JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE SAINT-VENANT

Complément aux Mémoires du 7 mars 1870 de M. de Saint-Venant et du 19 juin 1870 de M. Levy sur les équations différentielles indéfinies du mouvement intérieur des solides ductiles, etc.; - Équations définies ou relatives aux limites de ces corps; - Applications

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 16 (1871), p. 373-382.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1871_2_16__373_0>

COMPLÉMENT *aux Mémoires du 7 mars 1870 de* M. DE SAINT-VENANT *et du 19 juin 1870 de* M. LEVY *sur les équations différentielles* indéfinies *du mouvement intérieur des solides ductiles, etc.; — Équations* définies *ou relatives aux limites de ces corps; — Applications;*

PAR M. DE SAINT-VENANT.

---

9. L'appel qui était fait à la fin (n° 5, p. 316) du Mémoire du 7 mars a été entendu par M. Levy, comme on peut voir par l'Extrait ci-dessus de son Mémoire du 19 juin, où il donne les équations différentielles (13) et (14) *indéfinies,* c'est-à-dire applicables à tous les points du bloc ductile déformé, des mouvements intérieurs qui y sont produits :

1° Pour le cas général où il est nécessaire d'employer les trois coordonnées x, y, z, et où il y a à déterminer, outre les *trois* composantes u, v, w, de la vitesse, les *six* composantes de pression ou tension, auxquelles nous donnons cette notation double

$$(15)\quad p_{xx}=\mathrm{N}_x,\ p_{yy}=\mathrm{N}_y,\ p_{zz}=\mathrm{N}_z,\ p_{yz}=\mathrm{T}_x,\ p_{zx}=\mathrm{T}_y,\ p_{xy}=\mathrm{T}_z\ [*].$$

2° Pour le cas de symétrie *semi-polaire* des mouvements autour d'un axe pris pour celui des z, et où les cinq inconnues sont, outre les

---

[*] La quatrième de ses *neuf* équations (13) résulte de la substitution du carré du double de la composante tangentielle maximum constante K à la place de l'inconnue, dans l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation du troisième degré de Cauchy (*Exercices,* 1827, p. 163, ou *Leçons* de Lamé, § 22) donnant les trois pressions *principales,* au nombre desquelles sont la plus grande et la plus petite des composantes normales, dont la demi-différence mesure la plus grande composante tangentielle. Les quatre dernières équations s'obtiennent en exprimant, comme j'avais fait pour les fluides en novembre 1843 (*Comptes rendus,* t. XVII, p. 1243), que la composante tangentielle de pression est nulle sur toute face suivant la direction (et il y en a toujours une) où la vitesse de glissement est nulle.

composantes U et W de la vitesse, les *deux* composantes normales et la composante tangentielle

$$(16)\qquad p_{rr} = \mathrm{N}_r,\quad p_{\omega\omega} = \mathrm{N}_\omega \quad \text{et} \quad p_{zr} = \mathrm{T}$$

des pressions ou tensions sur un plan perpendiculaire au rayon vecteur r et sur un plan méridien, la dernière étant la composante, suivant r, de la pression sur une face perpendiculaire à z.

Et il a observé judicieusement que l'on pouvait habituellement réduire à zéro les seconds membres des deux premières équations (9) et (14) et des trois premières (13), ce qui les rend plus simples que celles des problèmes sur les fluides, où tous les termes de ces seconds membres sont généralement à conserver.

Les pressions $p_{xx}, \ldots$ ou N, T,... n'entrent alors, comme on voit, dans toutes ces équations, que pour leurs rapports entre elles, ainsi qu'avec la résistance spécifique K de la matière à la déformation permanente.

Les u, v, w n'y entrent, alors aussi, que pour leurs rapports mutuels, et l'on peut, sans changer les équations, augmenter ces vitesses ou les diminuer toutes dans une même proportion. On déterminera leurs grandeurs absolues lorsque l'une d'elles sera donnée, par exemple la vitesse de l'enfoncement, quelque part, d'un piston ou d'un poinçon, ou celle avec laquelle on ploie ou tord un prisme ductile, etc.

10. Remarquons en passant que, dans certains cas, celui par exemple (nº 4) de mouvements tous les mêmes dans des plans parallèles et où il suffit de deux coordonnées rectangles x, z, l'on peut d'abord, sans s'occuper des vitesses, établir une équation propre à donner les pressions.

En effet, si nous combinons ensemble nos deux premières équations (9) avec la quatrième en prenant [*] une inconnue auxiliaire ψ telle qu'on ait

$$(17)\qquad \mathrm{N}_x = \frac{d^2\psi}{dz^2},\quad \mathrm{N}_z = \frac{d^2\psi}{dx^2},\quad \mathrm{T} = -\frac{d^2\psi}{dx\,dz},$$

---

[*] Comme a fait le même M. Levy dans un Mémoire sur l'équilibre des masses de terre sans consistance. (Voir *Comptes rendus*, surtout 7 février et 4 avril 1870, t. LXX, p. 232 et 751.)

nous satisfaisons aux deux premières équations (9), avec zéro pour seconds membres; et la substitution dans la quatrième donne

$$(18) \qquad 4\left(\frac{d^2\psi}{dx\,dz}\right)^2 + \left(\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{d^2\psi}{dz^2}\right)^2 = 4\mathrm{K}^2.$$

Si l'on parvient à tirer, par quelque méthode d'approximation, la valeur de ψ de cette équation différentielle non linéaire, et à déterminer ainsi, en x et z, les expressions de N_x, N_z, T ou de leurs rapports à K, la troisième et la cinquième des équations (9) donneront le moyen de déterminer u et w, ou leurs rapports à la vitesse supposée donnée, comme nous venons de dire, d'un point de la surface; ce qui sera la solution du problème de la suite des déformations ou des déplacements des points du bloc ductile.

11. Mais il ne suffit pas que les expressions des inconnues satisfassent aux équations *indéfinies* (9) ou (13) ou (14), applicables à tous les points du bloc. Elles sont astreintes à vérifier encore des équations dites *définies*, ou à remplir des *conditions-limites* relatives aux points de certaines surfaces.

Il s'agit d'établir ces équations *définies* ou *déterminées*. Faisons d'abord deux remarques :

1° En général, la matière de portions plus ou moins grandes du bloc ductile demeurera soumise aux lois de l'élasticité, ou restera, vu la faiblesse des déformations de ces portions, capable de revenir d'elle-même à l'état primitif, fort peu différent de l'état nouveau. C'est même ce qu'a observé M. Tresca, surtout dans ses expériences sur le poinçonnage, où il fait voir que les pressions, ou pour mieux dire leurs effets permanents, ne se transmettent que dans un espace limité et restreint, qu'il appelle leur *zone d'activité*. D'autres portions du bloc rentreront sous l'empire de ces mêmes lois d'élasticité après en être sorties : ce seront celles qui auront cessé d'être déformées d'une manière continue, comme par exemple le *jet* prismatique qui a traversé un orifice, ou la barre hors du laminoir, etc.

2° Les autres portions, savoir celles qui, suivant l'expression du même expérimentateur, sont arrivées et sont encore à l'état de *fluidité*, ou de *plasticité*, dans lequel elles éprouvent une suite croissante de déformations pour la plus grande partie persistantes, peuvent très-bien s'étendre jusqu'aux endroits de la surface extérieure où celle-ci est libre, c'est-à-dire n'éprouve aucune pression, ou ne supporte que celle de l'atmosphère, toujours négligeable; et cela peut avoir lieu quelque grande que soit l'intensité constante K de la composante tangentielle de pression agissant alors, au même endroit, sur la face du plus grand glissement. En effet, si nous prenons, par exemple, pour plan des yz cette surface extérieure et libre, ou son plan tangent en un point quelconque, les trois composantes p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} de la pression sur cette surface peuvent être nulles, et cependant les trois autres, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, agissant au même endroit sur des faces perpendiculaires, peuvent être *aussi considérables qu'on veut*. C'est ce qui a lieu, par exemple, aux points des faces latérales libres d'un prisme lorsqu'on l'étend longitudinalement, ou lorsqu'on le ploie ou le tord, jusqu'à le rompre s'il n'est pas ductile, ou jusqu'à le déformer fortement si sa matière a de la ductilité. Alors, sur de petites faces faisant 45 degrés avec la surface libre, la composante tangentielle $\frac{p_{yy}-p_{xx}}{2} = \frac{p_{yy}}{2}$ peut avoir la valeur très-grande K, malgré la nullité de toute pression sur cette surface perpendiculaire aux x.

Il faut donc poser généralement trois groupes d'équations définies :

1° Celles qui sont relatives aux points de la surface-enveloppe du corps, dans les parties qui ont conservé ou qui ont repris leur élasticité, c'est-à-dire qui n'ont éprouvé ou n'éprouvent plus que des déformations cessant avec l'action des forces. En désignant par n la direction de la normale à cette surface-enveloppe au point (x, y, z) et (e étant un simple indice) par

$$p^{e}_{xx},\ldots,\ldots,\quad p^{e}_{yz},\ldots,\ldots,\quad p^{e}_{xy}$$

les six composantes des pressions *élastiques* intérieures, dont on connaît, par la théorie de l'élasticité, l'expression en fonction des dérivées des déplacements des points, l'on aura, ϖ_e désignant l'intensité et aussi la direction de la pression ou tension extérieure censée connue qui agit par unité superficielle en cet endroit, le premier groupe d'équations définies :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &p^{e}_{xx}\cos(\mathrm{n}, x) + p^{e}_{xy}\cos(\mathrm{n}, y) + p^{e}_{xz}\cos(\mathrm{n}, z) = \varpi_{e}\cos(\varpi_{e}, x),\\ &p^{e}_{yx}\cos(\mathrm{n}, x) + p^{e}_{yy}\cos(\mathrm{n}, y) + p^{e}_{yz}\cos(\mathrm{n}, z) = \varpi_{e}\cos(\varpi_{e}, y),\\ &p^{e}_{zx}\cos(\mathrm{n}, x) + p^{e}_{zy}\cos(\mathrm{n}, y) + p^{e}_{zz}\cos(\mathrm{n}, z) = \varpi_{e}\cos(\varpi_{e}, z).\end{aligned}\right.$$

2° Celles qui sont relatives aux points de la surface-enveloppe où la matière est arrivée à éprouver et éprouve encore une suite continue de déformations persistantes, et est soumise ainsi aux lois de la *plasticité*. On a, n désignant encore la direction de la normale à la surface, et ϖ étant la pression extérieure, le second groupe

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &p_{xx}\cos(\mathrm{n}, x) + p_{xy}\cos(\mathrm{n}, y) + p_{xz}\cos(\mathrm{n}, z) = \varpi\cos(\varpi, x),\\ &p_{yx}\cos(\mathrm{n}, x) + p_{yy}\cos(\mathrm{n}, y) + p_{yz}\cos(\mathrm{n}, z) = \varpi\cos(\varpi, y),\\ &p_{zx}\cos(\mathrm{n}, x) + p_{zy}\cos(\mathrm{n}, y) + p_{zz}\cos(\mathrm{n}, z) = \varpi\cos(\varpi, z),\end{aligned}\right.$$

où $p_{xx},\ldots, p_{xy}$ sont des forces qui satisfont aux équations (9), ou aux autres plus générales (13), établies ci-dessus.

3° Les équations de *raccordement* en quelque sorte, qui sont relatives aux points (x, y, z) de la surface de séparation, quelle qu'elle soit, des parties élastiques et des parties plastiques : ces équations, exprimant l'équilibre d'une couche mince de transition, entre les pressions p^{e} régnant du côté élastique et les pressions p régnant du côté plastique, seront, n désignant encore les directions des normales à cette surface,

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &(p^{e}_{xx}-p_{xx})\cos(\mathrm{n}, x)+(p^{e}_{xy}-p_{xy})\cos(\mathrm{n}, y)+(p^{e}_{xz}-p_{xz})\cos(\mathrm{n}, z)=0,\\ &(p^{e}_{yx}-p_{yx})\cos(\mathrm{n}, x)+(p^{e}_{yy}-p_{yy})\cos(\mathrm{n}, y)+(p^{e}_{yz}-p_{yz})\cos(\mathrm{n}, z)=0,\\ &(p^{e}_{zx}-p_{zx})\cos(\mathrm{n}, x)+(p^{e}_{zy}-p_{xy})\cos(\mathrm{n}, y)+(p^{e}_{zz}-p_{zz})\cos(\mathrm{n}, z)=0.\end{aligned}\right.$$

4° On peut mettre aussi au nombre des équations ou conditions définies celles qui assignent, pour certains endroits de la surface, la grandeur supposée connue de la vitesse, comme on a dit à la fin du n° **9**.

Enfin il faut poser des équations d'équilibre, pour la partie restée ou redevenue élastique, limitée, soit de toutes parts, soit de certains côtés seulement, par la surface de raccordement dont nous venons de parler, et, dans ce dernier cas, aussi par quelque portion de la surface-enveloppe extérieure. Ces équations indéfinies seront, X_e, Y_e, Z_e désignant les composantes suivant x, y, z, des forces qui agissent sur l'unité de sa masse

(22) Les trois trinômes différentiels (3) avec des p^e au lieu des p $= \begin{cases} -\rho X_e, \\ \text{ou } -\rho Y_e, \\ \text{ou } -\rho Z_e. \end{cases}$

La surface de séparation des parties élastiques et des parties plastiques devra être cherchée, de manière que ses coordonnées satisfassent aux équations définies de raccordement (21). Les équations indéfinies telles que (9) ou (13) et (22), si l'on parvient à les intégrer de manière à satisfaire aux autres équations définies (19), (20), donneront les pressions et les vitesses.

12. Quelque compliqué que soit en général un pareil problème, il peut être facilement résolu dans quelques cas.

Supposons, par exemple, que l'on torde lentement, de manière à le déformer d'une manière persistante et croissante, sans le rompre, un cylindre d'un métal ductile, à base circulaire. On suppose que les forces sont appliquées seulement sur les bases extrêmes [*], de manière à avoir une torsion constante d'un bout à l'autre, et que sur la face latérale il ne s'exerce aucune pression.

On aura, l'axe du cylindre étant pris pour celui des x, et aucune traction n'étant supposée exercée longitudinalement,

$$N_x = 0, \quad N_y = 0, \quad N_z = 0, \quad T_x = p_{yz} = 0.$$

Les formules (12) et la quatrième (13) se réduisent à

$$(23) \qquad \mathrm{q} = -T_y^2 - T_z^2, \quad \mathrm{r} = 0, \quad \text{et} \quad T_y^2 + T_z^2 = K^2,$$

exprimant simplement que, sur les sections transversales, la plus grande composante tangentielle de pression, qui est nécessairement

[*] *Mémoire sur la torsion* au tome XIV des *Savants étrangers*, ou *Note sur l'édition de* 1864 *des Leçons de Navier*.

dirigée suivant une perpendiculaire au rayon vecteur, a l'intensité K dans l'état plastique. Appelons donc :

R le rayon du cylindre;

R_0 le rayon d'une partie centrale, qui à un instant donné est restée élastique, ou dont les molécules ont conservé les mêmes dispositions mutuelles;

r la distance d'un point quelconque à l'axe;

θ la *torsion*, c'est-à-dire l'angle (ou l'arc en parties du rayon) dont une des bases du cylindre a tourné devant l'autre, divisé par la distance de ces deux bases;

g le *glissement*, ou la petite inclinaison qu'a prise, sur la normale à un élément d'une des sections transversales de la partie élastique, une ligne matérielle qui lui était primitivement normale elle-même;

G le coefficient d'élasticité de glissement de la matière, ou Gg la composante de pression ou traction tangentielle que détermine, par unité de surface, le glissement opéré g;

M le moment, autour de l'axe du cylindre, des forces extérieures déterminant la torsion.

Quelque grand que devienne θ, θr sera petit dans la partie centrale, par cela seul qu'on la suppose restée élastique; et, comme les sections sont restées planes, on a

$$g = \theta r.$$

Sur tous les éléments d'une portion de la base, en forme de couronne, dont l'aire est $2\pi r dr$, comprise entre deux cercles de rayon r et $r + dr$, la résistance à la torsion est ainsi $G\theta r$ par unité superficielle de la partie élastique; elle est K dans la partie devenue plastique. Multipliant par les bras de levier r, on a, pour l'égalité à M de la somme totale des moments des résistances,

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} M &= \int_0^{R_0} G\theta r . 2\pi r dr . r + \int_{R_0}^{R} K . 2\pi r dr . r \\ &= 2\pi\left[G\theta \frac{R_0^4}{4} + K\left(\frac{R^3}{3} - \frac{R_0^3}{3}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

Il faut, pour avoir la grandeur du rayon R_0 de la surface de séparation des deux parties, poser l'équation de *raccordement*, dont la forme générale est (21). Ici cette équation est unique et se réduit à

$$(25)\qquad G\theta R_0 - K = 0.$$

Elle ne convient, bien entendu, qu'autant qu'elle donne une valeur de R_0 moindre que R. On a donc :

1° Tant que θ reste $< \frac{K}{GR}$, ou $M < \frac{\pi R^3}{2} K$,

$$(26)\qquad M = \pi G \theta \frac{R^4}{2},$$

équation connue, applicable tant que l'état élastique se conserve partout;

2° A partir de θ devenu $= \frac{K}{GR}$, ou de M devenu $= \frac{\pi R^3}{2} K$,

$$(27)\qquad M = 2\pi K \frac{R^3}{3} - \frac{\pi}{6} \frac{K^4}{G^3\theta^3} = \pi K \left(\frac{2}{3} R^3 - \frac{1}{6} \frac{K^3}{G^3\theta^3}\right).$$

Ce n'est que pour une torsion infinie que M se réduirait à la quantité constante $\frac{2}{3}\pi K R^3$, et qu'on aurait $R_0 = 0$, ou que l'élasticité serait vaincue jusqu'à l'axe.

15. Soit, en second lieu, un prisme rectangle de matière ductile, ayant deux de ses faces horizontales, et les deux autres verticales, auquel on fait éprouver la *flexion* dite *égale* ou *circulaire*, par une application convenable, sur les éléments de ses deux bases, de tractions et de pressions normales faisant *couples*, de sorte que toutes ses *fibres* longitudinales se courbent en arcs de cercle ayant leurs centres sur une même droite horizontale perpendiculaire à leurs plans. Appelons :

$2b$ la largeur horizontale du prisme;

$2c$ sa hauteur ou épaisseur verticale;

$2c_0$ la hauteur de sa partie milieu, de même largeur $2b$, qui est supposée obéir encore à la loi de l'élasticité quand le rayon de courbure moyen a pris une valeur ρ;

E le coefficient d'élasticité d'extension ou de compression des fibres ou éléments longitudinaux de cette partie;

z la distance de chaque fibre à la surface, primitivement horizontale, de celles qui sont restées de même longueur, et situées à égale distance des faces inférieure et supérieure.

Comme les sections transversales sont restées planes et normales aux fibres devenues courbes, celles-ci se sont allongées positivement ou négativement dans les proportions $\frac{z}{\rho}$. Celles de la partie élastique réagissent ou résistent avec une force $\frac{\mathrm{E}z}{\rho}$ par unité superficielle de leur section. Quant aux fibres des deux parties supérieure et inférieure devenues plastiques sur des épaisseurs $c - c_0$, elles réagissent par traction, du côté supérieur ou des z positifs, et par pression ou répulsion du côté des z négatifs, avec une force constante $2\mathrm{K}$, aussi par unité de leur section : car, comme on a, si x est la coordonnée dans la direction des fibres, $\mathrm{N}_z = 0$, $\mathrm{N}_y = 0$, et les $\mathrm{T} = 0$, il en résulte [4e équation (9)] $\frac{\mathrm{N}_x^2}{4} = \mathrm{K}^2$, ou la réaction longitudinale $\mathrm{N}_x = 2\mathrm{K}$.

L'expression du moment de flexion M est donc

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{M} &= \int_{-c_0}^{c_0} \frac{\mathrm{E}z}{\rho} . 2b\,dz.z + \int_{-c}^{-c_0} (-2\mathrm{K}) . 2bz\,dz + \int_{c_0}^{c} 2\mathrm{K}.2bz\,dz \\ &= \frac{4}{3}\frac{\mathrm{E}}{\rho} bc_0^3 + 4\mathrm{K}b(c^2 - c_0^2). \end{aligned}\right.$$

L'équation de raccordement, déterminant la grandeur inconnue de c_0, est

$$(29)\qquad \frac{\mathrm{E}c_0}{\rho} = 2\mathrm{K},$$

qui exige que c_0 soit $< c$. Substituant, on a la formule

$$(30)\qquad \mathrm{M} = 4\mathrm{K}b\left(c^2 - \frac{4}{3}\frac{\mathrm{K}^2\rho^2}{\mathrm{E}^2}\right),$$

applicable seulement pour $\rho =$ ou $< \frac{\mathrm{E}c}{2\mathrm{K}}$, car tant que $\rho > \frac{\mathrm{E}c}{2\mathrm{K}}$ l'élasticité subsiste partout, et l'on a la formule ordinaire $\mathrm{M} = \frac{4}{3}\frac{\mathrm{E}}{\rho}bc^3$. Ce n'est que pour $\rho = 0$ ou une courbure infinie que l'élasticité serait vaincue jusqu'au milieu de l'épaisseur du prisme.

14. Quant aux problèmes de l'*écoulement* et du poinçonnage de métaux ductiles, etc., sur lesquels M. Tresca a présenté des résultats d'expériences, ils sont plus compliqués, et il faudra des artifices d'analyse pour tirer, des équations ci-dessus, leurs solutions approchées. J'insisterai, à ce sujet, sur la nécessité, que j'ai déjà signalée à plusieurs reprises, surtout à la fin de ma Note *Preuve théorique de l'égalité des deux coefficients de résistance*, etc., du 14 février 1870 [*], de faire, sans opérer cette division en plaques ou rondelles qui, de l'aveu de M. Tresca, change tout à fait les conditions du mouvement intérieur (dont elle ne révèle d'ailleurs qu'une faible partie), de nouvelles expériences, préparées de manière à donner la suite des positions prises par les divers points des blocs, et offrant par conséquent des solutions complètes, par les faits, du problème posé. Sans aucun doute, bien des procédés matériels, autres même que celui dont j'ai proposé l'emploi à la Note citée, pourront être imaginés pour ce but par des expérimentateurs ingénieux. C'est seulement lorsque l'on aura acquis, pour un certain nombre de cas, ces données qui aujourd'hui manquent absolument, qu'il sera possible de reconnaître quelles formules, dans les autres cas particuliers, il conviendra le mieux d'essayer pour exprimer les inconnues (u, v, w), afin de satisfaire approximativement aux équations du problème, faute d'en pouvoir trouver les intégrales exactes.

---

[*] *Comptes rendus*, t. LXX, p. 311. Le coefficient de résistance *plastique* à l'extension ou à la compression permanente d'une matière ductile, et celui de sa résistance aussi plastique au glissement ou au cisaillement, ne sont égaux que lorsque la force produisant l'extension longitudinale d'une portion prismatique (rectangle par exemple) est accompagnée et en quelque sorte secondée par une ou deux forces de même intensité K par unité superficielle, produisant la compression dans une ou deux des directions latérales, de sorte que le volume ne change pas. Si les deux faces latérales du prisme rectangle sont *libres*, c'est-à-dire non pressées, il faut, comme on vient de voir (nº **13**), exercer longitudinalement une force double, ou 2K, par unité de la surface des bases. C'est en ce sens qu'il faut entendre l'égalité des deux coefficients de résistance, établie expérimentalement par M. Tresca, et démontrée théoriquement à la Note citée, au moyen de la considération du travail total opéré dans les diverses suppositions.