Aux points limites les plans centraux des surfaces élémentaires sont perpendiculaires entre eux.* (KUMMER.)

Appelons l la distance d'un point quelconque o de G au point central c, l_1 et l_2 les distances du même point o aux points limites, ω l'angle que le plan central en c fait avec le plan principal en c_1, sur la figure ω est égal à l'angle $c' f_2, c'_1$ ou à l'angle $c' c'_2 c'_1$.

Dans le triangle $c'c'_2c'_1$ on a

$$c'_1c'_2 = \frac{c'c'_2}{\cos\omega},$$

mais

$$c'c'_2 = \frac{cc_2}{\cos\omega};$$

on a donc

$$c'_1c'_2 = \frac{cc_2}{\cos^2\omega},$$

c'est-à-dire

$$l_1 - l_2 = \frac{l - l_2}{\cos^2\omega},$$

ou

$$l_1\cos^2\omega + l_2\sin^2\omega = l. \tag{9}$$

Cette élégante relation est due à Hamilton.

Menons, à partir du point o, une droite faisant avec G un angle β. Elle est coupée par les tangentes $c_1c'_1$, $c_2c'_2$ et par la droite cc' en des points dont je désignerai les distances au point o par l'_1, l'_2, l'. On a

$$l = l'\cos\beta$$
$$l_1 = l'_1\cos\beta$$
$$l_2 = l'_2\cos\beta;$$

par suite, la relation (9) devient

$$l'_1\cos^2\omega + l'_2\sin^2\omega = l'.$$

On peut déduire de là le théorème suivant :

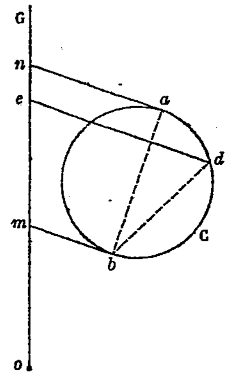
Théorème XI. — *On donne* (*fig.* 3) *une droite* G, *une circonférence* C *et deux tangentes an, bm, parallèles entre elles : quelle que soit la droite de parallèle à ces deux tangentes, on a*

$$on\cos^2 dba + om\sin^2 dba = oe.$$

Ce théorème nous sera utile plus loin.

Un point central c sur G (*fig.* 2, p. 122) correspond à deux surfaces élémentaires; les paramètres de ces surfaces sont cc', cc''. Les plans cen-

FIG. 3.



traux de ces surfaces sont également inclinés sur les plans principaux, puisque l'angle $c'f_2c'_1$ est égal à l'angle c'_1f_2c''. Ce dernier résultat peut s'énoncer ainsi :

THÉORÈME XII. — *Les plans centraux de deux surfaces élémentaires ayant le même point central sont également inclinés sur les plans principaux.*

Si l'on considère en particulier le point milieu de la distance focale, point que nous appellerons avec M. Kummer *centre du rayon*, les plans centraux des surfaces élémentaires ayant en ce point leur point central sont rectangulaires.

On voit sur la figure que $cc' \times cc''$ est égal à $cf_1 \times cf_2$; on peut donc dire :

THÉORÈME XIII. — *Deux surfaces élémentaires ayant même point central sont telles que le produit de leurs paramètres de distribution est égal au produit des distances de leur point central aux foyers du rayon.*

On peut remarquer que les valeurs extrêmes des paramètres de distribution des surfaces élémentaires d'un pinceau correspondent aux surfaces ayant le centre du rayon pour point central.

Menons $c'e'$ parallèlement à G: les points c et e également éloignés du centre du rayon sont les points centraux de deux surfaces élémentaires ayant même paramètre de distribution. Les plans centraux de ces surfaces sont évidemment également inclinés sur les plans centraux des surfaces élémentaires ayant le centre du rayon pour point central. On peut énoncer ainsi ce dernier résultat :

Théorème XIV. — *Deux surfaces élémentaires d'un pinceau ayant même paramètre de distribution ont leurs points centraux à égale distance du centre des rayons du pinceau et leurs plans centraux également inclinés sur les plans centraux relatifs à ce centre.*

Cherchons l'expression du paramètre de distribution cc' ou k d'une surface élémentaire dont le point central est c (*fig.* 2), en fonction des valeurs extrêmes k_1, k_2 des paramètres de toutes les surfaces élémentaires et de l'angle φ que le plan central de cette surface fait avec le plan central relatif à la surface dont le paramètre est maximum. Pour trouver cette relation, nous n'avons qu'à appliquer le théorème XI, en considérant les tangentes à la circonférence qui sont parallèles à G, et la parallèle à cette même droite menée du point c'; on a alors

$$k = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi, \tag{10}$$

relation tout à fait analogue à la relation (9).

Prenons un segment de G et les plans tangents aux extrémités de ce segment à une surface élémentaire, l'angle compris entre ces plans est ce que M. Kummer a appelé *l'angle de déviation relatif au segment.*

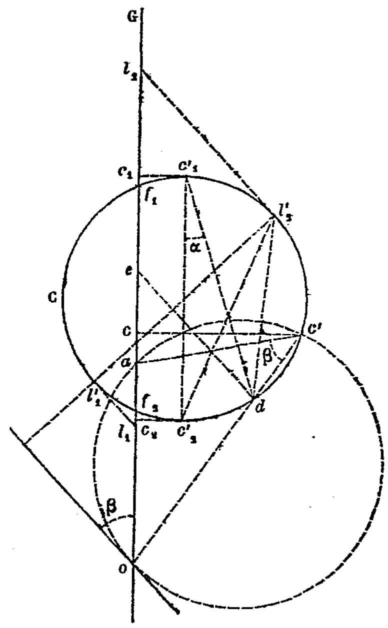
Si nous considérons le segment oa (*fig.* 2) et la surface élémentaire dont le point central est c et le paramètre cc', l'angle de déviation pour ce segment, d'après le théorème V, est égal à l'angle $ac'o$.

Les angles de déviation pour un même segment qui correspondent à toutes les surfaces élémentaires du pinceau sont donc les angles sous lesquels on voit ce segment des différents points de la circonférence C. Les points pour lesquels on obtiendra les valeurs extrêmes de cet angle sont évidemment les points de contact avec C des deux circonférences menées par les points a et o.

A un angle de déviation donné correspond, pour une même surface élémentaire, une infinité de segments. Nous allons considérer les segments ayant même origine sur G, correspondant à un angle de déviation donné, et relatifs à toutes les surfaces élémentaires du pinceau. Nous nous proposons de chercher la relation qui existe entre l'un quelconque de ces segments et les segments de valeurs extrêmes.

Soient o (*fig.* 4) l'origine des segments sur G, et β l'angle de déviation donné; pour construire un des segments, on joint le point o à un point quelconque c' de la circonférence C, et l'on mène la droite $c'a$ telle que l'angle $ac'o$ soit égal à β : oa est l'un des segments.

Fig. 4.



Circonscrivons une circonférence au triangle $oc'a$: cette circonférence est tangente en o à une droite menée du point o qui fait avec G l'angle donné β. On peut dire que les segments cherchés sont interceptés sur G par des circonférences tangentes en o à cette dernière droite.

Par suite, on aura les valeurs extrêmes de ces segments en prenant parmi toutes ces circonférences celles qui sont tangentes à C : désignons par R_1, R_2 ces valeurs extrêmes.

Cherchons l'angle que le plan tangent en o, à la surface élémentaire dont le point central est c et le paramètre cc', fait avec le plan principal relatif au point limite c_2. Le plan tangent en o à cette surface et le plan focal en f_2 comprennent entre eux un angle dont la mesure est la moitié de l'arc $f_2 d$. Le plan focal en f_2 fait avec le plan principal en c_2 un angle dont la mesure est la moitié de l'arc $f_2 c'_2$. L'angle que nous cherchons, et que je désignerai par α, a donc pour mesure la moitié de l'arc $c'_2 d$. On voit alors que l'angle $c'_2 c'_1 d$ est égal à α.

Ce que nous nous proposons de trouver c'est l'expression de oa en fonction de $\alpha, \mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2$.

Pour cela transformons par rayons vecteurs réciproques les circonférences qui donnent les segments tels que oa en prenant le point o pour pôle de transformation et la puissance de telle façon que la circonférence C soit transformée en elle-même. Les circonférences que nous transformons, étant tangentes entre elles au pôle de transformation, deviennent des droites parallèles entre elles faisant avec G l'angle β. Les circonférences qui ont donné les segments $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2$ deviennent les tangentes à C parallèles à la direction commune de toutes ces droites. Ces tangentes $l_1 l'_1$, $l_2 l'_2$ touchent C en l'_1, l'_2 aux extrémités d'un diamètre de C qui fait avec G un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \beta$.

La circonférence oac' se transforme en une droite ed parallèle aux tangentes dont je viens de parler. En appliquant le théorème XI, on a

$$ol_2 \sin^2 l'_1 l'_2 d + ol_1 \cos^2 l'_1 l'_2 d = oe;$$

mais

$$ol_2 . \mathrm{R}_2 = ol_1 . \mathrm{R}_1 = oe \times oa = \text{const.}$$

On a alors

(11) $$\frac{\sin^2 l'_1 l'_2 d}{\mathrm{R}_2} + \frac{\cos^2 l'_1 l'_2 d}{\mathrm{R}_1} = \frac{1}{oa};$$

mais l'angle

$$l'_1 l'_2 d = l'_1 l'_2 c'_2 + \alpha = \frac{\frac{\pi}{2} - \beta}{2} + \alpha,$$

car l'angle $l'_1 l'_2 c'_2$ est la moitié de l'angle que $l'_1 l'_2$ fait avec $c'_1 c'_2$

la relation précédente devient donc

$$(12)\qquad \frac{\cos^2\left(\alpha+\frac{\frac{\pi}{2}-\beta}{2}\right)}{R_1}+\frac{\sin^2\left(\alpha+\frac{\frac{\pi}{2}-\beta}{2}\right)}{R_2}=\frac{1}{oa},$$

qui est la relation cherchée.

Cette formule très-élégante est due à M. Kummer.

Lorsque β est égal à $\frac{\pi}{2}$, cette formule devient

$$\frac{\cos^2\alpha}{R_1}+\frac{\sin^2\alpha}{R_2}=\frac{1}{oa},$$

qui avait été donnée par Hamilton. Les extrémités des segments correspondant à cette déviation sont l'origine o, et les points où les plans tangents aux surfaces élémentaires en o sont normaux à ces mêmes surfaces.

On peut énoncer ainsi ce dernier résultat :

Théorème XV. — *Si un plan, passant par un rayon* G *d'un pinceau, tourne autour de cette droite, il touche successivement en o les surfaces élémentaires du pinceau : les distances du point o aux points où il est respectivement normal à ces surfaces sont données par la relation*

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\cos^2\alpha}{R_1}+\frac{\sin^2\alpha}{R_2},$$

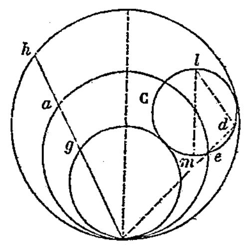
ρ *étant la distance du point o au point où le plan tangent en o à une des surfaces élémentaires est normale à cette même surface;* R_1 *et* R_2 *étant les valeurs extrêmes de* ρ, α *étant l'angle que le plan correspondant à* ρ *fait avec l'un des plans principaux du pinceau.*

La relation (11), qui nous a donné la formule (12), de M. Kummer, exprime le théorème de Géométrie élémentaire qui suit :

Théorème XVI. — *On a deux circonférences tangentes entre elles en o (fig. 5) et tangentes à une circonférence* C. *On trace une troisième circonférence tangente aux deux premières en o, elle coupe* C *au point e; on joint le point o au point e, cette droite coupe* C *au point d. On mène le diamètre lm de* C *parallèlement à la ligne des* *centres des trois autres circonférences. On a, quelle que soit la droite oh menée du point o et quel que soit le point e sur* C,

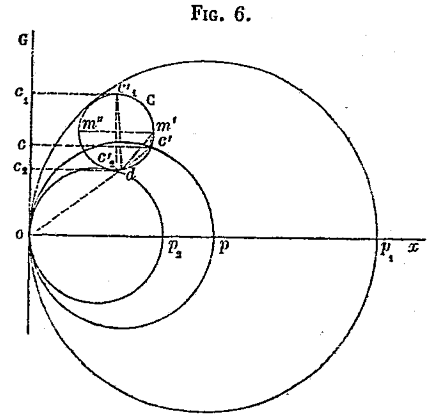
$$\frac{\cos^2 mld}{oh} + \frac{\sin^2 mld}{og} = \frac{1}{oa}. \tag{13}$$

Fig. 5.



Reprenons la droite G du pinceau (*fig.* 6) et la circonférence C; traçons des circonférences tangentes en o à G et tangentes à C; nous

Fig. 6.



avons ainsi deux circonférences coupant ox au point p_1, p_2. Traçons une troisième circonférence tangente en o à G rencontrant C au point c' et la droite ox au point p.

En appliquant le théorème précédent, on a

$$\frac{\cos^2 m''m'd}{op_1} + \frac{\sin^2 m''m'd}{op_2} = \frac{1}{op}.$$

Mais l'angle $m''m'd$ est égal à $\frac{\pi}{4} + \alpha$, puisque l'angle $c'_1 c'_2 d$ est égal à α. On a donc

$$(14) \qquad \frac{\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{op_1} + \frac{\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{op_2} = \frac{1}{op}.$$

Nous savons que op est égal à $\frac{oo_1}{\operatorname{tang} X}$ (p. 120); si l'on marche toujours perpendiculairement à G, à partir du point o, de la même longueur infiniment petite oo_1, en appelant X_1, X_2 les valeurs extrêmes de X, la formule (14) devient

$$(15) \qquad \operatorname{tang} X = \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tang} X_1 + \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tang} X_2,$$

ou simplement, en prenant les angles infiniment petits pour les tangentes,

$$(16) \qquad X = \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) X_1 + \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) X_2.$$

Cette formule donne l'angle dont tourne le plan tangent en o à une surface élémentaire, lorsqu'on marche, à partir de ce point, sur cette surface, perpendiculairement au rayon et d'une quantité infiniment petite en fonction des valeurs extrêmes que cet angle peut acquérir.

Appelons X' la valeur de X lorsqu'on remplace dans la formule (16) α par $\alpha + \frac{\pi}{2}$; on a alors évidemment

$$X + X' = X_1 + X_2.$$

On peut donc énoncer la propriété suivante :

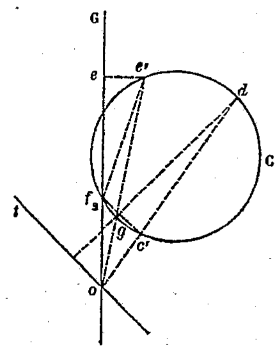
THÉORÈME XVII. — *On prend dans un pinceau deux surfaces élémentaires perpendiculaires entre elles au point o; le plan tangent en ce point à chacune de ces surfaces, lorsqu'on marche sur chacune d'elles d'une même longueur infiniment petite, perpendiculaire à* G, *tourne respectivement d'un certain angle : la somme algébrique de ces deux angles est constante, quelles que soient les surfaces élémentaires considérées.* (STURM) [*].

[*] *Mémoire sur la vision* (*Comptes rendus*, année 1845).

Pour terminer ici ce qui concerne les pinceaux, je vais faire voir que les valeurs extrêmes qui entrent dans les différentes relations précédentes correspondent toujours à des surfaces élémentaires rectangulaires à l'origine o.

Pour déterminer ces valeurs extrêmes, nous avons toujours eu à construire des circonférences tangentes en o à une certaine droite ot (*fig.* 7) et tangentes à C.

Fig. 7.



Les points de contact avec C s'obtiennent de la manière suivante : on mène le diamètre de la circonférence C qui est perpendiculaire à la droite ot; on joint les extrémités de ce diamètre au point o; ces droites coupent C aux points de contact cherchés. Ce sont ces points qui, projetés sur G, donnent les points centraux des surfaces élémentaires donnant lieu à des valeurs extrêmes.

Je dis que ces deux surfaces élémentaires sont rectangulaires en o; l'angle que le plan tangent en o à l'une d'elles fait avec le plan focal f_2 est égal à $f_2c'o$; l'angle analogue pour l'autre est $f_2e'o$, et la différence de ces deux angles, comme on le voit par leur mesure, est bien égale à un droit.

§ III. — Des normalies.

Le pinceau que nous allons maintenant étudier est celui qui est composé de normales à une surface.

Les surfaces élémentaires de ce pinceau sont des éléments de *nor-*

malies. J'ai appelé ainsi le lieu des normales à une surface qui s'appuient sur une courbe tracée sur cette surface.

Il résulte du théorème VI que toutes les normales qui constituent le pinceau que nous allons étudier sont tangentes à deux surfaces.

Mais, comme rien ne prouve que ces surfaces soient réelles, je vais reprendre par une autre méthode la démonstration de cette propriété des rayons de ce pinceau, démonstration qui fera bien voir que les foyers sont réels.

Pour cela, je ferai usage de ce théorème, relatif aux déplacements d'une figure de forme invariable qui reste assujettie à quatre conditions :

Théorème XVIII. — *Lorsqu'une figure de forme invariable se déplace de manière que quatre points restent sur quatre surfaces données, à un instant quelconque, les normales, issues respectivement des points de la figure, aux surfaces trajectoires de ces points rencontrent deux mêmes droites* [*].

Supposons que trois points, a, b, c, d'une figure de forme invariable restent sur une même surface (S) et qu'un quatrième point e de la figure se déplace sur une surface (E). Pour déterminer les deux droites, que j'appellerai D et Δ, qui entrent dans l'énoncé précédent, il suffit de construire les deux droites rencontrant à la fois les normales issues des points a, b, c, e aux surfaces sur lesquelles se déplacent ces points.

Lorsque les points b et c se sont rapprochés indéfiniment du point a, la figure mobile est alors assujettie, pendant son déplacement, à avoir un de ses plans (P) tangent en un point a de ce plan à une surface (S), le point e restant toujours sur la surface (E).

Les deux droites D, Δ rencontrent maintenant trois normales infiniment voisines de (S) et la normale à la surface trajectoire du quatrième point e. Mais le déplacement de la figure mobile est le même, quels que soient les points infiniment voisins du point a que l'on considère sur le plan (P). Les deux droites D, Δ doivent donc être rencontrées par toutes les normales à (S) issues des points infiniment voisins du point a.

Les plans passant par la normale en a et par chacune des droites D

[*] *Voir* la Note placée à la fin de ce Mémoire.

et Δ sont donc tangents à toutes les normalies à (S) dont les directrices sont des courbes tracées sur cette surface à partir du point a.

La normale A en a, qu'on peut regarder comme une droite de la figure mobile, décrit donc, pendant tous les déplacements, des surfaces ayant deux mêmes plans tangents. Les deux droites D, Δ sont les deux axes simultanés de rotation au moyen desquels on peut obtenir ces déplacements.

De l'existence de ces déplacements et de la possibilité de les obtenir au moyen des droites D, Δ, on peut déjà conclure que ces droites sont réelles. Mais je vais encore montrer ce résultat comme une conséquence du théorème XVIII.

La propriété des normalies à (S) autour du point a d'être tangentes entre elles aux deux mêmes points situés sur la normale A, points que je désignerai par f_1, f_2, est indépendante de la position de la surface (E). Si cette surface vient à changer, les droites D et Δ seront différentes, mais elles passeront toujours par les deux mêmes points f_1, f_2. Il suffit donc, pour montrer que ces points sont réels, de faire voir qu'on peut construire un couple de droites réelles, telles que D, Δ. Ces droites sont des génératrices de l'hyperboloïde qui a pour directrices trois normales à (S); elles passent par les points où cette hyperboloïde est rencontrée par la normale en e à (E). Nous pouvons toujours disposer de cette dernière normale pour avoir, avec l'hyperboloïde, des points de rencontre réels. Nous avons donc alors des droites D, Δ, et des points f_1, f_2 qui sont réels.

Examinons maintenant la situation des plans tangents en ces points à toutes les normalies, plans tangents qui sont les plans focaux du pinceau.

Ces plans sont, comme je l'ai déjà dit, les plans menés par la normale A et par les droites D et Δ. Mais, parmi les déplacements de A, il y en a deux qui sont obtenus par de simples rotations autour de chacune des droites D et Δ. En tournant autour de D, la droite A doit engendrer une surface dont le plan tangent doit être le plan (A, Δ).

De là résulte que les plans (A, D) et (A, Δ) sont perpendiculaires entre eux.

Nous pouvons maintenant énoncer plus complétement le théorème VI en disant :

Théorème XIX. — *Lorsqu'un pinceau est formé par les normales à une surface, les foyers sont réels et les plans focaux sont perpendiculaires entre eux.*

Nous avons aussi ce théorème :

Théorème XX. — *Parmi les surfaces élémentaires d'un pinceau de normales, il y a deux normalies développables; ces normalies se coupent à angle droit.*

Propriété que Monge a énoncée ainsi [*] :

Théorème XXI. — *Toute normale à une surface courbe est toujours rencontrée par deux autres normales, infiniment voisines, placées dans deux plans normaux, rectangulaires entre eux.*

Nous venons de voir (théorème XX) qu'à partir d'un point sur une surface il y a deux directions rectangulaires pour lesquelles on a des normalies développables.

Si l'on prend les lignes tracées sur (S) qui jouissent de cette propriété : que les normalies dont elles sont les directrices sont développables, on aura les lignes signalées pour la première fois par Monge et qu'il a appelées *lignes de courbure*. Les lignes de courbure se rencontrent toujours à angle droit, ainsi que les normalies développables dont elles sont les directrices. Il est facile de voir que les lignes de courbure d'une surface de révolution sont les méridiens et les parallèles et que les lignes de courbure d'une surface développable sont les génératrices de cette surface et leurs trajectoires orthogonales.

Revenons au pinceau de normales.

Puisque ses plans focaux sont perpendiculaires entre eux, en vertu du théorème VIII, la distance focale est égale à la distance des points limites. Il résulte de là que la circonférence C, caractéristique du pinceau de normales, a pour centre le centre du rayon de ce pinceau.

Reprenons les propriétés générales des pinceaux et examinons ce qu'elles deviennent lorsqu'on se place dans ces conditions nouvelles.

C ayant son centre sur G, on voit alors que les points limites sont confondus avec les foyers; les plans principaux sont aussi confondus avec les plans focaux. Le théorème IX nous donne alors celui-ci :

---

[*] *Application de l'Analyse à la Géométrie.*

THÉORÈME XXII. — *Dans un plan passant par une normale* G *d'une surface, on porte sur les perpendiculaires à cette droite, menées des points centraux de toutes les normalies contenant* G, *et à partir de ces points, des longueurs égales au paramètre de distribution des plans tangents à ces normalies : les extrémités de ces perpendiculaires appartiennent à une circonférence dont le centre est sur* G.

Pour interpréter géométriquement des résultats obtenus pour un pinceau quelconque, je vais d'abord établir le théorème suivant :

THÉORÈME XXIII. — *Si à partir d'un point o sur une surface* (S) *on trace une courbe quelconque et qu'on prenne cette courbe comme directrice d'une normalie, le plan tangent en o à cette surface lui est normal au centre de courbure correspondant au point o de la section suivant laquelle il coupe* (S).

Appelons (s) la courbe d'intersection de (S) et du plan tangent en o à la normalie, et o_1 le point de cette courbe infiniment voisin de o, les plans normaux en o et o_1 se coupent suivant une droite qui passe par le centre de courbure de (s). Cette droite est la caractéristique du plan normal en o à (s) considéré comme se déplaçant en restant normal à cette courbe.

Cette caractéristique passe par le point où le plan normal en o à (s) touche la normalie [*], et comme ce point de contact n'est autre que le point où le plan tangent en o à la normalie est normal à cette surface, le théorème est démontré.

Le théorème XV qui a conduit à la relation

$$(17)\qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2}$$

nous donne alors maintenant la valeur du rayon de courbure d'une section normale faite dans une surface (S), en fonction des valeurs extrêmes de ce rayon.

D'après la construction donnée pour trouver ces valeurs extrêmes, nous voyons que R_1 est égal à of_1 et R_2 est égal à of_2; f_1 et f_2 sont par rapport à (S) les centres de courbure principaux correspondant au

[*] En vertu de ce théorème : *Lorsqu'un plan mobile passe successivement par les différentes génératrices d'une surface réglée, sa caractéristique, à un instant quelconque, passe par le point où il touche cette surface.*

point o et les rayons de courbure R_1 et R_2 qui sont, l'un maximum et l'autre minimum, parmi tous les rayons de courbure des sections déterminées dans (S) par des plans normaux à cette surface en o, sont désignés sous le nom de *rayons de courbure principaux*. Nous pouvons dire :

THÉORÈME XXIV. — *Les plans focaux d'un pinceau de normales sont les plans qui déterminent des sections pour lesquelles les rayons de courbure sont l'un maximum, l'autre minimum.*

Par rapport à (S), ces plans focaux sont désignés sous le nom de *plans des sections principales*. Nous pouvons maintenant, en employant ces expressions, énoncer la propriété importante suivante :

THÉORÈME XXV. — *A partir d'un point o sur une surface* (S), *on tracè des courbes quelconques que l'on prend pour directrices de normalies à* (S); *toutes ces normalies sont tangentes entre elles aux centres de courbure principaux de* (S) *qui correspondent à o; les plans tangents communs en ces points sont les plans des sections principales menées par la normale en o.*

La relation (17), que l'on doit à Euler, permet de déterminer le rayon de courbure d'une section normale; cherchons comment on peut trouver le rayon de courbure d'une courbe quelconque E tracée à partir du point o sur (S).

Soit o_1 un point infiniment voisin du point o sur la courbe E. Les plans normaux à cette courbe, menés des points o et o_1, se coupent suivant une droite perpendiculaire au plan osculateur en o de la courbe donnée; le pied de cette droite sur ce plan osculateur est le centre de courbure de la courbe E correspondant au point o.

Cette droite d'intersection est la caractéristique du plan normal en o considéré comme se déplaçant en restant normal à la courbe E. Cette caractéristique passe par le point où le plan normal en o à la courbe donnée touche la normalie à (S) dont E est la directrice [*].

Ce point de contact, étant le point où le plan normal à (S) mené tangentiellement à la courbe E est normal à cette normalie, n'est autre que le centre de courbure de la section déterminée dans (S) par ce dernier plan. (Théorème XXIII.)

[*] En vertu du théorème énoncé au bas de la page précédente.

On voit donc que :

Théorème XXVI. — *Le centre de courbure de la courbe* E *tracée sur* (S) *et qui correspond au point* o *est la projection, sur le plan osculateur de cette courbe en ce point, du centre de courbure de la section faite dans* (S) *par le plan normal à cette surface mené tangentiellement en* o *à* E.

Ce théorème, dû à Meusnier, permet de déterminer le rayon de courbure en un point d'une section oblique d'une surface lorsqu'on connaît le rayon de courbure de la section normale qui lui est tangente en ce point.

Reprenons la relation d'Euler : supposons qu'on remplace dans cette relation

$$\rho \text{ par } \lambda d^2, \quad R_1 \text{ par } \lambda a^2 \quad \text{et} \quad R_2 \text{ par } \lambda b^2,$$

on a alors

$$\frac{1}{d^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}. \tag{18}$$

Cette équation représente une conique.

Construisons cette courbe et plaçons-la sur le plan tangent en o à (S) de façon que son centre soit en o, et que son grand axe soit dans le plan de la section principale dont le rayon de courbure est maximum, cette conique, dont on doit la considération à M. Dupin, est désignée sous le nom d'*indicatrice*. Un plan normal en o a pour trace sur le plan tangent en ce point à (S) un diamètre de cette conique. ~~La racine~~ Le carrée de ce demi-diamètre est proportionnelle au rayon de courbure de la section que ce plan détermine avec (S). C'est ce qu'il est facile de voir en comparant les équations (17) et (18).

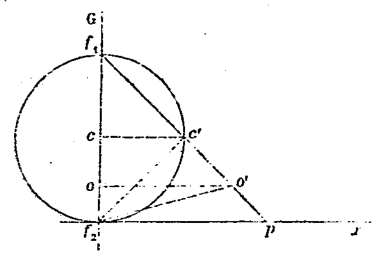
Lorsque, pour un point o, les centres de courbure principaux sont sur la normale en o d'un même côté de ce point, l'indicatrice est une ellipse.

Lorsqu'ils sont de part et d'autre du point, l'indicatrice est une hyperbole et la surface est en ce point à courbures opposées. Enfin, lorsque l'un des centres de courbure principaux est à l'infini, l'indicatrice se compose de deux droites parallèles. Cette circonstance se présente toujours pour les surfaces développables, puisque les génératrices de cette surface forment un système de lignes de courbure.

Faisons usage de la courbe indicatrice. Prenons une courbe quelconque sur (S), la normalie correspondante et la droite auxiliaire de cette surface relative au point f_2 (*fig.* 8).

Cette droite auxiliaire doit passer par f_1, puisque les plans focaux sont rectangulaires : soient $f_1 c'$ cette droite et o le pied de la normale G sur (S). Le plan tangent en o à la normalie fait avec le plan tangent

FIG. 8.



en f_2, et par suite avec le plan qui contient le grand axe de l'indicatrice en o, un angle qui est égal à $x f_2 o'$; le plan central de la normalie fait avec le même plan tangent en f_2 l'angle $x f_2 c'$. Le produit des tangentes de ces angles est $\frac{of_2}{oo'} \times \frac{oo'}{of_1}$, c'est-à-dire $\frac{R_2}{R_1}$; mais $\frac{R_2}{R_1} = \frac{b^2}{a^2}$, en appelant a et b les deux axes de l'indicatrice en o. Nous voyons donc que :

THÉORÈME XXVII. — *La tangente en o à la directrice d'une normalie et la trace du plan central de cette surface sur le plan tangent en o sont deux diamètres conjugués de l'indicatrice en ce point.*

La trace du plan central est évidemment parallèle à la perpendiculaire commune aux deux génératrices infiniment voisines G et G_1 de la normalie. Ces deux génératrices étant respectivement perpendiculaires aux plans tangents à (S) menés des pieds o et o_1 de ces droites, cette perpendiculaire est elle-même parallèle à l'intersection de ces deux plans tangents. Nous voyons alors, d'après le théorème précédent, que :

THÉORÈME XXVIII. — *La droite d'intersection du plan tangent en o et du plan tangent infiniment voisin en o_1 est conjuguée de oo_1 par rapport à l'indicatrice de la surface en o.*

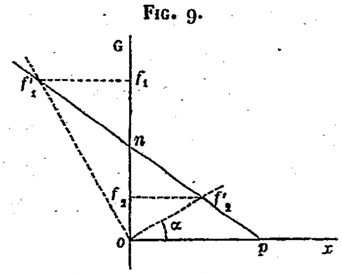
Cette droite d'intersection qui est tangente à (S), et la tangente oo_1 sont deux *tangentes conjuguées* [*]; ces tangentes sont ainsi désignées parce que, si l'on prend les plans tangents en deux points infiniment voisins situés sur l'une de ces tangentes, ces plans se coupent suivant l'autre.

Il résulte de ce théorème que :

Théorème XXIX. — *Lorsqu'une surface développable est circonscrite à une surface quelconque, ses génératrices sont les tangentes conjuguées des tangentes à la courbe de contact.* (Dupin.)

Le rayon de courbure d'une section normale en un point o, qu'on peut obtenir au moyen de l'indicatrice en ce point, se construit très-facilement à l'aide de la droite auxiliaire de la normalie qui a pour directrice cette section. Effectuons cette construction : soient G (*fig.* 9) la normale au point o, et f_1, f_2 les centres de courbure principaux sur G.

Fig. 9.



Menons du point o la droite of_2' faisant avec ox l'angle α que le plan de la section normale fait avec le plan de la section principale qui contient le grand axe de l'indicatrice. Ce dernier plan est tangent en f_2. La droite auxiliaire relative au point o de la normalie que nous considérons passe donc par f_2'.

Comme le plan tangent en f_1 est perpendiculaire au plan tangent en f_2, elle passera aussi au point de rencontre des perpendiculaires f_1f_1', of_1' à G et à of_2'. Cette droite est donc $f_1'f_2'$ et, d'après le théorème XXIII, le point n où elle rencontre G est le centre de courbure cherché.

A partir du point o sur (S) traçons des courbes quelconques et

[*] Dupin : *Développements de Géométrie.*

prenons ces courbes pour directrices de normalies. Ces surfaces ont, sur un même plan, pour droites auxiliaires relatives au point o, des droites telles que la portion interceptée sur chacune d'elles, par les perpendiculaires à G menées des centres de courbure principaux, est vue du point o sous un angle droit.

Ces droites enveloppent donc une conique ayant pour foyer le point o et la droite G pour l'un de ses axes.

Lorsqu'il s'agit d'un pinceau quelconque et non plus d'un pinceau de normales, l'enveloppe des droites auxiliaires des surfaces élémentaires relatives à un même point o du rayon G est toujours une conique ayant pour foyer le point o et pour l'un de ses axes la droite qui va du point o au centre de la circonférence C, car les droites auxiliaires sont les perpendiculaires élevées des points de C aux lignes qui joignent ces points au point o.

La conique enveloppe des droites auxiliaires pour les normalies qui composent un pinceau de normales est une hyperbole pour les surfaces convexes, une ellipse pour les surfaces à courbures opposées et une parabole pour les surfaces développables.

Lorsque cette conique est une ellipse, on peut mener dans ce cas, et dans ce cas seulement, deux tangentes à cette courbe parallèlement à G. Ces tangentes sont deux droites auxiliaires qui rencontrent G à l'infini.

Nous voyons donc que, pour les surfaces à courbures opposées, il existe, à partir d'un point o, deux directrices telles que les plans normaux qui les contiennent donnent lieu à des sections dont le rayon de courbure est infini.

En nous reportant à ce que nous avons dit de l'indicatrice, ces directions sont celles des asymptotes de l'indicatrice en o. Les courbes qui, en chacun de leurs points, sont tangentes à une asymptote de l'indicatrice ont été appelées par M. Dupin *lignes asymptotiques*. Sur les surfaces gauches, les génératrices sont des lignes asymptotiques.

Reprenons, à partir du point o sur (S), une directrice quelconque et la normalie correspondante. Appelons toujours G la normale en o, et o_1 un point de cette courbe infiniment voisin du point o; considérons le paraboloïde de raccordement à la normalie le long de la normale G, dont l'un des plans directeurs est perpendiculaire à G.

Le plan tangent en o à ce paraboloïde est le plan normal à (S) qui contient o_1; le plan tangent en o_1 est le plan normal qui passe par le pied de la perpendiculaire, abaissée de o_1 sur G. En négligeant la distance de ce point au point o, nous pouvons dire que le plan tangent en o_1 à ce paraboloïde est le plan normal à (S) qui contient le point o.

D'après ce qui précède (p. 120), en appelant ds la distance oo_1 et θ l'angle que font entre eux ces plans tangents, on a

$$\theta = \frac{ds}{2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\sin 2\alpha, \tag{19}$$

α étant toujours l'angle que le plan tangent en o à la normalie fait avec le plan de la section principale qui contient le grand axe de l'indicatrice en o.

On a aussi $\theta = \frac{ds}{op}$, op étant toujours l'abscisse à l'origine de la droite auxiliaire de la normalie relative au point o.

L'angle θ, que font entre eux les plans normaux en o et o_1 et qui contiennent ces points, peut être mesuré par l'angle que la normale au point o_1 fait avec le plan normal Goo_1.

L'expression de cet angle, donnée par la formule (19), est due à M. Bertrand, qui en a déduit le théorème suivant :

Théorème XXX. — *Si en un point* A, *pris sur une surface, on mène une normale* AZ, *puis que, par le point* A, *on fasse passer sur la surface deux lignes perpendiculaires sur lesquelles on prenne des longueurs infiniment petites égales* AB, AC, *la normale au point* B *fera, avec le plan* ZAB, *un angle égal à celui que la normale au point* C *fera avec le plan* ZAC; *en outre, les deux normales seront toutes deux dans l'intérieur de l'angle dièdre des plans* ZAB, ZAC, *ou toutes deux en dehors de cet angle* [*].

Nous retrouverons plus loin le même théorème.

On arrive directement à la formule (19) de la manière suivante :

θ étant égal à $\frac{ds}{op}$, calculons op.

On a (*fig.* 9), (p. 140),

$$\text{aire } f'_2 o f'_1 = \text{aire } p o f'_1 - \text{aire } p o f'_2,$$

[*] *Journal de Mathématiques*, t. IX, 1re série.

ou

$$of'_1 \times of'_2 = op.of'_1 \cos\alpha - op.of'_2 \sin\alpha,$$

qu'on peut écrire

$$\frac{1}{op} = \frac{\cos\alpha}{of'_2} - \frac{\sin\alpha}{of'_1};$$

mais

$$of'_1 = \frac{R_1}{\cos\alpha}, \quad of'_2 = \frac{R_2}{\sin\alpha};$$

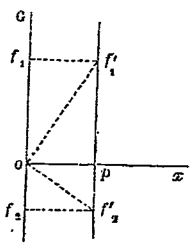
on a donc

$$\frac{1}{op} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R_2} - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\sin 2\alpha,$$

qui donne l'expression déjà trouvée pour θ.

Supposons que la directrice de la normalie sur (S) soit une asympto-

Fig. 10.



tique; la droite auxiliaire relative au point o est parallèle à G, et l'on a (*fig.* 10)

$$op^2 = pf'_1 \times pf'_2 = R_1 R_2;$$

d'où

$$(20) \qquad op = \sqrt{R_1 R_2}.$$

op, dans le cas actuel, est le paramètre de distribution de la normalie. Nous avons donc ce théorème :

Théorème XXXI. — *Le paramètre de distribution des plans tangents à une normalie dont la directrice est une ligne asymptotique est une moyenne proportionnelle entre les rayons de courbure principaux.* (Ossian Bonnet [*]).

[*] *Mémoire sur la théorie générale des surfaces* (*Journal de l'École Polytechnique*, 32e cahier).

Nous voyons aussi (*fig.* 10) que le point o est le point central sur G; par suite :

Théorème XXXII. — *Lorsqu'une ligne asymptotique est directrice d'une normalie, elle est la ligne de striction de cette surface.*

La relation (20), qui existe lorsque la directrice de la normalie est une ligne asymptotique, est applicable à une surface gauche quelconque lorsque l'on prend pour directrice une génératrice même de la surface. Mais, pour une surface gauche, op ou $\frac{oo_1}{\tang X}$ (p. 120) est l'abscisse à l'origine de la droite auxiliaire de cette surface relative au point o.

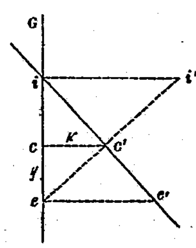
Nous voyons donc :

Théorème XXXIII. — *La droite auxiliaire d'une surface gauche quelconque, relative à un point o d'une génératrice* G *de cette surface, rencontre la perpendiculaire élevée du point o à* G *en un point p, dont la distance à o est moyenne proportionnelle entre les rayons de courbure principaux de la surface gauche en o.* (De la Gournerie) [*].

D'après cela, on déterminera la moyenne proportionnelle entre les rayons de courbure principaux en un point e de la génératrice G d'une surface gauche, en construisant la droite auxiliaire relative à ce point et en prenant l'abscisse à l'origine de cette droite.

On joint (*fig.* 11) le point e au point c', qui a été obtenu à l'aide du point central c et du paramètre cc'; la perpendiculaire $c'e'$ à la

Fig. 11.



droite ec' coupe la perpendiculaire ee' à G au point e', extrémité du segment ec' qu'il fallait déterminer. En appelant y la distance ec et k

[*] *Traité de Géométrie descriptive*, 3e partie, p. 44.

le paramètre, on a

$$\frac{ee'}{cc'} = \frac{ec'}{cc'};$$

d'où

$$ee' \quad \text{ou} \quad \sqrt{R_1 R_2} = \frac{y^2 + k^2}{k} \text{ [*]};$$

au point central c, on a simplement k.

Au point i, où le plan tangent en e à la surface gauche est normal à cette surface, le produit des rayons de courbure principaux est égal au carré de ii'; mais $ii' \times ee' = ei^2$; donc :

Théorème XXXIV. — *Aux points e et i, où un plan est tangent et normal à une surface gauche, le produit des rayons de courbure principaux est égal à la quatrième puissance de la distance et qui sépare ces points.*

Sur la *fig.* 10 (p. 143), nous avons trouvé $op = \sqrt{R_1 R_2}$, en considérant une normalie ayant pour directrice une asymptotique de (S); mais, d'après ce que nous venons de dire, op est aussi moyenne proportionnelle entre les rayons de courbure principaux de la normalie. Donc :

Théorème XXXV. — *Lorsque la directrice d'une normalie est une ligne asymptotique d'une surface, le produit des rayons de courbure principaux de cette normalie en chaque point de cette directrice est égal au produit analogue pour la surface au même point.*

Prenons pour directrice d'une normalie une *géodésique;* cette courbe a alors en chacun de ses points son plan osculateur normal à (S).

L'abscisse à l'origine de la droite auxiliaire de cette normalie, relative au pied o de la normale G, est égale, comme nous le savons, à $\frac{oo_1}{\text{tang X}}$.

oo_1 est l'arc infiniment petit de la géodésique; X n'est autre que l'angle de deux plans osculateurs de cette courbe, infiniment voisins. $\frac{oo_1}{\text{tang X}}$, dans le cas actuel, représente donc le rayon de seconde courbure de la géodésique.

[*] Lamarle : *Exposé géométrique du calcul différentiel et du calcul intégral*, p. 498.

En appelant r ce rayon, il est égal à op; le rayon de courbure est égal à on. Ces deux rayons (*fig.* 12) sont liés par la relation

$$r = \rho \operatorname{tang} onp = \rho \operatorname{tang}\varphi,$$

φ étant l'angle que le plan central fait avec la directrice de la normalie, c'est-à-dire l'angle de cette directrice avec sa direction conjuguée.

FIG. 12.

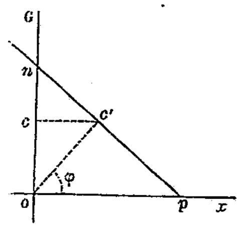
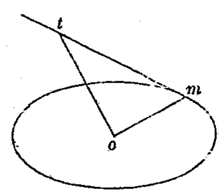


FIG. 13.



Supposons tracée sur le plan tangent en o l'indicatrice en ce point et le rayon vecteur om (*fig.* 13) tangent à la géodésique. L'angle φ que ce rayon fait avec sa direction conjuguée est égal à tmo. On a

$$\rho = \lambda om^2;$$

on a donc

$$om^2 = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{r}{\lambda \operatorname{tang}\varphi},$$

d'où

$$om \times ot = \frac{r}{\lambda};$$

donc

THÉORÈME XXXVI. — *Le triangle omt rectangle en o, dont le côté om est tangent en o à une géodésique tracée sur* (S), *dont l'hypoténuse mt est tangente en m à l'indicatrice relative au point o, a son aire proportionnelle au rayon de seconde courbure de cette géodésique.*

Si la directrice de la normalie tracée sur (S) est quelconque, on a le théorème suivant :

THÉORÈME XXXVII. — *L'aire du triangle omt, construit comme dans l'énoncé précédent, est proportionnelle à la racine du produit des* *rayons de courbure principaux en o de la normalie qui a pour directrice une courbe tangente en o à om.*

Cherchons à interpréter la formule (9), lorsqu'il s'agit de normalies :

Soient toujours o et o_1 deux points infiniment voisins de la directrice d'une normalie à (S). oo_1 est conjugué de la direction de la perpendiculaire commune aux normales G et G_1 à (S), issues des points o et o_1. Projetons (S) sur un plan perpendiculaire à cette dernière direction. Le cylindre projetant touche (S) suivant une courbe qui contient o et o_1, et la ligne de contour apparent de (S) sur notre plan de projection est une section droite de ce cylindre.

Appelons G' et G'_1 les projections des normales G et G_1 ; ces droites sont des normales, infiniment voisines, du contour apparent de (S) sur le plan de projection : elles se coupent alors au centre de courbure de cette courbe. Mais ce centre de courbure est la projection du point central de la normalie : nous voyons donc que la longueur l est le rayon de courbure de la courbe de contour apparent de (S). On voit de même que l_1 et l_2 sont égales aux rayons de courbure principaux de (S).

La formule (9), que nous écrirons $l = R_1 \cos^2 \omega + R_2 \sin^2 \omega$, exprime donc le rayon de courbure du contour apparent d'une surface en fonction des rayons de courbure principaux [*].

On déduit de cette dernière formule le théorème suivant :

THÉORÈME XXXVIII. — *La somme des rayons de courbure des contours apparents d'une surface sur deux plans rectangulaires entre eux et perpendiculaires à un plan tangent fixe de cette surface est constante, quels que soient les plans rectangulaires sur lesquels on effectue les projections.*

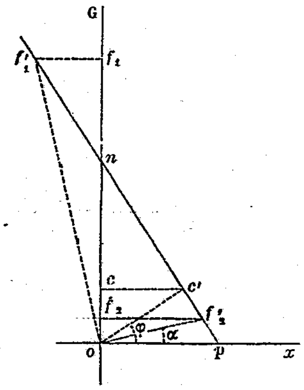
Occupons-nous maintenant de l'angle des deux normales infiniment voisines G et G_1. Désignons toujours par o et o_1 les pieds de ces normales; par c le point central sur G de la normalie à (S), dont oo_1 est la

---

[*] Je suis déjà arrivé à cette relation dans mon *Mémoire sur la transformation par polaires réciproques des propriétés relatives aux rayons de courbure.* (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. XI.)

directrice, et par φ l'angle que oo_1 fait avec le plan central ou avec sa direction conjuguée.

Fig. 14.



Appelons dp la plus courte distance de G et G_1, $d\sigma$ l'angle de ces droites, k le paramètre de distribution de la normalie, et y la distance oc, on a (*fig.* 14)

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{y}{k};$$

mais

$$k = \frac{dp}{d\sigma};$$

on a donc

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{y\,d\sigma}{dp}.$$

oo_1 étant perpendiculaire à G, $dp = oo_1 \cos\varphi$; par suite

$$d\sigma = \frac{oo_1 \sin\varphi}{y} = \frac{oo_1}{oc'}; \tag{21}$$

en remplaçant oo_1 par ds il vient $d\sigma = \frac{ds}{oc'}$ [*].

[*] Il résulte de cette formule $d\sigma = \frac{ds}{oc'}$ que, *lorsqu'une droite G se déplace en restant normale à la trajectoire d'un de ses points, les arcs parcourus par les différents*

L'expression de $d\sigma$ peut être mise sous la forme connue; on a en effet

$$\frac{1}{oc'^2} = \frac{1}{of_1'^2} + \frac{1}{of_2'^2},$$

ou

$$\frac{1}{oc'^2} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1^2} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2^2};$$

par suite

$$(22) \qquad d\sigma = ds\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{R_1^2} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2^2}}.$$

On a encore

$$\frac{1}{oc'^2} = \frac{1}{on^2} + \frac{1}{op^2},$$

et si la directrice de la normalie est une géodésique dont les deux rayons de courbure sont ρ et r, il vient

$$(23) \qquad d\sigma = ds\sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}}.$$

En rapprochant la formule $d\sigma = \frac{ds}{oc'}$ de celle déjà employée : $d\theta = \frac{ds}{op}$, on voit que

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{oc'}{op} = \cos\varphi;$$

de là la propriété suivante :

THÉORÈME XXXIX. — *L'angle de deux normales à* (S) *issues des points infiniment voisins* o, o_1 *est égal à l'angle des plans normaux qui contiennent ces deux points divisés par le cosinus de l'angle que fait* o, o_1 *avec sa direction conjuguée.*

---

points de cette droite sont entre eux comme les distances de ces points à l'extrémité de la perpendiculaire à G, menée du point central de la surface engendrée par cette droite, perpendiculaire dont la longueur est celle du paramètre de distribution des plans tangents à cette surface.

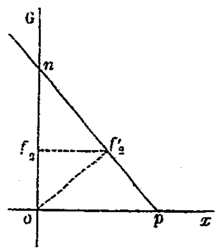
$\frac{d\sigma}{ds}$ ou $\frac{1}{oc'}$ est ce que M. Gilbert appelle la flexion de (S) suivant oo_1 [*]. La relation (22) donne l'expression de la flexion suivant une certaine direction en fonction des valeurs extrêmes de cette flexion.

Si la surface donnée (S) est une surface développable, l'un des rayons de courbure principaux est infini et la droite auxiliaire pour une normale quelconque est alors perpendiculaire à of'_2. On voit donc :

Théorème XL. — *Quelles que soient les courbes tracées à partir d'un point o sur une surface développable, les normalies correspondantes auront pour point central sur la normale en o le centre de courbure principal de la développable.*

L'enveloppe des droites auxiliaires correspondant à toutes ces normalies est, sur un même plan mené par G, une parabole dont le foyer est en o et dont la tangente au sommet est la perpendiculaire $f_2f'_2$ à G. Toutes ces normalies ont même plan central, puisqu'elles ont même plan tangent au point qui est à l'infini sur G. Ce plan central commun est le plan normal à la développable mené par la génératrice qui passe au point o.

Fig. 15.



Si la courbe tracée sur la surface développable est une ligne géodésique, la normalie correspondante est le lieu des normales principales de cette courbe. Mais une courbe gauche quelconque étant toujours

[*] *Mémoire sur la théorie générale des lignes tracées sur une surface quelconque.* (*Mémoires de l'Académie de Belgique*, t. XXXVII.)

une géodésique de la développable enveloppe de ces plans rectifiants, il nous suffit pour étudier la surface, lieu des normales principales d'une courbe gauche, de considérer la normalie à une développable ayant pour directrice une géodésique de cette surface.

Si nous nous plaçons dans ce cas (*fig.* 15), *on* est le rayon de première courbure de la géodésique et l'on a pour l'angle de deux normales infiniment voisines de cette courbe $d\sigma = ds\sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}}$. On voit aussi que l'on obtient le point central f_2 sur une normale G de la courbe gauche en portant *on* égal à ρ sur cette normale, *op* égal à r sur la perpendiculaire élevée du point o à G et en projetant en f_2' sur G le pied de la perpendiculaire abaissée du point o sur *np*.

La distance of_2' est égale à

$$\frac{\overline{of_2'}^2}{on},$$

ou

$$\frac{\frac{1}{\rho}}{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}}.$$

Le paramètre de distribution $f_2'f_2'$ est égal à

$$\frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}}.$$

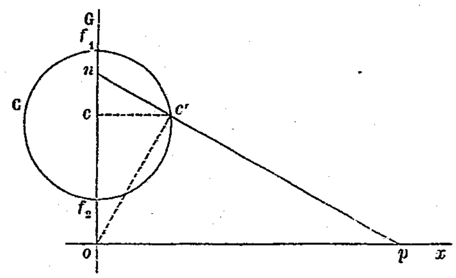
Le plan central fait avec le plan tangent à la normalie en o, c'est-à-dire avec le plan osculateur de la courbe gauche, l'angle pof_2' dont la tangente est égale à $\frac{r}{\rho}$. Mais le plan central, d'après ce que nous venons de dire, contient la génératrice de la développable qui passe en o, et cette droite n'est autre que la droite *rectifiante* de Lancret; nous voyons donc que *la droite rectifiante d'une courbe gauche fait avec cette courbe un angle dont la tangente est* $\frac{r}{\rho}$. Ajoutons, comme il est facile de le voir, *que le produit des rayons de courbure principaux de* *la surface lieu des normales principales d'une courbe gauche au centre de courbure de cette courbe est égale à* $\frac{\rho^4}{r^2}$ *et que le produit des rayons de courbure principaux en o et n est* ρ^4 (Théorème XXXIV) [*].

On voit tout de suite sur la figure qu'entre ρ, r, k on a la relation

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{rk}.$$

Avant d'étudier ce qui concerne deux normalies considérées simultanément, je vais rappeler tout ce que la *fig.* 16 contient comme représentation géométrique d'éléments relatifs à la courbure d'une surface.

Fig. 16.



G est la normale au point o à une surface (S), f_1, f_2 sont les centres de courbure principaux de cette surface; la circonférence décrite sur $f_1 f_2$ comme diamètre est caractéristique du pinceau des normales infiniment voisines de G; une normalie, dont le point central est c et le paramètre cc', a pour droite auxiliaire relative au point o la perpendiculaire np menée du point c' à oc'.

n est le centre de courbure de la section déterminée dans (S) par le plan normal à cette surface, mené tangentiellement en o à la directrice de la normalie dont np est la droite auxiliaire.

L'angle de la normale G et de la normale infiniment voisine, qui est une génératrice de cette normalie, est égal à $\frac{ds}{oc'}$.

[*] Catalan : *Recherches sur les surfaces gauches.*

$\frac{1}{oc'}$ représente ce que M. Gilbert a appelé la *flexion* de (S) suivant l'arc ds.

$\frac{ds}{op}$ est l'expression de l'angle que M. Bertrand a considéré le premier et qui n'est autre que l'angle de deux plans normaux de (S) qui passent par deux points infiniment voisins.

Par rapport à la directrice de la normalie : $\frac{1}{op}$ représente ce que M. Picart a appelé la *torsion geodésique* [*].

op est une moyenne proportionnelle entre les rayons de courbure principaux de (S) en o.

Par rapport à la directrice de la normalie op représente aussi ce que M. de la Gournerie a appelé *paramètre de déviation* [**].

poc' est l'angle de la directrice de la normalie et de sa direction conjuguée.

Si l'on considère la géodésique tangente à la directrice de la normalie, on est le rayon de première courbure de cette courbe et op le rayon de seconde courbure.

Propriétés relatives à des normalies considérées simultanément.

Soient toujours G (*fig.* 17) la normale en o d'une surface (S), f_1 et f_2 les centres de courbure principaux.

Considérons toutes les normalies à (S) qui contiennent G et prenons f_2 pour origine des droites auxiliaires de ces surfaces.

Ces droites auxiliaires passent toutes par f_1. Traçons les deux droites auxiliaires f_1c', f_1e'. Les surfaces correspondantes auront des plans centraux, faisant avec le plan focal en f_2 des angles qui sont xf_2c' xf_2e'; ces plans centraux font donc entre eux l'angle $e'f_2c'$. Nous voyons donc que :

Théorème XLI. — *L'angle, sous lequel on voit d'un point de la circonférence* C *l'arc compris entre les points c' et e', qui se projettent*

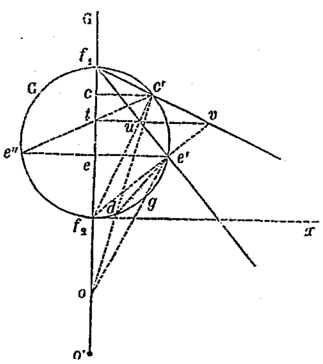
[*] *Essai d'une théorie géométrique des surfaces* (Thèse).

[**] *Traité de géométrie descriptive*, 3e partie.

sur G *aux points centraux de deux normalies, est égal à l'angle que font entre eux les plans centraux de ces surfaces.*

Les plans tangents en o à nos deux normalies font avec le plan focal en f_2 des angles qui sont $f_2c'o$, $f_2e'o$. Par suite ils font entre eux un

Fig. 17.



angle dont la mesure est la moitié de l'arc dg. Cet angle n'est autre que l'angle des directrices des normalies. On voit donc que :

Théorème XLII. — *L'angle des directrices des normalies en o est l'angle sous lequel on voit, d'un point de la circonférence C, l'arc gd compris entre les points où les droites oc', oe', coupent* C.

En joignant le point o de G aux points c', e' on déterminera, comme nous venons de le dire, l'angle que font entre eux les plans tangents aux deux normalies au point o.

Les valeurs extrêmes de cet angle correspondent aux valeurs extrêmes de $e'oc'$, et celles-ci s'obtiennent en prenant, pour sommet des angles tels que $e'oc'$, les points où G est touché par des circonférences passant par les points c' et e'.

La droite $e'c'$ coupe évidemment G au point pour lequel les plans tangents aux normalies font entre eux un angle égal à celui que font entre eux les plans centraux de ces surfaces.

Prenons le point de rencontre u de f_2c' avec f_1e'. Ce point projeté en t sur G donne le point où le plan central de la normalie dont le point central est e touche la normalie dont le point central est c.

Mais si l'on prolonge f_2e' jusqu'à sa rencontre avec f_1c' on obtient le point v qui se projette au même point e puisque les angles $f_1c'f_2$ et $f_1e'f_2$ sont droits. Donc :

THÉORÈME XLIII. — *Deux normalies quelconques sont toujours telles que le plan central de l'une touche l'autre au point où le plan central de celle-ci touche la première.*

Considérons la surface parallèle à (S) qui passe par t. Supposons qu'on prenne pour directrices de nos deux normalies les traces de ces surfaces sur cette surface parallèle à (S) : je dis qu'en t ces directrices sont deux diamètres conjugués de l'indicatrice en ce point.

Ceci est évident, si l'on remarque que le plan tangent en t à l'une de ces normalies est le plan central de l'autre (théorème XXVII).

D'après cela, si l'on prend à partir d'un point t la directrice d'une normalie dont la droite auxiliaire est f_1c' on aura la droite auxiliaire de la normalie dont la directrice est conjuguée de la directrice de la première, en opérant de la manière suivante :

On joint le point f_2 (*fig.* 17) au point v où f_1c' coupe la perpendiculaire tu à G : cette droite rencontre la circonférence C en un point e' qu'il suffit de joindre à f_1 pour avoir la droite auxiliaire demandée. Nous désignerons sous le nom de *normalies conjuguées* deux normalies ayant pour directrices deux courbes dont les tangentes à leur point de rencontre sont deux tangentes conjuguées.

Reprenons deux normalies quelconques et considérons leurs directrices sur une surface (S) passant au point o (*fig.* 17). Appelons δ l'angle que font en ce point ces deux directrices : cet angle est égal à $de'g$. Appelons γ l'angle que font entre eux les plans centraux des deux normalies : cet angle est égal à $e'dc'$. Dans le triangle ode' on a :

$$\frac{oc'}{od}=\frac{\sin\gamma}{\sin\delta},$$

mais

$$od\times oc'=R_1R_2,$$

donc

$$\frac{oe'\times oc'}{R_1R_2}=\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}, \tag{24}$$

relation entre les flexions d'une surface suivant deux directions arbitraires [*].

Si les normalies sont conjuguées on a simplement $oe' \times oc' = R_1 R_2$, comme on peut le voir directement sur la *fig.* 18.

On peut interpréter de la manière suivante la relation (24).

Nous savons que l'on a

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{oc'},$$

$d\sigma$ étant l'angle des deux normales à la surface (S) menées des extrémités de l'arc ds. On a de même

$$\frac{d\sigma_1}{ds_1} = \frac{1}{oe'}.$$

La relation (24) peut donc s'écrire :

$$\frac{ds \times ds_1 \sin\delta}{R_1 R_2} = d\sigma \times d\sigma_1 \sin\gamma.$$

Menons une surface parallèle à (S) par le point o' de G (*fig.* 17). Cette surface est rencontrée par les deux normalies suivant deux courbes faisant entre elles un angle δ'. On a, comme précédemment, en employant les mêmes notations avec des accents

$$\frac{ds' \times ds'_1 \sin\delta'}{R'_1 R'_2} = d\sigma \times d\sigma_1 \sin\gamma.$$

Les quantités qui entrent dans le second membre ne changent pas si l'on prend les mêmes normales infiniment voisines de G. On a donc :

$$\frac{ds \times ds_1 \sin\delta}{ds' \times ds'_1 \sin\delta'} = \frac{R_1 R_2}{R'_1 R'_2}.$$

Mais $ds \times ds_1 \sin\delta$ est le double de l'aire du triangle infiniment petit qui a pour côtés ds et ds_1. On voit alors que le rapport des aires des triangles infiniment petits, déterminés par les directrices des deux

---

[*] Cette relation a été donnée par M. Gilbert (*loc. cit.*).

normalies sur (S) et (S') est constant, quelles que soient les deux normalies que l'on considère. Si l'on trace autour du point o une courbe infiniment petite, les normales à (S) issues des points de cette courbe détermineront sur (S') une courbe infiniment petite autour de o', et nous voyons, d'après ce que nous venons de dire, que les aires de ces deux courbes sont entre elles comme les produits des distances des points o et o' aux foyers du rayon G. Ceci s'étend évidemment à un pinceau quelconque; nous pouvons donc dire, en remplaçant (S) et (S') simplement par des plans perpendiculaires à G, que :

THÉORÈME XLIV. — *Les aires des sections faites dans un pinceau par deux plans perpendiculaires au rayon sont entre elles comme les produits des distances de ces plans aux foyers du rayon.* (KUMMER.)

Voici maintenant quelques propriétés des normalies conjuguées; j'appellerai, avec M. Lamarle, *distance centrale* d'une normalie la distance comprise sur une normale entre le point central et le pied de cette normale. En faisant usage de cette expression, j'énoncerai le théorème suivant :

THÉORÈME XLV. — *Le produit du rayon de courbure de la section normale à* (S) *qui est tangente à la directrice d'une normalie par la distance centrale de la normalie conjuguée est égal au produit des rayons de courbure principaux.* (LAMARLE.)

$f_1 c'$ (*fig.* 18) étant la droite auxiliaire d'une normalie, $f_1 e'$ est la droite auxiliaire de la normalie conjuguée en o.

Les droites oc', oe' étant également inclinées sur $f_1 f_2$, les triangles rectangles onc', $oe'e$ sont semblables; ils donnent :

$$\frac{on}{oc'} = \frac{oe'}{oe},$$

d'où

$$on \times oe = oc' \times oe' = R_1 R_2.$$

Donc

$$on \times oe = R_1 R_2,$$

ce qui exprime le théorème à démontrer [*].

[*] La démonstration de ce théorème, à l'aide de l'indicatrice, est très-simple aussi, si l'on se reporte à la remarque qui a permis d'interpréter géométriquement la relation (9).

Joignons le point c' au point e'; appelons t le point de rencontre de cette droite avec G; les points $c\,o\,e\,t$ forment une division harmonique; on a alors

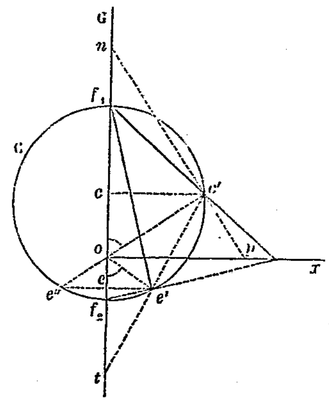
$$\frac{2}{ot} = \frac{1}{oc} + \frac{1}{oe}.$$

Mais le point t est fixe quelle que soit la direction de $f_1 c'$. Donc :

Théorème XLVI. — *La somme des inverses des distances centrales de deux normalies conjuguées autour d'un même point est constante.*

(Joachimsthal [*].)

Fig. 18.



On voit tout de suite sur la *fig.* 18 l'exactitude du théorème suivant :

Théorème XLVII. — *Les paramètres de distribution de deux normalies conjuguées sont entre eux comme les distances centrales de ces normalies, et leurs carrés sont entre eux comme les produits des rayons de courbure principaux de ces surfaces au point o.*

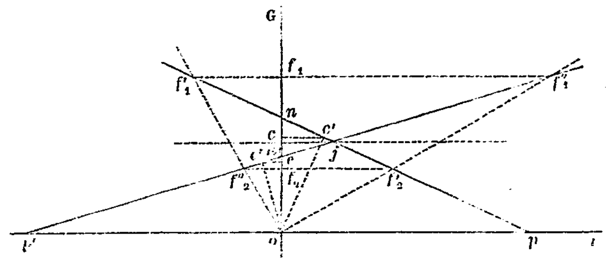
Au lieu de prendre des droites auxiliaires relatives au point f_2, on peut prendre pour origine le point o lui-même. On trouve alors que les droites auxiliaires qui correspondent à deux normalies conjuguées sont également inclinées sur G.

Prenons (*fig.* 19) le point o pour origine afin d'étudier deux normalies rectangulaires en ce point.

[*] *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XIII.

Soient toujours f_1, f_2 les centres de courbure principaux de (S) sur G. Le plan tangent en o fait avec le plan tangent f_1, pour l'une des normalies, l'angle xof_1'' ; le plan tangent en o, pour l'autre normalie, fait alors, avec le même plan tangent en f_1, l'angle xof_1'' : les droites of_1' et of_1'' étant perpendiculaires entre elles, puisque les normalies sont rectangulaires.

Fig. 19.



Les droites auxiliaires des deux normalies rectangulaires sont donc $f_1'f_2'$, $f_1''f_2''$.

On voit tout de suite sur la figure que

$$\frac{1}{on} + \frac{1}{on'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Donc :

Théorème XLVIII. — *En un point o d'une surface, deux sections normales perpendiculaires entre elles ont la somme de leur courbure constante.*

On voit aussi que $op = op'$. Cette relation donne le théorème de M. Bertrand, page 142, ainsi que le théorème suivant :

Théorème XLIX. — *Pour deux normalies rectangulaires en o, le produit des rayons de courbure principaux de ces surfaces est le même en ce point.*

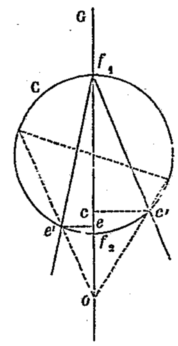
En rapprochant ce résultat de celui que nous avons obtenu au théorème XXXV, nous voyons qu'on peut dire :

Théorème L. — *Les lignes asymptotiques d'une surface* (S) *et leurs trajectoires orthogonales sont les directrices de normalies ayant en chaque point de* (S) *le produit de leurs rayons de courbure principaux égal au produit analogue pour* (S).

On peut aussi étudier les normalies rectangulaires en o en prenant (*fig.* 20) le point f_2 pour origine. Pour obtenir alors les droites auxiliaires de deux normalies rectangulaires, on mène un diamètre de C; on joint les extrémités de ce diamètre au point o; ces droites coupent C aux points c', e'; enfin on joint ces deux points au point f_1.

On obtient les droites auxiliaires de deux normalies dont les plans centraux sont rectangulaires, en joignant f_1 aux extrémités d'un diamètre de C. Les tangentes en o aux directrices de ces normalies sont les lignes allant de ce point aux points de contact avec l'indicatrice en o de deux tangentes rectangulaires entre elles.

Fig. 20.



Si l'on marche dans deux directions ainsi déterminées, on voit tout de suite, sur la *fig.* 20, que *la somme des inverses des carrés des flexions de* (S) *est constante.*

Je n'énumérerai pas un plus grand nombre de propriétés des normalies; celles que j'ai fait connaître montrent assez avec quelle facilité ces propriétés découlent de la considération de la circonférence caractéristique d'un pinceau de normales. Un tel pinceau est déterminé, lorsqu'on connaît les normales élevées des foyers aux surfaces focales; ces deux droites suffisent donc pour déterminer géométriquement tous les éléments relatifs à la courbure d'une surface; elles tiennent lieu de l'*indicatrice* de M. Dupin.

Nous ne doutons pas qu'en leur adjoignant de nouvelles droites on n'arrive à la représentation d'éléments d'ordre supérieur.

NOTE.

Je vais démontrer le théorème sur lequel je m'appuie page 121 afin de mettre sous les yeux du lecteur tout ce qu'il lui est nécessaire de connaître pour suivre mon exposition et pour lui permettre de bien voir que ma théorie géométrique de la courbure des surfaces a pour base des propriétés tout à fait élémentaires.

Considérons le segment ab d'une droite D; assujettissons les points a et b à parcourir deux courbes données (a), (b). Le déplacement de $a\ b$ est ainsi bien défini; lorsqu'on considère seulement le déplacement infiniment petit, on sait qu'il peut être obtenu, et cela est très-facile à voir, au moyen d'une rotation autour de la droite Δ intersection des plans normaux à (a), (b) qui sont menés des points a et b.

Un point c quelconque de D décrit pendant le déplacement de cette droite une trajectoire dont le plan normal passe Δ. On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème II. — *Les plans normaux aux trajectoires de tous les points d'une droite D se coupent suivant une même droite* Δ.

Δ est la droite *conjuguée* de D; nous verrons tout à l'heure pourquoi M. Chasles a ainsi désigné cette droite [*]. Considérons maintenant une droite D et quatre points a, b, c, e sur cette droite; supposons que l'on déplace la droite D de façon que les points a, b, c, e restent sur quatre surfaces directrices (A), (B), (C), (E). D engendrera alors une surface réglée; pour un déplacement infiniment petit elle aura une certaine conjuguée Δ. Cette droite, d'après le théorème précédent, doit rencontrer les normales A, B, C, E aux quatre surfaces directrices qui sont issues des points a, b, c, e; elle est donc déterminée. Au moyen de Δ on a tout de suite la tangente à la trajectoire d'un point quelconque de D.

Si nous prenons trois points, a, b, c sur D, lorsque l'on assujettira

[*] *Propriétés géométriques du mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace.* (*Comptes rendus*, 1843.)

ces trois points à rester sur les trois surfaces (A) (B) (C), cette droite D pourra, à partir de la position qu'elle occupe, décrire une infinité de surfaces réglées.

Les trajectoires d'un point i de D pour tous les déplacements qu'on peut donner à cette droite appartiennent à la surface trajectoire (I) du point i. La normale I menée du point i à cette surface est normale à toutes les trajectoires du point i; elle doit donc rencontrer toutes les conjuguées de D relatives à tous les déplacements de cette droite. Mais ces conjuguées sont les lignes qui rencontrent les trois normales A, B, C et qui forment alors un hyperboloïde, la droite I qui les rencontre toutes est la génératrice de cet hyperboloïde qui passe par le point i.

Nous avons ainsi démontré ce théorème déjà énoncé :

Théorème LII. — *Les normales aux surfaces trajectoires de tous les points d'une droite appartiennent à un hyperboloïde.*

Je retrouverai tout à l'heure une autre démonstration de ce même théorème lorsque j'aurai établi le théorème relatif aux normales aux surfaces trajectoires de tous les points d'une figure de forme invariable.

Pour arriver à ce théorème, on établit d'abord ce lemme bien simple:

Théorème LIII. — *Lorsqu'une droite est normale à la trajectoire d'un de ses points, elle est normale aux trajectoires de tous ses points.*

De ce lemme résultent les propriétés suivantes :

Théorème LIV. — *Les plans normaux aux trajectoires de tous les points d'un plan passent par un même point de ce plan.*

Considérons en effet un plan (P) dont le déplacement est défini ainsi : a, point de ce plan, décrit une trajectoire (a); b, autre point du plan (P), décrit une trajectoire (b); enfin un troisième point (c) se déplace sur une surface (C). Les plans normaux en a et b ont pour traces sur (P) des droites qui se coupent en f. Chacune des droites af, bf, étant normales à la trajectoire d'un de leurs points, jouit, en vertu du théorème précédent, de la même propriété pour tous ses points, le point f, qui appartient à chacune d'elles, décrit donc un élément perpendiculaire à chacune de ces droites et par suite perpendiculaire au plan (P). En traçant du point f une droite quelconque sur le plan (P), on aura une droite à laquelle on pourra appliquer le lemme précédent et qui est alors la trace sur le plan (P) du plan normal relatif à la trajectoire d'un quelconque de ses points.

Le point f est donc le point de rencontre des plans normaux aux trajectoires de tous les points du plan (P). M. Chasles lui a donné le nom de *foyer* du plan (P).

Les plans normaux relatifs aux trajectoires des points a et b se coupent, d'après ce que nous savons, suivant la conjuguée Δ de la droite D qui contient ces deux points. Δ a pour trace le point f sur le plan (P). Si l'on imagine un autre plan passant par D et invariablement lié au plan (P), le foyer de ce plan sera aussi sur Δ; donc :

Théorème LV. — *Quand des plans passent par une même droite* D, *leurs foyers sont sur la conjuguée de cette droite.*

Nous pouvons énoncer autrement ce résultat, et dire:

Théorème LVI. — *A un instant quelconque du déplacement d'une figure de forme invariable, si l'on considère parmi toutes les normales aux trajectoires des points entraînés, celle qui rencontre une droite* D, *toutes ces droites rencontrent en outre une deuxième droite* Δ, *conjuguée de la première.*

Le théorème LV peut nous conduire à une autre conséquence; les plans passant par D sont respectivement normaux aux trajectoires de leurs foyers, mais ces foyers appartiennent à la droite Δ; nous voyons donc que les plans normaux aux trajectoires des points de cette droite passent par la droite D. Les droites D et Δ sont donc telles que les plans normaux aux trajectoires des points de l'une passent par l'autre. C'est en raison de cette dernière propriété que M. Chasles a désigné ces droites sous le nom de *droites conjuguées*.

Ces deux droites sont aussi deux axes de rotation : nous avons déjà vu que c'était autour de Δ qu'il fallait faire tourner D pour lui imprimer un déplacement infiniment petit. D'après ce que nous venons de dire, c'est autour de D qu'il faut de même faire tourner Δ.

Le déplacement d'un plan (P), défini comme précédemment, est assujetti à cinq conditions; mais comme le déplacement le plus général d'un plan entraîne celui d'une figure de forme invariable qui lui est liée, nous pouvons dire aussi qu'il faut cinq conditions pour définir le déplacement d'une pareille figure.

Si l'on n'assujettit une figure de forme invariable qu'à quatre conditions, elle pourra, à partir de la position qu'elle occupe, être déplacée d'une infinité de manières.

Pour chacun de ces déplacements, les points décrivent des lignes trajectoires; tous ces éléments de lignes appartiennent aux surfaces trajectoires des points de la figure.

Je dis que si, à un instant quelconque, on mène les normales aux surfaces trajectoires des points de la figure mobile, toutes ces normales rencontreront les deux mêmes droites.

Soient a, b, c, e quatre points de la figure mobile; assujettissons ces points à se déplacer sur quatre surfaces (A), (B), (C), (E). Menons les normales A, B, C, E à ces surfaces, issues des points a, b, c, e. Menons les deux droites D et Δ rencontrant à la fois ces quatre normales. Quel que soit le déplacement de la figure, les droites A, B, C, E sont des normales aux trajectoires des points a, b, c, e qui s'appuient sur une droite D; en vertu du théorème LVI elles rencontrent la conjuguée de D. Δ est donc cette conjuguée.

Les droites conjuguées D et Δ sont en outre deux axes de rotation à l'aide desquels on peut imprimer à la figure tous les déplacements compatibles avec les données.

Pour un point quelconque i de la figure mobile, la normale à la surface trajectoire de ce point est la droite partant du point i qui rencontre D et Δ. Cette droite est, en effet, normale aux trajectoires de ce point pour tous les déplacements qu'on peut imprimer à la figure.

Nous avons donc le théorème XXVIII dont je reproduis ici l'énoncé.

Lorsqu'une figure de forme invariable se déplace de manière que quatre de ses points restent sur quatre surfaces données, à un instant quelconque, les normales, issues respectivement des points de la figure, aux surfaces trajectoires de ces points, rencontrent deux mêmes droites.

Si en particulier on prend les points d'une droite G les normales aux surfaces trajectoires de ses points rencontrant G, D et Δ appartiennent à un hyperboloïde. Nous retrouvons ainsi une propriété déjà démontrée.

Cette droite G engendre un pinceau; les perpendiculaires à cette droite et qui rencontrent D et Δ sont les normales aux surfaces focales issues des foyers du rayon G. La connaissance des droites D, Δ entraîne donc celle de ces normales, et par suite D, Δ définissent le pinceau. Elles le définissent plus complétement que ne le font les normales aux surfaces focales, car, connaissant ces droites D, Δ on peut déterminer les normales aux surfaces trajectoires des points du rayon G et le rapport des aires infiniment petites déterminées simultanément par le pinceau sur ces surfaces trajectoires.

La droite G peut être considérée comme appartenant à une infinité de figures de forme invariable; entraînée successivement avec chacune de ces figures, elle peut décrire le même pinceau, mais les surfaces trajectoires de ces points varieront.

Dans tous les cas, on aura les mêmes foyers et les mêmes normales aux surfaces focales; les droites D, Δ relatives à chacune des figures de forme invariable, dont on suppose que G fait partie, sont toujours deux droites rencontrant les deux normales aux surfaces focales. Si l'on prend une droite partant de f_1 et rencontrant la normale F_2 à la surface focale, et une droite partant de f_2 et rencontrant F_1, on a tout de suite, en employant ces deux droites comme axes de rotation, le théorème XLIV : les *aires des sections faites dans un pinceau par des plans perpendiculaires aux rayons sont proportionnelles aux produits des distances de ces plans aux foyers du rayon.*

Les principales propriétés d'un pinceau pourraient être obtenues en considérant le rayon du pinceau se déplaçant autour de deux droites rencontrant les normales aux surfaces focales issues des foyers de ce rayon; mais ce procédé est loin de donner des démonstrations aussi simples que celui que j'ai fait connaître dans ce Mémoire.

On peut, inversement, de ces propriétés déduire des propriétés de certaines surfaces réglées ayant deux directrices rectilignes. Par exemple, pour un hyperboloïde, le théorème VII conduit à celui-ci :

Théorème LVII. — *Dans un hyperboloïde à une nappe les pieds des perpendiculaires communes à une génératrice* G *et autres génératrices du même système considérées successivement, occupent un segment* *de* G; *les extrémités de ce segment sont à égale distance du centre de l'hyperboloïde, etc.*

Je ne donnerai pas plus de développement à cette Note, qui n'avait pour but que la démonstration des théorèmes LII et XXVIII, théorèmes qui se trouvent déjà avec de nombreuses conséquences dans le Mémoire intitulé : *Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable,* inséré dans le tome XX du *Recueil des Savants étrangers*, et dans le XLIIIe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.