JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAURICE LEVY

# Extrait du Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état; présenté le 20 juin 1870

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série*, tome 16 (1871), p. 369-372.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1871_2_16__369_0>

# *Extrait du Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état; présenté le 20 juin 1870* [*];

**PAR M. MAURICE LEVY.**

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, séance du 14 février 1871.)

**7.** Dans ce Mémoire, on établit pour des mouvements quelconques dans l'espace, et aussi pour ceux du cas important où tout est symétrique autour d'un axe, les équations générales de ces mouvements de déformation des masses ductiles, qui avaient été données par M. de Saint-Venant le 7 mars 1870 [**], pour le seul cas de mouvements tous semblables dans des plans parallèles, cas où l'on peut abstraire la dimension qui leur est perpendiculaire et ne considérer que deux des trois coordonnées des points.

Soient généralement

$u$, $v$, $w$ les composantes de la vitesse d'un point quelconque du corps ductile dans les sens respectifs de ses coordonnées rectangles $x$, $y$, $z$;

$X_0$, $Y_0$, $Z_0$ les sommes de composantes, dans les mêmes sens, des forces (telles que la pesanteur) émanant de centres d'action éloignés, par unité de masse au même point $(x, y, z)$;

[*] On donne à cet Extrait, tiré des *Comptes rendus*, t. LXX, p. 1323, des numéros d'articles et d'équations faisant suite à ceux du Mémoire de M. de Saint-Venant du 7 mars (voyez ci-dessus p. 308-316), parce qu'il en forme comme un premier complément.

Le Mémoire de M. Levy, *in extenso*, d'après un vote de l'Académie du 10 juillet 1871 (*voir* le Rapport aux *Comptes rendus*, t. LXXIII, p. 86), paraîtra au tome XXI des *Savants étrangers*.

[**] *Comptes rendus*, t. LXX, p. 479.

$N_x$, $N_y$, $N_z$ les composantes normales des pressions ou plutôt des tensions supportées, au même point, par l'unité superficielle de trois petites faces respectivement perpendiculaires aux $x$, aux $y$, aux $z$;

$\Delta_x$, $\Delta_y$, $\Delta_z$ ces trois composantes diminuées de leur moyenne $\frac{1}{3}(N_x + N_y + N_z)$;

$T_x$, $T_y$, $T_z$ les composantes tangentielles des mêmes pressions ou tensions; la première étant la composante suivant les $z$ de la pression sur une face $= 1$ perpendiculaire aux $y$, ou réciproquement; et les deux autres étant des composantes analogues, obtenues en permutant $x, y, z$ circulairement;

$\rho$ la densité de la matière ductile;

K son coefficient de résistance à la rupture par glissement transversal, ou au cisaillement, pour l'unité superficielle.

Si l'on fait, pour abréger,

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{c} \Delta_y \Delta_z + \Delta_z \Delta_x + \Delta_x \Delta_y - T_x^2 - T_y^2 - T_z^2 = q, \\ \Delta_x T_x^2 + \Delta_y T_y^2 + \Delta_z T_z^2 - \Delta_x \Delta_y \Delta_z - 2 T_x T_y T_z = r, \end{array} \right.$$

les neuf équations *indéfinies* ou applicables à tous les points de la masse, propres à déterminer, avec les conditions définies ou *conditions-limites* particulières à chaque problème, les neuf inconnues $u$, $v$, $w$, $N_x$, $N_y$, $N_z$, $T_x$, $T_y$, $T_z$, sont :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{dN_x}{dx} + \dfrac{dT_z}{dy} + \dfrac{dT_y}{dz} = -\rho\left(X_0 - \dfrac{du}{dt} - u\dfrac{du}{dx} - v\dfrac{du}{dy} - w\dfrac{du}{dz}\right), \\ \dfrac{dT_z}{dx} + \dfrac{dN_y}{dy} + \dfrac{dT_x}{dz} = -\rho\left(Y_0 - \dfrac{dv}{dt} - u\dfrac{dv}{dx} - v\dfrac{dv}{dy} - w\dfrac{dv}{dz}\right), \\ \dfrac{dT_y}{dx} + \dfrac{dT_x}{dy} + \dfrac{dN_z}{dz} = -\rho\left(Z_0 - \dfrac{dw}{dt} - u\dfrac{dw}{dx} - v\dfrac{dw}{dy} - w\dfrac{dw}{dz}\right), \\ 4(K^2 + q)(4K^2 + q) + 27r^2 = 0, \\ \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dy} + \dfrac{dw}{dz} = 0, \\ \dfrac{T_x}{\dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy}} = \dfrac{T_y}{\dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz}} = \dfrac{T_z}{\dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}} = \dfrac{N_y - N_z}{2\left(\dfrac{dv}{dy} - \dfrac{dw}{dz}\right)} = \dfrac{N_z - N_x}{2\left(\dfrac{dw}{dz} - \dfrac{du}{dx}\right)}. \end{array} \right.$$

Lorsqu'on peut abstraire la coordonnée $y$, la deuxième équation (13) n'existe pas, vu qu'on a $T_x = 0$, $T_z = 0$, $v = 0$, et les $\frac{d}{dy}$ nuls. La quatrième équation, fort compliquée comme on voit dans le cas général, se réduit à $4T_y^2 + (N_z - N_x)^2 = 4K^2$ ou à (6). Les quatre dernières se réduisent à deux, dont une seulement [la cinquième (9)] avait été donnée le 7 mars par M. de Saint-Venant, vu qu'il ne s'occupait pas de la composante $N_y$, moins utile à considérer, et qui cependant existe et est égale à $\frac{1}{2}(N_x + N_z)$ : cette valeur de $N_y$ résulte en effet de la dernière des égalités (13) et de ce que $\frac{dv}{dy} = 0$, $\frac{dw}{dz} = -\frac{du}{dx}$; d'où

$$\frac{N_y - N_z}{2\frac{du}{dx}} = \frac{N_z - N_x}{-4\frac{du}{dx}} \quad \text{ou} \quad 2N_y - 2N_z = -N_z + N_x,$$

ce qui donne bien

$$N_y = \frac{N_z + N_x}{2}.$$

**8.** Lorsqu'il y a symétrie autour de l'axe des $z$, cas intéressant à considérer, car c'est celui des expériences de M. Tresca, tant d'*écoulement* que de poinçonnage, si l'on nomme :

U, W les composantes de la vitesse d'un point du bloc ductile cylindrique suivant le rayon vecteur $r$ tiré perpendiculairement de ce point sur l'axe, et suivant la coordonnée $z$;

$N_r$, $N_z$, $N_\omega$ les composantes normales de pression par unité superficielle sur des faces perpendiculaires à $r$ et à $z$, et sur une face méridienne, se croisant toutes trois au même point;

$T = p_{zr}$ la composante, suivant le rayon $r$, de la pression s'exerçant sur une face perpendiculaire à l'axe de symétrie, ou bien celle, de même grandeur, suivant une parallèle à l'axe, de la pression sur une face perpendiculaire au rayon;

$R_0$, $Z_0$ les composantes de la force extérieure s'exerçant par unité de masse, parallèlement aux $r$ et aux $z$ respectivement;

L'on a, pour déterminer U, W, $N_r$, $N_z$, $N_\omega$, T, les six équations indéfinies :

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{dN_r}{dr}+\frac{dT}{dz}+\frac{N_r-N_\omega}{r}=-\rho\left(R_0-\frac{dU}{dt}-U\frac{dU}{dr}-W\frac{dU}{dz}\right),\\
&\frac{dT}{dr}+\frac{dN_z}{dz}+\frac{T}{r}=-\rho\left(Z_0-\frac{dW}{dt}-U\frac{dW}{dr}-W\frac{dW}{dz}\right),\\
&4T^2+(N_r-N_z)^2=4K^2,\\
&\frac{dU}{dr}+\frac{U}{r}+\frac{dW}{dz}=0,\\
&\frac{T}{\frac{dW}{dr}+\frac{dU}{dz}}=\frac{N_r-N_z}{2\left(\frac{dU}{dr}-\frac{dW}{dz}\right)}=\frac{N_r-N_\omega}{2\left(\frac{dU}{dr}-\frac{U}{r}\right)}.
\end{aligned}\right.$$

On peut ordinairement, vu que les mouvements sont généralement supposés très-lents, et que les effets de la pesanteur sont négligeables, mettre zéro à la place des seconds membres des trois premières équations (13) ou des deux premières (14).

C'est ce qu'on ne ferait pas si, au lieu d'un solide ductile déformé lentement, on avait une pâte molle ou un liquide visqueux dont les parties fussent mues avec des vitesses telles, que les effets de l'inertie de la matière et des actions moléculaires dynamiques ne seraient pas négligeables. Et l'on a pu voir (n° **6**, page 316) que M. de Saint-Venant ajoute alors, à ce qui entre dans les premiers membres des premières équations, des termes différentiels comme ceux des équations et formules du mouvement des fluides, de Navier, Poisson et Cauchy, termes affectés d'un coefficient de frottement intérieur $\varepsilon$ qu'il ne faut point confondre avec K, ce dernier mesurant alors la *viscosité* du liquide ou la cohésion de la pâte.