# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE



SIMON NEWCOMB


**Théorie des perturbations de la Lune qui sont dues à l'action des planètes**


*Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série*, tome 16 (1871), p. 321-368.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1871_2_16__321_0>

## *Théorie des perturbations de la Lune qui sont dues à l'action des planètes;*

PAR M. SIMON NEWCOMB.

### § I.

Tous les géomètres qui se sont occupés jusqu'ici de la théorie de la Lune ont considéré le problème comme celui de déterminer les perturbations du mouvement elliptique de la Lune autour de la Terre. Lorsqu'il ne s'agit que du mouvement du système de trois corps que forment le Soleil, la Lune et la Terre, cette manière d'aborder le problème est la plus facile que les géomètres ont jusqu'ici imaginée. Mais, lorsqu'on considère les perturbations qui sont produites par les planètes, cette méthode est sujette à l'inconvénient de donner deux sortes de perturbations : l'une, celles qui sont produites par l'action directe de la planète sur la Terre et la Lune; l'autre, celles qui sont produites par les altérations de la force perturbatrice du Soleil à cause des perturbations du mouvement de la Terre autour du Soleil. Il s'ensuit qu'on ne peut déterminer les perturbations dont il s'agit à moins qu'on ne détermine d'abord complétement les perturbations du mouvement de la Terre. De plus, l'action perturbatrice du Soleil sur la Lune étant sensiblement différente à cause des perturbations exercées sur la Lune par la planète, il faut pousser les approximations à la deuxième ou même à la troisième dimension de la force perturbatrice du Soleil multipliée par la force perturbatrice de la planète, ce qui rend le problème bien complexe et bien difficile.

La force perturbatrice de la planète étant actuellement bien petite, et les deux sortes de perturbations susdites étant du même ordre de grandeur, ne peut-on pas effectuer l'intégration de manière à éviter ses produits par la force perturbatrice du Soleil? Pour ce but, il est nécessaire et suffisant qu'on regarde l'attraction du Soleil comme une des forces principales du système, au lieu de la regarder comme force perturbatrice. Si l'on considère le mouvement d'un système de trois corps abandonnés à leur attraction mutuelle, on sait qu'on peut exprimer les coordonnées de chaque corps en fonction de dix-huit constantes arbitraires, et du temps. En prenant le Soleil, la Terre et la Lune comme un tel système, on sait que plusieurs géomètres modernes sont parvenus à obtenir ces expressions avec un haut degré d'approximation. Donc, pour obtenir avec toute rigueur les intégrales du mouvement, dans le cas où l'on introduit la force perturbatrice d'une planète, il suffit de regarder ces dix-huit constantes comme variables, et de les déterminer en fonction du temps par la méthode célèbre de Lagrange.

## § II.

Soient :

$\xi_1, \eta_1, \zeta_1$ les coordonnées rectangulaires du Soleil rapportées à des axes quelconques fixes dans l'espace;

$\xi_2, \eta_2, \zeta_2$ les coordonnées correspondantes de la Terre;

$\xi_3, \eta_3, \zeta_3$ les coordonnées correspondantes de la Lune;

$m_1$ la masse du Soleil;

$m_2$ celle de la Terre;

$m_3$ celle de la Lune;

$\Omega$ le potentiel de la force mutuelle attractive de ces trois corps que l'on forme en prenant la somme des produits des masses de chaque paire des corps divisée par leur distance mutuelle;

R les termes qui sont ajoutés au potentiel par l'action perturbatrice de la planète.

Supposons d'abord que les trois corps dont il s'agit soient abandonnés à leur attraction mutuelle. On sait que les équations différentielles de leur mouvement peuvent s'écrire sous la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} m_i \dfrac{d^2\xi_i}{dt^2} = \dfrac{d\Omega}{d\xi_i}, \\ m_i \dfrac{d^2\eta_i}{dt^2} = \dfrac{d\Omega}{d\eta_i}, \\ m_i \dfrac{d^2\zeta_i}{dt^2} = \dfrac{d\Omega}{d\zeta_i}. \end{cases}$$

Dans ces équations, on attribue successivement à l'indice $i$ les valeurs 1, 2 et 3, pour obtenir les équations qui correspondent au mouvement du Soleil, de la Terre et de la Lune.

La forme la plus générale des intégrales de ces équations sera

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \xi_1 = \mathrm{F}_1, & \eta_1 = \psi_1, & \zeta_1 = \varphi_1; \\ \xi_2 = \mathrm{F}_2, & \eta_2 = \psi_2, & \zeta_2 = \varphi_2; \\ \xi_3 = \mathrm{F}_3, & \eta_3 = \psi_3, & \zeta_3 = \varphi_3. \end{array}\right.$$

Chacune des expressions F, $\psi$, $\varphi$ est fonction du temps et de dix-huit constantes arbitraires, lesquelles peuvent être représentées par

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\ldots,\quad a_{18}.$$

Supposons maintenant qu'on soit parvenu à trouver des expressions de la forme (2) qui satisfassent aux équations différentielles (1). Cherchons comment on peut faire usage de ces expressions pour obtenir les intégrales complètes du mouvement des trois corps quand ils sont troublés par l'action d'une planète. Posons :

$m_4$ la masse de la planète;

$\Delta_{1,4}$, $\Delta_{2,4}$, $\Delta_{3,4}$ sa distance au Soleil, à la Terre et à la Lune respectivement. Nous aurons

$$\mathrm{R} = \frac{m_1 m_4}{\Delta_{1,4}} + \frac{m_2 m_4}{\Delta_{2,4}} + \frac{m_3 m_4}{\Delta_{3,4}}.$$

Les équations qu'il faut intégrer seront

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} m_i \dfrac{d^2\xi_i}{dt^2} = \dfrac{d\Omega}{d\xi_i} + \dfrac{d\mathrm{R}}{d\xi_i}, \\ m_i \dfrac{d^2\eta_i}{dt^2} = \dfrac{d\Omega}{d\eta_i} + \dfrac{d\mathrm{R}}{d\eta_i}, \\ m_i \dfrac{d^2\zeta_i}{dt^2} = \dfrac{d\Omega}{d\zeta_i} + \dfrac{d\mathrm{R}}{d\zeta_i}, \end{array}\right.$$

dans lesquelles, comme précédemment, il faut attribuer à l'indice $i$ successivement les valeurs 1, 2, 3.

La théorie de la variation des constantes arbitraires, telle qu'elle a été développée par l'immortel Lagrange, nous conduit à ce résultat, que les équations (3) peuvent être satisfaites par les intégrales (2), pourvu qu'on substitue, pour les constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_{18}$, dix-huit fonctions du temps, qu'on détermine de la manière que voici :

Qu'on différentie les équations (2) en y regardant le temps $t$ seul comme variable, et qu'on pose

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \xi'_1 = \dfrac{dF_1}{dt}, & \eta'_1 = \dfrac{d\psi_1}{dt}, & \zeta'_1 = \dfrac{d\varphi_1}{dt}; \\ \xi'_2 = \dfrac{dF_2}{dt}, & \eta'_2 = \dfrac{d\psi_2}{dt}, & \zeta'_2 = \dfrac{d\varphi_2}{dt}; \\ \xi'_3 = \dfrac{dF_3}{dt}, & \eta'_3 = \dfrac{d\psi_3}{dt}, & \zeta'_3 = \dfrac{d\varphi_3}{dt}; \end{array}\right.$$

qu'on forme ensuite des équations (2) et (4) les dérivées partielles de chacune des dix-huit quantités $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ rapportées à chacune des constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_{18}$, et, de ces dérivées, qu'on forme, pour chaque couple des constantes arbitraires, les expressions

$$(a, a', 1) = \frac{d\xi_1}{da}\frac{d\xi'_1}{da'} - \frac{d\xi_1}{da'}\frac{d\xi'_1}{da} + \frac{d\eta_1}{da}\frac{d\eta'_1}{da'} - \frac{d\eta_1}{da'}\frac{d\eta'_1}{da} + \frac{d\zeta_1}{da}\frac{d\zeta'_1}{da'} - \frac{d\zeta_1}{da'}\frac{d\zeta'_1}{da},$$

$$(a, a', 2) = \frac{d\xi_2}{da}\frac{d\xi'_2}{da'} - \frac{d\xi_2}{da'}\frac{d\xi'_2}{da} + \frac{d\eta_2}{da}\frac{d\eta'_2}{da'} - \frac{d\eta_2}{da'}\frac{d\eta'_2}{da} + \frac{d\zeta_2}{da}\frac{d\zeta'_2}{da'} - \frac{d\zeta_2}{da'}\frac{d\zeta'_2}{da},$$

$$(a, a', 3) = \frac{d\xi_3}{da}\frac{d\xi'_3}{da'} - \frac{d\xi_3}{da'}\frac{d\xi'_3}{da} + \frac{d\eta_3}{da}\frac{d\eta'_3}{da'} - \frac{d\eta_3}{da'}\frac{d\eta'_3}{da} + \frac{d\zeta_3}{da}\frac{d\zeta'_3}{da'} - \frac{d\zeta_3}{da'}\frac{d\zeta'_3}{da},$$

$$(5)\qquad (a, a') = m_1(a, a', 1) + m_2(a, a', 2) + m_3(a, a', 3);$$

qu'on substitue dans l'expression R, pour $\xi, \eta, \zeta$, dont $\Delta_{1,4}, \Delta_{2,4}, \Delta_{3,4}$ sont des fonctions, leurs valeurs (3), par où R deviendra fonction des arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_{18}$, et du temps, et qu'on forme les dix-huit équations différentielles simultanées

$$(6)\left\{\begin{array}{l} (a_1, a_2)\dfrac{da_2}{dt} + (a_1, a_3)\dfrac{da_3}{dt} + (a_1, a_4)\dfrac{da_4}{dt} + \ldots + (a_1, a_{18})\dfrac{da_{18}}{dt} = \dfrac{dR}{da_1}, \\ (a_2, a_1)\dfrac{da_1}{dt} + (a_2, a_3)\dfrac{da_3}{dt} + (a_2, a_4)\dfrac{da_4}{dt} + \ldots + (a_2, a_{18})\dfrac{da_{18}}{dt} = \dfrac{dR}{da_2}, \\ (a_3, a_1)\dfrac{da_1}{dt} + (a_3, a_2)\dfrac{da_2}{dt} + (a_3, a_4)\dfrac{da_4}{dt} + \ldots + (a_3, a_{18})\dfrac{da_{18}}{dt} = \dfrac{dR}{da_3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (a_{18}, a_1)\dfrac{da_1}{dt} + (a_{18}, a_2)\dfrac{da_2}{dt} + (a_{18}, a_3)\dfrac{da_3}{dt} + \ldots + (a_{18}, a_{17})\dfrac{da_{17}}{dt} = \dfrac{dR}{da_{18}}. \end{array}\right.$$

Alors, en substituant, dans les équations (2), pour $a_1$, $a_2, \ldots, a_{18}$, des fonctions du temps qui puissent satisfaire à ces équations (6), les intégrales (2) satisferont identiquement aux équations (3), et seront, par conséquent, celles que nous cherchons.

On remarque que, puisque nous avons

$$(a_i, a_i) = 0,$$
$$(a_i, a_j) = -(a_j, a_i),$$

le nombre total des coefficients $(a_i, a_j)$ qu'il faut calculer se monte au plus à

$$\frac{17 \times 18}{2} = 153.$$

Chacune de ces quantités étant composée de dix-huit produits d'expressions fort complexes, s'il fallait calculer chacune à part, le problème serait presque inabordable. Mais nous verrons dans la suite qu'on peut choisir les constantes arbitraires de manière à simplifier beaucoup le problème. Pour ce but, il faut d'abord considérer la forme qu'on peut donner aux expressions (2).

## § III.

Nous nous rappellerons que les expressions (2) sont, par hypothèse, la solution complète du problème des trois corps. Voyons les données que les géomètres nous ont fournies pour une telle solution dans les cas que nous considérons.

**1.** Nous avons la solution du problème du mouvement du centre de gravité de la Terre et de la Lune autour du Soleil. On sait que, quand le nombre des corps attractifs s'est réduit à ces trois, ce centre se meut à peu près dans une ellipse dont le périhélie a un mouvement séculaire très-lent, la déviation de cette ellipse étant si petite que les astronomes l'ont négligée jusqu'ici. Cependant nous ne la négligerons pas jusqu'à ce que nous ayons montré qu'elle est sans effet dans le problème dont il s'agit. Les coordonnées elliptiques du centre de gravité rapportées au Soleil sont fonctions de six constantes arbitraires que nous pouvons regarder comme les éléments elliptiques du mouvement relatif du Soleil et dudit centre, et les déviations de l'ellipse sont fonctions de ces éléments et aussi des éléments du mouvement de la Lune autour de la Terre.

**2.** Le problème du mouvement relatif de la Lune autour de la Terre a été traité avec tant de succès par MM. Hansen, Delaunay, et d'autres grands géomètres de notre siècle, qu'il nous est permis de le considérer comme résolu avec un degré d'approximation bien au delà de nos présents besoins. La solution de M. Hansen n'étant pas donnée en forme analytique, nous adopterons la solution de M. Delaunay, qu'on peut trouver dans le tome II de sa *Théorie du mouvement de la Lune*. En toute rigueur, il faut compléter la solution en y ajoutant les termes qui proviennent du mouvement de la Terre relativement au centre de gravité de la Terre et de la Lune, ce qui est bien facile. Ainsi, nous aurons les coordonnées relatives de la Lune et de la Terre en fonction des six constantes arbitraires qui sont propres au mouvement de la Lune, et des six éléments du mouvement elliptique du centre commun de gravité de la Lune et de la Terre autour du Soleil.

**3.** Ayant ainsi obtenu des expressions pour le mouvement relatif de ces trois corps, il nous reste à fixer le mouvement de l'un quelconque des corps, ou bien de leur centre commun de gravité. On sait que ce centre se meut en ligne droite avec une vitesse uniforme. Les six éléments de ce mouvement feront le nombre complet des constantes arbitraires du problème.

Posons :

$x, y, z$ les coordonnées rectangulaires de la Lune rapportées à la Terre;

X, Y, Z les coordonnées rectangulaires du Soleil rapportées au centre de gravité de la Terre et de la Lune;

$a, b, c$ les coordonnées arbitraires du centre commun de gravité du Soleil, de la Terre et de la Lune à l'origine du temps;

$a', b', c'$ ses vitesses arbitraires dans le sens des axes des coordonnées, Posons de plus, pour abréger,

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \mu &= \frac{m_3}{m_2+m_3},\\ \mu' &= \frac{m_2+m_3}{m_1+m_2+m_3}; \end{aligned}\right.$$

nous aurons

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}
\xi_1 &= \mu'\mathrm{X} + a + a't,\\
\eta_1 &= \mu'\mathrm{Y} + b + b't,\\
\zeta_1 &= \mu'\mathrm{Z} + c + c't;\\
\xi_2 &= (\mu'-1)\mathrm{X} - \mu x + a + a't,\\
\eta_2 &= (\mu'-1)\mathrm{Y} - \mu y + b + b't,\\
\zeta_2 &= (\mu'-1)\mathrm{Z} - \mu z + c + c't;\\
\xi_3 &= (\mu'-1)\mathrm{X} + (1-\mu)x + a + a't,\\
\eta_3 &= (\mu'-1)\mathrm{Y} + (1-\mu)y + b + b't,\\
\zeta_3 &= (\mu'-1)\mathrm{Z} + (1-\mu)z + c + c't.
\end{aligned}\right.$$

Telle est la forme que peuvent prendre les équations (2). En les différentiant, y regardant le temps seul comme variable, et posant

$$\mathrm{X}' = \frac{d\mathrm{X}}{dt},\ldots,$$

nous trouvons

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}
\xi'_1 &= \mu'\mathrm{X}' + a',\\
\eta'_1 &= \mu'\mathrm{Y}' + b',\\
\zeta'_1 &= \mu'\mathrm{Z}' + c';\\
\xi'_2 &= (\mu'-1)\mathrm{X}' - \mu x' + a',\\
\eta'_2 &= (\mu'-1)\mathrm{Y}' - \mu y' + b',\\
\zeta'_2 &= (\mu'-1)\mathrm{Z}' - \mu z' + c';\\
\xi'_3 &= (\mu'-1)\mathrm{X}' + (1-\mu)x' + a',\\
\eta'_3 &= (\mu'-1)\mathrm{Y}' + (1-\mu)y' + b',\\
\zeta'_3 &= (\mu'-1)\mathrm{Z}' + (1-\mu)z' + c'.
\end{aligned}\right.$$

En prenant les dérivées partielles de $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$, en faisant varier les constantes $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$, nous avons

$$\frac{d\xi_1}{da} = \frac{d\eta_1}{db} = \frac{d\zeta_1}{dc} = \frac{d\xi_2}{da} = \ldots = \frac{d\zeta_3}{dc} = 1,$$

$$\frac{d\xi_i}{da'} = \frac{d\eta_i}{db'} = \frac{d\zeta_i}{dc'} = t,$$

$$\frac{d\xi'_i}{da'} = \frac{d\eta'_i}{db'} = \frac{d\zeta'_i}{dc'} = 1.$$

En formant les expressions (5) à l'aide de ces valeurs des dérivées partielles, nous trouvons

$$(a, a') = (b, b') = (c, c') = m_1 + m_2 + m_3,$$

tandis que toutes les autres combinaisons des six éléments $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$ s'évanouissent.

Les coordonnées relatives X, Y, Z, $x$, $y$, $z$ ne contiennent aucun de ces six éléments, mais seulement les douze autres. Soit $e$ l'un quelconque de ceux-ci. Les formules (5), étant combinées avec celles au-dessus, nous donneront

$$(a, e, 1) = \frac{d\xi'_1}{de},$$

$$(a, e, 2) = \frac{d\xi'_2}{de},$$

$$(a, e, 3) = \frac{d\xi'_3}{de},$$

$$(a, e) = \frac{d}{de}(m_1\xi'_1 + m_2\xi'_2 + m_3\xi'_3).$$

Mais nous avons, par la propriété fondamentale du centre de gravité,

$$m_1\xi'_1 + m_2\xi'_2 + m_3\xi'_3 = (m_1 + m_2 + m_3)a',$$

ce qui ne contient pas $e$; donc

$$(a, e) = 0.$$

De même, nous avons

$$(b, e) = 0,$$

$$(c, e) = 0.$$

En faisant usage encore des formules (5) et en les combinant avec (10), on conclut

$$(a', e, 1) = t\frac{d\xi'_1}{de} - \frac{d\xi_1}{de},$$

$$(a', e, 2) = t\frac{d\xi'_2}{de} - \frac{d\xi_2}{de},$$

$$(a', e, 3) = t\frac{d\xi'_3}{de} - \frac{d\xi_3}{de},$$

$$(a', e) = t\frac{d}{de}(m_1\xi'_1 + m_2\xi'_2 + m_3\xi'_3) - \frac{d}{de}(m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + m_3\xi_3).$$

Les coordonnées du centre de gravité ne contenant pas $e$, nous avons

$$(a', e) = 0,$$

et, de la même manière,

$$(b', e) = 0,$$
$$(c', e) = 0.$$

Nous voyons donc que toutes les combinaisons des six éléments qui fixent la position du centre de gravité avec les douze éléments du mouvement relatif des corps s'évanouissent identiquement. Et toutes les combinaisons des mêmes six éléments l'un avec l'autre s'évanouissent, à l'exception de celles dont venons de trouver la valeur $m_1 + m_2 + m_3$. Celles-ci, étant substituées dans les équations générales (6), nous donnent

$$(m_1 + m_2 + m_3)\frac{da'}{dt} = \frac{dR}{da},$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\frac{db'}{dt} = \frac{dR}{db},$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\frac{dc'}{dt} = \frac{dR}{dc},$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\frac{da}{dt} = -\frac{dR}{da'} = -t\frac{dR}{da},$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\frac{db}{dt} = -\frac{dR}{db'} = -t\frac{dR}{db},$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\frac{dc}{dt} = -\frac{dR}{dc'} = -t\frac{dR}{dc}.$$

Ces équations contiennent seulement le principe de la conservation du centre de gravité. Les dérivées partiellles $\frac{dR}{da}$, $\frac{dR}{db}$, $\frac{dR}{dc}$ indiquent les sommes des forces accélératrices qui agissent sur les trois corps dans le sens des trois axes des coordonnées, tandis que $\frac{da'}{dt}$, $\frac{db'}{dt}$, $\frac{dc'}{dt}$ expriment les accélérations du mouvement du centre de gravité. Si, pour le moment, on appelle $\xi$ une des coordonnées de ce centre, nous avons par hypothèse

$$\xi = a + a't;$$

donc

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{da}{dt} + t\frac{da'}{dt} + a'.$$

Les équations que nous venons de trouver donnent

$$\frac{da}{dt} + t\frac{da'}{dt} = 0;$$

donc

$$\frac{d\xi}{dt} = a',$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\frac{d^2\xi}{dt^2} = (m_1 + m_2 + m_3)\frac{da'}{dt} = \frac{dR}{da}.$$

Les équations correspondant aux trois axes coordonnés sont celles de la conservation du centre de gravité.

Comme, dans la théorie de la Lune, nous n'avons pas besoin de connaître les douze éléments dont dépend la position de la Lune relativement à la Terre; nous nous dispenserons de la considération des éléments qui se rapportent au centre de gravité. Nous avons montré que toutes les combinaisons $(e, a)$, $(e, a')$, etc., de l'un quelconque des éléments que nous cherchons avec l'un quelconque des éléments qui fixent la position du centre de gravité, s'évanouissent; nous n'avons qu'à considérer les combinaisons des douze éléments entre eux-mêmes. Le nombre des combinaisons se réduit à

$$\frac{11 \times 12}{2} = 66.$$

Représentons par $a$, $e$ deux quelconques de ces douze éléments qui entrent dans X, Y, Z, $x, y, z$. Différentions les équations (8) et (9) par rapport aux éléments $a$ et $e$, et formons les expressions (5). Si nous posons, pour abréger,

$$(10)\left\{\begin{aligned}
(a, e, \mathrm{X}) &= \frac{d\mathrm{X}}{da}\frac{d\mathrm{X}'}{de} - \frac{d\mathrm{X}}{de}\frac{d\mathrm{X}'}{da} + \frac{d\mathrm{Y}}{da}\frac{d\mathrm{Y}'}{de} - \frac{d\mathrm{Y}}{de}\frac{d\mathrm{Y}'}{da} + \frac{d\mathrm{Z}}{da}\frac{d\mathrm{Z}'}{de} - \frac{d\mathrm{Z}}{de}\frac{d\mathrm{Z}'}{da},\\
(a, e, x) &= \frac{dx}{da}\frac{dx'}{de} - \frac{dx}{de}\frac{dx'}{da} + \frac{dy}{da}\frac{dy'}{de} - \frac{dy}{de}\frac{dy'}{da} + \frac{dz}{da}\frac{dz'}{de} - \frac{dz}{de}\frac{dz'}{da},\\
(a, e, \mathrm{X}, x) &= \frac{d\mathrm{X}}{da}\frac{dx'}{de} - \frac{d\mathrm{X}}{de}\frac{dx'}{da} + \frac{d\mathrm{X}'}{de}\frac{dx}{da} - \frac{d\mathrm{X}'}{da}\frac{dx}{de}\\
&+ \frac{d\mathrm{Y}}{da}\frac{dy'}{de} - \frac{d\mathrm{Y}}{de}\frac{dy'}{da} + \frac{d\mathrm{Y}'}{de}\frac{dy}{da} - \frac{d\mathrm{Y}'}{da}\frac{dy}{de}\\
&+ \frac{d\mathrm{Z}}{da}\frac{dz'}{de} - \frac{d\mathrm{Z}}{de}\frac{dz'}{da} + \frac{d\mathrm{Z}'}{de}\frac{dz}{da} - \frac{d\mathrm{Z}'}{da}\frac{dz}{de},
\end{aligned}\right.$$

les équations (5) prendront la forme

$$\begin{aligned}
(a, e, 1) &= \mu'^2(a, e, \mathrm{X}),\\
(a, e, 2) &= (1-\mu')^2(a, e, \mathrm{X}) + \mu^2(a, e, x) + \mu(1-\mu')(a, e, \mathrm{X}, x),\\
(a, e, 3) &= (1-\mu')^2(a, e, \mathrm{X})\\
&\quad + (1-\mu)^2(a, e, x) - (1-\mu)(1-\mu')(a, e, \mathrm{X}, x);
\end{aligned}$$

et, en ayant égard aux valeurs (7) de $\mu$ et $\mu'$,

$$(11)\qquad (a, e) = \frac{m_1(m_2+m_3)}{m_1+m_2+m_3}(a, e, \mathrm{X}) + \frac{m_2 m_3}{m_2+m_3}(a, e, x).$$

## § IV.

Dans la solution complète du problème des trois corps, comme il a été présenté par les géomètres, la longitude de la Lune rapportée à l'écliptique, sa latitude au-dessus de ce plan et sa distance au centre de la Terre peuvent s'exprimer dans la forme

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned}
v &= l + \Sigma k \sin \mathrm{N},\\
\beta &= \Sigma c \sin \mathrm{N}',\\
r &= \Sigma k' \cos \mathrm{N}.
\end{aligned}\right.$$

Les coefficients $k$, $c$ et $k'$ représentent des fonctions des cinq constantes arbitraires $a$, $e$, $\gamma$, $a'$, $e'$, qui ont les significations suivantes :

$a$, $a'$ les distances moyennes de la Lune et du Soleil;

$e$, $e'$ les excentricités de leurs orbites;

$\gamma$ le sinus de la demi-inclinaison de l'orbite de la Lune à l'écliptique.

N, N' sont des fonctions linéaires des quatre quantités que l'on peut regarder comme représentant :

1° La distance moyenne de la Lune à son nœud;

2° La distance moyenne du Soleil au même nœud;

3° La distance du périgée de la Lune au même nœud;

4° La distance du périgée du Soleil au même nœud.

Chacune de ces quatre quantités est de la forme

$$A + bt,$$

A étant une constante arbitraire, et $b$ fonction de $a$, $a'$, $e$, $e'$, $\gamma$. Le signe $\Sigma$ représente une somme infinie de termes, chaque valeur de N ayant sa propre valeur de $k$ et $k'$, et chaque valeur de N' sa propre valeur de $c$.

$l$ est la longitude moyenne de la Lune. Le point d'où nous comptons cette longitude étant tout à fait arbitraire et indépendant des quatre arbitraires dont N se compose, il y a dix constantes arbitraires qui entrent dans les expressions de $v$, $\beta$ et $r$. Les deux arbitraires qui fixent la position du plan arbitraire de XY font le nombre entier douze.

Si nous posons

$$\delta v = \Sigma k \sin N,$$

ce qui donne

$$v = l + \delta v,$$

et si nous représentons par $\xi$, $\eta$, $\zeta$ les coordonnées rectangulaires de la Lune, rapportées à l'écliptique, nous avons

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= r\cos\beta\cos v = r\cos\beta\cos l\cos\delta v - r\cos\beta\sin l\sin\delta v,\\ \eta &= r\cos\beta\sin v = r\cos\beta\sin l\cos\delta v + r\cos\beta\cos l\sin\delta v,\\ \zeta &= r\sin\beta. \end{aligned} \right.$$

Les quantités $\beta$ et $\delta v$ étant très-petites, on peut développer $r\cos\beta\cos\delta v$, $r\cos\beta\sin\delta v$, et $r\sin\beta$ en une série convergente. Comme nous avons

$$\begin{aligned}
\sin\delta v &= \delta v\left(1-\frac{\delta v^2}{2.3}+\frac{\delta v^4}{2.3.4.5}-\ldots\right),\\
\cos\delta v &= 1-\frac{\delta v^2}{2}+\frac{\delta v^4}{2.3.4}-\ldots,\\
\sin\beta &= \beta\left(1-\frac{\beta^2}{2.3}+\frac{\beta^4}{2.3.4.5}-\ldots\right),\\
\cos\beta &= 1-\frac{\beta^2}{2}+\frac{\beta^4}{2.3.4}-\ldots;
\end{aligned}$$

nous voyons facilement que ce développement se mettra sous la forme

$$\begin{aligned}
r\cos\beta\cos\delta v &= \Sigma h\cos\mathrm{N},\\
r\cos\beta\sin\delta v &= \Sigma h'\sin\mathrm{N},\\
r\sin\beta &= \Sigma c'\sin\mathrm{N}',
\end{aligned}$$

$h$, $c$ et N ayant la même forme que dans les valeurs de $v$, $\beta$ et $r$.

En substituant ces valeurs dans les expressions précédentes pour $\xi$, $\eta$ et $\zeta$, celles-ci deviennent

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned}
\xi &= \Sigma k\cos(l+\mathrm{N}),\\
\eta &= \Sigma k\sin(l+\mathrm{N}),\\
\zeta &= \Sigma c'\sin\mathrm{N}',
\end{aligned}\right.$$

où $k = h \pm h'$, et chaque valeur de N est encore fonction linéaire des quatre éléments que nous venons de définir, mais n'est pas nécessairement identique avec les valeurs de N dans les expressions de $v$.

Supposons donc qu'on rapporte la position de la Lune à un système quelconque d'axes rectangulaires fixe dans l'espace, mais ayant leur origine au centre de la Terre. Si l'on représente par a, b, c, a′, b′, c′, a″, b″, c″ les cosinus des angles que font les axes avec ceux qui se rapportent à l'écliptique, de sorte que

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned}
x &= \mathrm{a}\xi+\mathrm{b}\eta+\mathrm{c}\xi,\\
y &= \mathrm{a}'\xi+\mathrm{b}'\eta+\mathrm{c}'\zeta,\\
z &= \mathrm{a}''\xi+\mathrm{b}''\eta+\mathrm{c}''\zeta,
\end{aligned}\right.$$

et si l'on représente par :

$\theta'$ la longitude du nœud ascendant de l'écliptique sur le plan de XY, comptée de l'axe positif de X dans le sens de l'axe positif de Y;

$\tau$ la longitude du même nœud, comptée de l'axe de $\Xi$, dont nous supposons qu'on a compté la longitude moyenne $l$;

$\gamma'$ le sinus de la demi-inclinaison de l'écliptique sur le plan XY, nous aurons

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{a} &= (1-\gamma'^2)\cos(\theta'-\tau)+\gamma'^2\cos(\theta'+\tau),\\
\mathrm{b} &= -(1-\gamma'^2)\sin(\theta'-\tau)+\gamma'^2\sin(\theta'+\tau),\\
\mathrm{c} &= 2\gamma'\sqrt{1-\gamma'^2}\sin\theta';\\
\mathrm{a}' &= (1-\gamma'^2)\sin(\theta'-\tau)+\gamma'^2\sin(\theta'+\tau),\\
\mathrm{b}' &= (1-\gamma'^2)\cos(\theta'-\tau)-\gamma'^2\cos(\theta'+\tau),\\
\mathrm{c}' &= -2\gamma'\sqrt{1-\gamma'^2}\cos\theta';\\
\mathrm{a}'' &= -2\gamma'\sqrt{1-\gamma'^2}\sin\tau,\\
\mathrm{b}'' &= 2\gamma'\sqrt{1-\gamma'^2}\cos\tau,\\
\mathrm{c}'' &= 1-2\gamma'^2.
\end{aligned}\right.$$

Si, dans les équations (15) nous substituons les valeurs (14) de $\xi$, $\eta$, $\zeta$, et les valeurs (16) de a, b, c,..., nous trouvons

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
x = {} & \Sigma k_i(1-\gamma'^2)\cos(\theta'-\tau+l+\mathrm{N}_i)\\
&+\Sigma k_i\gamma'^2\cos(\theta'+\tau-l-\mathrm{N}_i)\\
&-\Sigma c_i\gamma'\sqrt{1-\gamma'^2}\cos(\theta'+\mathrm{N}'_i)\\
&+\Sigma c_i\gamma'\sqrt{1-\gamma'^2}\cos(\theta'-\mathrm{N}'_i),\\
y = {} & \Sigma k_i(1-\gamma'^2)\sin(\theta'-\tau+l+\mathrm{N}_i)\\
&+\Sigma k_i\gamma'^2\sin(\theta'+\tau-l-\mathrm{N}_i)\\
&-\Sigma c_i\gamma'\sqrt{1-\gamma'^2}\sin(\theta'+\mathrm{N}'_i)\\
&+\Sigma c_i\gamma'\sqrt{1-\gamma'^2}\sin(\theta'-\mathrm{N}'_i),\\
z = {} & 2\Sigma k_i\gamma'\sqrt{1-\gamma'^2}\sin(l-\tau+\mathrm{N}_i)\\
&+\Sigma c_i(1-2\gamma'^2)\sin\mathrm{N}'_i.
\end{aligned}\right.$$

Nous voyons que les coefficients des sinus et cosinus des angles variables sont des fonctions des six arbitraires

$$a,\quad e,\quad \gamma,\quad a',\quad e',\quad \gamma',$$

et que les parties constantes de ces angles sont fonction de six autres arbitraires, car ces angles ne contiennent que N, N′, $\theta'$ et $\tau - l$. Nous avons déjà montré que N et N′ sont des fonctions de quatre arbitraires. On peut regarder la partie constante de $\tau - l$ comme fonction d'une seule arbitraire, de sorte qu'avec $\theta$ le nombre entier se monte à six.

Il faut toujours nous rappeler qu'en faisant abstraction de $\theta'$, chacun des angles qui se trouvent sous le signe *sin* ou *cos* est de la forme

$$\mathrm{A} + bt,$$

où $b$ est fonction des arbitraires $a$, $e$, $\gamma$, $a'$, $e'$.

Pour réduire les valeurs (17) de $x$, $y$ et $z$ à une forme générale, mettant en évidence les constantes arbitraires, posons :

$\lambda$ la distance moyenne de la Lune à son nœud sur l'écliptique;
$\lambda'$ la distance moyenne du Soleil au même nœud;
$\omega$ la distance du périgée de la Lune au même nœud;
$\omega'$ la distance du périgée du Soleil au même nœud.

Donc, chaque valeur de N et N′ est fonction linéaire à coefficients constants et entiers des quatre quantités $\lambda$, $\lambda'$, $\omega$, $\omega'$. De plus, déterminons les cinq quantités

$$\varepsilon,\quad \pi,\quad \theta,\quad \varepsilon',\quad \pi',$$

par les équations

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \theta' + l - \tau,\\
\theta &= \varepsilon - \lambda,\\
\pi &= \theta + \omega,\\
\varepsilon' &= \lambda' - \lambda + \varepsilon,\\
\pi' &= \theta + \omega';
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$(18)\qquad \begin{cases} l-\tau = \varepsilon - \theta', \\ \lambda = \varepsilon - \theta, \\ \lambda' = \varepsilon' - \theta, \\ \omega = \pi - \theta, \\ \omega' = \pi' - \theta. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans (17), en ayant égard à la forme de $N_i$, nous voyons que $x$, $y$ et $z$ peuvent se mettre sous la forme

$$(19)\qquad \begin{cases} x = \Sigma k \cos(i\varepsilon + i'\pi + i''\theta + i'''\varepsilon' + i^{\text{IV}}\pi' + i^{\text{V}}\theta'), \\ y = \Sigma k \sin(i\varepsilon + i'\pi + i''\theta + i'''\varepsilon' + i^{\text{IV}}\pi' + i^{\text{V}}\theta'), \\ z = \Sigma c \sin(j\varepsilon + j'\pi + j''\theta + j'''\varepsilon' + j^{\text{IV}}\pi' + j^{\text{V}}\theta'); \end{cases}$$

les coefficients $i$ et $j$ étant des nombres entiers assujettis aux conditions

$$(20)\qquad \begin{cases} i + i' + i'' + i''' + i^{\text{IV}} + i^{\text{V}} = 1, \\ j + j' + j'' + j''' + j^{\text{IV}} + j^{\text{V}} = 0, \end{cases}$$

$k$ et $c$ étant des fonctions des six arbitraires

$$a, \quad e, \quad \gamma, \quad a', \quad e', \quad \gamma',$$

et $\varepsilon$, $\pi$, $\theta'$, $\varepsilon'$, $\pi'$ étant chacune de la forme

$$\text{const.} + bt,$$

où $b$ est fonction des mêmes arbitraires que contiennent $k$ et $c$.

## § V.

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré comment, en partant des expressions connues des coordonnées polaires du Soleil et de la Lune rapportées à l'écliptique, nous pouvons exprimer les coordonnées rectangulaires $x$, $y$, $z$, X, Y, Z, rapportées à des axes quelconques, en fonction de douze constantes arbitraires et du temps. Maintenant, il faut, en partant de ces expressions, déduire les valeurs des soixante-six fonctions $(a, e)$ dont les expressions sont données par les équations (11). S'il fallait, pour ce but, former complétement les expressions $(a, e, X)$, $(a, e, x)$, le travail serait inabordable, à cause de la longueur des calculs. Mais nous pouvons rendre le calcul à la fois élégant et facile, en faisant usage du théorème célèbre de Lagrange, que chaque combinaison, que nous représentons par $(a, e)$, est fonction des constantes arbitraires seules, et ne peut contenir le temps explicitement.

En vertu de ce théorème, nous pouvons, dans la valeur de $(a, e)$, faire $t = 0$; c'est-à-dire, nous pouvons négliger tous les termes qui contiennent le temps comme facteur, parce que leur somme doit s'évanouir identiquement. Nous pouvons aussi négliger la somme de tous les termes périodiques. Car si

$$(a, e) = \sum c \frac{\sin}{\cos}(a + bt),$$

nous avons

$$0 = \frac{d(a, e)}{dt} = \pm \sum bc \frac{\cos}{\sin}(a + bt),$$

équation qui ne peut être satisfaite, à moins qu'on n'ait $b = 0$ ou $c = 0$. Puisque toute fonction linéaire à coefficients constants des quantités périodiques est elle-même périodique, et puisque $(a, e)$ (11) est une telle fonction de $(a, e, X)$ et $(a, e, x)$, il s'ensuit que

$$(21) \qquad (a, e) = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}(a, e, x)_0 + \frac{m_1(m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3}(a, e, X)_0,$$

en désignant par $(a, e, x)_0$ et $(a, e, X_0)$, ce que deviennent $(a, e, x)$ et $(a, e, X)$ lorsque nous omettons tous les termes périodiques et tous les termes qui contiennent le temps $t$ en facteur.

Reprenons les équations (19), en y mettant

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \varepsilon_0 + nt, \\
\pi &= \pi_0 + \pi_1 t, \\
\theta &= \theta_0 + \theta_1 t, \\
\varepsilon' &= \varepsilon'_0 + n't, \\
\pi' &= \pi'_0 + \pi'_1 t.
\end{aligned}$$

Si nous supposons

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= i\varepsilon_0 + i'\pi_0 + i''\theta_0 + i'''\varepsilon'_0 + i^{\text{IV}}\pi'_0 + i^{\text{V}}\theta',\\ b &= in + i'\pi_1 + i''\theta_1 + i'''n' + i^{\text{IV}}\pi'_1,\\ N &= A + bt, \end{aligned}\right.$$

A sera fonction des six constantes angulaires, et $b$ sera fonction des autres constantes, $\gamma'$ étant excepté. En posant de plus N' pour l'angle $j\varepsilon + j'\pi + j''\theta + j'''\varepsilon' + j^{\text{IV}}\pi' + j^{\text{V}}\theta'$, nous aurons

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \Sigma k_i \cos N_i, & x' &= -\Sigma k'_j \sin N_j,\\ y &= \Sigma k_i \sin N_i, & y' &= \Sigma k'_j \cos N_j,\\ z &= \Sigma c_i \sin N'_i, & z' &= \Sigma c'_j \cos N'_j. \end{aligned}\right.$$

Dans ces équations, nous avons mis, pour abréger

$$k' = bk,$$
$$c' = b'e,$$

de sorte que $k'$ et $c'$ sont fonction des mêmes six arbitraires que $k$ et $c$. Il ne faut pas confondre les indices $i$ et $j$ avec les coefficients de $\varepsilon$ : ils ne représentent qu'une série arbitraire de nombres par lesquels nous pouvons distinguer entre les diverses valeurs de $k$, $c$, N et N', qui se trouvent dans les valeurs de $x$, $y$, $z$, $x'$, $y'$, $z'$.

Les équations (23) donnent sur-le-champ

$$\frac{dx}{da} = \sum\left(\frac{dk_i}{da}\cos N_i - k_i\frac{dN_i}{da}\sin N_i\right),$$
$$\frac{dx'}{de} = \sum\left(-\frac{dk'_j}{de}\sin N_j - k'_j\frac{dN_j}{de}\cos N_j\right),$$
$$\frac{dx}{de} = \sum\left(\frac{dk_i}{de}\cos N_i - k_i\frac{dN_i}{de}\sin N_i\right),$$
$$\frac{dx'}{da} = \sum\left(-\frac{dk_j}{da}\sin N_j - k'_j\frac{dN_j}{da}\cos N_j\right),$$
$$\frac{dy}{da} = \sum\left(\frac{dk_i}{da}\sin N_i + k_i\frac{dN_i}{da}\cos N_i\right),$$
$$\frac{dy'}{de} = \sum\left(\frac{dk'_j}{de}\cos N_j - k'_j\frac{dN_j}{de}\sin N_j\right),$$

$$\frac{dy}{de} = \sum \left( \frac{dk_i}{de} \sin N_i + k_i \frac{dN_i}{de} \cos N_i \right),$$

$$\frac{dy'}{da} = \sum \left( \frac{dk'_j}{da} \cos N_j - k'_j \frac{dN_j}{da} \sin N_j \right),$$

$$\frac{dz}{da} = \sum \left( \frac{dc_i}{da} \sin N'_i + c_i \frac{dN'_i}{da} \cos N'_i \right),$$

$$\frac{dz'}{de} = \sum \left( \frac{dc'_j}{de} \cos N'_j - c'_j \frac{dN'_j}{de} \sin N'_j \right),$$

$$\frac{dz}{de} = \sum \left( \frac{dc_i}{de} \sin N'_i + c_i \frac{dN'_i}{de} \cos N'_i \right),$$

$$\frac{dz'}{da} = \sum \left( \frac{dc'_j}{da} \cos N'_j - c'_j \frac{dN'_j}{da} \sin N'_j \right).$$

En substituant ces valeurs dans la seconde des équations (10), et en posant, pour abréger,

$$(\varphi, \theta) = \frac{d\varphi}{da}\frac{d\theta}{de} - \frac{d\varphi}{de}\frac{d\theta}{da},$$

cette équation nous donne

$$(24) \left\{ \begin{aligned} (a, e, x) = \; & \Sigma^2 \{ [k_i, k'_j] + k_i k'_j [N_i, N_j] \} \sin(N_i - N_j) \\ & + \Sigma^2 \{ k_i [N_i, k'_j] - k'_j [k_i, N_j] \} \cos(N_i - N_j) \\ & + \tfrac{1}{2}\Sigma^2 \{ [c_i, c'_j] + c_i c'_j [N'_i, N'_j] \} \sin(N'_i - N'_j) \\ & + \tfrac{1}{2}\Sigma^2 \{ [c_i, c'_j] - c_i c'_j [N'_i, N'_j] \} \sin(N'_i + N'_j) \\ & + \tfrac{1}{2}\Sigma^2 \{ c_i [N'_i, c'_j] - c'_j [c_i, N'_j] \} \cos(N'_i - N'_j) \\ & + \tfrac{1}{2}\Sigma^2 \{ c_i [N'_i, c'_j] + c'_j [c_i, N'_j] \} \cos(N'_i + N'_j). \end{aligned} \right.$$

Nous nous rappellerons que les deux indices $i$, $j$ ont chacun le même système de valeurs, et que leur combinaison sous le signe $\Sigma^2$ indique que chaque valeur de N se combine avec toutes les autres valeurs, en y comprenant elle-même. Pour trouver la fonction que nous cherchons $(a, e, x)_0$, il faut omettre tous les termes périodiques dans (24). En substituant pour $N_i$ et $N_j$ leurs valeurs $A_i + b_i t$ et $A_j + b_j t$, nous voyons que tous les termes seront périodiques, à moins que nous n'ayons, ou

$$b_i - b_j = 0,$$

ou

$$\mathrm{b}'_i \pm \mathrm{b}'_j = 0.$$

Les valeurs de $\mathrm{b}_i$ et $\mathrm{b}_j$ peuvent s'écrire, à cause des équations (22),

$$\begin{aligned}
\mathrm{b}_i &= i_1 n + i'_1 \pi_1 + i''_1 \theta_1 + i'''_1 n' + i^{\text{iv}}_1 \pi'_1,\\
\mathrm{b}_j &= i_2 n + i'_2 \pi_1 + i''_2 \theta_1 + i'''_2 n' + i^{\text{iv}}_2 \pi'_1,\\
\mathrm{b}'_i &= j_1 n + j'_1 \pi_1 + j''_1 \theta_1 + j'''_1 n' + j^{\text{iv}}_1 \pi'_1,\\
\mathrm{b}'_j &= j_2 n + j'_2 \pi_1 + j''_2 \theta_1 + j'''_2 n' + j^{\text{iv}}_2 \pi'_1.
\end{aligned}$$

Il faut donc que nous ayons, ou

$$0 = (i_1 - i_2) n + (i'_1 - i'_2)\pi_1 + (i''_1 - i''_2)\theta_1 + (i'''_1 - i'''_2) n' + (i^{\text{iv}}_1 - i^{\text{iv}}_2)\pi'_1,$$

ou

$$0 = (j_1 \pm j_2) n + (j'_1 \pm j'_2)\pi_1 + (j''_1 \pm j''_2)\theta_1 + (j'''_1 \pm j'''_2) n' + (j^{\text{iv}}_1 \pm j^{\text{iv}}_2)\pi'_1;$$

mais $n$, $\pi_1$, $\theta_1$, $n'$, $\pi'_1$ étant des quantités incommensurables, on ne peut satisfaire à ces équations à moins qu'on n'ait

$$\begin{aligned}
i_1 &= i, & i'_1 &= i'_2, \ldots, & i^{\text{iv}}_1 &= i^{\text{iv}}_2,\\
j_1 &= \mp j_2, & j'_1 &= \mp j'_2, \ldots, & j^{\text{iv}}_1 &= \mp j^{\text{iv}}_2.
\end{aligned}$$

En satisfaisant à ces équations, l'équation (20) donnerait

$$\begin{aligned}
i^{\text{v}}_1 &= i^{\text{v}}_2,\\
j^{\text{v}}_1 &= \mp j^{\text{v}}_2,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\mathrm{A}_i = \mathrm{A}_j, \quad \mathrm{N}_i = \mp \mathrm{N}_j.$$

De cela nous ne retiendrons dans l'équation (24) que les termes qui satisfont à la condition

$$i = j.$$

Nous avons donc, en omettant l'indice $i$,

$$\begin{aligned}
(a, e, x)_0 = {} & \Sigma\{k[\mathrm{N}, k'] - k'[k, \mathrm{N}]\}\\
& + \tfrac{1}{2}\Sigma\{c[\mathrm{N}', c'] - c'[c, \mathrm{N}']\},
\end{aligned}$$

ou, en mettant pour $k'$ sa valeur $\mathrm{b}k$, et $\mathrm{b}'c$ pour $c'$,

$$(a, e, x)_0 = \sum\left[\frac{d(\mathrm{b}k^2)}{de}\frac{d\mathrm{N}}{da} - \frac{d(\mathrm{b}k^2)}{da}\frac{d\mathrm{N}}{de}\right]$$
$$+\tfrac{1}{2}\sum\left[\frac{d(\mathrm{b}'c^2)}{de}\frac{d\mathrm{N}'}{da} - \frac{d(\mathrm{b}'c^2)}{da}\frac{d\mathrm{N}'}{de}\right].$$

En vertu des équations (22), nous avons

$$\frac{d\mathrm{N}}{da} = \frac{d\mathrm{A}}{da} + t\frac{d\mathrm{b}}{da},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En omettant les termes qui contiennent $t$ comme facteur, la valeur de $(a, e, x)$ se réduit à

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} (a, e, x)_0 &= \sum\left[\frac{d\mathrm{A}}{da}\frac{d(\mathrm{b}k^2)}{de} - \frac{d\mathrm{A}}{de}\frac{d(\mathrm{b}k^2)}{da}\right] \\ &+\tfrac{1}{2}\sum\left[\frac{d\mathrm{A}'}{da}\frac{d(\mathrm{b}'c^2)}{de} - \frac{d\mathrm{A}'}{de}\frac{d(\mathrm{b}'c^2)}{da}\right], \end{aligned}\right.$$

$a$ et $e$ représentant deux quelconques des douze arbitraires qui entrent dans les valeurs (19) de $x$, $y$, $z$.

Ces arbitraires se divisent en deux classes.

Classe (1) : les six arbitraires

$$a,\ e,\ \gamma,\ a',\ e',\ \gamma',$$

qui se trouvent dans b, $k$ et $c$, mais pas dans A.

Classe (2) : les six arbitraires

$$\varepsilon_0,\ \pi_0,\ \theta_0,\ \varepsilon'_0,\ \pi'_0,\ \theta'_0,$$

qui se trouvent dans A, A′, mais pas dans b, b′, $k$ ou $c$.

Il est évident que, lorsque les arbitraires $a$, $e$, dans (25), se trouvent, toutes deux, ou dans la classe (1) ou dans la classe (2), la valeur de $(a, e, x)_0$ s'évanouit. Ces combinaisons sont au nombre de trente. Nous n'avons donc à considérer que les combinaisons dans lesquelles une arbitraire se trouve dans une classe, et l'autre dans l'autre. Supposons que $a$ est de la première classe, et $e$ de la seconde; nous avons

$$(a, e, x)_0 = -\sum\left[\frac{dA}{de}\frac{d(\mathrm{b}k^2)}{da} + \frac{1}{2}\frac{dA'}{de}\frac{d(\mathrm{b}'c^2)}{da}\right].$$

La première des équations (22) nous donne

$$\begin{aligned}
&\frac{dA}{d\varepsilon_0} = i, \quad \frac{dA'}{d\varepsilon_0} = j,\\
&\frac{dA}{d\pi_0} = i', \quad \frac{dA'}{d\pi_0} = j',\\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots\\
&\frac{dA}{d\theta'} = i^{\mathrm{v}}, \quad \frac{dA'}{d\theta'} = j^{\mathrm{v}}.
\end{aligned}$$

En remplaçant $e$ par les six constantes $\varepsilon_0$, $\pi_0, \ldots$, nous trouvons donc

$$\begin{aligned}
(a, \varepsilon_0, x) &= -\sum\left[i\frac{d(\mathrm{b}k^2)}{da} + \tfrac{1}{2}j\frac{d(\mathrm{b}'c^2)}{da}\right]\\
&= -\frac{d}{da}\sum(i\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j\mathrm{b}'c^2),\\
(a, \pi_0, x)_0 &= -\frac{d}{da}\sum(i'\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j'\mathrm{b}'c^2),\\
(a, \theta_0, x)_0 &= -\frac{d}{da}\sum(i''\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j''\mathrm{b}'c^2),\\
(a, \varepsilon'_0, x)_0 &= -\frac{d}{da}\sum(i'''\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j'''\mathrm{b}'c^2),\\
(a, \pi'_0, x)_0 &= -\frac{d}{da}\sum(i^{\mathrm{iv}}\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j^{\mathrm{iv}}\mathrm{b}'c^2),\\
(a, \theta'_0, x)_0 &= -\frac{d}{da}\sum(i^{\mathrm{v}}\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j^{\mathrm{v}}\mathrm{b}'c^2).
\end{aligned}$$

Les équations correspondantes en $e$, $\gamma$, $a'$, $e'$, $\gamma'$ se forment en remplaçant $a$ par ces lettres.

Les valeurs de $(a, e, \mathrm{X})$ peuvent se former de la même manière à l'aide des expressions pour X, Y, Z. Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}
(a, \varepsilon_0, \mathrm{X})_0 &= -\frac{d}{da}\sum(\mathrm{IBK}^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{J\,B'C}^2),\\
(a, \pi_0, \mathrm{X})_0 &= -\frac{d}{da}\sum(\mathrm{I'BK}^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{J'B'C}^2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Maintenant nous voyons, en substituant dans l'équation (11), pour $(a, e, x)_0$ et $(a, e, X)_0$, les valeurs trouvées ci-dessus, que les valeurs des trente-six combinaisons de la forme $(a, e)$ peuvent se former comme il suit.

D'abord nous posons, pour abréger,

$$\mu_1 = \frac{m_1(m_2+m_3)}{m_1+m_2+m_3},$$
$$\mu_2 = \frac{m_2 m_3}{m_2+m_3};$$

puis nous formons les six fonctions $k\varepsilon$, $k\pi$, $k\theta$, $k\varepsilon'$, $k\pi'$, $k\theta'$ des équations suivantes :

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}
k\varepsilon &= \mu_1\Sigma(\mathrm{IBK}^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{JB'C}^2) + \mu_2\Sigma(i\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j\mathrm{b'c}^2),\\
k\pi &= \mu_1\Sigma(\mathrm{I'BK}^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{J'B'C}^2) + \mu_2\Sigma(i'\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j'\mathrm{b'c}^2),\\
k\theta &= \mu_1\Sigma(\mathrm{I''BK}^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{J''B'C}^2) + \mu_2\Sigma(i''\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j''\mathrm{b'c}^2),\\
k\varepsilon' &= \mu_1\Sigma(\mathrm{I'''BK}^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{J'''B'C}^2) + \mu_2\Sigma(i'''\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j'''\mathrm{b'c}^2),\\
k\pi' &= \mu_1\Sigma(\mathrm{I^{IV}BK}^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{J^{IV}B'C}^2) + \mu_2\Sigma(i^{\mathrm{IV}}\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j^{\mathrm{IV}}\mathrm{b'c}^2),\\
k\theta' &= \mu_1\Sigma(\mathrm{I^{V}BK}^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{J^{V}B'C}^2) + \mu_2\Sigma(i^{\mathrm{V}}\mathrm{b}k^2 + \tfrac{1}{2}j^{\mathrm{V}}\mathrm{b'c}^2).
\end{aligned}\right.$$

Nous avons alors

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{ll}
(a, \varepsilon_0) = -\dfrac{dk_\varepsilon}{da}, & (e, \varepsilon_0) = -\dfrac{dk_\varepsilon}{de}, \ldots,\\
(a, \pi_0) = -\dfrac{dk_\pi}{da}, & (e, \pi_0) = -\dfrac{dk_\pi}{de}, \ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}\right.$$

Nous avons ainsi réduit le problème de la détermination de tous les coefficients $(a, a')$, qui pouvaient se monter au nombre de deux cent cinquante-trois, à la recherche des six fonctions $k_\varepsilon$, $k_\pi, \ldots$, que nous formons avec facilité, dès que nous avons les coordonnées rectangulaires $x$, $y$, $z$, X, Y, Z développées en la forme déjà donnée.

Si nous substituons les valeurs ci-dessus des coefficients $(a, \varepsilon_0), \ldots$, dans les équations (6), en nous rappelant que tous les coefficients s'évanouissent, à l'exception de ceux ci-dessus, nous aurons les douze équations différentielles qui suivent pour déterminer les douze arbitraires dont il s'agit :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{dk_\varepsilon}{da}\frac{da}{dt}+\frac{dk_\varepsilon}{de}\frac{de}{dt}+\frac{dk_\varepsilon}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dt}+\frac{dk_\varepsilon}{da'}\frac{da'}{dt}+\frac{dk_\varepsilon}{de'}\frac{de'}{dt}+\frac{dk_\varepsilon}{d\gamma'}\frac{d\gamma'}{dt}=\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon_0},\\
&\frac{dk_\pi}{da}\frac{da}{dt}+\frac{dk_\pi}{de}\frac{de}{dt}+\frac{dk_\pi}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dt}+\frac{dk_\pi}{da'}\frac{da'}{dt}+\frac{dk_\pi}{de'}\frac{de'}{dt}+\frac{dk_\pi}{d\gamma'}\frac{d\gamma'}{dt}=\frac{d\mathrm{R}}{d\pi_0},\\
&\frac{dk_\theta}{da}\frac{da}{dt}+\frac{dk_\theta}{de}\frac{de}{dt}+\frac{dk_\theta}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dt}+\frac{dk_\theta}{da'}\frac{da'}{dt}+\frac{dk_\theta}{de'}\frac{de'}{dt}+\frac{dk_\theta}{d\gamma'}\frac{d\gamma'}{dt}=\frac{d\mathrm{R}}{d\theta_0},\\
&\frac{dk_{\varepsilon'}}{da}\frac{da}{dt}+\frac{dk_{\varepsilon'}}{de}\frac{de}{dt}+\frac{dk_{\varepsilon'}}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dt}+\frac{dk_{\varepsilon'}}{da'}\frac{da'}{dt}+\frac{dk_{\varepsilon'}}{de'}\frac{de'}{dt}+\frac{dk_{\varepsilon'}}{d\gamma'}\frac{d\gamma'}{dt}=\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon'_0},\\
&\frac{dk_{\pi'}}{da}\frac{da}{dt}+\frac{dk_{\pi'}}{de}\frac{de}{dt}+\frac{dk_{\pi'}}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dt}+\frac{dk_{\pi'}}{da'}\frac{da'}{dt}+\frac{dk_{\pi'}}{de'}\frac{de'}{dt}+\frac{dk_{\pi'}}{d\gamma'}\frac{d\gamma'}{dt}=\frac{d\mathrm{R}}{d\pi'_0},\\
&\frac{dk_{\theta'}}{da}\frac{da}{dt}+\frac{dk_{\theta'}}{de}\frac{de}{dt}+\frac{dk_{\theta'}}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dt}+\frac{dk_{\theta'}}{da'}\frac{da'}{dt}+\frac{dk_{\theta'}}{de'}\frac{de'}{dt}+\frac{dk_{\theta'}}{d\gamma'}\frac{d\gamma'}{dt}=\frac{d\mathrm{R}}{d\theta'},\\
&\frac{dk_\varepsilon}{da}\frac{d\varepsilon_0}{dt}+\frac{dk_\pi}{da}\frac{d\pi_0}{dt}+\frac{dk_\theta}{da}\frac{d\theta_0}{dt}+\frac{dk_{\varepsilon'}}{da}\frac{d\varepsilon'_0}{dt}+\frac{dk_{\pi'}}{da}\frac{d\pi'_0}{dt}+\frac{dk_{\theta'}}{da}\frac{d\theta'}{dt}=-\frac{d\mathrm{R}}{da},\\
&\frac{dk_\varepsilon}{de}\frac{d\varepsilon_0}{dt}+\frac{dk_\pi}{de}\frac{d\pi_0}{dt}+\frac{dk_\theta}{de}\frac{d\theta_0}{dt}+\frac{dk_{\varepsilon'}}{de}\frac{d\varepsilon'_0}{dt}+\frac{dk_{\pi'}}{de}\frac{d\pi'_0}{dt}+\frac{dk_{\theta'}}{de}\frac{d\theta'}{dt}=-\frac{d\mathrm{R}}{de},\\
&\frac{dk_\varepsilon}{d\gamma}\frac{d\varepsilon_0}{dt}+\frac{dk_\pi}{d\gamma}\frac{d\pi_0}{dt}+\frac{dk_\theta}{d\gamma}\frac{d\theta_0}{dt}+\frac{dk_{\varepsilon'}}{d\gamma}\frac{d\varepsilon'_0}{dt}+\frac{dk_{\pi'}}{d\gamma}\frac{d\pi'_0}{dt}+\frac{dk_{\theta'}}{d\gamma}\frac{d\theta'}{dt}=-\frac{d\mathrm{R}}{d\gamma},\\
&\frac{dk_\varepsilon}{da'}\frac{d\varepsilon_0}{dt}+\frac{dk_\pi}{da'}\frac{d\pi_0}{dt}+\frac{dk_\theta}{da'}\frac{d\theta_0}{dt}+\frac{dk_{\varepsilon'}}{da'}\frac{d\varepsilon'_0}{dt}+\frac{dk_{\pi'}}{da'}\frac{d\pi'_0}{dt}+\frac{dk_{\theta'}}{da'}\frac{d\theta'}{dt}=-\frac{d\mathrm{R}}{da'},\\
&\frac{dk_\varepsilon}{de'}\frac{d\varepsilon_0}{dt}+\frac{dk_\pi}{de'}\frac{d\pi_0}{dt}+\frac{dk_\theta}{de'}\frac{d\theta_0}{dt}+\frac{dk_{\varepsilon'}}{de'}\frac{d\varepsilon'_0}{dt}+\frac{dk_{\pi'}}{de'}\frac{d\pi'_0}{dt}+\frac{dk_{\theta'}}{de'}\frac{d\theta'}{dt}=-\frac{d\mathrm{R}}{de'},\\
&\frac{dk_\varepsilon}{d\gamma'}\frac{d\varepsilon_0}{dt}+\frac{dk_\pi}{d\gamma'}\frac{d\pi_0}{dt}+\frac{dk_\theta}{d\gamma'}\frac{d\theta_0}{dt}+\frac{dk_{\varepsilon'}}{d\gamma'}\frac{d\varepsilon'_0}{dt}+\frac{dk_{\pi'}}{d\gamma'}\frac{d\pi'_0}{dt}+\frac{dk_{\theta'}}{d\gamma'}\frac{d\theta'}{dt}=-\frac{d\mathrm{R}}{d\gamma'}.
\end{aligned}
\right.
\tag{28}
$$

L'intégration de ces équations donnera les valeurs des éléments $a$, $e$, $\gamma$, $a'$, $e'$, $\gamma'$, $\varepsilon_0$, $\pi_0$, $\theta_0$, $\varepsilon'_0$, $\pi'_0$, $\theta'_0$ en fonction du temps, lesquelles, étant substituées dans les équations (19), donneront les valeurs des coordonnées de la Lune qui satisferont aux équations (3).

## § VI.

### *Réduction des équations précédentes aux formes canoniques.*

Les six quantités $k_\varepsilon$, $k_\theta$,... étant chacune fonction des éléments $a$, $e$, $\gamma$, $a'$, $e'$, $\gamma'$, les six premières des équations précédentes donnent immédiatement

$$\frac{dk_\varepsilon}{dt}=\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon_0},\quad \frac{dk_\pi}{dt}=\frac{d\mathrm{R}}{d\pi_0},\ldots.$$

Nous pouvons, de plus, déterminer les valeurs des éléments $a$, $e$, $\gamma$, $a'$, $e'$, $\gamma'$, en fonction des quantités $k_\varepsilon$, $k_\pi$, $k_\theta$, $k_{\varepsilon'}$, $k_{\pi'}$, $k_{\theta'}$, et ainsi, dans les expressions (28) et dans la valeur de R, remplacer celles-là par celles-ci. Si donc nous multiplions la septième de ces équations par $\frac{da}{dk_\varepsilon}$, la huitième par $\frac{de}{dk_\varepsilon}, \ldots$, la douzième étant multipliée par $\frac{d\gamma'}{dk_\varepsilon}$, et, si nous ajoutons les produits ainsi obtenus, en remarquant que la théorie de la différentiation des fonctions inverses nous donne

$$\begin{gathered}
\frac{dk_\varepsilon}{da}\frac{da}{dk_\varepsilon}+\frac{dk_\varepsilon}{de}\frac{de}{dk_\varepsilon}+\frac{dk_\varepsilon}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dk_\varepsilon}+\frac{dk_\varepsilon}{da'}\frac{da'}{dk_\varepsilon}+\frac{dk_\varepsilon}{de'}\frac{de'}{dk_\varepsilon}+\frac{dk_\varepsilon}{d\gamma'}\frac{d\gamma'}{dk_\varepsilon}=1,\\
\frac{dk_\pi}{da}\frac{da}{dk_\varepsilon}+\frac{dk_\pi}{de}\frac{de}{dk_\varepsilon}+\frac{dk_\pi}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dk_\varepsilon}+\frac{dk_\pi}{da'}\frac{da'}{dk_\varepsilon}+\frac{dk_\pi}{de'}\frac{de'}{dk_\varepsilon}+\frac{dk_\pi}{d\gamma'}\frac{d\gamma'}{dk_\varepsilon}=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{gathered}$$

nous trouvons

$$\frac{d\varepsilon_0}{dt}=-\frac{d\mathrm{R}}{dk_\varepsilon}.$$

De même nous avons

$$\frac{d\pi_0}{dt}=-\frac{d\mathrm{R}}{dk_\pi},\quad \frac{d\theta_0}{dt}=-\frac{d\mathrm{R}}{dk_\theta},\ldots.$$

Les équations (28) peuvent donc se réduire à la forme canonique

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dk_\varepsilon}{dt}&=\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon_0}, & \frac{d\varepsilon_0}{dt}&=-\frac{d\mathrm{R}}{dk_\varepsilon};\\
\frac{dk_\pi}{dt}&=\frac{d\mathrm{R}}{d\pi_0}, & \frac{d\pi_0}{dt}&=-\frac{d\mathrm{R}}{dk_\pi};\\
\frac{dk_\theta}{dt}&=\frac{d\mathrm{R}}{d\theta_0}, & \frac{d\theta_0}{dt}&=-\frac{d\mathrm{R}}{dk_\theta};\\
\frac{dk_{\varepsilon'}}{dt}&=\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon'_0}, & \frac{d\varepsilon'_0}{dt}&=-\frac{d\mathrm{R}}{dk_{\varepsilon'}};\\
\frac{dk_{\pi'}}{dt}&=\frac{d\mathrm{R}}{d\pi'_0}, & \frac{d\pi'_0}{dt}&=-\frac{d\mathrm{R}}{dk_{\pi'}}.\\
\frac{dk_{\theta'}}{dt}&=\frac{d\mathrm{R}}{d\theta'_0}, & \frac{d\theta'_0}{dt}&=-\frac{d\mathrm{R}}{dk_{\theta'}}.
\end{aligned}\right.$$

En tirant ces équations des expressions (19), il n'était pas nécessaire de considérer la signification spéciale que nous avons donnée aux éléments $\varepsilon$, $\pi$, $\theta$, $\varepsilon'$, $\pi'$, $\theta'$. Par conséquent, nous pouvons supposer ces éléments remplacés par d'autres sans altérer notre analyse. Par exemple, nous pouvons substituer un nombre quelconque des éléments suivants pour un nombre égal de ceux que nous avons choisis, c'est-à-dire :

Les anomalies moyennes du Soleil et de la Lune;

Leurs distances moyennes du nœud de l'un ou de l'autre;

Les distances de leurs périgées de l'un ou l'autre nœud;

Ou, enfin, toute fonction linéaire de ces éléments.

Comme toute substitution de cette sorte conduit à des formes similaires à (29), il s'ensuit qu'il y a une infinité de formes canoniques comme celle-ci, chaque système de variables ayant son propre système d'équations canoniques. En effet, c'est ce que nous pouvons conclure des équations (29) elles-mêmes. Car déterminons les six éléments $l_1$, $l_2$, $l_3$, $l_4$, $l_5$, $l_6$ à l'aide des équations

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned}
&p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + p_4 l_4 + p_5 l_5 + p_6 l_6 = \varepsilon_0,\\
&q_1 l_1 + q_2 l_2 + q_3 l_3 + q_4 l_4 + q_5 l_5 + q_6 l_6 = \pi_0,\\
&r_1 l_1 + r_2 l_2 + r_3 l_3 + r_4 l_4 + r_5 l_5 + r_6 l_6 = \theta_0,\\
&s_1 l_1 + s_2 l_2 + s_3 l_3 + s_4 l_4 + s_5 l_5 + s_6 l_6 = \varepsilon'_0,\\
&t_1 l_1 + t_2 l_2 + t_3 l_3 + t_4 l_4 + t_5 l_5 + t_6 l_6 = \pi'_0,\\
&u_1 l_1 + u_2 l_2 + u_3 l_3 + u_4 l_4 + u_5 l_5 + u_6 l_6 = \theta'_0,
\end{aligned}\right.$$

$p$, $q$, $r$, ... étant des constantes quelconques dont le déterminant ne s'évanouit pas. Posons, de plus,

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned}
&c_1 = p_1 k_\varepsilon + q_1 k_\pi + r_1 k_\theta + s_1 k_{\varepsilon'} + t_1 k_{\pi'} + u_1 k_{\theta'},\\
&c_2 = p_2 k_\varepsilon + q_2 k_\pi + r_2 k_\theta + s_2 k_{\varepsilon'} + t_2 k_{\pi'} + u_2 k_{\theta'},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&c_6 = p_6 k_\varepsilon + q_6 k_\pi + r_6 k_\theta + s_6 k_{\varepsilon'} + t_6 k_{\pi'} + u_6 k_{\theta'}.
\end{aligned}\right.$$

Multiplions la première des équations (29), à gauche, par $p_1$, la deuxième par $q_1$, la troisième par $r_1$, et ainsi de suite, et ajoutons-les:

nous aurons

$$\frac{dc_1}{dt} = p_1 \frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon_0} + q_1 \frac{d\mathrm{R}}{d\pi_0} + r_1 \frac{d\mathrm{R}}{d\theta_0} + s_1 \frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon'_0} + t_1 \frac{d\mathrm{R}}{d\pi'_0} + u_1 \frac{d\mathrm{R}}{d\theta'_0} = \frac{d\mathrm{R}}{dl_1}.$$

De même, nous aurons

$$\frac{dc_2}{dt} = \frac{d\mathrm{R}}{dl_2}, \quad \frac{dc_3}{dt} = \frac{d\mathrm{R}}{dl_3}, \ldots.$$

Pour obtenir les valeurs de $\frac{dl}{dt}$, supposons que nous ayons tiré des équations (30) les valeurs de $l_1$, $l_2$,... en fonction de $\varepsilon_0$, $\pi_0$,.... En nous rappelant l'égalité des deux déterminants quelconques dont les lignes horizontales de l'une sont identiques avec les lignes verticales de l'autre, il est facile de voir que si nous mettons les valeurs de $l_1$, $l_2$,... ainsi obtenues, sous la forme

$$\begin{aligned} l_1 &= \mathrm{P}_1 \varepsilon_0 + \mathrm{Q}_1 \pi_0 + \mathrm{R}_1 \theta_0 + \mathrm{S}_1 \varepsilon'_0 + \mathrm{T}_1 \pi'_0 + \mathrm{U}_1 \theta'_0, \\ l_2 &= \mathrm{P}_2 \varepsilon_0 + \mathrm{Q}_2 \pi_0 + \mathrm{R}_2 \theta_0 + \mathrm{S}_2 \varepsilon'_0 + \mathrm{T}_2 \pi'_0 + \mathrm{U}_2 \theta'_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_6 &= \mathrm{P}_6 \varepsilon_0 + \mathrm{Q}_6 \pi_0 + \mathrm{R}_6 \theta_0 + \mathrm{S}_6 \varepsilon'_0 + \mathrm{T}_6 \pi'_0 + \mathrm{U}_6 \theta'_0; \end{aligned}$$

celles de $k_\varepsilon$, $k_\pi$,..., obtenues de la même manière des équations (31), seront

$$\begin{aligned} k_\varepsilon &= \mathrm{P}_1 c_1 + \mathrm{P}_2 c_2 + \mathrm{P}_3 c_3 + \mathrm{P}_4 c_4 + \mathrm{P}_5 c_5 + \mathrm{P}_6 c_6, \\ k_\pi &= \mathrm{Q}_1 c_1 + \mathrm{Q}_2 c_2 + \mathrm{Q}_3 c_3 + \mathrm{Q}_4 c_4 + \mathrm{Q}_5 c_5 + \mathrm{Q}_6 c_6, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ k_{\theta'} &= \mathrm{U}_1 c_1 + \mathrm{U}_2 c_2 + \mathrm{U}_3 c_3 + \mathrm{U}_4 c_4 + \mathrm{U}_5 c_5 + \mathrm{U}_6 c_6. \end{aligned}$$

Donc, nous avons, en opérant comme précédemment,

$$\frac{dl_1}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{dc_1}, \quad \frac{dl_2}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{dc_2} \ldots.$$

Nous pouvons donc remplacer les équations (29) par celles qui

*l. l.*

suivent

$$
(32) \quad \begin{cases}
\dfrac{dc_1}{dt} = \dfrac{dR}{dl_1}, & \dfrac{dl_1}{dt} = -\dfrac{dR}{dc_1}, \\
\dfrac{dc_2}{dt} = \dfrac{dR}{dl_2}, & \dfrac{dl_2}{dt} = -\dfrac{dR}{dc_2}, \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots ; \\
\dfrac{dc_6}{dt} = \dfrac{dR}{dl_6}, & \dfrac{dl_6}{dt} = -\dfrac{dR}{dc_6}.
\end{cases}
$$

Pour plus de clarté, récapitulons les résultats auxquels nous sommes arrivé. Nous supposons qu'on soit parvenu à exprimer les cordonnées $x$, $y$, $z$, X, Y, Z sous la forme

$$
\begin{aligned}
x &= \Sigma k \cos(\alpha + bt), \\
y &= \Sigma k \sin(\alpha + bt), \\
z &= \Sigma c \sin(\alpha' + b't), \\
X &= \Sigma K \cos(A + Bt), \\
Y &= \Sigma K \sin(A + Bt), \\
Z &= \Sigma C \sin(A' + B't),
\end{aligned}
$$

où $k$, $c$, $b$, $b'$, K, C, B, B' sont des fonctions des constantes arbitraires $a$, $e$, $\gamma$, $a'$, $e'$, $\gamma'$, et $\alpha$, $\alpha'$, A, A' sont des fonctions linéaires à coefficients constants et entiers des six arbitraires $l_1$, $l_2$, $l_3$, $l_4$, $l_5$, $l_6$, desquelles dépendent les positions moyennes du Soleil et de la Lune, de leurs nœuds et de leurs périgées à l'origine de temps. Nous avons, pour chaque coordonnée, une série infinie de termes, lesdites fonctions étant différentes pour chaque terme. Alors :

1° Pour chaque terme de $x$, formons le produit

$$\frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3} bk^2,$$

que nous représenterons, pour abréger, par $k_1$. Pour chaque terme de $z$, formons le produit

$$\frac{1}{2} \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3} b'c^2 = c_1.$$

Pour chaque terme de X, formons le produit

$$\frac{m_1(m_2+m_3)}{m_1+m_2+m_3}\,\mathrm{BK}^2 = \mathrm{K}_1.$$

Pour chaque terme de Z, formons le produit

$$\frac{m_1(m_2+m_3)}{m_1+m_2+m_3}\,\mathrm{B'C}^2 = \mathrm{C}_1.$$

2° Multiplions chaque valeur de $k_1$ par le coefficient correspondant de $l_1$ dans l'expression qui donne $\alpha$ en fonction de $l_1, l_2,\ldots$. Multiplions chaque valeur de $c_1$ par le coefficient de $l_1$ dans $\alpha'$. Multiplions chaque $\mathrm{K}_1$ par le coefficient de $l_1$ dans A. Multiplions chaque $\mathrm{C}_1$ par le coefficient de $l_1$ dans A'. Ajoutons tous les produits ainsi formés, en appelant leur somme $c_1$. De même, des coefficients de $l_2$ forment la valeur de $c_2$, et ainsi de suite pour les six éléments.

3° Dans l'expression de R, remplaçons les six éléments $a$, $e$, $\gamma$, $a'$, $e'$, $\gamma'$ par les six nouveaux éléments $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$. Donc, les valeurs de celles-ci sont données par les équations

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{d\mathrm{R}}{dl_i},\quad \frac{dl_i}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{dc_i}.$$

Les valeurs des douze éléments $c_1, c_2,\ldots, l_1, l_2,\ldots$ ayant été déterminées à l'aide de ces équations, nous pouvons en déduire les valeurs des éléments $a$, $e$, $\gamma$,..., qu'il faut substituer dans les expressions (12), pour avoir les coordonnées de la Lune. Mais, si nous opérons ainsi sans rien changer, nous nous trouverons embarrassés avec des termes qui contiennent le temps comme facteur hors des signes sin et cos. En effet, chaque terme de R étant de la forme

$$h\cos(\mathrm{A} + bt),$$

$b$ étant fonction des éléments $c_1, c_2, c_3,\ldots$, il s'ensuit que, en différentiant par rapport à $c_i$, chaque terme de R donnera, dans la valeur de $\frac{dl_i}{dt}$, le terme

$$ht\frac{db}{dc}\sin(\mathrm{A} + bt).$$

De plus, chaque terme de $v$, $r$, $\beta$, ou de $x, y$, $z$ étant de la forme

$$k \frac{\sin}{\cos}(\mathrm{A} + bt),$$

il s'ensuit que, lorsque nous substituerons pour $b$ sa valeur en une série de termes de cette forme; cette valeur, étant multipliée par $t$, produira des termes de la même forme que ce que nous avons signalé. Nous allons montrer que ces deux sortes de termes se détruisent mutuellement.

Pour cela, nous nous rappellerons encore une fois la forme générale à laquelle les expressions pour les coordonnées de la Lune peuvent se réduire, c'est-à-dire une série infinie dont chaque terme est de la forme

$$(33) \qquad k \frac{\sin}{\cos}(i_1 \lambda_1 + i_2 \lambda_2 + i_3 \lambda_3 + i_4 \lambda_4 + i_5 \lambda_5 + i_6 \lambda_6),$$

chaque $\lambda$ étant de la forme

$$(34) \qquad \lambda_i = l_i + b_i t,$$

et chaque $b$, ainsi que $k$, étant des fonctions des six arbitraires $c_1$, $c_2 \ldots$, $c_6$. Si l'on différentie l'expression (34) de $\lambda_i$, en y regardant $l_i$ et $b_i$ comme variables, on a

$$(35) \qquad \frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{dl_i}{dt} + t \frac{db_i}{dt} + b_i,$$

et il faut montrer que le terme $t \frac{db_i}{dt}$ est détruit par les termes que nous venons de signaler dans $\frac{dl_i}{dt}$. Chaque terme de R est de la forme

$$\mathrm{R} = h \cos \mathrm{N},$$

où

$$\mathrm{N} = i_1 \lambda_1 + i_2 \lambda_2 + i_3 \lambda_3 + i_4 \lambda_4 + i_5 \lambda_5 + i_6 \lambda_6 + mt,$$

$m$ étant fonction des éléments de la planète, qui ne contiennent pas les quantités que nous cherchons; $\lambda_1$, $\lambda_2, \ldots$ étant des fonctions de $c_1$, $c_2, \ldots$, la valeur de $\frac{d\mathrm{R}}{dc_i}$ contiendra les termes

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\lambda_1}\frac{d\lambda_1}{dc_i}+\frac{d\mathrm{R}}{d\lambda_2}\frac{d\lambda_2}{dc_i}+\ldots+\frac{d\mathrm{R}}{d\lambda_6}\frac{d\lambda_6}{dc_i}.$$

Mais

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\lambda_1}=-\,i_1\,h\sin\mathrm{N},$$

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\lambda_2}=-\,i_2\,h\sin\mathrm{N},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\lambda_6}=-\,i_6\,h\sin\mathrm{N};$$

et

$$\frac{d\lambda_1}{dc_i}=t\,\frac{db_1}{dc_i},$$

$$\frac{d\lambda_2}{dc_i}=t\,\frac{db_2}{dc_i},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d\lambda_6}{dc_i}+t\,\frac{db_6}{dc_i}.$$

Par conséquent, la valeur de $-\frac{d\mathrm{R}}{dc_i}$, c'est-à-dire la valeur de $\frac{dl_i}{dt}$ contiendra le terme

$$\frac{dl_i}{dt}=\left(i_1\,\frac{db_1}{dc_i}+i_2\,\frac{db_2}{dc_i}+\ldots+i_6\,\frac{db_6}{dc_i}\right)th\sin\mathrm{N};$$

$b_i$ étant fonction de $c_1$, $c_2,\ldots$, nous avons

$$t\,\frac{db_i}{dt}=t\left(\frac{db_i}{dc_1}\frac{dc_1}{dt}+\frac{db_i}{dc_2}\frac{dc_2}{dt}+\ldots+\frac{db_i}{dc_6}\frac{dc_6}{dt}\right).$$

Mais, pour chaque $c$,

$$\frac{dc_j}{dt}=\frac{d\mathrm{R}}{dl_j}=\frac{d\mathrm{R}}{d\lambda_j}=-\,i_j\,h\sin\mathrm{N}:$$

par conséquent

$$t\,\frac{db_i}{dt}=\left(i_1\,\frac{db_i}{dc_1}+i_2\,\frac{db_i}{dc_2}+\ldots+i_6\,\frac{db_i}{dc_6}\right)tb\sin\mathrm{N}.$$

Les termes de $\frac{d\lambda_i}{dt}$ qui sont multipliés par le temps $t$ hors du signe sin ou cos, sont donc

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\lambda_i}{dt} = \Big[ & i_1\left(\frac{db_1}{dc_i} - \frac{db_i}{dc_1}\right) \\ & + i_2\left(\frac{db_2}{dc_i} - \frac{db_i}{dc_2}\right) + \ldots + i_6\left(\frac{db_6}{dc_i} - \frac{db_i}{dc_6}\right)\Big] ht \sin \mathrm{N}. \end{aligned}\right.$$

Maintenant, nous allons montrer que, pour toute combinaison des indices $i$ et $j$, nous avons

$$\frac{db_i}{dc_j} - \frac{db_j}{dc_i} = 0.$$

Ce théorème provient de cela, que chaque $l_i$ se lie invariablement avec sa propre $b_i t$, et que $t$ n'entre point dans les valeurs des coordonnées qu'autant que son produit par $b_i$ se joint à sa correspondante $l_i$ pour former la valeur de $\lambda_i$, dont les coordonnées sont des fonctions. Abordons notre problème par une autre voie, et considérons que, au lieu de former les équations (2), qui donnent les coordonnées en fonction des constantes arbitraires et du temps, nous ayons formé les dix-huit premières intégrales qui donnent les dix-huit constantes arbitraires en fonction du temps, des coordonnées des trois corps et de leurs dérivées premières par rapport au temps. On sait que les équations (6) pourraient alors se remplacer par celles qui suivent. Posons

$$[a, a'] = \sum \frac{1}{m_i}\left(\frac{da}{d\xi_i}\frac{da'}{d\xi'_i} + \frac{da}{d\eta_i}\frac{da'}{d\eta'_i} + \frac{da}{d\zeta_i}\frac{da'}{d\zeta'_i} - \frac{da}{d\xi'_i}\frac{da'}{d\xi_i} - \frac{da}{d\eta'_i}\frac{da'}{d\eta_i} - \frac{da}{d\zeta'_i}\frac{da'}{d\zeta_i}\right).$$

Nous avons alors, au lieu des équations (6),

$$\frac{da_i}{dt} = [a_1, a_i]\frac{d\mathrm{R}}{da_1} + [a_2, a_i]\frac{d\mathrm{R}}{da_2} + [a_3, a_i]\frac{d\mathrm{R}}{da_3} + \ldots$$

En opérant ainsi, il faudrait arriver au même résultat que celui auquel nous sommes arrivé actuellement, de sorte qu'en choisissant pour constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots, c_6, l_1, l_2, \ldots, l_6$, nous parviendrions aux équations (32). Par conséquent, nous avons pour toutes les combinaisons de ces douze éléments

$$[l_i, c_i] = 1,$$

tandis que toutes les autres combinaisons s'évanouissent identiquement.

Comme nous avons

$$\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \ldots = f(c_1, c_2, \ldots, c_6, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6),$$

il s'ensuit qu'en formant les intégrales premières dont il s'agit, en tirant les valeurs des constantes arbitraires des équations (2), ces intégrales seraient de la forme

$$\begin{array}{ll} c_1 = \varphi_1, & l_1 = \psi_1 - b_1 t, \\ c_2 = \varphi_2, & l_2 = \psi_2 - b_2 t, \\ \ldots, & \ldots\ldots, \\ c_6 = \varphi_6, & l_6 = \psi_6 - b_6 t, \end{array}$$

$\varphi$ et $\psi$ étant des fonctions des coordonnées qui ne contiennent pas le temps. Nous tirons de ces équations

$$[l_i, c_j] = [\psi_i, \varphi_j] - t[b_i, \varphi_j].$$

Nous avons vu que, pour toute valeur de $i$ différente de $j$, cette expression s'évanouit, tandis que lorsque $j = i$, elle se réduit à l'unité. C'est-à-dire

$$(37) \qquad [\psi_i, \varphi_j] = 0,$$

à moins que nous n'ayons $j = i$, auquel cas

$$[\psi_i, \varphi_i] = 1.$$

Considérons maintenant la combinaison $[l_i, l_j]$, qui, comme on sait, s'évanouit pour toute valeur de $i$ et $j$. Nous avons

$$[l_i, l_j] = [\psi_i, \psi_j] - t\{[b_i, \psi_j] - [b_j, \psi_i]\} + t^2[b_i, b_j].$$

Cette expression étant identiquement zéro, il faut que le coefficient de chaque puissance de $t$ s'évanouisse; par conséquent

$$(38) \qquad [b_i, \psi_j] - [b_j, \psi_i] = 0.$$

Mais $b_i$, $b_j$ étant chacun fonction de $c_1, c_2, \ldots, c_6$, nous avons

$$[b_i, \psi_j] = [\varphi_1, \psi_j]\frac{db_i}{dc_1} + [\varphi_2, \psi_j]\frac{db_i}{dc_2} + \ldots + [\varphi_6, \psi_j]\frac{db_i}{dc_6},$$

$$[b_j, \psi_i] = [\varphi_1, \psi_i]\frac{db_j}{dc_1} + [\varphi_2, \psi_i]\frac{db_j}{dc_2} + \ldots + [\varphi_6, \psi_i]\frac{db_j}{dc_6}.$$

En ayant égard à (37), et en se rappelant que $[\varphi_i, \psi_j] = -[\varphi_j, \psi_i]$, ces équations se réduisent à

$$[b_i, \psi_j] = -\frac{db_i}{dc_j},$$

$$[b_j, \psi_i] = -\frac{db_j}{dc_i}.$$

Par conséquent (38) donne

$$(39) \qquad \frac{db_j}{dc_i} - \frac{db_i}{dc_j} = 0.$$

C. Q. F. D.

Il s'ensuit qu'en formant la dérivée $\frac{dR}{dc_i}$ pour obtenir la valeur $\frac{dl_i}{dt}$, que nous devons substituer dans (35), nous pouvons supposer $b_1$, $b_2, \ldots, b_6$ constants, en ne faisant varier que $h$, pourvu que, dans les expressions pour les coordonnées, nous remplacions l'angle variable $A + bt$ par $A + \int b\,dt$, ou pourvu que nous posions

$$\lambda_i = l_i + \int b_i dt.$$

Ce résultat peut s'exprimer sous la forme élégante que M. Delaunay a adoptée dans sa *Théorie du Mouvement de la Lune*. Si nous prenons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ pour variables au lieu de $l_1, l_2, \ldots, l_6$, les équations se réduisent à

$$(40) \qquad \frac{dc_i}{dt} = \frac{dR}{d\lambda_i}, \quad \frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{dR}{dc_i} + b_i.$$

Les équations (39) montrent qu'il y a une fonction de $c_1, c_2, \ldots, c_6$ dont l'expression différentielle

$$b_1\, dc_1 + b_2\, dc_2 + \ldots + b_i\, dc_i$$

est la différentielle exacte. Soit $\Theta$ cette fonction, nous avons

$$b_i = \frac{d\Theta}{dc_i}.$$

Si nous substituons cette valeur de $b_i$ dans les équations ci-dessus, et si nous posons

$$R' = R - \Theta,$$

nous aurons, en faisant attention à ce que $\Theta$ ne contient pas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots,$

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{dR'}{d\lambda_i}, \quad \frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{dR'}{dc_i}.$$

Telles sont les équations les plus simples et les plus générales pour les variations des éléments du Soleil et de la Lune, qui sont dues à la force perturbatrice d'une planète. Toutefois $R'$ ne s'évanouit pas avec la force perturbatrice, mais se réduit à la fonction $-\Theta$, qui est fonction des six éléments $c_1, c_2, \ldots, c_6$.

Nous nous souvenons de ce que nous pouvons choisir pour les variables $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ des combinaisons linéaires quelconques des longitudes moyennes du Soleil et de la Lune, des longitudes de leurs périgées, et des longitudes de leurs nœuds, et que chaque combinaison, ainsi choisie, a son propre système de valeurs de $c_1, c_2, \ldots, c_6$. Ayant conclu les valeurs de ces douze variables en fonction des constantes arbitraires et du temps, nous tirerons les valeurs de $a$, $e$, $\gamma$, $a'$, $e'$, $\gamma'$, $\varepsilon$, $\pi$, $\theta$, $\varepsilon'$, $\pi'$, $\theta'$, qu'il faut substituer dans les expressions des coordonnées du Soleil et de la Lune.

## § VII.

Nous nous proposons, avant d'aller plus loin, d'éclaircir ce qui précède, en formant les fonctions dont il s'agit avec une approximation suffisante pour le premier calcul des inégalités dont il s'agit. Nous calculons les fonctions $k_\varepsilon$, $k_\pi$,... jusqu'au terme du quatrième ordre en $e$, $\gamma$, $m$, $e'$, $\gamma'$, ce qui équivaut à tenir compte de tous les termes de l'ordre de la force perturbatrice de la planète multipliée par le carré de la force perturbatrice du Soleil. Nous nous abstenons de la présentation des détails du calcul par lequel, des valeurs des coordonnées polaires de la Lune, données par M. Delaunay, nous avons déduit celles des coordonnées rectangulaires $x, y$, z. Nous remarquons seulement que, dans ce calcul, il ne faut pousser l'approximation du coefficient de chaque terme qu'autant qu'il est nécessaire pour donner le carré de ce terme exact aux quantités du quatrième ordre.

Les valeurs actuelles des expressions (19) peuvent se conclure du tableau suivant, où se trouve, pour chaque système de valeurs de $i$, $i'$, $i''$, $i'''$, $i^{\text{IV}}$, $i^{\text{V}}$, la valeur correspondante de $k$ et de $b$, et pour chaque système de valeurs de $j$, $j'$,... la valeur correspondante de $c$ et de $b'$. De ces valeurs, nous déduisons sur-le-champ les valeurs de $bk^2$ et de $\frac{1}{2}b'c^2$, qui se trouvent à droite. De ces expressions nous formons les termes de $k_\varepsilon$ qui dépendent des éléments de la Lune par le procédé du § V, qui est assez simple.

| $i$ | $i'$ | $i''$ | $i'''$ | $i^{\text{IV}}$ | $i^{\text{V}}$ | $k = a\varkappa$ | $b = n\varkappa$ | $bk^2 = a^2 n\varkappa$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $1 - \gamma^2 - \gamma'^2 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{64}e^4$<br>$+ \gamma^2\gamma'^2 + \frac{1}{2}e^2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2\gamma'^2$<br>$+ \left(-\frac{1}{6} - \frac{931}{384}e^2 - \frac{5}{2}e'^2\right.$<br>$\left. + \frac{5}{192}\gamma^2 + \frac{1}{6}\gamma'^2\right)m^2$<br>$+ \frac{1559}{2304}m^4$ | 1 | $1 - 2\gamma^2 - 2\gamma'^2 - e^2 + \frac{7}{32}e^4$<br>$+ 4\gamma^2\gamma'^2 + \gamma^4 + \gamma'^4 + 2e^2\gamma^2 + 2e^2\gamma'^2$<br>$+ \left(-\frac{1}{3} - \frac{899}{192}e^2 - 5e'^2\right.$<br>$\left. + \frac{37}{96}\gamma^2 + \frac{2}{3}\gamma'^2\right)m^2$<br>$+ \frac{1591}{1152}m^4$ |
| 2 | −1 | 0 | 0 | 0 | 0 | $+ \frac{1}{2}e - \frac{3}{8}e^3 - \frac{1}{2}e\gamma^2 - \frac{1}{2}e\gamma'^2$<br>$+ \frac{7}{24}em^2$ | $2 - \frac{3}{4}m^2$ | $\frac{1}{2}e^2 - e^2\gamma^2 - e^2\gamma'^2 - \frac{3}{4}e^4$<br>$+ \frac{19}{48}e^2m^2$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{3}{2}e + \frac{3}{2}e\gamma^2 + \frac{3}{2}e\gamma'^2 + \frac{5}{8}em^2$ | $\frac{3}{4}m^2$ | $\frac{27}{16}e^2m^2$ |
| 3 | −2 | 0 | 0 | 0 | 0 | $+ \frac{3}{8}e^2$ | 3 | $\frac{27}{64}e^4$ |
| −1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | $+ \frac{1}{8}e^2$ | −1 | $-\frac{1}{64}e^4$ |
| 1 | 0 | 0 | 1 | −1 | 0 | $-\frac{3}{2}e'm$ | 1 | $\frac{9}{4}e'^2m^2$ |
| 1 | 0 | 0 | −1 | 1 | 0 | $+ \frac{7}{2}e'm$ | 1 | $\frac{9}{4}e'^2m^2$ |
| −1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | $+ \gamma^2$ | −1 | $-\gamma^4$ |
| 3 | 0 | 0 | −2 | 0 | 0 | $+ \frac{3}{16}m^2$ | 3 | $\frac{27}{256}m^4$ |
| −1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | $-\frac{19}{16}m^2$ | −1 | $-\frac{361}{256}m^4$ |
| 2 | 1 | 0 | −2 | 0 | 0 | $+ \frac{15}{16}em$ | 2 | $\frac{225}{128}e^2m^2$ |
| 0 | −1 | 0 | 2 | 0 | 0 | $-\frac{45}{16}em$ | 0 | 0 |
| −1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | $\gamma'^2 - \gamma^2\gamma'^2 - \frac{1}{2}e^2\gamma'^2 - \frac{1}{6}\gamma'^2m^2$ | −1 | $-\gamma'^4$ |
| −2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | $+ \frac{1}{2}e\gamma'^2$ | −2 | 0 |
| 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | 2 | $-\frac{3}{2}e\gamma'^2$ | 0 | 0 |
| 1 | 0 | −1 | 0 | 0 | 1 | $-2\gamma\gamma'$ | 1 | $4\gamma^2\gamma'^2$ |
| −1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | $+2\gamma\gamma'$ | −1 | $4\gamma^2\gamma'^2$ |

| $j$ | $j'$ | $j''$ | $j'''$ | $j^{\text{IV}}$ | $j^{\text{V}}$ | $c = a\varkappa$ | $b' = n\varkappa$ | $\frac{1}{2}b'c^2 = a^2 n\varkappa$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | $+2\gamma - e^2\gamma - \gamma^3 - 4\gamma\gamma'^2 - \frac{1}{3}\gamma m^2$ | 1 | $2\gamma^2 - 2e^2\gamma^2 - 2\gamma^4 - 8\gamma^2\gamma'^2 + \frac{5}{6}\gamma^2 m^2$ |
| 2 | −1 | −1 | 0 | 0 | 0 | $+e\gamma$ | 2 | $4e^2\gamma^2$ |
| 0 | 1 | −1 | 0 | 0 | 0 | $-3e\gamma$ | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | −2 | 0 | 0 | $+\frac{3}{4}\gamma m$ | 1 | $\frac{9}{32}\gamma^2 m^2$ |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | −1 | $-2\gamma' - 2\gamma^2\gamma' - e^2\gamma' - \gamma'^3 - \frac{1}{3}\gamma' m^2$ | 1 | $2\gamma'^2 - 2e^2\gamma'^2 - 2\gamma'^4 - 4\gamma^2\gamma'^2 - \frac{2}{3}m^2\gamma'^2$ |
| 2 | −1 | 0 | 0 | 0 | −1 | $+e\gamma'$ | 2 | $e^2\gamma'^2$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | −1 | $-3e\gamma'$ | 0 | 0 |

Les parties elliptiques de $k_\varepsilon$, $k_\pi$,..., qui dépendent des éléments du Soleil, peuvent se former de celles qui dépendent de la Lune, en omettant tous les termes qui sont multipliés par $m$, et en accentuant les autres termes. Pour exemple, formons $k_\varepsilon$; nous multiplions chaque valeur de $bk^2$ et de $\frac{1}{2}b'c^2$ par la valeur correspondante de $i$, et nous ajoutons tous les produits ainsi obtenus. Alors, nous multiplions la somme par $\frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}$. Nous trouvons ainsi

$$\frac{m_2 m_3 a^2 n}{m_2 + m_3}\left[1 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{8}e'^2 - \frac{1}{2}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^2\right)m^2 + \frac{895}{288}m^4\right].$$

Mais puisque

$$a^3 n^2 = m_2 + m_3,$$

le coefficient de l'expression précédente se réduit à

$$\frac{m_2 m_3}{an}.$$

Pour le Soleil, l'expression correspondante est

$$\frac{m_1(m_2 + m_3)}{a'n'}.$$

Les valeurs complètes de $k_\varepsilon$, $k_\pi$,... auxquelles nous sommes conduits sont

$$(41)\quad\begin{cases} k_\varepsilon = \dfrac{m_2 m_3}{an}\left[1 + \left(-\dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{8}e^2 - \dfrac{1}{2}e'^2 + \dfrac{3}{2}\gamma^2\right)m^2 + \dfrac{895}{288}m^4\right], \\ k_\pi = \dfrac{m_2 m_3}{an}\left(-\dfrac{1}{2}e^2 - \dfrac{1}{8}e^4 + \dfrac{1171}{384}e^2 m^2\right), \\ k_\theta = \dfrac{m_2 m_3}{an}\left(-2\gamma^2 + e^2\gamma^2 - \dfrac{53}{96}\gamma^2 m^2\right); \\ k_{\varepsilon'} = \dfrac{m_1(m_2+m_3)}{a'n'} - \dfrac{m_2 m_3}{an}\left[\left(\dfrac{225}{64}e^2 + \dfrac{9}{10}\gamma^2\right)m^2 - \dfrac{97}{32}m^4\right], \\ k_{\pi'} = -\dfrac{m_1(m_2+m_3)}{a'n'}\left(\dfrac{1}{2}e'^2 + \dfrac{1}{8}e'^4\right), \\ k_{\theta'} = \dfrac{m_1(m_2+m_3)}{a'n'}(-2\gamma'^2 + e'^2\gamma'^2) \\ \qquad + \dfrac{m_2 m_3}{an}\left(-2\gamma'^2 + 4\gamma^2\gamma'^2 + e^2\gamma'^2 + \dfrac{2}{3}m^2\gamma'^2\right). \end{cases}$$

Nous voyons que les termes de $k_{\varepsilon'}$ qui contiennent les éléments du Soleil sont plus petits que ceux qui contiennent les éléments de la Lune, dans le rapport approximatif $\frac{m_1 a n^5}{3 m_3 a' n'^5}$, c'est-à-dire environ l'unité divisée par 10 000 000 000. Nous voyons aussi que $k_{\pi'}$ ne contient aucun des éléments de la Lune dans les limites d'approximation auxquelles nous nous sommes bornés, tandis que, dans la valeur de $k_{\theta'}$, les termes dont il s'agit sont moindres que les autres dans le rapport approximatif 1 : 1 000 000. Ces termes sont, en effet, du même ordre de grandeur que les perturbations du mouvement du centre de gravité de la Terre et de la Lune qui sont dues aux dimensions du système, et que les géomètres ont trouvées insensibles. Par conséquent, nous pouvons les négliger dans l'approximation actuelle. Nous avons donc, au lieu des quatrième, cinquième et sixième des équations (28)

$$(42)\quad\begin{cases} \dfrac{dk_{\varepsilon'}}{dt} = \dfrac{dk_{\varepsilon'}}{da'}\dfrac{da'}{dt} + \dfrac{dk_{\varepsilon'}}{de'}\dfrac{de'}{dt} + \dfrac{dk_{\varepsilon'}}{d\gamma'}\dfrac{d\gamma'}{dt} = \dfrac{dR}{d\varepsilon'}, \\ \dfrac{dk_{\pi'}}{dt} = \dfrac{dk_{\pi'}}{da'}\dfrac{da'}{dt} + \dfrac{dk_{\pi'}}{de'}\dfrac{de'}{dt} + \dfrac{dk_{\pi'}}{d\gamma'}\dfrac{d\gamma'}{dt} = \dfrac{dR}{d\pi'}, \\ \dfrac{dk_{\theta'}}{dt} = \dfrac{dk_{\theta'}}{da'}\dfrac{da'}{dt} + \dfrac{dk_{\theta'}}{de'}\dfrac{de'}{dt} + \dfrac{dk_{\theta'}}{d\gamma'}\dfrac{d\gamma'}{dt} = \dfrac{dR}{d\theta'}. \end{cases}$$

De ces équations nous pouvons tirer les valeurs de $\frac{da'}{dt}$, $\frac{de'}{dt}$ et $\frac{d\gamma'}{dt}$, pour les substituer dans les trois premières des équations (28). Par transposition de certains termes, celles-ci deviennent, en omettant les termes que nous avons trouvés insensibles,

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{dk_\varepsilon}{da}\frac{da}{dt}+\frac{dk_\varepsilon}{de}\frac{de}{dt}+\frac{dk_\varepsilon}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dt}=\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}-\frac{dk_\varepsilon}{da'}\frac{da'}{dt}-\frac{dk_\varepsilon}{de'}\frac{de'}{dt},\\
&\frac{dk_\varpi}{da}\frac{da}{dt}+\frac{dk_\varpi}{de}\frac{de}{dt}+\frac{dk_\varpi}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dt}=\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}-\frac{dk_\varpi}{da'}\frac{da'}{dt},\\
&\frac{dk_\theta}{da}\frac{da}{dt}+\frac{dk_\theta}{de}\frac{de}{dt}+\frac{dk_\theta}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dt}=\frac{d\mathrm{R}}{d\theta}-\frac{dk_\theta}{da'}\frac{da'}{dt}.
\end{aligned}\right.$$

De ces équations nous pouvons tirer les valeurs de $\frac{da}{dt}$, $\frac{de}{dt}$ et $\frac{d\gamma}{dt}$, de même que des precédentes nous avons tiré $\frac{da'}{dt}$, $\frac{de'}{dt}$ et $\frac{d\gamma'}{dt}$.

Pour plus de symétrie, nous prenons le logarithme de $a$ comme variable, au lieu de $a$. Posons

$$\alpha=\log a,\quad \alpha'=\log a',$$

ce qui donne

$$\frac{dk}{da}=\frac{1}{a}\frac{dk}{d\alpha},\quad \frac{dk}{da'}=\frac{1}{a'}\frac{dk}{d\alpha'}.$$

Si nous différentions les équations (41) nous trouverons facilement

$$\begin{aligned}
\frac{dk_{\varepsilon'}}{d\alpha'}&=\frac{m_1(m_2+m_3)}{2a'n'},\\
\frac{dk_{\varepsilon'}}{de'}&=0,\\
\frac{dk_{\varepsilon'}}{d\gamma'}&=0,\\
\frac{dk_{\varpi'}}{d\alpha'}&=-\frac{m_1(m_2+m_3)}{a'n'}\left(\frac{1}{4}e'^2+\frac{1}{16}e'^4\right),\\
\frac{dk_{\varpi'}}{de'}&=-\frac{m_1(m_2+m_3)}{a'n'}\left(e'+\frac{1}{2}e'^3\right),\\
\frac{dk_{\varpi'}}{d\gamma'}&=0,\\
\frac{dk_{\theta'}}{d\alpha'}&=\frac{m_1(m_2+m_3)}{a'n'}\left(-\gamma'^2+\frac{1}{2}e'^2\gamma'^2\right),\\
\frac{dk_{\theta'}}{de'}&=2e'\gamma'^2\frac{m_1(m_2+m_3)}{a'n'},\\
\frac{dk_{\theta'}}{d\gamma'}&=\frac{m_1(m_2+m_3)}{a'n'}(-4\gamma'+2e'^2\gamma').
\end{aligned}$$

Substituons ces valeurs dans les équations (7), nous tirons par l'élimination

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\alpha'}{dt} &= \frac{2a'n'}{m_1(m_2+m_3)}\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon'},\\
\frac{de'}{dt} &= \frac{a'n'}{m_1(m_2+m_3)}\left[\left(-\frac{1}{2}e'+\frac{1}{8}e'^3\right)\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon'}+\left(-\frac{1}{e'}+\frac{1}{2}e'\right)\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi'}\right],\\
\frac{d\gamma'}{dt} &= \frac{a'n'}{m_1(m_2+m_3)}\left[-\frac{1}{2}\gamma'\left(1+\frac{1}{2}e'^2\right)\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon'}\right.\\
&\qquad \left.-\frac{1}{2}\gamma'\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi'}-\frac{1}{4\gamma'}\left(1+\frac{1}{2}e'^2\right)\frac{d\mathrm{R}}{d\theta'}\right].
\end{aligned}\right.$$

Ces équations sont en effet des développements des équations usuelles et bien connues pour les variations des éléments elliptiques de l'orbite d'une planète, et nous pouvons y substituer, pour les coefficients de $\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon'}$, $\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi'}$ et $\frac{d\mathrm{R}}{d\theta'}$, les valeurs rigoureuses de ces mêmes coefficients, que nous pouvons obtenir avec facilité par la différentiation des expressions qui donnent les valeurs de X, Y et Z en fonction de l'anomalie excentrique.

Maintenant, si nous différentions les trois premières des équations (41) par rapport à $a$, $e$, $\gamma$, et si nous substituons les valeurs de $\frac{dk_\varepsilon}{d\alpha}$, $\frac{dk_\varepsilon}{de}$,... dans (43), nous tirons les valeurs de $\frac{d\alpha}{dt}$,... que voici :

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{2an}{m_2m_3}\left[1+\left(\frac{7}{3}+\frac{9}{4}e^2-9\gamma^2+\frac{7}{2}e'^2\right)m^2-\frac{10067}{288}m^4\right]\\
&\qquad\times\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}-\frac{dk_\varepsilon}{d\alpha'}\frac{d\alpha'}{dt}-\frac{dk_\varepsilon}{de'}\frac{de'}{dt}\right)\\
&\quad -\frac{3anm^2}{2m_2m_3}\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}-\frac{dk_\varpi}{d\alpha'}\frac{d\alpha'}{dt}\right)+\frac{3anm^2}{2m_2m_3}\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\theta}-\frac{dk_\theta}{d\alpha'}\frac{d\alpha'}{dt}\right),\\
\frac{de}{dt} &= -\frac{ane}{2m_2m_3}\left(1-\frac{1}{4}e^2-\frac{3289}{96}m^2\right)\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}-\frac{dk_\varepsilon}{d\alpha'}\frac{d\alpha'}{dt}-\frac{dk_\varepsilon}{de'}\frac{de'}{dt}\right)\\
&\quad -\frac{an}{m_2m_3e}\left(1-\frac{1}{2}e^2+\frac{1171}{192}m^2\right)\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}-\frac{dk_\varpi}{d\alpha'}\frac{d\alpha'}{dt}\right),\\
\frac{d\gamma}{dt} &= -\frac{an\gamma}{2m_2m_3}\left(1+\frac{1}{2}e^2+\frac{383}{96}m^2\right)\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}-\frac{dk_\varepsilon}{d\alpha'}\frac{d\alpha'}{dt}-\frac{dk_\varepsilon}{de'}\frac{de'}{dt}\right)\\
&\quad -\frac{an\gamma}{2m_2m_3}\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}-\frac{dk_\varpi}{d\alpha'}\frac{d\alpha'}{dt}\right)\\
&\quad -\frac{an}{4\gamma m_2m_3}\left(1+\frac{1}{2}e^2-\frac{53}{192}m^2\right)\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\theta}-\frac{dk_\theta}{d\alpha'}\frac{d\alpha'}{dt}\right).
\end{aligned}\right.$$

De même, nous tirons des septième, huitième et neuvième des équations (28) les valeurs de $\frac{d\varepsilon_0}{dt}$, $\frac{d\pi_0}{dt}$ et $\frac{d\theta_0}{dt}$. Si nous négligeons les très-petites dérivées de $k_{\varepsilon'}$, $k_{\pi'}$ et $k_{\theta'}$ par rapport aux éléments $a$, $e$, $\gamma$, nous trouvons, en ayant égard à la transformation (40),

$$(46)\left\{\begin{aligned}
\frac{d\varepsilon}{dt} &= n - \frac{2an}{m_2 m_3}\left[1 + \left(\frac{7}{3} + \frac{9}{4}e^2 - 9\gamma^2 + \frac{7}{2}e'^2\right)m^2 - \frac{10067}{288}m^4\right]\frac{dR}{d\alpha} \\
&\quad + \frac{ane}{2m_2 m_3}\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3289}{96}m^2\right)\frac{dR}{de} \\
&\quad + \frac{an\gamma}{2m_2 m_3}\left(1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{383}{96}m^2\right)\frac{dR}{d\gamma}, \\
\frac{d\pi}{dt} &= \pi_1 + \frac{3anm^2}{2m_2 m_3}\frac{dR}{d\alpha} + \frac{an}{m_2 m_3 e}\left(1 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1171}{192}m^2\right)\frac{dR}{de} + \frac{an\gamma}{2m_2 m_3}\frac{dR}{d\gamma}, \\
\frac{d\theta}{dt} &= \theta_1 - \frac{3anm^2}{2m_2 m_3}\frac{dR}{d\alpha} + \frac{an}{4\gamma m_2 m_3}\left(1 + \frac{1}{2}e^2 - \frac{53}{192}m^2\right)\frac{dR}{d\gamma}.
\end{aligned}\right.$$

Les valeurs de $n$, $\pi_1$ et $\theta_1$ sont, au degré d'approximation auquel nous nous sommes arrêté,

$$\begin{aligned}
n &= (m_1 + m_2 + m_3)^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}}, \\
\pi_1 &= \quad m^2 n\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8}e^2 + \frac{9}{8}e'^2 - 6\gamma^2 + \frac{225}{32}m + \frac{4071}{128}m^2\right), \\
\theta_1 &= -m^2 n\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{8}e'^2 - \frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{9}{32}m - \frac{273}{128}m^2\right).
\end{aligned}$$

De plus, en prenant les dérivées $\frac{dR}{d\alpha}$, $\frac{dR}{de}$, $\frac{dR}{d\gamma}$, il ne faut faire varier ces quantités qu'autant qu'elles sont contenues dans les coefficients des divers termes, hors du signe *sinus* et *cosinus*. Mais il faut considérer les valeurs de $n$, $\pi_1$ et $\theta_1$ comme affectées par les variations de $a$, de $e$ et de $\gamma$, dont ils sont des fonctions, variations que nous tirons des équations (45).

## § VIII.

### *Sur la forme de la fonction* R.

Appelons $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$ les distances de la planète au Soleil, à la Terre et à la Lune, respectivement. Nous avons donc

$$R = \frac{m_1 m_4}{\rho_1} + \frac{m_2 m_4}{\rho_2} + \frac{m_3 m_4}{\rho_3}.$$

Nous avons supposé que l'on exprime la fonction R comme il suit, c'est-à-dire que les coordonnées de la planète sont exprimées comme fonction du temps simplement, tandis que celles du Soleil, de la Terre et de la Lune sont exprimées en fonction du temps et des dix-huit constantes arbitraires du mouvement de ces trois corps. Donc $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$ et, par conséquent, R deviennent fonctions de ces mêmes arbitraires et du temps. Appelons $a$ l'une quelconque des arbitraires. En différentiant l'équation précédente, nous avons

$$\frac{dR}{da} = -m_4\left(\frac{m_1}{\rho_1^2}\frac{d\rho_1}{da} + \frac{m_2}{\rho_2^2}\frac{d\rho_2}{da} + \frac{m_3}{\rho_3^2}\frac{d\rho_3}{da}\right).$$

Conformément à la notation du § II, nous avons

$$\begin{aligned}
\rho_1^2 &= (\xi_4 - \xi_1)^2 + (\eta_4 - \eta_1)^2 + (\zeta_4 - \zeta_1)^2,\\
\rho_2^2 &= (\xi_4 - \xi_2)^2 + (\eta_4 - \eta_2)^2 + (\zeta_4 - \zeta_2)^2,\\
\rho_3^2 &= (\xi_4 - \xi_3)^2 + (\eta_4 - \eta_3)^2 + (\zeta_4 - \zeta_3)^2.
\end{aligned}$$

Nous avons montré, dans le § III, que nous n'avons pas besoin des dérivées de R par rapport aux constantes qui fixent la position du centre de gravité des trois corps. Par conséquent, nous pouvons prendre ce centre comme origine des coordonnées. En opérant ainsi, et en faisant usage de la même notation que celle des équations (8), ces équations deviennent

$$\begin{aligned}
\rho_1^2 &= (\xi_4 - \mu'X)^2 + (\eta_4 - \mu'Y)^2 + (\zeta_4 - \mu'Z)^2,\\
\rho_2^2 &= [\xi_4 + (1-\mu')X + \mu x]^2 + [\eta_4 + (1-\mu')Y + \mu y]^2\\
&\quad + [\zeta_4 + (1-\mu')Z + \mu z]^2,\\
\rho_3^2 &= [\xi_4 + (1-\mu')X + (1-\mu)y]^2 + [\eta_4 + (1-\mu')Y + (1-\mu)y]^2\\
&\quad + [\zeta_4 + (1-\mu')Z + (1-\mu)z]^2.
\end{aligned}$$

La constante arbitraire $a$ n'étant contenue que dans X, Y, Z, $x$, $y$, $z$, nous avons, pour chaque $\rho$,

$$\frac{d\rho}{da} = \frac{d\rho}{dX}\frac{dX}{da} + \ldots + \frac{d\rho}{dx}\frac{dx}{da} + \ldots + \frac{d\rho}{dz}\frac{dz}{da}.$$

Si, après avoir effectué la différentiation de $\rho_1^2$, $\rho_2^2$, $\rho_3^2$ par rapport à $a$, nous représentons par

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_2$, $y_2$, $z_2$ | les coordonnées de la | Terre | relativement | au Soleil, |
| $x_3$, $y_3$, $z_3$ | » | Lune | » | » |
| $x_4$, $y_4$, $z_4$ | » | planète | » | » |

ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\xi_4 - \xi_1 = x_4, & &\eta_4 - \eta_1 = y^4, & &\zeta_4 - \zeta_1 = z_4,\\
&\xi_4 - \xi_2 = x_4 - x_2, & &\eta_4 - \eta_2 = y_4 - y_2, & &\zeta_4 - \zeta_2 = z_4 - z_2,\\
&\xi_4 - \xi_3 = x_4 - x_3, & &\eta_4 - \eta_3 = y_4 - y_3, & &\zeta_4 - \zeta_3 = z_4 - z_3,
\end{aligned}$$

nous trouvons

$$\begin{aligned}
\rho_1 \frac{d\rho_1}{da} &= -\mu' x_4 \frac{dX}{da} - \mu' y_4 \frac{dY}{da} - \mu' z_4 \frac{dZ}{da},\\
\rho_2 \frac{d\rho_2}{da} &= (x_4 - x_2)\left[(1-\mu')\frac{dX}{da} + \mu\frac{dx}{da}\right]\\
&\quad + (y_4 - y_2)\left[(1-\mu')\frac{dY}{da} + \mu\frac{dy}{da}\right]\\
&\quad + (z_4 - z_2)\left[(1-\mu')\frac{dZ}{da} + \mu\frac{dz}{da}\right],\\
\rho_3 \frac{d\rho_3}{da} &= (x_4 - x_3)\left[(1-\mu')\frac{dX}{da} - (1-\mu)\frac{dx}{da}\right]\\
&\quad + (y_4 - y_2)\left[(1-\mu')\frac{dY}{da} - (1-\mu)\frac{dy}{da}\right]\\
&\quad + (z_4 - z_3)\left[(1-\mu')\frac{dZ}{da} - (1-\mu)\frac{dz}{da}\right].
\end{aligned}$$

En substituant ces expressions dans la valeur de $\frac{dR}{da}$, nous trouvons

$$(47)\left\{\begin{aligned}
\frac{dR}{da} &= m_4 \sum\left[m_1\mu'\frac{x_4}{\rho_1^3} + m_2(1-\mu')\frac{x_2 - x_4}{\rho_2^3} + m_3(1-\mu')\frac{x_3 - x_4}{\rho_3^3}\right]\frac{dX}{da}\\
&\quad + m_4 \sum\left[m_2\mu\frac{x_2 - x_4}{\rho_2^3} + m_3(1-\mu)\frac{x_3 - x_4}{\rho_3^3}\right]\frac{dX}{da},
\end{aligned}\right.$$

le signe $\Sigma$ indiquant la somme des expressions que nous obtenons en mettant successivement X, Y, Z pour X, et $x$, $y$, $z$ pour $x$.

Considérons la quantité

$$m_2 \frac{x_2 - x_4}{\rho_2^3} + m_3 \frac{x_3 - x_4}{\rho_3^3},$$

dont le produit par $(1 - \mu')$ se trouve dans cette expression. Puisque les différences $x_2 - x_3$, $\rho_2 - \rho_3$ sont très-petites, nous pouvons développer cette dernière quantité en une série très-convergente. Puisque le premier terme $m_2 \frac{x_2 - x_4}{\rho_2^3}$ est une fonction des coordonnées de la Terre, multipliée par la masse de cet astre; et, puisque le dernier terme est la même fonction des coordonnées et de la masse de la Lune, il s'ensuit que leur somme, développée aux termes du premier ordre, sera la même fonction des coordonnées de leur centre commun de gravité multiplié par la somme de leurs masses; c'est-à-dire que nous avons, aux quantités du second ordre près,

$$m_2 \frac{x_2 - x_4}{\rho_2^3} + m_3 \frac{x_3 - x_4}{\rho_3^3} = -(m_2 + m_3) \frac{x_4 + X}{\rho^3},$$

en représentant par $\rho$ la distance de la planète au centre commun de la Terre et de la Lune. Nous avons posé

$$\mu' = \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

ce qui donne

$$(m_2 + m_3)(1 - \mu') = m_1 \mu'.$$

En faisant ces substitutions, la première partie de $\frac{dR}{da}$ devient

$$m_1 m_4 \mu' \sum \left( \frac{x_4}{\rho_1^3} - \frac{X + x_4}{\rho^3} \right) \frac{dX}{da}.$$

Cette expression équivaut à

$$m_1 m_4 \mu' \frac{d}{da} \left( \frac{x_4 X + y_4 Y + z_4 Z}{\rho_1^3} + \frac{1}{\rho} \right),$$

pourvu que, dans cette expression, nous regardions $x_4$, $y_4$, $z_4$ et $\rho_4$ commme ne contenant pas l'arbitraire $a$.

Passons au second terme de $\frac{dR}{da}$. Puisque

$$\mu = \frac{m_3}{m_2 + m_3},$$

nous avons

$$m_2 \mu = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3} = m_3(1 - \mu).$$

Le terme dont il s'agit devient ainsi

$$m_4 \nu \sum \left( \frac{x_2 - x_4}{\rho_2^3} - \frac{x_3 - x_4}{\rho_3^3} \right) \frac{dx}{da}.$$

Dans cette expression nous avons posé, pour abréger,

$$\nu = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}.$$

De plus, nous avons

$$\rho_2^2 = (X + x_4 + \mu x)^2 + (Y + y_4 + \mu y)^2 + (Z + z_4 + \mu z)^2,$$
$$\rho_3^2 = [X + x_4 - (1 - \mu)x]^2 + [Y + y_4 - (1 - \mu)y]^2 + [Z + z_4 - (1 - \mu)z]^2.$$

Puisque $x$, $y$, $z$ sont très-petits par rapport à $x_4$ et X, nous pouvons développer les fonctions de $\rho_1$, $\rho_2$ en une série convergente ordonnée suivant les puissances de ces quantités. Nous avons ainsi, aux quantités du premier ordre près,

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\rho_2^3} &= \frac{1}{\rho^3} - \frac{3\mu}{\rho^5} [x(X + x_4) + y(Y + y_4) + z(Z + z_4)], \\ \frac{1}{\rho_3^3} &= \frac{1}{\rho^3} + \frac{3(1-\mu)}{\rho^5} [x(X + x_4) + y(Y + y_4) + z(Z + z_4)]. \end{aligned} \right.$$

L'expression dont il s'agit devient ainsi

$$m_4 \nu \sum \left\{ \frac{3(X + x_4)}{\rho^5} [x(X + x_4) + y(Y + y_4) + z(Z + z_4)] - \frac{x}{\rho^3} \right\} \frac{dx}{da}.$$

En posant, de plus,

$$\Delta = x(X + x_4) + y(Y + y_4) + z(Z + z_4),$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

l'expression se réduit à

$$m_4 \nu \left[\frac{3}{2\rho^5}\frac{d(\Delta^2)}{da} - \frac{1}{2\rho^3}\frac{d(r^2)}{da}\right],$$

pourvu que nous ne prenions les dérivées par rapport à $a$ qu'autant que cette arbitraire est contenue dans les coordonnées de la Lune relativement à la Terre. Par conséquent, si nous posons

$$(49)\quad R' = m_1 m_4 \mu' \left(\frac{1}{\rho} + \frac{Xx_4 + Yy_4 + Zz_4}{\rho_1^3}\right) + \frac{1}{4} m_4 \nu \left(\frac{3\Delta^2}{\rho^5} - \frac{r^2}{\rho^3}\right),$$

nous avons

$$\frac{dR'}{da} = \frac{dR}{da},$$

pourvu que, dans le premier terme de R', nous regardions $x_4$, $y_4$, $z_4$, $\rho_1$ comme constants, et que, dans le second terme, nous regardions seulement les coordonnées de la Lune comme variables. Par conséquent, nous pouvons substituer R' pour R dans les équations (45), (46). L'intégration de ces équations, en négligeant les termes qui sont multipliés par le carré et le produit des masses, sera bien facile dès que nous aurons développé R' en fonction des constantes arbitraires et du temps. La formation de ce développement est un travail de calcul dans lequel je n'ai pu trouver d'artifices d'analyse qui en facilitent l'exécution. Par conséquent, je ne me propose pas d'y entrer dans le Mémoire actuel.

Peut-être on voudra bien me permettre d'indiquer les avantages que, il me semble, cette méthode de calculer les inégalités dont il s'agit peut nous offrir:

1° Les équations (45), (46), quoique pas rigoureuses comme nous les avons écrites, peuvent être poussées à tel degré d'exactitude que nous voudrons, sans que nous soyons obligé de reprendre nos calculs;

2° Nous pouvons, au commencement de nos calculs, pousser le développement de R à tel degré d'approximation que nous voulons, et j'espère qu'on parviendra à montrer qu'aucun terme au-dessus d'un certain ordre de grandeur n'a été omis.

Mais, je ne fais que rendre justice au grand ouvrage de M. Delaunay en disant que, en partant de ses équations différentielles finales et en y regardant l'action de la planète comme ajoutant de nouveaux termes à R, on parviendra à des équations du même degré de rigueur que celles qui font l'objet de ce Mémoire. Cependant il ne me semble pas inutile de montrer comment on peut arriver à des résultats semblables par une autre voie.