JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOURGET

Théorie mathématique des machines à air chaud

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 16 (1871), p. 31-124.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1871_2_16__31_0>

Théorie mathématique des machines à air chaud;

PAR M. J. BOURGET,

Directeur des études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

INTRODUCTION.

Les machines à vapeur jouent à notre époque un rôle si important dans l'industrie, que l'étude de leurs perfectionnements, et surtout des moyens de réduire leur dépense, occupera encore longtemps les habiles constructeurs.

Sans doute, on peut dire que les houillères les alimenteront toujours; mais n'est-il pas évident aussi que la multiplication des moteurs à feu et la difficulté que présentera l'extraction du combustible à de grandes profondeurs doivent faire hausser peu à peu le prix du charbon. On conçoit donc tout l'intérêt qui s'attache aux recherches ayant directement pour but d'amoindrir la dépense des machines, si elles peuvent aboutir à doubler seulement la force industrielle pour la même consomation de houille, et à plus forte raison si elles parvenaient à quintupler cette puissance, comme la théorie l'indique. Nous ne parlons pas de l'importance énorme de cette économie pour la navigation à vapeur.

Il est possible de montrer *à priori* que ce problème peut être étudié, et que sa solution n'est pas impossible. En réfléchissant au rôle de la vapeur dans les machines, on ne tarde pas à se convaincre qu'elle doit être considérée comme un intermédiaire à l'aide duquel la chaleur engendre le travail mécanique. Le véritable moteur, c'est donc le calorique, qui, en produisant l'expansion des molécules d'eau, met en mouvement le piston de la machine.

A ce point de vue, les moteurs à vapeur paraissent bien loin encore de leur perfection théorique. Prenons comme exemple une locomotive. On sait que la vapeur arrive sous le piston à 8 atmosphères et à 172 degrés; elle possède alors environ 722 calories par kilogramme. Après avoir travaillé, la vapeur sort à 100 degrés, contenant encore 650 calories. On voit donc que 72 calories seulement ont été employées à produire un effet mécanique; la machine n'a donc rendu que 72 pour 722, ou à peu près 10 pour 100. Ajoutons que, sur les $\frac{10}{100}$ employés, la moitié est consommée inutilement par les résistances passives. Les machines à condensation sont moins imparfaites; car elles recueillent une partie du calorique sortant de la machine; mais la quantité d'eau froide du condenseur doit toujours être assez considérable pour que la température ne s'élève pas à 100 degrés, et, par suite, l'on ne restitue au générateur qu'une très-faible partie du calorique perdu. Le plus grand avantage de la condensation est d'annuler à peu près la contre-pression, et de donner à la pression motrice une valeur plus forte de 1 atmosphère.

On peut apercevoir, par d'autres considérations, l'imperfection des machines à vapeur. On sait que les meilleures machines usuelles dépensent environ 2 kilogrammes de houille par cheval et par heure; on en déduit que 2 kilogrammes de charbon produisent 270 000 kilogrammètres. Or 1 kilogramme de charbon équivaut à 6000 calories environ : donc 12 000 calories produisent 270 000 kilogrammètres. Mais nous démontrerons plus loin que 1 calorie équivaut à 424 kilogrammètres au moins; donc nous pouvons dire que, dans une bonne machine à vapeur, $12\,000 \times 424 = 5\,088\,000^{\text{kgm}}$, mis au foyer, rendent 270 000 kilogrammètres, ou environ 5,5 pour 100. Si l'on fait abstraction des pertes inévitables de chaleur par le foyer, on voit encore que le rendement du travail fourni à la machine par le calorique donné à l'eau est de 10 pour 100 environ.

En résumé, les machines à vapeur sont très-imparfaites, parce que, indépendamment des pertes inévitables dues au rayonnement, à la conductibilité des organes et au foyer, qui ne transmet au corps chauffé que la moitié environ du calorique renfermé dans le charbon, elles consomment inutilement une énorme quantité de combustible en sus de la quantité strictement nécessaire à l'effet à produire.

Nous avons dit plus haut que l'eau, la vapeur ne sont que des intermédiaires à l'aide desquels le calorique, le véritable moteur, agit sur le piston; le perfectionnement des machines thermodynamiques se présente donc aux yeux du théoricien sous un aspect fort large. Il ne s'agit plus seulement de trouver quelque combinaison d'organes propres à tirer de la vapeur d'eau un parti plus avantageux; on peut se demander si l'emploi de quelque autre intermédiaire ne permettrait pas d'atteindre plus facilement le même but.

Constatons d'abord que l'eau présentera toujours, quoi qu'on fasse, un inconvénient, si l'on en renouvelle la provision. La température moyenne de l'eau est à peu près 10 degrés, au moment où elle est introduite dans les moteurs ordinaires sans condensation; il faut la porter à 100 degrés pour la volatiliser, sous la pression atmosphérique; donc 90 calories, par kilogramme d'eau, sont inutilement dépensées pour atteindre cette température d'ébullition. C'est là une perte de calorique notable que l'emploi de l'eau ne permet pas d'éviter. La condensation amoindrit cette perte sans l'anéantir; car on peut se servir de l'eau de condensation pour alimenter la chaudière.

Plusieurs praticiens, frappés des imperfections que nous venons de signaler, ont pensé qu'en faisant circuler toujours la même vapeur dans l'intérieur des organes, on créerait une machine parfaite, puisqu'il n'y aurait plus que les pertes inévitables dues au rayonnement, à la conductibilité et au foyer. MM. Seguin aîné, Siemenns et Lamy, de Clermont-Ferrand, ont réussi à faire passer cette idée du domaine de la spéculation dans celui de la pratique. Toutefois une difficulté se présente dans l'application. Après avoir agi, la vapeur a une force notable de ressort; pour l'amoindrir et permettre à celle que produit le retour du piston de pousser avec une force suffisante, on a muni les machines à circulation de réfrigérants qui enlèvent en pure perte le calorique latent de la première vapeur; et l'on peut dire, jusque aujourd'hui, que ces machines sont peu avantageuses et encombrantes relativement.

D'autres constructeurs, s'attachant à recueillir utilement la chaleur latente de la vapeur à sa sortie, ont cherché à combiner une machine à eau avec une autre à liquide plus facilement volatil, tel que l'éther ou le chloroforme. Nous pensons que la complication inhérente à cet accouplement, le danger du maniement de ces liquides et aussi le peu de force de leurs vapeurs ont démontré que cette solution du problème est loin d'être aussi avantageuse qu'on l'avait espéré d'abord.

Il ne faut pas s'étonner, du reste, de ce que les tentatives de perfectionnement des machines à feu n'ont pas toujours eu le succès qu'on attendait. L'histoire de l'industrie montre clairement que les grandes inventions mécaniques ont été presque toujours précédées par la découverte de lois expérimentales propres à guider les constructeurs. L'illustre Watt a préparé ses grandes améliorations de la machine primitive de Newcomem par des études purement spéculatives sur la vapeur. Or, en envisageant l'état actuel de la physique à l'endroit des vapeurs, nous voyons que les lois de ces fluides sont encore peu connues. Comment la pression, le volume et la température varient-ils pendant la détente? Quelle est la liaison entre la température et la force élastique de la vapeur saturée? Comment varie la densité? Quelle est la capacité calorifique à pression constante, à volume constant? Quel est le coefficient de dilatation? A quelques-unes de ces questions, la physique répond par des formules empiriques; devant les autres, elle reste à peu près muette. Aussi la théorie mathématique des machines à vapeur est-elle peu avancée; et loin de guider les ingénieurs par ses résultats, elle se borne à chercher de nouvelles formules empiriques simples donnant des règles sûres pour reproduire les meilleurs systèmes d'installation consacrés par l'expérience.

Dans cet état d'imperfection de la théorie des vapeurs, il nous a paru convenable d'envisager le problème des moteurs thermodynamiques sous une nouvelle face. Nous avons dit plus haut que le véritable moteur de ces machines est le calorique. Puisque son action sur l'eau est mal connue, changeons d'intermédiaire et prenons un gaz permanent, tel que l'air atmosphérique, pour véhicule de la chaleur. Les lois des gaz permanents chauffés ont été étudiées avec soin, et les travaux accumulés et concordants de MM. Mariotte, Dulong, Gay-Lussac, Regnault, etc., ont donné à ces lois une certitude mathématique, et fourni à l'expérimentation des coefficients suffisamment exacts pour tous les besoins. On peut donc attaquer le problème des machines à air chaud dans tous ses détails et chercher les diverses manières dont on peut utiliser l'expansion des gaz, eu égard aux divers besoins. Dans cette étude, rien d'arbitraire, rien d'empirique; et si les diverses combinaisons que nous indiquerons pour tirer parti de l'air chaud sont difficiles à réaliser, la théorie n'en précédera pas moins la pratique, pour marquer d'une manière précise le but à atteindre dans chaque cas.

Parmi tous les gaz permanents, il convient de prendre l'air atmosphérique. Il est évidemment l'intermédiaire le plus avantageux à essayer. Partout il est à notre disposition. Une machine à air n'a pas de provision de véhicule à emporter, pas de chaudière énorme, dangereuse. Elle se trouve à peu près réduite à l'organe moteur et aux organes secondaires à l'aide desquels elle s'alimente elle-même. Les locomotives à air n'ont pas à traîner avec elles les poids morts énormes qui embarrassent les locomotives à vapeur, et c'est peut-être avec elles qu'on rendra pratique la traction par les moteurs à feu sur les routes ordinaires, ainsi que l'a fait remarquer depuis longtemps M. Burdin [*].

Dans ce Mémoire, je me propose de traiter la partie théorique des machines à gaz chauffés, de manière à répondre à tous les besoins de l'industrie, si elle cherche jamais à tenter la substitution indiquée par M. Burdin. Je n'entrerai dans aucun détail pratique, je n'essayerai pas d'indiquer les moyens de réalisation, ce sujet n'étant pas de ma compétence. Mon but unique est de servir de guide aux praticiens, en leur montrant les résultats qu'il est possible d'obtenir et les limites qu'on ne saurait franchir.

Ce Mémoire résume ceux que j'ai présentés à l'Institut, à diverses époques [**].

---

[*] *Annales des Mines*, 1835, p. 471. — *Comptes rendus de l'Académie*, 23 avril 1836. — *Comptes rendus de l'Académie*, 30 octobre 1837.

[**] *Comptes rendus de l'Académie*, t. XLV, p. 742 et 1069.

PREMIÈRE PARTIE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES. — LOIS DES GAZ PERMANENTS.

§ I. — *Gaz permanents.*

Nous nommerons *gaz permanents* ceux qui résistent à de très-fortes pressions sans se liquéfier, et dont les hautes températures n'altèrent pas la constitution. Tels sont l'hydrogène, l'oxygène, l'azote, l'air atmosphérique, etc. On connaît la densité de ces gaz à zéro, et sous la pression de $0^{m},76$ de mercure. En particulier, l'air pèse $1^{kg},293$ par mètre cube dans ces conditions.

§ II. — *Loi de Mariotte.*

Les gaz permanents sont soumis à une loi remarquable dont voici l'énoncé :

Les volumes occupés par une masse gazeuse, dont la température est invariable, sont en raison inverse des pressions qu'elle supporte.

Cette loi porte le nom du physicien Mariotte, qui l'a découverte vers 1650. Son exactitude a été vérifiée en 1829 par Dulong et Arago, jusqu'à la pression de 29 atmosphères, pour l'air seulement. M. Regnault, par une série de nouvelles expériences, a montré que cette loi n'est pas, comme on le croyait, mathématiquement vraie, mais qu'on peut négliger, dans les applications, la différence insignifiante entre les volumes qu'elle donne et ceux que l'observation ferait connaître. Nous supposerons dans ce qui va suivre qu'elle est rigoureusement exacte. On peut remarquer que cette hypothèse est vraie dans un intervalle de pressions peu différentes, intervalle différentiel dans le domaine des applications industrielles.

Désignons par p la pression d'un gaz. La même lettre désignera sa force élastique, car nous la supposerons toujours équilibrée par la pression extérieure, comme si le gaz était renfermé dans un cylindre fermé par un piston mobile d'un poids égal à la force élastique. Nous admettrons que cette pression est exprimée en kilogrammes et rapportée au mètre carré. Nous nommerons v le volume exprimé en mètres cubes. La loi de Mariotte peut se formuler par l'égalité suivante :

$$pv = \text{const.} = m. \tag{1}$$

Si, pour faire image, nous portons les volumes comme abscisses sur une horizontale et les pressions comme ordonnées, nous voyons que la succession des états d'une masse gazeuse satisfaisant à l'équation (1) dessine une hyperbole ayant l'horizontale OV et la verticale OP comme azymptotes. Tous les points de cette hyperbole correspondent à des états différents par la pression et le volume, mais non par la température. Cette courbe peut donc être appelée *courbe de détente ou de compression sans variation de température.* Nous lui donnerons le nom de *courbe isothermique*.

§ III. — *Loi de Gay-Lussac.*

La chaleur dilate les gaz. Gay-Lussac a déterminé la loi de cette dilatation. Il a montré que

L'augmentation de volume d'un gaz pris à zéro est proportionnelle à la température, la pression restant la même.

D'après cela, si nous nommons :

v_0 le volume d'une masse gazeuse à zéro;
t la température nouvelle à laquelle nous la portons;
v le volume à t degrés;
α le coefficient de dilatation, ou l'augmentation d'un mètre cube pour 1 degré à partir de zéro,

nous aurons

$$v = v_0 + v_0\alpha t = v_0(1 + \alpha t).$$

La quantité $(1 + \alpha t)$ se nomme le *binôme de dilatation*. Comme elle revient souvent dans les calculs, nous la désignerons par une seule lettre, B, et nous aurons

$$v = v_0 B \tag{2}$$

et

$$\text{(3)}\qquad B = 1 + \alpha t.$$

On peut remarquer que si v et v' désignent les volumes d'une même masse à t^0 et à t'^0, on aura

$$v = v_0 B, \qquad v' = v_0 B';$$

donc, sous la même pression,

$$\text{(4)}\qquad \frac{v}{v'} = \frac{B}{B'}.$$

Le nombre α est sensiblement le même pour tous les gaz permanents; pour l'air

$$\text{(5)}\qquad \alpha = 0,00367,$$

il reste le même à toute pression et à toute température.

M. Regnault a montré, par ses longues et importantes études sur la dilatation, que cette invariabilité n'est pas mathématique, mais qu'elle peut être admise sans erreur dans les applications industrielles.

Remarque. — La formule de Gay-Lussac n'est pas l'expression de la loi véritable de la dilatation, car s'il en était ainsi, en posant

$$t = -\frac{1}{\alpha} = -273^0,$$

le volume du gaz s'annulerait, ce qui paraît inadmissible. Donc on a véritablement

$$v = v_0\,\varphi(t),$$

et en développant en série

$$\varphi(t) = 1 + \alpha t + \varphi''(0)\frac{t^2}{2} + \ldots;$$

mais $\varphi''(0)$, $\varphi'''(0)$,... sont sensiblement nuls.

La densité d'une masse gazeuse est évidemment en raison inverse de son volume; donc, en nommant D et D′ les densités aux températures respectives t et t', nous aurons

$$(6) \qquad DB = D'B';$$

par suite,

$$(7) \qquad D = \frac{D_0}{B} = \frac{D_0}{1+\alpha t}.$$

Cette formule est d'un fréquent usage.

§ IV. — *Combinaison des lois de Mariotte et de Gay-Lussac.*

La loi de Mariotte suppose que le gaz garde la même température; celle de Gay-Lussac, qu'il garde la même pression. Considérons maintenant le cas plus général où une masse gazeuse passerait de l'état (p, v, t) à l'état (p', v', t'). Nous pouvons lier ces deux états l'un à l'autre à l'aide d'une équation qui résulte des deux lois précédentes. Ramenons les gaz à la même température, à zéro par exemple. Le volume v deviendra $\frac{v}{B}$, et le volume v' deviendra $\frac{v'}{B'}$. Maintenant, appliquons la loi de Mariotte : nous aurons

$$\frac{pv}{B} = \frac{p'v'}{B'}.$$

Nous supposerons, dans le cours du Mémoire, que la masse gazeuse modifiée est celle d'un mètre cube prise à zéro, et sous la pression $0^m,76$. Rapportons cette pression au mètre carré, et exprimons-la en kilogrammes; elle deviendra

$$H = 10\,333^{kg} \text{ environ.}$$

Si maintenant, dans la formule ci-dessus, nous faisons

$$t' = 0, \quad v' = 1, \quad p' = H,$$

elle donne

$$(8) \qquad pv = \mathrm{BH} = \mathrm{H}(1 + \alpha t).$$

On voit, par cette équation, que les deux éléments p, v définissent complétement l'état de la masse gazeuse considérée; car elle permet de trouver t, quand p et v sont connus. Nous avons déjà vu que ces deux quantités peuvent être regardées comme déterminant un point sur un plan POV; le point (p, v) peut être, par suite, appelé l'*état* de la masse gazeuse.

Une équation

$$p = \varphi(v)$$

définit une série continue d'états par une courbe tracée sur le même plan. Nous nommerons *cycle d'états* une courbe fermée quelconque marquant une série d'états par lesquels une masse gazeuse passe et revient à son état primitif.

§ V. — *Chaleur spécifique. — Capacité calorifique.*

On nomme *chaleur spécifique* ou *capacité calorifiqne* la quantité de chaleur nécessaire pour échauffer d'*un* degré centigrade 1 kilogramme de gaz. On prend pour unité de chaleur la *calorie*, c'est-à-dire la quantité de chaleur nécessaire pour élever d'un degré la température d'*un* kilogramme d'eau.

La question des capacités calorifiques des gaz peut être envisagée sous un double point de vue. On peut chauffer la masse gazeuse en lui permettant de se dilater librement; la pression reste constante pendant cette opération. On nomme c la capacité calorifique à pression constante. On peut aussi supposer le gaz renfermé dans une enveloppe inextensible pendant l'échauffement; son volume reste invariable, la pression seule change. On nomme c' la capacité calorifique à volume constant.

M. Regnault a étudié avec beaucoup de soin les capacités des gaz; il a montré que c ne dépend ni de la température ni de la pression, et il a trouvé, pour l'air atmosphérique,

$$c = 0,2377.$$

La quatrième figure est douteuse. Ce nombre n'est pas le même pour tous les gaz; mais M. Regnault a vérifié que l'on a sensiblement, pour tous les gaz permanents,

$$(9) \qquad D_0 c = \text{const.} = 0,307 \text{ environ},$$

D_0 étant le poids spécifique du gaz à zéro. Cette loi est due à Dulong.

Le nombre c' est plus difficile à déterminer; ce n'est qu'indirectement qu'on peut y arriver. Les expériences de Gay-Lussac et Welter, les expériences beaucoup plus récentes de Masson et de M. Cazin montrent que ce coefficient est à peu près indépendant de la pression et de la température. Toutefois, cette conclusion repose sur des bases encore incertaines, parce que les limites des températures et des pressions entre lesquelles les expériences ont été faites sont peu éloignées. Nous admettrons ici l'invariabilité de c', et nous poserons

$$(10) \qquad \gamma = \frac{c}{c'} = 1,41.$$

C'est le nombre trouvé par MM. Masson et Cazin.

Nous rappellerons que la dépense de chaleur pour faire passer une masse gazeuse de la température t à la température t', sans que sa pression change, est

$$Pc(t'-t),$$

en nommant P son poids. Si le volume est invariable, la dépense est

$$Pc'(t'-t) = \frac{Pc}{\gamma}(t'-t).$$

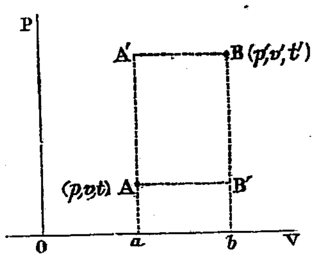
Ces formules supposent l'invariabilité absolue de c et de c' dans l'intervalle $t'-t$. Toutefois, comme l'expérience a démontré qu'ils sont sensiblement invariables dans une petite étendue de l'échelle des pressions et des températures, on peut regarder ces formules comme parfaitement exactes, si $(t'-t)$ est suffisamment petit.

§ VI. — *Dépense de chaleur pour passer d'un état à un autre quelconque.*

Prenons la masse gazeuse à l'état $A(p, v, t)$, et cherchons la chaleur qu'il faut dépenser pour la faire passer à l'état $B(p', v', t')$.

Nous pouvons suivre deux chemins différents; car nous pouvons chauffer d'abord à volume constant et amener le gaz en A' (*fig.* 1) à la pression p' qu'il aura en B, puis chauffer à pression constante jusqu'à ce qu'il ait le volume v'. Nous aurons ainsi suivi la série des états AA'B.

Fig. 1.



Nous pouvons encore chauffer d'abord à pression constante jusqu'à ce que le gaz ait pris le volume v' qu'il doit avoir en B, et puis chauffer à volume constant jusqu'à ce que la pression p' soit atteinte; le chemin des états suivi sera dans ce cas AB'B.

La température θ à l'état A' sera donnée par la relation

$$p'v = \mathrm{H}(1 + \alpha\theta),$$

et la température θ' à l'état B' par la relation

$$pv' = \mathrm{H}(1 + \alpha\theta').$$

Cela posé, nous aurons les résultats suivants :

1° Pour amener le gaz de l'état A à l'état A', la dépense de chaleur sera

$$q = \mathrm{D}_0 c'(\theta - t) = \frac{\mathrm{D}_0 c'}{\mathrm{H}\alpha} v(p' - p);$$

2° Pour amener le gaz de A′ à B, la dépense sera

$$q_1 = D_0 c(t' - \theta) = \frac{D_0 c}{H\alpha} p'(v' - v);$$

3° Pour amener le gaz de A à B′, la dépense sera

$$q' = D_0 c(\theta' - t) = \frac{D_0 c}{H\alpha} p(v' - v);$$

4° Pour amener le gaz de B′ à B, la dépense sera

$$q'_1 = D_0 c'(t' - \theta') = \frac{D_0 c'}{H\alpha} v'(p' - p).$$

Donc la dépense totale le long du chemin AA′B sera

$$Q = q + q_1 = \frac{D_0}{H\alpha}[cp'(v' - v) + c'v(p' - p)],$$

et la dépense totale le long du chemin AB′B sera

$$Q' = q' + q'_1 = \frac{D_0}{H\alpha}[cp(v' - v) + c'v'(p' - p)].$$

Ces deux quantités ne sont pas les mêmes, car leur différence

$$Q - Q' = \frac{D_0}{H\alpha}(c - c')(p' - p)(v' - v)$$

ne peut être nulle, à moins que l'on n'ait $p' = p$ ou $v' = v$, ce que nous ne supposons pas. Nous arrivons donc à cette conclusion remarquable :

Théorème. — *Pour faire passer une masse gazeuse d'un état* (p, v) *à un autre* (p', v') *différent, la dépense de chaleur ne dépend pas seulement de l'état initial et de l'état final, elle dépend encore des états intermédiaires.*

Remarque. — Cette vérité est, comme l'on voit, un corollaire très-simple des lois de Mariotte et de Gay-Lussac, et de l'invariabilité des chaleurs spécifiques; on peut même dire qu'elle ne dépend que des deux premières lois, en admettant que les deux états A et B soient suffisamment voisins. Nous avons signalé ce résultat pour la première fois dans un Mémoire qui fait partie des *Annales de Chimie et de Physique* (t. LVI, 1859). Ce théorème fait apercevoir immédiatement cette autre vérité, que la chaleur dépensée n'est pas tout entière absorbée par le gaz, comme on le croyait autrefois; car, s'il en était ainsi, on devrait dépenser la même quantité de chaleur pour amener un gaz d'un état à un autre, quelle que fût la route suivie.

§ VII. — *Démonstration élémentaire de la loi de la transformation de la chaleur en travail mécanique.*

Après avoir fait passer le gaz de l'état A à l'état B, en suivant le chemin AA'B, la dépense de chaleur est

$$Q = \frac{D_0}{H\alpha}[cp'(v'-v) + c'v(p'-p)]. \tag{11}$$

Ramenons maintenant le gaz au premier état par le chemin BB'A, nous recueillerons la quantité de chaleur

$$Q' = \frac{D_0}{H\alpha}[cp(v'-v) + c'v'(p'-p)]. \tag{12}$$

Donc, après le parcours du cycle d'états AA'BB'A, la dépense de chaleur est

$$Q - Q' = \frac{D_0}{H\alpha}(c-c')(p'-p)(v'-v). \tag{13}$$

Cette quantité n'est pas nulle; donc, quoique le gaz ait été ramené à son état primitif, une certaine quantité de la chaleur dépensée a été *anéantie*, a *disparu*. Voilà une conclusion certaine qui découle des lois de Mariotte et de Gay-Lussac, qui y est implicitement contenue.

Mais, d'un autre côté, observons qu'une certaine quantité de travail mécanique a été produite. En effet, dans le passage de A' à B, le travail moteur produit par l'expansion du gaz a été

$$\tau = p'(v'-v),$$

si, pour fixer les idées, nous imaginons toujours le gaz renfermé dans un cylindre d'un mètre carré de section sous un piston équilibré. Dans le passage de B′ à A, le volume a diminué; le travail résistant du gaz a été

$$\tau_1 = p(v' - v).$$

Pendant les autres modifications de l'état du gaz, le volume est resté invariable; donc il n'y a pas eu de travail. Donc, en résumé, pendant le parcours du cycle d'états AA′BB′A, le gaz a servi à produire une quantité de travail mécanique

$$(14) \qquad \varpi = (p' - p)(v' - v)$$

mesurée par la surface du rectangle formée par le cycle. Donc :

Théorème. — *S'il y a une certaine quantité de chaleur anéantie dans le parcours d'un cycle fermé rectangulaire, il y a en même temps création d'une quantité proportionnelle de travail mécanique.*

En d'autres termes :

Théorème. — *Quand on fait passer un gaz par une série d'états formant un circuit fermé rectangulaire, tout se passe comme si la chaleur se transformait en travail mécanique par équivalents. On voit disparaître, s'anéantir une certaine quantité de chaleur, et l'on voit créée à la place une quantité proportionnelle de travail mécanique.*

Des relations ci-dessus on tire

$$(15) \qquad Q - Q' = \frac{D_0(c - c')}{H\alpha}\varpi;$$

donc

$$(16) \qquad \frac{\varpi}{Q - Q'} = E = \frac{H\alpha}{D_0(c - c')} = \frac{H\alpha}{D_0 c\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)}.$$

Or la quantité E (16) est le travail correspondant à une calorie perdue; nous pouvons donc le désigner sous le nom d'*équivalent mécanique de la chaleur.* Nous arrivons ainsi à l'expression de l'équivalent en fonction de coefficients numériques connus, et sans nous appuyer sur d'autres lois que celles de Mariotte, de Gay-Lussac et de Dulong. Réduisons en nombres la formule qui donne E; en posant :

$$\begin{aligned}
D_0 &= \overset{\text{kg}}{1,293},\\
H &= 10333^{\text{kg}},\\
c &= 0,2377,\\
\gamma &= 1,41,\\
\alpha &= 0,003665,
\end{aligned}$$

nous obtenons

$$E = 425. \tag{17}$$

Le dernier chiffre est douteux, eu égard à l'incertitude de γ. Nous pouvons dire que l'équivalent mécanique de la chaleur est compris entre 420 et 430. Cette détermination théorique, qu'il est impossible d'attaquer sans mettre en doute les parties les mieux étudiées de la Physique, peut servir de contrôle à toutes les déterminations expérimentales faites directement. Elle s'accorde parfaitement avec les moyennes des expériences de Joule qui ont donné 424,5, et avec d'autres résultats trouvés en France par MM. Favre, Quintus Icilius, Seguin, etc., et en Allemagne par MM. Clausius, Boscha, etc.

Remarque I. — Pendant longtemps, et l'on peut même dire jusqu'à la découverte de Joule, la chaleur était regardée comme un fluide interposé entre les molécules des corps. La dilatation résultant de cette interposition produisait du travail, mais on pensait que le travail produit n'avait aucune liaison intime avec le calorique dépensé pour dilater le corps. Les résultats de nos calculs montrent clairement que cette hypothèse est inexacte, qu'il y a entre le travail et le calorique un rapport si intime, qu'ils peuvent être regardés comme choses homogènes, pouvant se transformer l'un dans l'autre par équivalents. Montgolfier, le premier, paraît avoir eu cette idée; son neveu Seguin l'avait indiquée, en 1829, dans un ouvrage sur les chemins de fer; M. Joule en a démontré l'exactitude par des expériences justement célèbres, et il a pu tirer de ces expériences une détermination approchée de l'équivalent mécanique de la chaleur. Nous croyons avoir montré avant tout autre, en 1857, que cette loi de transformation est implicitement contenue dans celles de Mariotte, de Gay-Lussac et de Dulong, lois purement expérimentales, trouvées sans préoccupations des théories nouvelles sur la chaleur. Ce n'est donc plus une hypothèse, mais une loi aussi certaine que celles dont elle découle.

La démonstration que nous venons d'en donner est élémentaire et peut entrer dans les Traités de physique destinés aux élèves des lycées; voilà pourquoi nous l'avons longuement développée. Mais elle est incomplète; car, pour passer d'un état à un autre, nous suivons un chemin particulier. Nous allons la généraliser.

§ VIII. — *Démonstration générale de la transformation de la chaleur en travail.*

Considérons deux états infiniment voisins de notre masse gazeuse, c'est-à-dire supposons

$$v' = v + dv, \quad p' = p + dp;$$

les dépenses (11) et (12) de chaleur deviennent

$$Q = \frac{D_0}{H\alpha}[c'v\,dp + cp\,dv + c\,dp\,dv], \tag{18}$$

et

$$Q = \frac{D_0}{H\alpha}[c'v\,dp + cp\,dv + c'dp\,dv]. \tag{19}$$

Ces deux quantités ne diffèrent que par le terme du second ordre

$$\frac{D_0}{H\alpha}(c - c')\,dp\,dv.$$

Donc, si nous devons prendre Q ou Q' comme éléments d'intégrales définies, nous pouvons négliger dans chacune la partie du second ordre et les réduire à la quantité du premier ordre, que nous nommerons dQ. D'où l'on peut conclure que la dépense de chaleur nécessaire pour faire passer la masse gazeuse d'un état pv à un autre infiniment voisin est

$$dQ = \frac{D_0}{H\alpha}[c'v\,dp + cp\,dv], \tag{20}$$

ou bien

$$dQ = \frac{D_0 c}{H\alpha}\left[\frac{1}{\gamma}v\,dp + p\,dv\right]. \tag{21}$$

Soient maintenant deux états quelconques A et B. Cherchons la dépense de chaleur à faire pour passer de A à B en suivant une courbe quelconque d'états successifs donnée par l'équation

$$p = \varphi(v). \tag{22}$$

Il nous suffit d'intégrer la formule (20) depuis $v = v_0$, qui correspond au point A, jusqu'au point $v = V$, qui correspond au point B; il vient ainsi

$$Q = \frac{D_0}{H\alpha}\int_{v_0}^{V}(c'v\,dp + cp\,dv); \tag{23}$$

en intégrant par parties, on peut lui donner la formule suivante :

$$Q = \frac{D_0}{H\alpha}\left[c'(VP - v_0 p_0) + (c - c')\int_{v_0}^{V} p\,dv\right]. \tag{24}$$

Remarque I. — La formule (20) serait encore vraie dans le cas où c et c' dépendraient de p et de v; donc aussi la formule (23). En effet, dans le passage d'un état à un autre infiniment voisin, les variations de c' et de c n'altéreraient dQ que de quantités infiniment petites du second ordre.

Remarque II. — Si nous suivions le chemin AB en sens contraire, nous recueillerions évidemment la quantité de chaleur dépensée pour aller de A à B. Or la formule de la dépense deviendrait

$$Q = \frac{D_0}{H\alpha}\int_{V}^{v_0}(c'v\,dp + cp\,dv),$$

ou

$$Q = -\frac{D_0}{H\alpha}\int_{v_0}^{V}(c'v\,dp + cp\,dv),$$

et le résultat obtenu serait négatif. Donc, si nous convenons qu'une quantité de chaleur dépensée *négative* représente une quantité de chaleur *recueillie*, nous pouvons nous servir des formules (23) et (24) dans tous les cas pour trouver la quantité de chaleur dépensée ou recueillie dans le passage d'un état à un autre.

Considérons maintenant un circuit fermé quelconque compris entre deux courbes

$$p = \varphi(v), \quad p_1 = \varphi_1(v),$$

et les deux ordonnées correspondantes aux volumes v_0 et V.

Ce circuit sera ABB_1A_1A, soit AB la courbe supérieure.

Nous aurons, pour les quantités de chaleur dépensées,

de A à B,

$$\frac{D_0}{H\alpha}\left[c'(VP - v_0 p_0) + (c - c')\int_{v_0}^{V}\varphi(v)\,dv\right];$$

de B à B_1,

$$-\frac{D_0}{H\alpha}[c'VP - c'VP'];$$

de B_1 à A_1,

$$-\frac{D_0}{H\alpha}\left[c'(VP' - v_0 p'_0) + (c - c')\int_{v_0}^{V}\varphi_1(v)\,dv\right];$$

de A_1 à A,

$$\frac{D_0}{H\alpha}[c'v_0 p_0 - c'v_0 p'_0].$$

Donc la quantité totale de chaleur dépensée dans le parcours du circuit fermé ABB_1A_1A sera

$$(25) \qquad \mathfrak{Q} = \frac{D_0(c - c')}{H\alpha}\int_{v_0}^{V}[\varphi(v) - \varphi_1(v)]\,;$$

mais la surface du quadrilatère curviligne ABB_1A_1A vaut

$$(26) \qquad \mathfrak{s} = \int_{v_0}^{V}[\varphi(v) - \varphi_1(v)]\,dv,$$

donc

$$\mathfrak{Q} = \frac{D_0(c - c')}{H\alpha} \mathcal{S}. \tag{27}$$

De l'équation (27) nous concluons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans le parcours d'un circuit fermé quelconque d'états, la quantité de chaleur anéantie ou créée par l'intermédiaire du gaz est proportionnelle à l'aire du circuit parcouru.*

Remarquons maintenant que le travail moteur effectué par l'intermédiaire du gaz est donné par la formule

$$\mathfrak{T} = \int_{v_0}^{V} [\varphi(v) - \varphi_1(v)]\, dv = \mathcal{S};$$

car, dans le parcours des lignes BB_1, A_1A, le volume ne changeant pas, le gaz ne travaille pas. Remarquons aussi que le travail, au lieu d'être *moteur*, deviendrait *résistant*, si le gaz parcourait en sens contraire le circuit des états successifs; donc nous pouvons énoncer les principes généraux suivants :

THÉORÈME. — *Dans le parcours d'un circuit d'états fermé quelconque, il y a anéantissement ou création de chaleur proportionnellement au travail moteur ou résistant effectué par le gaz.*

Ou bien encore :

THÉORÈME. — *Si un gaz passe par une série d'états et revient par un cycle fermé à l'état primitif, une certaine quantité de la chaleur dépensée a disparu, si le gaz a servi à effectuer une certaine quantité de travail. La quantité de calories disparues est proportionnelle au nombre de kilogrammètres effectués à raison de*

$$E = \frac{H\alpha}{D_0(c - c')} = 245^{\text{kgm}} \text{ environ}$$

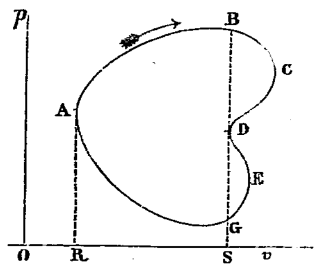
par calorie.

Dans le cas où le travail du gaz a été résistant, c'est-à-dire où une certaine quantité de travail extérieur a été consommée par les changements d'état du gaz, on trouve qu'une quantité proportionnelle de calories a été créée.

Remarque I. — Si l'on représente, comme nous l'avons fait, la série des états par une ligne, en prenant les volumes pour abscisses et les pressions pour ordonnées, on voit qu'il y a transformation de chaleur en travail si le circuit est parcouru dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, et transformation de travail en chaleur quand le circuit est parcouru en sens contraire.

Remarque II. — Notre démonstration semble particulière, mais il est facile de l'étendre à un circuit fermé de forme quelconque, fût-il même

Fig. 2.



rentrant. Menons l'ordonnée AR (*fig.* 2) par le point A le plus rapproché de Op, et si le circuit est rentrant partageons-le en d'autres qui ne le soient pas, ou tels, qu'en suivant chacun d'eux on s'éloigne ou l'on se rapproche de Op sans alternatives, comme dans la figure ci-dessus. En parcourant le circuit ABDGA, il y a perte de chaleur proportionnelle à l'aire de ce circuit; en parcourant BCDB, il y a perte de chaleur proportionnelle à l'aire du nouveau circuit; enfin, en parcourant DEGD, il y a perte de chaleur proportionnelle à l'aire du circuit parcouru. Mais, si l'on parcourt successivement tous ces circuits, on a suivi la totalité du circuit donné et parcouru deux fois, mais en sens inverse, les lignes BD et DG; donc ce chemin auxiliaire n'influe en rien sur la quantité de chaleur anéantie ou créée dans le cours des opérations, et l'on peut dire encore que la quantité de chaleur perdue ou créée dans le parcours du circuit total est proportionnelle à la surface de ce circuit, c'est-à-dire au travail moteur ou résistant effectué par le gaz.

§ IX. — *Distinction entre la chaleur dépensée et la chaleur transformée.*

Il importe de distinguer avec soin, dans les raisonnements de la Thermodynamique, la chaleur dépensée et la chaleur anéantie, ou mieux transformée en travail.

Considérons deux états A et B d'un gaz; nous avons trouvé (24) que la chaleur *dépensée* pour passer de l'un à l'autre est

$$Q = \frac{D_0}{H\alpha}\left[c'(VP - v_0 p_0) + (c - c')\int_{v_0}^{V} p\,dv\right].$$

Or le travail effectué par l'intermédiaire du gaz est

$$\mathfrak{E} = \int_{v_0}^{V} p\,dv; \tag{28}$$

donc une calorie dépensée correspond à un travail

$$\frac{\mathfrak{E}\dfrac{H\alpha}{D_0(c - c')}}{\mathfrak{E} + \dfrac{c'}{c - c'}(VP - v_0 p_0)},$$

ou

$$\frac{E}{1 + \dfrac{c'}{c - c'}\dfrac{VP - v_0 p_0}{\mathfrak{E}}}. \tag{29}$$

Donc la dépense d'une calorie correspond à un travail variable toujours moindre que $E = 425^{\text{kgm}}$.

C'est que, dans ce cas, la chaleur dépensée Q n'est pas seulement employée à produire du travail mécanique; elle sert aussi à modifier l'état du gaz. Elle se partage donc en deux parties : l'une qui est consommée, anéantie par le travail, ou transformée en travail; l'autre qui pénètre dans le gaz et modifie son état. Comme nous ne connaissons aucune loi qui sépare ces deux quantités de chaleur, il faut, pour trouver l'équivalent, ramener le gaz à l'état primitif. On est bien sûr alors que la quantité de chaleur disparue est tout entière transformée en travail mécanique. C'est ce qui explique l'emploi des cycles fermés.

C'est faute d'avoir fait la distinction que nous venons de signaler que quelques auteurs sont arrivés à une valeur de l'équivalent différente de celle que nous avons donnée. Nous signalerons en particulier le vice du raisonnement de M. Laboulaye dans son *Dictionnaire technologique* (1re édition, article Calorie), afin de mettre les mécaniciens en garde contre ses conclusions. Cette rectification est d'autant plus nécessaire que M. Laboulaye, pour prouver la bonté du nombre 111 qu'il avait trouvé pour E, a rapporté, dans une Note à l'Académie, des expériences faites avec une sonnette à battre les pieux, qui donneraient, suivant lui, 150 kilogrammètres pour limite supérieure de E [*].

M. Laboulaye considère une masse gazeuse à zéro et sous la pression H; il la chauffe de manière à élever sa température d'*un* degré, puis il la laisse se détendre jusqu'à ce que la température redevienne zéro. Il calcule, d'une part, le calorique dépensé, de l'autre le travail effectué, et, divisant ce dernier par le premier, il croit avoir l'équivalent mécanique de la chaleur. Il y a ici évidemment confusion entre la chaleur dépensée et la chaleur transformée.

M. Destoquois, dans un travail sur le même sujet, a trouvé 170 kilogrammètres pour l'équivalent E; nous n'avons pas pu prendre connaissance de son Mémoire, mais nous pensons que son erreur tient à la même confusion.

Si nous admettons que E soit constant, ce qui semble résulter des expériences de M. Regnault sur les gaz permanents, nous pouvons calculer la chaleur retenue par le gaz et employée au changement d'état. Désignons par Q_1 et Q_2 les deux parties de Q, nous aurons

$$Q_1 + Q_2 = \frac{D_0(c - c')}{H\alpha}\left[\frac{c'(VP - v_0 p_0)}{c - c'} + \mathfrak{T}\right],$$

ou bien

$$Q_1 + Q_2 = \frac{1}{E}\,\frac{c'(VP - v_0 p_0)}{c - c'} + \frac{\mathfrak{T}}{E}. \tag{30}$$

[*] Depuis, MM. Laboulaye et Tresca ont trouvé 430 kilogrammètres environ pour le même nombre.

Mais la première partie Q_1 est la quantité transformée; donc elle est égale à $\frac{\mathfrak{T}}{E}$ calories, donc la partie Q_2 employée au changement d'état et contenue dans le gaz est donnée par

$$(31) \qquad Q_2 = \frac{1}{E} \frac{c'(VP - v_0 p_0)}{c - c'}.$$

Cette partie s'annule si $VP = v_0 p_0$, et par conséquent si $V = v_0$, $P = p_0$, c'est-à-dire si le cycle des états est fermé.

Mais nous apercevons immédiatement aussi que Q_2 peut s'annuler sans que le cycle des états successifs soit fermé; il suffit que la courbe suivie soit l'hyperbole

$$pv = H(1 + \alpha t) = \text{const.},$$

c'est-à-dire que le gaz se détende en gardant sa température. Désignons cette hyperbole sous le nom expressif de *courbe isothermique*. Quand le gaz suit une courbe isothermique, toute la chaleur qu'on lui donne est transformée en travail.

Cette conclusion est extrêmement remarquable, et, en y réfléchissant, elle tendrait à nous faire douter de l'exactitude mathématique de certaines lois qui nous ont servi de base. Puisqu'en suivant une courbe isothermique, le gaz, dans sa détente, transforme tout le calorique dépensé en travail, il faut admettre que les quantités de chaleur contenues dans les deux états extrêmes sont les mêmes, et que par suite le changement de volume n'exige par lui-même aucun travail; que le travail *interne* consommé par le gaz dans ce changement d'état est absolument nul.

Il semble difficile de croire à l'exactitude absolue de cette loi, et c'est une raison de penser que les lois de Mariotte, de Gay-Lussac et de Dulong sont des lois empiriques approchées, ou au moins que l'une d'entre elles n'est pas parfaitement exacte. Si nous remplacions la loi de Mariotte par une autre

$$pv^{1+\beta} = H(1 + \alpha t),$$

β étant très-voisin de zéro, nous verrions en effet que la conclusion ci-dessus ne serait plus rigoureusement vraie.

§ X. — *Formule de Laplace donnant la loi de la détente des gaz permanents.*

Nous avons vu que la dépense de chaleur nécessaire pour faire passer un gaz permanent de l'état $(p_0 v_0)$ à l'état (PV) le long d'une courbe

$$p = \varphi(v)$$

est

$$Q = \frac{D_0}{H\alpha} \int_{v_0}^{V} (c' v dp + c p dv).$$

Cherchons la courbe des états successifs qui ne donnerait lieu à aucune dépense. Il faut écrire que l'élément de l'intégrale est constamment nul; en d'autres termes, si nous laissons indéterminée la limite supérieure de l'intégrale, il faut trouver quelle doit être la forme de la fonction φ pour que la fonction primitive Q soit nulle, quel que soit v. La dérivée doit être nulle; donc

$$(32) \qquad c' v \frac{dp}{dv} + cp = 0,$$

et cela suffit pour que Q soit nul, quel que soit v. De là nous déduisons

$$(33) \qquad p v^{\gamma} = \text{const.}$$

Cette équation représente une sorte d'hyperbole ayant les axes pour asymptotes, comme la courbe isothermique. Mais, tandis que cette dernière est symétrique par rapport aux deux axes, la première ne l'est pas. Soit $(p_0 v_0)$ un point commun aux deux courbes, on aura

$$p v^{\gamma} = p_0 v_0^{\gamma},$$

et

$$p v = p_0 v_0$$

pour leurs équations respectives. Pour une abscisse $Ob = v > v_0$, la première donnera l'ordonnée

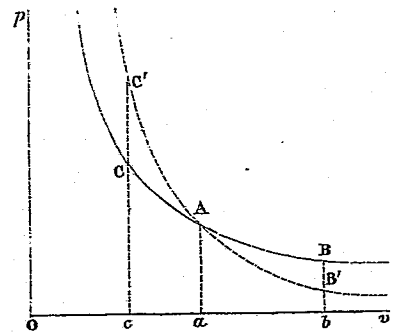
$$B'b = \frac{p_0 v^{\gamma}}{v^{\gamma}} = p_0 \left(\frac{v_0}{v}\right)^{\gamma};$$

la seconde

$$Bb = \frac{p_0 v_0}{v} = p_0\left(\frac{v_0}{v}\right);$$

mais $\frac{v_0}{v} < 1$; donc $B'b < Bb$. Donc, au delà de l'ordonnée commune, la courbe de détente libre passe au-dessous de la courbe isothermique; en deçà de l'ordonnée commune, c'est le contraire qui arrive.

Fig. 3.



Puisque le long de cette courbe les changements d'état du gaz se font sans dépense et sans soustraction directe de chaleur, cette courbe peut être nommée *courbe de détente libre* ou *de compression libre*.

La formule de Laplace, combinée avec la formule de Mariotte, conduit à deux relations souvent employées. Écrivons les deux équations

$$pv^\gamma = p'v'^\gamma$$

et

$$\frac{pv}{1+\alpha t} = \frac{p'v'}{1+\alpha t'},$$

qui servent à trouver la pression et la température après une détente ou une compression déterminées; nous en déduisons

$$(34) \qquad \left(\frac{v}{v'}\right)^{\gamma-1} = \frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}$$

et aussi

$$(35) \qquad \left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}.$$

Ces équations permettent de trouver deux quelconques des quantités p, v, t, quand on connaît l'autre, dans le cas d'une détente ou d'une compression avec variation libre de température.

Remarque I. — Dans le second volume de sa *Mécanique rationnelle* (p. 647), Poisson arrive aux mêmes formules par une autre voie. En examinant à fond le raisonnement de Poisson, on aperçoit que, dans le système des idées nouvelles, il est erroné, et que sa conclusion n'est exacte que par une compensation d'erreurs. Nous voyons à la page 639 que Poisson regarde le gaz comme absorbant tout le calorique dépensé et la dépense q comme ne dépendant que de l'état initial p_0, ρ_0, θ_0 et de l'état final p, ρ, θ, ce qui est une première erreur, comme nous l'avons démontré. Poisson commet ensuite une autre erreur en admettant que la capacité calorifique c est exprimée par la formule

$$c = \frac{dq}{d\rho}\frac{d\rho}{dt}.$$

En effet, dans le système des idées nouvelles, la chaleur dépensée quand on chauffe un corps sous pression constante se partage en deux parties, dont l'une est absorbée par le corps, et dont l'autre disparaît en se transformant en travail. Ces deux erreurs conduisent Poisson à l'équation aux dérivées partielles

$$\rho\frac{dq}{d\rho} + \gamma p\frac{dq}{dp} = 0,$$

ou, en introduisant le volume à la place de ρ, pour rentrer dans le système de nos notations,

$$v\frac{dq}{dv} - \gamma p\frac{dq}{dp} = 0, \tag{36}$$

qui, intégrée, donne

$$q = \text{fonct.}(pv^\gamma).$$

Cette équation aux dérivées (36) partielles est fausse; mais, par suite des deux erreurs faites, elle convient à la quantité de chaleur dépensée Q; car de notre relation (20)

$$dQ = \frac{D_0 c'}{H\alpha}(v\,dp + \gamma p\,dv)$$

on déduit que Q, considéré comme fonction de p et de v, satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$v\frac{dQ}{dv} - \gamma p\frac{dQ}{dp} = 0.$$

Mais cette coïncidence est toute fortuite, et si l'équation

$$q = f(pv^\gamma)$$

donne

$$pv^\gamma = \text{const.}$$

pour la courbe qu'il faut suivre pour passer d'un état à un autre sans dépense de chaleur, il n'en faut pas moins conclure que le raisonnement de Poisson est faux, puisqu'il suppose dès le début que la dépense de chaleur ne dépend que de l'état final, une fois l'état initial choisi, et non point du chemin suivi pour passer de l'un à l'autre.

Remarque II. — Nous avons trouvé pour l'élément de dépense de calorique, quand on passe d'un état à un autre infiniment voisin,

$$dQ = \frac{D_0 c'}{H\alpha}(v\,dp + \gamma p\,dv).$$

Cette formule serait encore vraie dans l'hypothèse où c et c' seraient des fonctions de p et de v. Cherchons comment devraient varier ces quatre quantités pour que Q ne dépendît que de l'état final du gaz, ou, en d'autres termes, pour que Q fût indépendant du chemin parcouru. Dans cette hypothèse, Q deviendrait une fonction des deux variables indépendantes p, v; donc on aurait

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = c'v, \quad \frac{\partial Q}{\partial v} = cp;$$

par suite,

$$c' + v\frac{\partial c'}{\partial v} = c + p\frac{\partial c}{\partial p}.$$

Mais M. Regnault a trouvé que c est sensiblement indépendant de la pression; donc on aurait simplement

$$c' + v\frac{\partial c'}{\partial v} = c.$$

L'intégration donnerait

$$c' = c + \frac{\varphi(p)}{v},$$

$\varphi(p)$ étant une fonction de la pression. Si l'on remplace c' par cette valeur dans dQ, on obtient

$$dQ = \frac{D_0}{H\alpha}[c(v\,dp + p\,dv) + \varphi(p)\,dp],$$

d'où

$$Q = \frac{D_0 c}{H\alpha}pv + \frac{D_0}{H\alpha}\int \varphi(p)\,dp + \text{const.};$$

ou bien, en mettant pour v sa valeur en t tirée de la formule $pv = H(1 + \alpha t)$,

$$Q = D_0 ct + \frac{D_0}{H\alpha}\Psi(p) + A,$$

Ψ étant une certaine fonction à déterminer par l'expérience, et A une constante qui représentera la quantité de chaleur contenue dans le gaz à zéro et à H, si l'on suppose, comme on peut toujours le faire. que $\Psi(H) = 0$.

En réduisant cette formule en nombres, nous trouvons

$$Q = 0{,}308 . t + 0{,}0341 . \Psi(p) + A.$$

D'après cette formule, pour passer de l'état primitif (zéro, H) à un autre état quelconque (t, p), il faudrait dépenser

$$(37) \qquad Q - A = 0{,}308 . t + 0{,}0341 . \Psi(p).$$

Cette quantité de chaleur entrerait tout entière dans la masse gazeuse, et, par suite, la série des états intermédiaires n'influerait pas sur elle. Donc, après le parcours d'un circuit fermé, la dépense serait nulle; le travail obtenu par l'intermédiaire de l'air n'aurait rien coûté, et l'on aurait réalisé le mouvement perpétuel. Cette conséquence répugne à notre mécanique, et cette contradiction confirme l'exactitude des recherches expérimentales qui semblent prouver que γ et, par suite, c' sont sensiblement constants pendant les changements d'états de la masse gazeuse.

8..

Remarque III. — La formule $pv^\gamma = \text{const.}$, qui donne la courbe de libre détente, permet de compléter le raisonnement de Laboulaye et d'en déduire rationnellement la valeur de l'équivalent que nous avons déjà trouvée.

Faisons, à partir de 1 degré, détendre le gaz jusqu'à l'infini. Nous avions, au début,

$$pv^\gamma = \text{const.} = \text{H}(1+\alpha)^\gamma;$$

donc, le travail de la détente s'obtiendra par la formule

$$\int_{1+\alpha}^{\infty} p\,dv = \text{H}(1+\alpha)^\gamma \int_{1+\alpha}^{\infty} v^{-\gamma}dv,$$

ou bien

$$\frac{\text{H}(1+\alpha)}{\gamma - 1}.$$

A ce travail ajoutons celui de la pleine pression, et nous aurons pour le travail total

$$\text{H}\alpha + \frac{\text{H}(1+\alpha)}{\gamma-1} = \frac{\text{H}}{\gamma-1} + \frac{\text{H}\alpha\gamma}{\gamma-1}.$$

Mais, dès le début et sans chauffer, nous aurions pu laisser le gaz se détendre jusqu'à l'infini; le travail effectué aurait été

$$\int_1^{\infty} p\,dv = \text{H}\int_1^{\infty} v^{-\gamma}dv = \frac{\text{H}\alpha}{\gamma-1}.$$

L'excès de travail, dans le premier cas, est

$$\frac{\text{H}\alpha\gamma}{\gamma-1} = \frac{\text{H}\alpha}{1-\frac{1}{\gamma}}.$$

C'est là évidemment le travail dû uniquement à la chaleur dépensée $\text{D}_0\,c$; donc, nous trouverons l'équivalent d'une calorie par la formule

$$\text{E} = \frac{\text{H}\alpha}{\text{D}_0\,c\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)}.$$

C'est précisément celle que nous avons déjà trouvée.

Remarque IV. — Le raisonnement donné dans la plupart des Traités de physique, pour trouver le rapport des deux chaleurs spécifiques, ne me paraît pas parfaitement exact; voici celui qu'il faut lui substituer, en s'appuyant sur la formule

$$\frac{1+\alpha t}{1+\alpha t'} = \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{\gamma-1}.$$

Considérons 1 mètre cube de gaz à zéro, et sous la pression H. Élevons la température à 1 degré, il deviendra

$$1+\alpha.$$

Comprimons-le alors de manière à lui donner la température $1+\omega$, et à le ramener au volume primitif; nous aurons

$$\frac{1+\alpha(1+\omega)}{1+\alpha} = (1+\alpha)^{\gamma};$$

donc

$$1+\alpha(1+\omega) = (1+\alpha)^{\gamma} = 1+\gamma\alpha \quad \text{(à peu près)};$$

par suite

(38) $$\gamma = 1+\omega \quad \text{(à peu près)};$$

d'où l'on voit qu'il suffit de trouver ω pour en conclure γ.

Au lieu de partir de zéro, nous pouvons partir d'une température quelconque t et dire : Considérons 1 mètre cube de gaz à t^0; chauffons-le de manière qu'il prenne la température $t+\theta$: le volume deviendra

$$\frac{1+\alpha(t+\theta)}{1+\alpha t}.$$

Comprimons-le maintenant de manière à le ramener au volume primitif : la température augmentera et deviendra $t+\theta+\omega$; donc, nous aurons

$$\frac{1+\alpha(t+\theta+\omega)}{1+\alpha(t+\theta)} = \left[\frac{1+\alpha(t+\theta)}{1+\alpha t}\right]^{\gamma-1},$$

ou bien

$$\frac{1+\alpha(t+\theta+\omega)}{1+\alpha t} = \left[\frac{1+\alpha(t+\theta)}{1+\alpha t}\right]^{\gamma}.$$

Donc, en négligeant les puissances de α supérieures à la première,

$$1 + \alpha(\theta + \omega) = 1 + \gamma\alpha\theta;$$

d'où enfin

$$\gamma = 1 + \frac{\pi}{\theta}. \tag{39}$$

Cette formule approximative a été employée par Clément et Désormes dans leurs recherches sur le nombre γ. On pourrait, au moyen des logarithmes, se servir des formules rigoureuses sans beaucoup de peine.

§ XI. — *Dépense de chaleur nécessaire pour dilater le gaz sans changer sa température.*

Dans la formule (23)

$$Q = \frac{D_0}{H\alpha}\int_{v_0}^{V}(c'v\,dp + cp\,dv),$$

posons

$$pv = H(1 + \alpha t),$$

en regardant t comme un paramètre constant. Nous aurons

$$p\,dv + v\,dp = 0,$$

et, par suite,

$$Q = \frac{D_0(c - c')}{H\alpha}\int_{v_0}^{V} p\,dv,$$

et, en intégrant,

$$Q = \frac{D_0(c - c')}{\alpha}(1 + \alpha t)\,l\frac{V}{v_0}, \tag{40}$$

l désignant un logarithme népérien, ou bien

$$Q = \frac{D_0(c - c')}{H\alpha}p_0 v_0\,l\frac{V}{v_0}. \tag{41}$$

Ces relations conduisent aux lois suivantes :

Première loi. — *Les quantités de chaleur absorbées ou dégagées pendant la dilatation ou la compression d'un gaz, faites sans chan-*

gement de température, varient en progression arithmétique lorsque les volumes varient en progression géométrique.

DEUXIÈME LOI. — *Des volumes égaux de tous les gaz, pris à la même température, étant comprimés ou dilatés d'une même fraction de leur volume, dégagent ou absorbent la même quantité de chaleur.*

TROISIÈME LOI. — *Des volumes égaux de tous les gaz, pris à la même température, étant comprimés ou dilatés d'une même fraction de leur volume, dégagent ou absorbent des quantités de chaleur proportionnelles à la pression.*

Dulong a vérifié par des expériences directes l'exactitude de la seconde loi.

Ces lois résultent de l'invariabilité de c, c', γ; par suite, elles fournissent aux expérimentateurs divers moyens pour contrôler nos hypothèses, déterminer la valeur de γ et aussi la valeur de l'équivalent mécanique de la chaleur.

§ XII. — *Chaleur spécifique composée.*

Dans la recherche des chaleurs spécifiques, on suppose que la pression reste la même ou que le volume reste le même. Admettons que la pression et le volume varient tous deux infiniment peu, dans le rapport

$$\frac{dp}{dv} = m;$$

cherchons la quantité de chaleur nécessaire pour faire varier la température de dt. En divisant ensuite dQ par $D_0\, dt$, nous aurons la quantité de chaleur nécessaire pour faire varier d'un degré la température d'un kilogramme de gaz, en admettant que p varie avec v dans le rapport

$$\frac{\Delta p}{\Delta v} = m.$$

Cette espèce de chaleur spécifique pourra être appelée *chaleur spécifique composée suivant la pente m.*

Si dans la formule générale

$$dQ = \frac{D_0}{H\alpha}(c'v\,dp + cp\,dv)$$

nous posons

$$dp = m\,dv,$$

puis

$$p\,dv + v\,dp = p\,dv + mv\,dv = H\alpha\,dt,$$

nous obtenons

$$dQ = D_0 \frac{cp + c'mv}{p + mv} dt;$$

donc

$$(42) \qquad \frac{dQ}{D_0\,dt} = c_m = \frac{c\left(\frac{p}{v}\right) + c'm}{\left(\frac{p}{v}\right) + m}.$$

Telle est l'expression de la chaleur spécifique composée c_m. Cette formule donne bien c si $m = 0$ et c' si $m = \infty$.

Dans le cas général, la dépense c_m dépend non-seulement de m, mais encore du rapport primitivement établi entre la pression et le volume. Si l'on admet que $m = \frac{p}{v}$, ou, en d'autres termes, si l'on fait varier à la fois la pression et le volume de manière à conserver pendant l'échauffement le rapport primitivement établi entre ces deux quantités, on aura

$$c_m = \frac{c + c'}{2},$$

quantité indépendante de m et égale environ à

$$0,850.$$

Cette conséquence mériterait une confirmation expérimentale.

On voit qu'en faisant varier une seule des quantités p, v dans l'échauffement des gaz les physiciens sont arrivés à des lois simples qui leur auraient échappé s'ils avaient étudié les chaleurs spécifiques dans toute leur généralité.

Remarque. — Il faut bien entendre ce que nous nommons *rapport* entre les deux quantités hétérogènes p et v. La pression p est exprimée en kilogrammes, le volume v en mètres cubes; mais nous convenons de représenter les deux unités par la même ligne, et c'est toujours à cette représentation que nous nous reportons, quand nous parlons des rapports $\frac{p}{v}$, $\frac{dp}{dv}$.

DEUXIEME PARTIE.

THÉORIE DES MACHINES ATMOSPHÉRIQUES.

§ I. — *Jeu théorique de la machine.*

Nous admettons que la machine fonctionne théoriquement de la manière suivante :

1° Un certain volume d'air est introduit, à la pression ordinaire et à la température extérieure, dans un foyer de chaleur; il s'y échauffe et se dilate librement en gardant la pression primitive; il pousse ainsi un piston équilibré, sans qu'il y ait un travail utilisable.

2° On suppose qu'à la fin de sa course il se détende par l'augmentation de la capacité du cylindre où il est enfermé; et, comme la pression extérieure est sans cesse plus grande que la pression intérieure, il faut dépenser un certain travail pour produire cette détente.

3° Nous supposerons alors que par un moyen quelconque on refroidisse l'air chaud sans changer son volume : sa force élastique diminue encore.

4° L'atmosphère, pressant ensuite sur la tête du piston, produit un travail moteur jusqu'à ce que la force élastique de l'air intérieur redevienne égale à la pression atmosphérique; à ce moment, nous abandonnons l'air que nous avons employé pour recommencer sur une égale quantité la même série d'opérations.

Il s'agit de savoir quel est le travail utilisable dans un premier cycle d'opérations.

§ II. — *Notations diverses.*

Appelons :

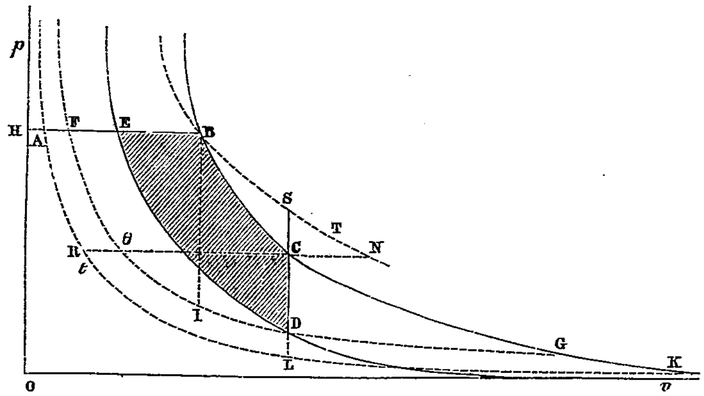
A la section du cylindre théorique de la machine,
l la longueur occupée par l'air à t^0,
t la température extérieure,
H la pression extérieure,
T la température communiquée à l'air par le foyer,
mH la pression de l'air après la détente,
Θ la température après la détente,
θ la température donnée à l'air par le réfrigérant agissant à volume constant,
pH la pression de l'air après l'action du réfrigérant,
L_1 la longueur occupée par l'air après la détente,
$\mathfrak{T}_1$ le travail résistant développé par l'atmosphère pendant la détente.
$\mathfrak{T}_2$ le travail moteur développé par l'atmosphère après le refroidissement, en admettant que l'air s'échauffe pendant la compression,
L_2 la course du piston dans cette hypothèse,
Θ_1 la température de l'air après la course,
$\mathfrak{T}'_2$ le travail moteur de l'atmosphère dans l'hypothèse d'un réfrigérant continu qui maintiendrait la température constante pendant la compression,
L'_2 la course du piston dans cette hypothèse,
U le travail utilisable dans la première hypothèse ou $\mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1$,
U' le travail utilisable dans la seconde hypothèse ou $\mathfrak{T}'_2 - \mathfrak{T}_1$,
β le rapport $\frac{\gamma - 1}{\gamma} = 0,291$, d'où $\frac{1}{\beta} = 3,439$.

Nous prendrons :

Le mètre pour unité de longueur,
Le mètre carré pour unité de surface,
Le mètre cube pour unité de volume,
Le kilogramme pour unité de poids et de force,
Le kilogrammètre pour unité de travail.

Il est facile de se représenter le cycle parcouru par l'air, et cette représentation est très-utile pour apercevoir facilement les dispositions les plus avantageuses à réaliser. Nous tracerons en lignes pleines les courbes de détente libre et en lignes pointillées les courbes isothermiques ou les courbes de détente sans changement de température.

Fig. 4.



Le cycle correspondant à notre machine est ABCDEA (*fig.* 4).

La masse gazeuse a pour pression primitive OH = H; elle se dilate sans changer de pression jusqu'à ce qu'elle atteigne l'état B. Elle se détend librement jusqu'en C; elle se refroidit ensuite à volume constant et passe à l'état D; elle se comprime sous l'influence de la poussée de l'atmosphère en suivant la courbe de détente libre jusqu'en E; elle revient ensuite à l'état ordinaire en s'échappant dans l'atmosphère et se retrouve en A.

Nous nous proposons de trouver tous les éléments nécessaires à la connaissance complète du parcours de ce circuit par une masse d'air donnée en fonction des quantités connues.

§ III. — *Longueur* L *occupée par l'air après son échauffement.*

Nous avons désigné par l la longueur primitive, par L la longueur finale cherchée; la formule des dilatations donne

(43)
$$L = l\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}.$$

§ IV. — *Longueur* L′ *occupée par l'air après la détente.*

La formule (33) donne

$$\frac{mH}{H} = \left(\frac{L}{L'}\right)^\gamma;$$

d'où

$$(44) \qquad L' = L\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = l\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

§ V. — *Température* Θ *de l'air après la détente.*

La formule (35) donne

$$(45) \qquad \frac{1+\alpha\Theta}{1+\alpha T} = m^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = m^\beta.$$

Cette équation fera connaître Θ.

§ VI. — *Travail* ϖ_1 *résistant pendant la détente.*

Nous avons appelé L la longueur occupée par l'air avant la détente, soit L_1 la longueur occupée par l'air à la fin et $L + x$ la longueur à une époque quelconque, le travail élémentaire de la détente sera

$$A(H - H')dx,$$

H′ étant la pression correspondante à la longueur $L + x$; donc le travail total sera

$$\varpi_1 = AH(L_1 - L) - A\int_0^{L_1 - L} H'dx.$$

Exprimons H′ en fonction de x, au moyen de la formule (33), nous aurons

$$\frac{H'}{H} = \left(\frac{L_1}{L+x}\right)^\gamma = L^\gamma(L+x)^{-\gamma}.$$

Substituons dans l'intégrale, effectuons, nous trouverons, après quelques réductions faciles,

$$\mathfrak{T}_1 = \mathrm{AHL}' - \mathrm{AHL} + \frac{\mathrm{AHL}}{\gamma - 1}\left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}'}\right)^{\gamma-1} - \frac{\mathrm{AHL}}{\gamma - 1}.$$

Remplaçons L′ par sa valeur donnée ci-dessus (§ IV), nous aurons

$$(46) \qquad \mathfrak{T}_1 = \mathrm{AHL}\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}} + \frac{m^\beta}{\gamma - 1} - \frac{1}{\beta}\right],$$

et, si nous remplaçons L par sa valeur trouvée (§ III), il viendra enfin

$$(47) \qquad \mathfrak{T}_1 = \mathrm{AH}\, l\, \frac{1 + \alpha\mathrm{T}}{1 + \alpha t}\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}} + \frac{m^\beta}{\gamma - 1} - \frac{1}{\beta}\right],$$

qui ne contient que les données. Comme vérification, on peut voir que ce travail se réduit à zéro quand $m = 1$, c'est-à-dire quand il n'y a pas de détente.

§ VII. — *Pression p*H *de l'air après son refroidissement.*

A la fin de la détente, le volume de l'air est V, la pression est mH, la température Θ; donc

$$m\mathrm{HV} = \mathrm{H}(1 + \alpha\Theta) = m^\beta \mathrm{H}(1 + \alpha\mathrm{T}).$$

Après le refroidissement, la pression est pH, le volume n'a pas changé, et la température est devenue θ; donc

$$p\mathrm{HV} = \mathrm{H}(1 + \alpha\theta);$$

par suite

$$\frac{p}{m} = \left(\frac{1}{m}\right)^\beta \frac{1 + \alpha\theta}{1 + \alpha\mathrm{T}},$$

ou bien

$$(48) \qquad p = m^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1 + \alpha\theta}{1 + \alpha\mathrm{T}}.$$

Cette formule ne contient que les données.

§ VIII. — *Travail moteur $\mathfrak{F}_2$ développé par l'atmosphère, en supposant que l'air s'échauffe pendant la compression.*

Au moment où le travail de la compression commence, la longueur occupée par l'air est L'. Admettons qu'il soit à une distance y de cette position extrême; le travail élémentaire de cette compression sera

$$A(H - H')\,dy,$$

en nommant H' la force élastique de l'air du cylindre; donc le travail total sera, en nommant y_1 la course du piston au moment où la pression est redevenue H,

$$\mathfrak{F}_2 = AHy_1 - AH\int_0^{y_1}\frac{H'}{H}\,dy.$$

Mais nous avons

$$\frac{H'}{pH} = \left(\frac{L'}{L'-y_1}\right)^{\gamma};$$

par suite, en faisant $H' = H$,

$$(49)\qquad \frac{1}{p} = \left(\frac{L'}{L'-y}\right)^{\gamma};$$

donc, en effectuant l'intégration et en éliminant y_1, il viendra

$$\mathfrak{F}_2 = AHL'\left[1 + \frac{p}{\gamma - 1} - \frac{1}{\beta}p^{\frac{1}{\gamma}}\right],$$

et, en remplaçant L' et p par leurs valeurs déjà trouvées, nous aurons en fonction des données seules :

$$(50)\quad \mathfrak{F}_2 = AH\,l\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}} + \frac{1}{\gamma - 1}\,\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} - \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma^2}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right].$$

§ IX. — *Course y_1 du piston pendant ce travail.*

Cette course est donnée par la formule (49) ci-dessus, qui, résolue par rapport à y_1, conduit à l'équation

$$L_2 = y_1 = L'\left(1 - p^{\frac{1}{\gamma}}\right),$$

ou bien encore, en remplaçant L' et p par leurs valeurs en fonction des données,

$$(51)\qquad L_2 = l\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma^2}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right].$$

§ X. — *Température Θ_1 après la course.*

La température primitive était celle du réfrigérant θ; la compression se fait librement; donc la température finale sera donnée par la formule (35), et nous aurons

$$\frac{1+\alpha\Theta_1}{1+\alpha\theta} = \left(\frac{H}{pH}\right)^{\beta} = \left(\frac{1}{p}\right)^{\beta},$$

ou bien encore

$$(52)\qquad \frac{1+\alpha\Theta_1}{1+\alpha\theta} = \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}}\left(\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right)^{\beta},$$

ou bien encore

$$(53)\qquad \frac{1+\alpha\Theta_1}{1+\alpha T} = \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Ces formules ne renferment plus que les données.

§ XI. — *Travail $\mathfrak{T}'_2$ développé par l'atmosphère, en supposant que l'air intérieur garde toujours la même température.*

Imaginons que, par un dispositif spécial, on puisse maintenir la température constante pendant la compression; l'air arrivé en D suivra la courbe isothermique DF, au lieu de suivre la courbe de détente libre DE. Les raisonnements faits dans le § IX peuvent se répéter au début, et l'on aura

$$\mathcal{T}'_2 = \mathrm{AH}y'_1 - \mathrm{AH}\int_0^{y'_1}\frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}}\,dy;$$

mais $\frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}}$ s'évalue au moyen de la loi de Mariotte, et l'on a

$$\frac{\mathrm{H}'}{p\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}'-y},$$

et aussi

$$\frac{1}{p} = \frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}'-y'_1}.$$

De là on déduit, à la suite de la quadrature et de quelques réductions faciles,

$$\mathcal{T}'_2 = \mathrm{AHL}'\left(1 - p - p\,\mathcal{L}\frac{1}{p}\right),$$

$\mathcal{L}$ désignant un logarithme népérien. Si nous introduisons les données, nous obtenons enfin

$$(54)\quad \mathcal{T}'_2 = \mathrm{AH}l\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha t}\left\{\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha\mathrm{T}} - \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha\mathrm{T}}\mathcal{L}10.\log\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha\theta}\right]\right\}.$$

On sait d'ailleurs que

$$\mathcal{L}10 = 2{,}3025851.$$

§ XII. — *Course* L'_2 *du piston dans cette seconde hypothèse.*

Cette course est donnée par la formule ci-dessus, qui, résolue par rapport à y'_1, conduit à la relation

$$\mathrm{L}'_2 = y'_1 = \mathrm{L}'(1-p),$$

ou bien à

$$(55)\qquad \mathrm{L}'_2 = l\,\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha t}\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha\mathrm{T}}\right],$$

qui ne contient que les données.

§ XIII. — *Travail* U *utilisable de la machine dans le cas où l'air s'échauffe pendant la compression.*

Ce travail, étant la différence entre $\mathfrak{T}_2$ et $\mathfrak{T}_1$, est facile à obtenir, et nous avons

$$(56)\quad U = \mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1 = \frac{AHl}{\beta}\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[1 + \frac{1}{\gamma}\,\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} - \frac{m^\beta}{\gamma}\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right],$$

en fonction des données seulement.

§ XIV. — *Travail* U' *utilisable dans le cas d'un réfrigérant continu.*

Ce travail s'obtient par la différence $\mathfrak{T}'_2 - \mathfrak{T}_1$, et l'on a

$$(57)\quad \begin{cases} U' = \mathfrak{T}'_2 - \mathfrak{T}_1 = AHl\,\dfrac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\Big\{\dfrac{1}{\beta} - \dfrac{m^\beta}{\gamma - 1} \\ \qquad\qquad - \dfrac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} - \dfrac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\,\zeta\,10.\log\left[\left(\dfrac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\dfrac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right]\Big\}. \end{cases}$$

Les deux formules qui donnent U et U' suffisent pour faire, dans tous les cas possibles, immédiatement le calcul de l'effet utile à attendre d'une machine à air atmosphérique réalisant, par sa construction, les conditions théoriques dans lesquelles nous nous sommes placés. De pareilles machines seraient inexplosibles, puisqu'elles opéreraient à une pression inférieure à celle de l'atmosphère.

§ XV. — *Influence de la détente m sur l'effet utile* U.

Nous pouvons maintenant faire une discussion intéressante et chercher quelles sont les conditions pour que la machine retire la plus grande quantité de travail possible d'un mètre cube d'air donné, avec une quantité déterminée de calorique dépensé.

Cette question se résout presque à vue au moyen du diagramme des états successifs que nous avons donné (*fig.* 4).

Admettons d'abord que l'on ne puisse suivre que les courbes de détente ou de compression libre qui sont marquées en traits pleins. La surface du contour EBCD représente le travail utilisable de la machine. Si l'on conserve le même réfrigérant et qu'on pousse la détente plus ou moins loin, on fait varier le point C sur la courbe BC, et le point D se meut sur la courbe isothermique FD. Si le point D est en I, la surface représentative du travail U est BIF; quand le point D est en G, la surface est nulle; il existe un point intermédiaire où cette surface est aussi grande que possible, et que le calcul seul peut déterminer exactement.

Nous avons

$$D_m U = \frac{AHl}{\gamma}\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1\right].$$

Nous voyons, par conséquent, que cette dérivée devient nulle pour

$$(58) \qquad m = \left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma^2-1}}.$$

De plus, une valeur inférieure de m rend la dérivée positive; une valeur supérieure rend la dérivée négative. Cette valeur de m correspond bien au maximum de U. Remplaçons dans la formule qui donne U (XIII) m par cette valeur, nous aurons, pour l'effet utile maximum,

$$(59) \qquad U_M = \frac{AHl}{\beta}\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\left[1 + \frac{1}{\gamma}\,\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} - \frac{\gamma+1}{\gamma}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}\right].$$

Il serait difficile de prévoir ce résultat par une construction graphique.

Nous trouvons facilement, pour ce cas, la températur Θ de l'air à la fin de la détente; elle est donnée par la formule

$$(60) \qquad \frac{1+\alpha\Theta}{1+\alpha T} = \left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}.$$

La longueur L', occupée par l'arc après sa détente, est

$$(61)\qquad L' = l\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\left(\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right)^{\frac{1}{\gamma^2-1}}.$$

La pression pH, après l'action du réfrigérant, est

$$(62)\qquad pH = H\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}}.$$

La course du piston, pendant le travail moteur de l'atmosphère, est

$$(63)\qquad L_2 = l\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\left(\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right)^{\frac{1}{\gamma^2-1}}\left[1-\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma^2-1}}\right].$$

Enfin, la température de l'air sortant de la machine est

$$(64)\qquad \frac{1+\alpha\Theta_1}{1+\alpha T} = \left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}.$$

Tels sont les éléments de la construction d'une machine atmosphérique opérant dans les meilleures conditions possibles de détente, avec un foyer et un réfrigérant déterminés.

§ XVI. — *Influence du réfrigérant sur l'effet utile* U.

Si nous jetons les yeux sur notre diagramme, nous apercevons immédiatement que U augmente si le point D s'abaisse; donc nous aurons le maximum de U, toutes choses égales d'ailleurs, si le point D s'abaisse jusqu'au point L, ou, ce qui est la même chose, si le réfrigérant ramène l'air à la température extérieure, au-dessous de laquelle nous supposerons qu'on ne puisse pas descendre.

Le calcul conduirait aux mêmes conditions.

De là résulte que nous augmenterons U_M du paragraphe précédent en y supposant θ aussi petit que possible.

§ XVII. — *Influence de la détente sur* U'.

Changeons maintenant de diagramme, et supposons que l'air arrivé en D suive, dans sa compression, non pas la courbe de détente libre DE, mais la courbe DF isothermique; l'effet utile sera plus grand, et nous avons trouvé qu'il est donné par la formule U' (§ XIV).

Notre figure nous montre immédiatement que la détente de l'air influe sur U'; car, si le point C se déplace sur la courbe BC, l'aire BCDF varie. Le maximum de U' a lieu quand C arrive en G, c'est-à-dire quand l'air est détendu jusqu'à ce qu'il prenne la température que lui donnerait le réfrigérant. Le calcul conduirait à la même conclusion, et l'on trouverait, pour la valeur de la détente la plus favorable,

$$(65) \qquad m = \left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

et, pour le maximum de l'effet utile,

$$(66) \qquad U'_M = \frac{AHl}{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[1 - \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} - \beta\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\mathcal{L}10.\log\left(\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right];$$

la valeur de m rend ensuite Θ égal à θ, comme le diagramme l'indique. On n'aurait aucune difficulté à trouver tous les autres éléments nécessaires à la connaissance complète de la machine.

Comme dans le cas précédent, il est évident, par notre figure même et sans calcul, que U' augmente quand θ diminue, toutes choses égales d'ailleurs; U'_M augmenterait donc et serait aussi grand que possible si l'on y faisait $\theta = t$. Le circuit des états de l'air serait, dans ce cas, ABCKLA.

§ XVIII. — *Effet utile maximum entre deux températures données.*

Si par le point K de la courbe isothermique (t) nous menons une parallèle à l'axe OV et que nous la prolongions jusqu'au point de rencontre M de la courbe isothermique (T), nous aurons le circuit ABMKA plus grand que tous les circuits précédents.

Pour le suivre, il faudrait que l'air se détendît en gardant la température constante T; qu'il se refroidît ensuite sous pression constante, de manière à reprendre la température extérieure t, et enfin qu'il fût comprimé à température constante par la pression atmosphérique agissant sur la tête du piston, jusqu'à ce qu'il eût repris la pression extérieure H. De B en M, le travail de l'atmosphère serait résistant; de M en K, l'atmosphère développerait à pleine pression un travail moteur, et de K en A l'atmosphère fournirait, à pression variable, un nouveau travail.

La surface du contour, qui exprimerait le travail utile extérieur retiré du volume Al d'air, est facile à évaluer, et l'on trouve

$$(67) \qquad U'' = AHl\left(\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t} - 1\right) \mathfrak{L}\frac{1}{m},$$

en nommant mH la pression de l'air après sa plus grande détente.

Cette valeur ne dépend que de m, et l'on voit que si m tend vers o, c'est-à-dire si l'on prolonge la détente de plus en plus loin, U″ croît indéfiniment.

Au point de vue des applications, ce résultat est important. Il démontre que, *théoriquement,* il est possible d'obtenir d'une machine opérant entre deux températures données, t et T, une quantité de travail aussi grande que l'on voudra; il suffit que l'on puisse produire de très-longues détentes, et que l'on ait la possibilité de conserver, pendant la détente et la compression, une température constante à l'air que l'on emploie. Les conséquences que nous venons de signaler ne supposent pas que T soit très-grand; par conséquent, les constructeurs n'auront pas à vaincre les difficultés inhérentes à l'emploi des hautes températures. D'ailleurs, ces machines étant inexplosibles, il n'y aurait pas à s'inquiéter des résistances des organes; il suffirait qu'ils supportassent sans écrasement la pression extérieure.

§ XIX. — *Rendement des machines atmosphériques*

Jusqu'à présent, nous n'avons pas comparé, pour les machines que nous avons imaginées, la dépense de calorique et le calorique utilisé; c'est ce que nous allons faire maintenant, et nous trouverons dans nos calculs nouveaux une vérification de ceux que nous venons de faire.

Nous appellerons :

Q le calorique dépensé pour faire passer la masse gazeuse que parcourt la machine de la température t à la température T;

Q_1 la chaleur déposée dans le réfrigérant à volume constant;

Q_2 la chaleur que l'air possède encore après avoir travaillé.

Si nous prenons la première machine imaginée, celle qui correspond au cycle ABCDEA, et qui semble la plus facile à réaliser, nous voyons que le nombre des calories anéanties ou, mieux, transformées en travail est donné par

$$Q - Q_1 - Q_2.$$

Or

$$Q = AlDc(T - t).$$

Le réfrigérant agissant à volume constant, on a

$$Q_1 = AlD\frac{c}{\gamma}(\Theta - \theta);$$

puis

$$Q_2 = AlDc(\Theta_1 - t);$$

donc la chaleur Q_3 transformée en travail est

$$Q_3 = AlDc\left[T - \frac{1}{\gamma}(\Theta - \theta) - \Theta_1\right],$$

ou bien

$$Q_3 = \frac{AlDc}{\alpha}\left\{(1 + \alpha T) - \frac{1}{\gamma}[(1 + \alpha\Theta) - (1 + \alpha\theta)] - (1 + \alpha\Theta_1)\right\}.$$

On peut encore l'écrire sous une autre forme, en mettant $(1 + \alpha T)$ en facteur commun, et en remplaçant Θ et Θ_1 par leurs valeurs. On obtient alors

$$Q_3 = \frac{\mathrm{A}l\mathrm{D}c}{\alpha}(1+\alpha\mathrm{T})\left[1+\frac{1}{\gamma}\,\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha\mathrm{T}}-\frac{m^{\beta}}{\gamma}-\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha\mathrm{T}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right],$$

ou bien

$$Q_3 = \frac{\mathrm{A}l\mathrm{D}_0c}{\alpha}\,\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha t}\left[1+\frac{1}{\gamma}\,\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha\mathrm{T}}-\frac{m^{\beta}}{\gamma}-\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha\mathrm{T}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right].$$

Si nous multiplions Q_3 par l'équivalent mécanique de la chaleur, ou

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{H}\alpha}{\mathrm{D}_0 c\beta},$$

nous devons obtenir U; c'est ce qu'il est facile de vérifier.

Remarque. — Le calcul que nous venons de faire montre nettement que le calorique est le véritable moteur des machines à feu. Si l'on fait le compte du calorique entré, de celui qui se perd inutilement par les réfrigérants employés, et de celui que l'air emporte après avoir travaillé, on obtient le travail utile de la machine en multipliant par 425 kilogrammètres le calorique disparu.

Le calorique Q_1 déposé dans le réfrigérant peut être en partie utilisé pour réchauffer l'air qui vient de l'extérieur au foyer, comme cela a été fait dans la machine d'Erickson. Les machines où se trouve réalisée cette économie de combustible sont dites *à récurrence.* La récurrence ne peut jamais être parfaite dans la pratique; car à mesure que l'air rentrant s'échauffe, il se rapproche de plus en plus de la température du réfrigérant. Désignons par k la fraction de la chaleur reprise; nous aurons, pour la chaleur dépensée,

$$Q - kQ_1;$$

donc le rendement de la machine sera

$$\mathrm{R} = \frac{Q_3}{Q - kQ_1} = \frac{Q - Q_1 - Q_2}{Q - kQ_1}.$$

Cette quantité est toujours inférieure à l'unité, puisqu'elle l'est quand on suppose $k = 1$.

Si nous remplaçons Q, Q_1, Q_2 par leurs valeurs et que nous posions

$$\varepsilon = \frac{1+\alpha t}{1+\alpha T};$$

en admettant que nous prenions la détente la plus favorable et $\theta = t$, nous avons

$$(68)\qquad R = \frac{1 - \varepsilon^{\frac{1}{\gamma+1}} - \frac{1}{\gamma}\left(\varepsilon^{\frac{\gamma}{\gamma^2-1}} - \varepsilon\right)}{1 - \varepsilon - \frac{k}{\gamma}\left(\varepsilon^{\frac{\gamma}{\gamma^2-1}} - \varepsilon\right)}.$$

Cette formule nous montre que plus la température T est grande, plus le rendement de la machine augmente, toutes choses égales d'ailleurs. Il a pour limite l'unité quand T croît indéfiniment. Ce résultat justifie les tentatives de M. Burdin, qui cherchait des combinaisons mécaniques, permettant d'employer l'air à la température de 800 degrés. Mais c'est aussi la nécessité de l'emploi des hautes températures qui arrêtera les constructeurs. Le mécanisme habituel des machines à vapeur ne peut évidemment plus servir. Il faut imaginer d'autres organes.

Nous pourrions aussi calculer le rendement des machines à réfrigérant continu; nous montrerons comment s'effectue cette évaluation dans la théorie des machines à compression, qui présentent comme cas particulier les machines atmosphériques.

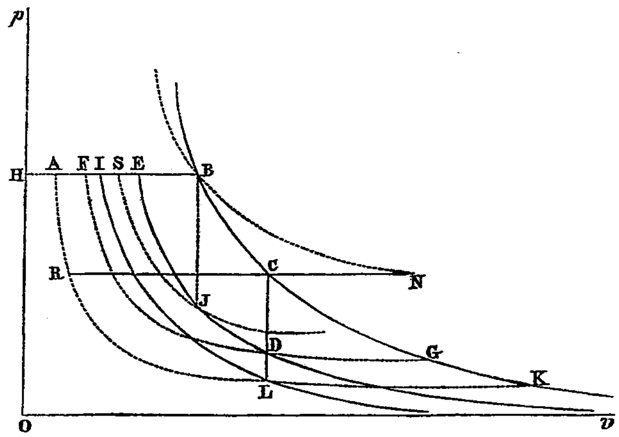
CONCLUSIONS.

Des calculs que nous venons de faire sur les machines atmosphériques, nous pouvons tirer les conclusions suivantes, qui intéresseront plus particulièrement les praticiens :

1° L'emploi des machines atmosphériques aurait l'avantage d'être exempt de tout danger d'explosion, puisqu'elles agissent à une pression inférieure à celle de l'atmosphère.

2° Le mètre cube d'air chauffé à T° donnerait le maximum d'effet utile si on le détendait à température constante; si ensuite on laissait agir à pleine pression l'atmosphère pendant qu'il se refroidirait jusqu'à reprendre la température extérieure, et si enfin l'atmosphère le comprimait à température constante jusqu'à ce qu'il eût repris la pression atmosphérique. Mais ce cycle idéal d'états représenté dans notre figure par ABNRA (*fig.* 5) paraît difficile à suivre dans la pratique; on ne peut que chercher à s'en rapprocher.

FIG. 5.



3° Admettons que la détente ne puisse pas se faire à température constante, mais que la compression puisse suivre la courbe isothermique, à l'aide d'un réfrigérant continu; on devra pousser la détente jusqu'à ce que le gaz ait repris la température extérieure, si l'on veut une machine *parfaite*. Le cycle à suivre est alors ABKA.

4° Il paraît encore bien difficile d'avoir un réfrigérant continu; il faudra donc consentir à détendre et à comprimer librement à température variable. Dans ce cas, une machine sera parfaite si la détente donne à l'air la pression mH déterminée par

$$m\mathrm{H} = \mathrm{H}\left(\frac{1+\alpha t}{1+\alpha \mathrm{T}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

et si le réfrigérant instantané à volume constant ramène le gaz à la température extérieure. Le cycle des états successifs est alors ABCLI.

5° Dans la pratique, on ne pourra pas avoir un réfrigérant parfait, et l'on suivra le cycle ABCDEA. On pourra prendre néanmoins la détente correspondante au maximum d'effet utile

$$mH = H\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma^2-1}}.$$

6° Si l'on supprime toute détente, c'est-à-dire si l'on fait dans nos formules $m = 1$, on suivra le cycle ABJE; on aura une machine facile à exécuter, mais encombrante et d'un rendement faible.

7° On se fera une idée de la marche du rendement au moyen du tableau numérique suivant :

Rendement $\frac{Q_3}{Q}$ de diverses machines atmosphériques.

TEMPÉRATURE T	RÉFRIG. INSTANTANÉ $m = 1$	RÉFRIGÉRANT CONTINU $m = 1$	RÉFRIG. INSTANTANÉ, machine parfaite.	RÉFRIGÉRANT CONTINU, machine parfaite.
100	0,028	0,038	0,058	0,132
200	0,051	0,068	0,150	0,235
300	0,067	0,090	0,148	0,313
400	0,083	0,108	0,181	0,372
500	0,095	0,124	0,209	0,420
600	0,105	0,138	0,236	0,460
700	0,117	0,143	0,257	0,494
800	0,121	0,153	0,276	0,524

La première colonne donne la température T à laquelle on supposera l'air chauffé.

Dans la seconde se trouve le rendement des machines suivant le cycle ABJEA.

Dans la troisième, le rendement des machines peu pratiques suivant le cycle ABJSA.

Dans la quatrième, le rendement des machines facilement réalisables, suivant le cycle ABCLIA, limite du cycle ABCDE.

Dans la cinquième, le rendement des machines difficilement réalisables suivant le cycle ABCLA, limite du cycle ABCDFA.

Nous appelons *rendement* le rapport $\frac{Q_3}{Q}$ entre la chaleur transformée et la chaleur dépensée. Nous négligeons complétement la chaleur reprise au réfrigérant, la récurrence qui diminue la dépense réelle et peut compenser, au moins en partie, les pertes inévitables dues aux vices de construction de la machine et aux frottements divers.

Ce tableau nous montre que si l'on opère, comme le voulait M. Burdin, à de hautes températures, à 800 degrés environ, ce qui paraît nécessaire à une bonne combustion, le rendement des machines réalisables est environ 0,26. Admettons que l'air moteur soit l'air même du foyer : nous voyons qu'un kilogramme de houille fournira à cet air

$$6000 \times 0,26 = 1500^{\text{cal}} \text{ environ.}$$

Ces calories équivalent à

$$1500 \times 424 = 636\,000^{\text{kgm}}.$$

Or les meilleures machines à vapeur usent au moins 1 kilogramme de charbon par heure et par cheval. Donc dans ces excellentes machines, 1 kilogramme de houille produit

$$75 \times 60 \times 60 = 270\,000^{\text{kgm}}.$$

On voit que la machine à air chaud projetée par M. Burdin serait plus de deux fois plus avantageuse, au point de vue économique, que la meilleure machine à vapeur.

TROISIEME PARTIE.

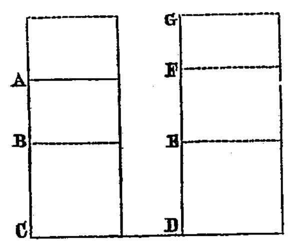
MACHINES A AIR CHAUD COMPRIMÉ.

Dans ces machines, le cycle des états de l'air est plus complexe que dans les machines atmosphériques; nous le prendrons de telle sorte qu'il comprenne la plupart des cycles employés par les constructeurs et même celui que nous venons d'étudier avec détail.

§ I. — *Jeu théorique de la machine.*

Imaginons deux cylindres égaux placés l'un à côté de l'autre, comme dans la figure ci-dessous (*fig.* 6), et pouvant communiquer au moyen d'un canal dont nous négligerons la capacité. Dans chacun d'eux se meut un piston.

Fig. 6.



1° Au moment où le piston est en A, le premier cylindre est rempli d'air ordinaire; le piston s'abaisse et l'air est comprimé; il faut une certaine dépense de travail pour produire cette compression.

2° On établit alors la communication entre les deux cylindres, et l'on continue à faire mouvoir le piston B jusqu'en C, en même temps le piston du second cylindre s'élève d'une hauteur égale jusqu'en E. L'air garde la même pression. Il est clair qu'il faut dépenser un certain travail pour ce refoulement, mais il est immédiatement restitué par le piston E, et nous n'en parlerons pas.

3° On chauffe alors l'air renfermé dans la capacité ED sans changer sa pression, jusqu'à T^0. Il se produit un certain travail et le piston arrive en F.

4° On laisse alors l'air se détendre jusqu'à ce qu'il ait acquis une nouvelle pression, cette détente développe un nouveau travail et conduit le piston en G.

5° On refroidit alors l'air en lui conservant son volume. Sa température et sa pression diminuent donc encore. Après cela, l'atmosphère presse sur le piston et développe un nouveau travail. La pression augmente et finit par devenir égale à celle de l'atmosphère. On abandonne alors l'air primitif en lui faisant traverser une sorte d'éponge métallique qui donnerait à l'air rentrant un peu de calorique en récurrence.

Il s'agit de trouver des formules qui fassent connaître tous les éléments qui se rapportent au jeu de cette machine.

§ II. — *Notations*.

Nommons :

l la longueur primitive AC du cylindre à refoulement,
λ la longueur $BC = DE$ de l'air après sa compression,
L la longueur DF après l'échauffement,
L_1 la longueur DG après la détente,
A la section du cylindre,
t la température de l'air ordinaire,
H sa force élastique,
τ la température due à la compression,
nH la force élastique due à la compression,
$\mathfrak{T}_1$ le travail nécessaire pour la produire,
T la température due à l'échauffement sous pression constante nH,
$\mathfrak{T}_2$ le travail de l'air à pleine pression pendant cet échauffement,
$\mathfrak{T}_3$ le travail dû à la détente,
mH la force élastique de l'air après la détente,
Θ sa température,
θ sa température après l'action du réfrigérant instantané à volume constant,

pH sa force élastique après le refroidissement,

ϖ_4 le travail de l'atmosphère en supposant que l'air s'échauffe par la compression,

L_2 la course du piston dans cette hypothèse,

Θ_1 la température de l'air à la fin de sa course,

ϖ'_4 le travail de l'atmosphère dans le cas d'un réfrigérant continu maintenant toujours l'air à θ,

L'_2 la course du piston dans cette hypothèse,

U l'effet utile final dans le cas d'un réfrigérant instantané,

U' l'effet utile dans le cas d'un réfrigérant continu,

Q la quantité de chaleur donnée à l'air quand on l'échauffe,

Q_1 la quantité de chaleur laissée dans le réfrigérant instantané,

Q'_1 la quantité de chaleur prise par le réfrigérant continu,

Q_2 la quantité de chaleur emportée par l'air sortant de la machine dans le cas d'un réfrigérant instantané,

Q'_2 la quantité de chaleur emportée par l'air sortant de la machine dans le cas d'un réfrigérant continu.

PREMIÈRE PÉRIODE. — COMPRESSION DE L'AIR.

§ III. — *Travail dépensé pour la compression.*

Considérons le piston à une époque quelconque de sa course, et soit x l'espace qu'il a déjà parcouru à partir de sa position initiale A. Si H' est la force élastique de l'air intérieur à ce moment, le travail élémentaire pour lui faire parcourir dx sera

$$A(H' - H)\,dx;$$

donc le traveil nécessaire pour la compression de l'air sera

$$\varpi_1 = A\int_0^{l-\lambda}(H' - H)\,dx = A\int_0^{l-\lambda} H'\,dx - AH(l-\lambda).$$

Pour exprimer H' en fonction de x, il faut recourir à la formule de Laplace, démontrée dans la première Partie de notre Mémoire :

$$\frac{H'}{H} = \left(\frac{l}{l-x}\right)^{\gamma}.$$

Si nous substituons cette valeur de H' dans la formule de T_1, nous pouvons intégrer, et, après quelques réductions faciles, nous trouvons

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{AHl}{\beta}\left[\frac{n^{\beta}}{\gamma} + \beta\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1\right]$$

ou

$$(69) \qquad \mathfrak{E}_1 = \frac{AHl}{\beta}\left(\frac{n}{\gamma} + \beta - n^{\frac{1}{\gamma}}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

§ IV. — *Course du piston.*

La course du piston $l - \lambda$ se déduit facilement de la formule de Laplace. Il suffit d'y faire $H' = nH$; on en déduit

$$n = \left(\frac{l}{\lambda}\right)^{\gamma},$$

d'où

$$\lambda = l\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}};$$

par suite

$$(70) \qquad l - \lambda = l\left[1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right].$$

Cette dernière formule fait connaître l'espace occupé par l'air après sa compression.

§ V. — *Température τ après la compression.*

Cette température τ est déterminée par la formule

$$(71) \qquad \frac{1+\alpha\tau}{1+\alpha t} = n^{\beta} = n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

de la première Partie de notre Mémoire.

§ VI. — *Chaleur engendrée par la compression.*

On peut calculer cette chaleur en s'appuyant sur le principe général de la transformation du travail en chaleur, démontré dans la première Partie; mais on peut aussi le calculer directement, comme il suit, au moyen des formules de Laplace et montrer que ces formules contiennent implicitement le principe de la transformation. C'est d'ailleurs sous cette première forme que nous avons donné la démonstration de cette loi remarquable dans le Mémoire présenté à l'Académie le 9 novembre 1857.

Imaginons qu'on refroidisse l'air au point de lui redonner la force élastique H, sans changer son volume. Désignons par τ' la température et par V son volume, nous aurons

$$n\mathrm{HV} = k(1 + \alpha\tau), \quad \mathrm{HV} = k(1 + \alpha\tau');$$

donc

$$\frac{1 + \alpha\tau'}{1 + \alpha t} = \frac{1}{n}.$$

D'ailleurs

$$\frac{1 + \alpha\tau}{1 + \alpha t} = n^{1 - \frac{1}{\gamma}};$$

donc

$$\frac{1 + \alpha\tau'}{1 + \alpha t} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

La quantité de chaleur enlevée dans ce refroidissement sera

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathrm{A}l\mathrm{D}_0 c}{\gamma(1 + \alpha t)}(\tau - \tau'),$$

ou bien

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathrm{A}l\mathrm{D}_0 c}{\gamma\alpha}\left[n^{\beta} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right].$$

Maintenant chauffons doucement cet air en lui permettant une libre dilatation sous pression constante, le piston s'élèvera lentement sans travailler et finira par reprendre son volume primitif. Il est facile de voir qu'il reprendra en même temps sa température primitive; car désignons par τ'' sa température quand il occupera la longueur l, nous aurons

$$l = \lambda \frac{1 + \alpha\tau''}{1 + \alpha\tau'},$$

donc

$$\frac{1 + \alpha\tau''}{1 + \alpha\tau'} = n^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Combinons cette équation avec celle qui donne τ', nous aurons

$$\frac{1 + \alpha\tau''}{1 + \alpha t} = 1;$$

par suite $\tau'' = t$. C. Q. F. D.

La chaleur absorbée par l'air dans cette dilatation sera donc

$$\mathfrak{Q}_1 = \frac{AlD_0c}{1 + \alpha t}(t - \tau'),$$

ou bien

$$\mathfrak{Q}_1 = \frac{AlD_0c}{\alpha}\left[1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right].$$

L'air est maintenant ramené à son état primitif. Il semble que la chaleur enlevée devrait être égale à la chaleur donnée; il n'en est cependant rien, car on a

$$\mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}_1 = \frac{AlD_0c}{\alpha}\left[\frac{n^\beta}{\gamma} + \beta\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1\right],$$

ou, en comparant à $\mathfrak{E}_1$,

$$\mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}_1 = \frac{D_0c\beta}{H\alpha}\mathfrak{E}_1.$$

Ainsi, tout se passe dans la nature comme si le travail se transformait en chaleur à raison de $\frac{H\alpha}{D_0c\beta}$ kilogrammètres pour une calorie. C'est un résultat auquel nous devions nous attendre et qui prouve l'exactitude de nos calculs.

DEUXIÈME PÉRIODE. — DILATATION DE L'AIR PAR ÉCHAUFFEMENT.

§ VII. — *Travail de l'air à pleine pression pendant qu'il s'échauffe.*

L'air comprimé a passé dans le second cylindre, et on le chauffe à T^0 sans changer sa force élastique nH. Nous avons désigné par L la longueur occupée par l'air après cet échauffement, il occupait d'abord la longueur λ; donc le travail demandé est

$$\mathfrak{E}_2 = (n-1)\,\mathrm{AH}(\mathrm{L}-\lambda),$$

mais

$$\mathrm{L} = \frac{l}{n}\,\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha t},$$

et

$$\lambda = l\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}};$$

donc nous aurons

$$\mathfrak{E}_2 = \mathrm{AH}l\left(1-\frac{1}{n}\right)\left[\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha t} - n^{\beta}\right], \tag{72}$$

qui ne contient plus que les données.

Si l'on faisait une machine sans détente, on aurait pour travail utilisable la différence

$$\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1 = \frac{\mathrm{AH}l}{\beta}\left[\beta\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha t} - n^{\beta} + 1\right], \tag{73}$$

dont nous nous servirons tout à l'heure.

§ VIII. — *Course du piston pendant ce travail.*

Cette course est $\mathrm{L}-\lambda$; par suite, en nous servant des formules du paragraphe précédent, nous aurons

$$\mathrm{L}-\lambda = l\left[\frac{1}{n}\,\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha t} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right], \tag{74}$$

qui peut se calculer directement au moyen des données.

§ IX. — *Chaleur perdue par le travail.*

Nous allons calculer directement cette chaleur sans nous servir du principe de la transformation; nous aurons ainsi une nouvelle confirmation de la justesse de nos calculs et en même temps l'indication d'un procédé d'où l'on aurait pu déduire le théorème de l'équivalent.

Enlevons d'abord à l'air chaud, sans changer son volume, une quantité de chaleur telle qu'il reprenne la pression atmosphérique. Il n'y aura pas de travail effectué. Puis, sans changer la pression, nous chaufferons doucement, jusqu'à ce que l'air ait repris la longueur l. La différence entre le nombre des calories données et celui des calories ôtées exprime le perte, puisque l'air est actuellement revenu à son état primitif.

Soit T_1 la température de l'air après qu'on lui a enlevé assez de chaleur pour le ramener à la pression H. Nous aurons, en nommant V son volume,

$$HV = k(1 + \alpha T_1);$$

mais

$$nHV = k(1 + \alpha T),$$

donc

$$\frac{1 + \alpha T_1}{1 + \alpha T} = \frac{1}{n}.$$

De là nous déduisons, pour la chaleur enlevée,

$$\chi = \frac{AlD_0 c}{\gamma\alpha}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}.$$

Désignons par T_2 la température qu'il faut maintenant donner à l'air pour le ramener à la longueur l, nous aurons

$$l = L\frac{1 + \alpha T_2}{1 + \alpha T_1},$$

ou bien

$$\frac{1 + \alpha T_2}{1 + \alpha T_1} = \frac{l}{L} = n\frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha T}:$$

de là nous concluons

$$1 + \alpha T_2 = 1 + \alpha t.$$

Donc l'air reprend bien sa température initiale en même temps qu'il reprend son volume. La quantité de chaleur absorbée dans cette seconde opération sera donc

$$\chi_1 = \frac{A l D_0 c}{1 + \alpha t}(t - T_1),$$

ou bien

$$\chi_1 = \frac{A l D_0 c}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{n}\,\frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}\right).$$

Il nous reste à évaluer la chaleur fournie par le foyer; désignons-la par Q, nous aurons

$$Q = \frac{A l D_0 c}{1 + \alpha t}(T - \tau);$$

par suite,

$$Q = \frac{A l D_0 c}{\alpha}\left(\frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t} - n^\beta\right).$$

La perte de chaleur sera donc donnée par la formule suivante :

$$Q + \chi_1 - \chi = \frac{A l D_0 c}{\alpha}\left[\beta\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t} - n^\beta + 1\right],$$

ou bien par

$$Q + \chi_1 - \chi = \frac{D_0 c \beta}{H \alpha}(\varpi_2 - \varpi_1).$$

Ainsi, la perte de chaleur est proportionnelle au travail produit, et l'équivalent mécanique d'une calorie est toujours donné par la formule

$$E = \frac{H\alpha}{D_0 c \beta}.$$

TROISIÈME PÉRIODE. — DÉTENTE DE L'AIR.

§ X. — *Longueur* L_1 *occupée par l'air après la détente.*

Appelons $L+y$ la longueur occupée par l'air à un instant quelconque de la détente, et H' sa force élastique; nous savons que

$$\frac{H'}{nH} = \left(\frac{L}{L+y}\right)^{\gamma}.$$

Supposons la détente poussée jusqu'à mH; nous aurons à ce moment

$$\frac{m}{n} = \left(\frac{L}{L_1}\right)^{\gamma};$$

donc

$$L_1 = L\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{l}{n}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t},$$

ou bien

$$L_1 = \frac{l}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}. \tag{75}$$

§ XI. — *Température* Θ *après la détente.*

Cette température est immédiatement donnée par les formules (35) de la première Partie, et nous avons

$$\frac{1+\alpha\Theta}{1+\alpha T} = \left(\frac{m}{n}\right)^{\beta}, \tag{76}$$

ou bien

$$\frac{1+\alpha\Theta}{1+\alpha t} = \left(\frac{m}{n}\right)^{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}. \tag{77}$$

§ XII. — *Travail* $\mathfrak{T}_3$ *de l'air pendant la détente.*

Le travail élémentaire est

$$A(H'-H)\,dy;$$

donc le travail total sera

$$\mathfrak{C}_3 = A\int_0^{L_1-L}(H'-H)dy = A\int_0^{L_1-L}H'dy - AH(L_1-L).$$

En remplaçant H′ par sa valeur, nous pouvons effectuer la quadrature, et nous trouvons, après quelques réductions faciles,

$$(78)\qquad \mathfrak{C}_3 = AHl\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[\frac{1}{\gamma-1}+\frac{1}{n}-\left(\frac{m}{n}\right)^\beta\left(\frac{1}{\gamma-1}+\frac{1}{m}\right)\right],$$

ou

$$(79)\qquad \mathfrak{C}_3 = \frac{AHl}{\beta}\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[\frac{1}{\gamma}+\frac{\beta}{n}-\left(\frac{m}{n}\right)^\beta\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{\beta}{m}\right)\right],$$

qui ne contient que les données.

Si l'on combine les valeurs de $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, on obtient

$$(80)\quad \mathfrak{C}_3+\mathfrak{C}_2-\mathfrak{C}_1 = \frac{AHl}{\beta}\left\{\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[1-\left(\frac{m}{n}\right)^\beta\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{\beta}{m}\right)\right]-n^\beta+1\right\}$$

pour le travail utilisable théorique, dans une machine qui se bornerait au travail de la pleine pression et de la détente.

§ XIII. — *Perte de chaleur due au travail.*

Après la détente, chauffons l'air à volume constant jusqu'à ce qu'il ait repris la force élastique atmosphérique. Pour déterminer sa température Θ' après la production de cet effet, nous recourrons aux formules déjà employées, et nous aurons

$$\frac{1+\alpha\Theta'}{1+\alpha\Theta} = \frac{1}{m};$$

d'où

$$\frac{1+\alpha\Theta'}{1+\alpha t} = \frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^\beta\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}.$$

La quantité de chaleur donnée sera

$$X = \frac{AlD_0c'}{1+\alpha t}(\Theta'-\Theta),$$

ou bien

$$X = \frac{A l D_0 c}{\gamma\alpha} \frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left(\frac{m}{n}\right)^\beta \left(\frac{1}{m} - 1\right).$$

Actuellement refroidissons doucement et à pression constante, de manière à ramener l'air au volume qu'il avait à l'origine. On peut prouver facilement qu'il reprendra en même temps sa température primitive t. En effet, désignons par Θ'' la température finale après cette opération, nous aurons

$$l = L_1 \frac{1+\alpha\Theta''}{1+\alpha\Theta'};$$

donc

$$\frac{1+\alpha\Theta'}{1+\alpha\Theta''} = \frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^\beta \frac{1+\alpha T}{1+\alpha t} = \frac{1+\alpha\Theta'}{1+\alpha t},$$

d'après la formule ci-dessus; donc

$$\Theta'' = t. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La quantité de chaleur enlevée pendant cette opération sera

$$X_1 = \frac{A l D_0 c}{1+\alpha t}(\Theta' - t),$$

ou bien

$$X_1 = \frac{A l D_0 c}{\alpha}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^\beta \frac{1+\alpha T}{1+\alpha t} - 1\right].$$

La perte de chaleur sera donc donnée par la formule suivante, après quelques réductions faciles,

$$Q + X - X_1 = \frac{A l D_0 c}{\alpha}\left\{\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[1 - \left(\frac{m}{n}\right)^\beta\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\beta}{m}\right) - n^\beta + 1\right]\right\},$$

ou bien par

$$Q + X - X_1 = \frac{D_0 c \beta}{H\alpha}(\mathfrak{T}_3 + \mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1),$$

ce qui prouve l'exactitude de nos formules.

QUATRIÈME PÉRIODE. — REFROIDISSEMENT DE L'AIR.

§ XIV. — *Pression après le refroidissement.*

Admettons que le réfrigérant ramène l'air de Θ à θ, et désignons par h la force élastique produite, nous aurons, par les formules de Laplace (33) :

$$hV = k(1 + \alpha\theta)$$

et

$$mHV = k(1 + \alpha\Theta),$$

car nous refroidissons à volume constant V; donc

$$\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha\Theta} = \frac{1}{m}\frac{h}{H}; \tag{81}$$

d'ailleurs

$$\frac{1+\alpha\Theta}{1+\alpha T} = \left(\frac{m}{n}\right)^\beta;$$

donc

$$\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} = \frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^\beta \frac{h}{H},$$

d'où

$$\frac{h}{H} = m\left(\frac{n}{m}\right)^\beta \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}. \tag{82}$$

§ XV. — *Calories prises par le réfrigérant.*

Nous avons désigné ce nombre de calories par Q_1. Il est clair que le refroidissement s'opérant sous volume constant,

$$Q_1 = AlDc'(\Theta - \theta),$$

d'où

$$Q_1 = \frac{AlDc}{\gamma\alpha}(1+\alpha t)\left[\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left(\frac{m}{n}\right)^\beta - \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha t}\right]. \tag{83}$$

§ XVI. — *Travail de l'atmosphère, l'air s'échauffant par compression.*

Après le refroidissement, l'atmosphère presse sur la tête du piston et produit un travail utilisable, que nous allons calculer. Le piston part de la position G; soit

$$u$$

le chemin parcouru au bout d'un temps quelconque. Le travail élémentaire sera

$$\mathrm{A}(\mathrm{H}-h')\,du;$$

donc le travail total sera donné par l'intégrale

$$\mathfrak{T}_4 = \mathrm{AHL}_2 - \mathrm{A}\int_0^{\mathrm{L}_2} h'\,du;$$

h' représente la force élastique variable de l'air intérieur. Pour évaluer h' en fonction de u, il faut recourir à une formule de Laplace, déjà employée, et l'on obtient alors

$$\frac{h'}{h} = \left(\frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{L}_1 - u}\right)^{\gamma},$$

et, par substitution,

$$\mathfrak{T}_4 = \mathrm{AHL}_2 + \frac{\mathrm{AHL}_1}{\gamma - 1}\,\frac{h}{\mathrm{H}} - \frac{\mathrm{AHL}_1}{\gamma - 1}\,\frac{h}{\mathrm{H}}\left(\frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2}\right)^{\gamma - 1}.$$

Nous pouvons nous débarrasser de L_2 au moyen de l'équation précédente en y faisant

$$h' = \mathrm{H},$$

car elle donne alors

$$\frac{\mathrm{H}}{h} = \left(\frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2}\right)^{\gamma},$$

d'où nous concluons

$$(84) \qquad \mathfrak{T}_4 = \mathrm{AHL}_1\left[1 + \frac{1}{\gamma - 1}\,\frac{h}{\mathrm{H}} - \frac{1}{\beta}\left(\frac{h}{\mathrm{H}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right].$$

Si maintenant nous mettons pour L_1 et $\frac{h}{H}$ leurs valeurs, nous obtenons, après quelques réductions faciles,

$$(85)\qquad \mathcal{E}_1 = AHl\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^\beta + \frac{1}{\gamma-1}\,\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} - \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{m}\right)^\beta\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta^2}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right].$$

Telle est la formule de l'effet dû à la condensation quand on admet que l'air s'échauffe pendant la compression.

§ XVII. — *Course du piston dans cette hypothèse.*

Cette course L_2 se détermine facilement au moyen d'une formule ci-dessus, et nous obtenons d'abord

$$L_2 = L_1\left[1 - \left(\frac{h}{H}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right];$$

puis, en remplaçant L_1 et L par leurs valeurs,

$$(86)\qquad L_2 = l\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^\beta - \left(\frac{1}{m}\right)^\beta\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta^2}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right].$$

Cette formule ne renferme plus que les données.

§ XVIII. — *Température de l'air après le travail.*

Nous avons désigné cette température par Θ_1, et nous l'obtenons par la formule

$$\frac{1+\alpha\Theta_1}{1+\alpha\theta} = \left(\frac{H}{h}\right)^\beta.$$

et, en remplaçant h par sa valeur,

$$(87)\qquad \frac{1+\alpha\Theta_1}{1+\alpha\theta} = \left(\frac{1}{m}\right)^\beta\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta^2}\left(\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right)^\beta.$$

§ XIX — *Chaleur emportée par l'air sortant de la machine dans le cas du réfrigérant instantané.*

Nous avons désigné cette chaleur par Q_2. Pour l'évaluer, refroidissons l'air à pression constante; il dégagera un nombre de calories donné par

$$Q_2 = A\,l\,D\,c(\Theta_1 - t),$$

ou bien

$$(88)\qquad Q_2 = \frac{A\,l\,D\,c}{\alpha}\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{\beta}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta'}\left(\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right)^{\beta}\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha t} - 1\right].$$

§ XX. — *Travail de l'atmosphère dans le cas d'un réfrigérant continu.*

Pendant que l'atmosphère travaille par la descente du piston, nous pouvons admettre que l'air situé au-dessous est sans cesse en contact avec un réfrigérant qui le maintienne à la température θ. Il est soumis, dans sa compression, à la loi de Mariotte.

Le travail élémentaire, à un instant quelconque, est encore

$$A(H - h')\,du;$$

donc aussi le travail total est encore représenté par l'intégrale

$$(89)\qquad \mathcal{E}'_4 = AHL'_2 - A\int_0^{L'_2} h'\,du;$$

mais les valeurs de L'_2 et de h' sont différentes, et l'on a pour h'

$$(90)\qquad \frac{h'}{h} = \frac{L_1}{L_1 - u}.$$

Substituons, et l'équation (89) devient, après une intégration facile,

$$\mathcal{E}'_4 = AHL'_2 - AHL_1\,\frac{h}{H}\,\mathcal{L}\,\frac{L_1}{L_1 - L'_2}.$$

$\mathcal{L}$ désigne un logarithme népérien.

La quantité L'_2 se détermine par l'équation (90), en y faisant $h' = H$; elle donne

$$\frac{L_2}{L_1} = 1 - \frac{h}{H};$$

par suite,

$$\mathcal{T}'_4 = AHL_1\left[1 - \frac{h}{H} - \frac{h}{H}\mathcal{L}\frac{H}{h}\right]. \tag{91}$$

Pour n'y voir apparaître que les données, il suffit de remplacer L_1 et h par leurs valeurs déjà trouvées, et il vient alors

$$\mathcal{T}'_4 = AHl\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left\{\frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^\beta - \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} - \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\mathcal{L}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^\beta \frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right]\right\}, \tag{92}$$

ou bien

$$\mathcal{T}'_4 = AHl\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left\{\frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^\beta - \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} - \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\mathcal{L}10.\log\left[\frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^\beta \frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right]\right\}, \tag{93}$$

où

$$\mathcal{L}10 = 2{,}302.5851,$$

et log désigne un logarithme vulgaire.

§ XXI. — *Course du piston dans le cas du réfrigérant continu.*

Cette course est L'_2, et nous avons, d'après les calculs du paragraphe précédent,

$$L'_2 = L_1\left(1 - \frac{h}{H}\right), \tag{94}$$

ou bien

$$L'_2 = l\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^\beta - \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right], \tag{95}$$

qui ne contient que les données.

§ XXII. — *Quantité de chaleur enlevée par le réfrigérant continu.*

Pour déterminer cette quantité de chaleur appelée Q'_1, faisons agir le réfrigérant par discontinuité, mais à des intervalles infiniment rapprochés : la limite de la somme des quantités de chaleur enlevées sera la quantité Q'_1 que nous cherchons.

Considérons le piston à une distance u de son point de départ. Admettons qu'il parcoure du, sans que le réfrigérant refroidisse l'air intérieur; désignons par τ l'excès de température qu'il prend, nous aurons

$$\frac{1+\alpha(\theta+\tau)}{1+\alpha\theta}=\left(\frac{L_1-u}{L_1-u-du}\right)^{\gamma-1},$$

d'où

$$\frac{\alpha\tau}{1+\alpha\theta}=(\gamma-1)\frac{du}{L_1-u},$$

en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur. De là nous concluons

$$(96)\qquad \tau=(\gamma-1)\frac{1+\alpha\theta}{\alpha}\,\frac{du}{L_1-u}.$$

Faisons maintenant agir le réfrigérant sans modifier le volume pour ramener l'air à θ, nous enlèverons la quantité de chaleur

$$q'_1=\mathrm{A}l\mathrm{D}c'\tau;$$

faisons la somme de ces quantités depuis $u=0$ jusqu'à $u=L'_2$, il viendra

$$Q'_1=\frac{\mathrm{A}l\mathrm{D}c\beta}{\alpha}(1+\alpha\theta)\,\mathcal{L}\frac{L_1}{L_1-L_2},$$

ou encore

$$(97)\qquad Q'_1=\frac{\mathrm{A}l\mathrm{D}c\beta}{\alpha}(1+\alpha\theta)\,\mathcal{L}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta}\frac{1+\alpha\mathrm{T}}{1+\alpha\theta}\right].$$

§ XXIII. — *Chaleur emportée par l'air sortant de la machine dans le cas d'un réfrigérant continu.*

L'air sort, dans ce cas, à la pression H et à la température θ; imaginons qu'il se refroidisse jusqu'à prendre la température t en gardant la même pression, il dégagera la même quantité de chaleur

$$Q'_2 = \mathrm{A}l\mathrm{D}c(\theta - t),$$

ou bien

$$Q'_2 = \frac{\mathrm{A}l\mathrm{D}c}{\alpha}(1 + \alpha t)\left(\frac{1 + \alpha\theta}{1 + \alpha t} - 1\right). \tag{98}$$

§ XXIV. — *Travail utilisable total dans le cas d'un réfrigérant instantané.*

Nous avons désigné par U cet effet, et nous le déterminerons par l'équation

$$\mathrm{U} = \mathfrak{S}_4 + \mathfrak{S}_3 + \mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_1,$$

qui devient, en substituant pour chaque $\mathfrak{S}$ sa valeur trouvée précédemment,

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{U} = {} & \frac{\mathrm{AH}l}{\beta}\frac{1 + \alpha\mathrm{T}}{1 + \alpha t}\left[1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta} + \frac{1}{\gamma}\frac{1 + \alpha\theta}{1 + \alpha\mathrm{T}} - \left(\frac{1}{m}\right)^{\beta}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta^2}\left(\frac{1 + \alpha\theta}{1 + \alpha\mathrm{T}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right] \\ & - \frac{\mathrm{AH}l}{\beta}(n^{\beta} - 1). \end{aligned}\right. \tag{99}$$

§ XXV. — *Chaleur totale perdue par l'air dans le cas d'un réfrigérant instantané.*

Il est bien évident que la chaleur perdue est la différence entre la chaleur donnée Q et l'ensemble des deux quantités de chaleur laissées au réfrigérant et abandonnées à l'air extérieur par l'air chaud sortant de la machine; donc

$$\mathfrak{Q} = Q - Q_1 - Q_2,$$

ou bien

$$(100)\quad \begin{cases} \mathfrak{P} = \dfrac{A l D_0 c}{\alpha}\,\dfrac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[1 - \dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}\,\dfrac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} - \left(\dfrac{1}{m}\right)^{\beta}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\beta^2}\left(\dfrac{1+\alpha t}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right] \\ \qquad - \dfrac{A l D_0 c}{\alpha}(n^{\beta} - 1). \end{cases}$$

On voit encore par cette formule que

$$(101)\qquad \mathfrak{P} = \frac{D_0 c \beta}{H\alpha}\,U = \frac{U}{E}.$$

§ XXVI. — *Travail total utilisable dans le cas d'un réfrigérant continu.*

Cette quantité U′ s'obtient immédiatement au moyen de la formule

$$U' = \mathfrak{G}'_4 + \mathfrak{G}_3 + \mathfrak{G}_2 - \mathfrak{G}_1$$

qui devient, après réduction,

$$(102)\quad \begin{cases} U' = AHl\,\dfrac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left\{\dfrac{1}{\beta} - \dfrac{1}{\gamma-1}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\beta} - \dfrac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} - \dfrac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\,\mathfrak{L}\left[\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\beta}\dfrac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right]\right\} \\ \qquad - \dfrac{AHl}{\beta}(n^{\beta} - 1). \end{cases}$$

§ XXVII. — *Perte totale de chaleur faite par l'air chaud après son passage dans la machine à réfrigérant continu.*

Cette perte est évidemment donnée par la formule suivante :

$$\mathfrak{P}' = Q - Q_1 - Q'_1 - Q'_2,$$

qui donne, après substitution et réduction,

$$(103)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}' = \dfrac{A l D_0 c}{\alpha}\,\dfrac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left\{1 - \dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\beta} - \beta\,\dfrac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right. \\ \qquad\qquad \left. - \beta\,\dfrac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\,\mathfrak{L}\left[\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\beta}\dfrac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right]\right\} \\ \qquad - \dfrac{A l D_0 c}{\alpha}(n^{\beta} - 1). \end{cases}$$

Nous trouvons encore

$$\mathfrak{T}_{,}=\frac{D_0 c\beta}{H\alpha}U'=\frac{U'}{E}.$$

§ XXVIII. — *Fraction de la chaleur totale transformée en travail utile.*

Si nous désignons par $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ ces deux fractions dans les deux cas considérés, nous obtenons les deux formules

$$(104)\qquad \mathfrak{F}=\frac{\beta}{AHl}\frac{U}{\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}-n^{\beta}}$$

et

$$(105)\qquad \mathfrak{F}'=\frac{\beta}{AHl}\frac{\beta}{\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}-n^{\beta}},$$

ou bien encore

$$(106)\qquad \mathfrak{F}=\frac{F(T)}{1-n^{\beta}\frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}}$$

et

$$(107)\qquad \mathfrak{F}'=\frac{F_1(T)}{1-n^{\beta}\frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}},$$

en posant, pour abréger,

$$(108)\qquad \left\{\begin{aligned}F(T)=&\left[1-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta}+\frac{1}{\gamma}\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}-\left(\frac{1}{m}\right)^{\beta}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta^2}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]\\&-\frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}(n^{\beta}-1)\end{aligned}\right.$$

et

$$(109)\qquad \left\{\begin{aligned}F_1(T)=&\left[1-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta}-\beta\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}-\beta\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\mathfrak{L}\cdot\frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right]\\&-\frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}(n^{\beta}-1).\end{aligned}\right.$$

On voit que $\mathcal{F}$ augmente avec U si le dénominateur reste constant; mais il faut remarquer que U dépend, ainsi que le dénominateur, du degré de compression; on ne peut donc pas affirmer que $\mathcal{F}$ augmente généralement quand U augmente. La fonction $\mathcal{F}$ est, comme l'on voit, fort complexe; aussi procéderons-nous par la mise en nombre pour en saisir les variations.

DISCUSSION DES FORMULES QUI DONNENT U ET U'.

§ XXIX. — *Influence de la détente sur* U.

Dérivons par rapport à m, nous obtenons l'équation

$$(110)\qquad D_m U = \frac{AHl}{\gamma}\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta}\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{1-\frac{1}{\gamma^2}} n^{\frac{\beta}{\gamma}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1\right].$$

On voit que cette dérivée s'annule pour une valeur de m donnée par la formule

$$(111)\qquad m = n^{\frac{1}{\gamma+1}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma^2-1}}.$$

D'ailleurs, pour une valeur de m inférieure, la dérivée est positive; pour une valeur de m supérieure, la valeur est négative; donc U atteint, pour cette valeur de m, un maximum, toutes choses égales d'ailleurs.

Le dénominateur de $\mathcal{F}$ ne renferme pas m; donc nous sommes sûrs que $\mathcal{F}$ augmente quand m tend vers la valeur fournie par l'équation (111), toutes les autres quantités restant les mêmes.

Nous devons toujours nous reporter à cette fraction, car elle exprime en réalité le rendement de la machine. En effet, le calorique mis dans le foyer peut par nous être assimilé à une quantité de travail : plus une machine en utilisera, plus elle sera parfaite; or la quantité utilisée est représentée par $\mathcal{F}$.

§ XXX. — *Influence du degré de compression sur* U.

Si nous prenons la dérivée de U par rapport à n, nous trouvons

$$(112)\quad \begin{cases} D_n U = \dfrac{AHl}{\gamma}\dfrac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[m^\beta\left(\dfrac{1}{n}\right)^{2\beta}\right. \\ \qquad\left. +(\gamma-1)\left(\dfrac{1}{m}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}}\left(\dfrac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\beta^2+\beta} - \gamma\dfrac{1+\alpha t}{1+\alpha T}\right]\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}. \end{cases}$$

On voit que cette dérivée s'annule pour une valeur de n satisfaisant à l'équation

$$(113)\qquad m^\beta\left(\frac{1}{n}\right)^{2\beta} + (\gamma-1)\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta^2+\beta} = \gamma\,\frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}.$$

Comme, toutes choses égales d'ailleurs, le premier membre décroît d'une manière continue de ∞ à 0, lorsque n croît d'une manière continue de 0 à ∞, il n'existe qu'une racine réelle positive. D'un autre côté, la dérivée est positive lorsque n est inférieur à cette racine, et négative quand n la dépasse. Donc U a un maximum correspondant à la valeur de n donnée par l'équation (113).

Observons de plus que U est fonction des deux variables m et n, indépendantes entre elles. Par suite, pour trouver les valeurs de ces variables qui rendent U maximum, il faut égaler à zéro les dérivées partielles prises par rapport à ces variables; donc ces valeurs sont données par la résolution des équations (111) et (113). L'équation (111) est très-simple et permet d'éliminer m de l'équation (113). On trouve, après quelques calculs laborieux, mais que l'on voit se simplifier avec satisfaction :

$$(114)\qquad n = \left(\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\right)^{\frac{\gamma(\gamma+1)}{(\gamma-1)(2\gamma+1)}}\left(\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right)^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)(2\gamma+1)}},$$

et ensuite

$$(115)\qquad m = \left(\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\right)^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)(2\gamma+1)}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{2\gamma}{(\gamma-1)(2\gamma+1)}}.$$

Pour être dans des conditions plus favorables encore et avoir la machine parfaite, faisons

$$\theta = t,$$

il viendra enfin

$$(116) \qquad n = \left(\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\right)^{\frac{\gamma^2}{(\gamma-1)(2\gamma+1)}}$$

et

$$(117) \qquad m = \left(\frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}\right)^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)(2\gamma+1)}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

§ XXXI. — *Valeur de U dans le cas où la détente correspond au maximum d'effet, le degré de compression étant choisi arbitrairement.*

Si dans la formule générale de U on substitue la valeur de m fournie par la valeur (111), on obtient l'équation

$$(118) \quad \left\{ \begin{aligned} U = {} & \frac{AHl}{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[1+\frac{1}{\gamma}\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}-\frac{\gamma+1}{\gamma}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}\right] \\ & -\frac{AHl}{\beta}(n^\beta-1), \end{aligned} \right.$$

et si, dans les mêmes circonstances, on suppose un réfrigérant parfait, c'est-à-dire $\theta = t$, on obtient le plus grand U possible :

$$(119) \quad \left\{ \begin{aligned} U = {} & \frac{AHl}{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[1+\frac{1}{\gamma}\frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}-\frac{\gamma+1}{\gamma}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\left(\frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}\right] \\ & -\frac{AHl}{\beta}(n^\beta-1). \end{aligned} \right.$$

§ XXXII. — *Valeur de U dans le cas où la détente et le degré de compression correspondent au maximum d'effet utile.*

Pour trouver cette valeur de U, il suffit de remplacer, dans la formule (118), la valeur de n fournie par l'équation (114); après cette

14..

substitution, il vient, pour U,

$$(120)\quad \left\{ \begin{aligned} U = \frac{AHl}{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\Bigg[1 + \frac{1+\alpha t}{1+\alpha T} + \frac{1}{\gamma}\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} \\ - \frac{2\gamma+1}{\gamma}\left(\frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}\right)^{\frac{\gamma}{2\gamma+1}}\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{2\gamma+1}}\Bigg]; \end{aligned} \right.$$

et si, dans les mêmes circonstances, on suppose un réfrigérant parfait, c'est-à-dire $\theta = t$, il viendra, pour la valeur maximum de U,

$$(121)\quad U = \frac{AHl}{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[1 + \frac{\gamma+1}{\gamma}\frac{1+\alpha t}{1+\alpha T} - \frac{2\gamma+1}{\gamma}\left(\frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}\right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma+1}}\right].$$

Cette dernière formule est celle qui donnera pour U le plus grand effet possible dans les circonstances où nous supposons que l'air chaud agisse.

§ XXXIII. — *Influence de la détente sur* U'.

En cherchant la dérivée de U' par rapport à m, nous trouvons

$$D_m U' = \frac{AHl}{\gamma-1}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\frac{1}{m}\left[\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} - \left(\frac{m}{n}\right)^{\beta}\right];$$

nous voyons que cette dérivée devient nulle pour une valeur de m donnée par l'équation

$$(122)\qquad m = n\left(\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

D'ailleurs la dérivée est positive pour une valeur inférieure, négative pour une valeur supérieure; donc cette valeur de m correspond à un maximum de U'.

§ XXXIV. — *Influence de la compression sur* U'.

Prenons la dérivée par rapport à n, et nous aurons

$$D_n U' = \frac{AHl}{n^{\gamma}}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[\frac{m^{\beta}}{\gamma}\left(\frac{1}{n}\right)^{2\beta} + \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta} - \frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}\right].$$

Nous voyons que cette dérivée s'annule pour une valeur de n donnée par l'équation trinôme

$$\frac{m^\beta}{\gamma}\left(\frac{1}{n}\right)^{2\beta}+\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta}=\frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}. \tag{123}$$

D'ailleurs une valeur de n inférieure rend la dérivée positive, une valeur supérieure rend la dérivée négative; donc cette racine correspond à un maximum de U'.

Si nous voulons rendre U' aussi grand que possible, il faut résoudre les deux équations (122) et (123), et l'on trouvera les valeurs de m et de n qui satisfont à cette condition; ces valeurs sont fonctions de θ et de T, et sont données par les équations

$$m^\beta=\frac{(1+\alpha\theta)^2}{(1+\alpha t)(1+\alpha T)} \tag{124}$$

et

$$n^\beta=\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha t}. \tag{125}$$

Nous voyons que, dans le cas d'un réfrigérant parfait, c'est-à-dire qui rend $\theta=t$, ces valeurs de m et n deviennent

$$m^\beta=\frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}, \tag{126}$$

$$n=1. \tag{127}$$

La machine remplissant toutes ces conditions est la plus parfaite possible, et l'on voit qu'elle n'est pas autre chose que la machine atmosphérique parfaite étudiée précédemment.

§ XXXV. — *Valeur de* U' *dans le cas où la détente correspond au maximum d'effet utile, le degré de compression étant arbitrairement choisi.*

Substituons dans la valeur générale de U' la valeur de m donnée par la formule (122); nous obtiendrons

$$U'=\frac{AHl}{\beta}\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left\{1-\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}-\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\,\mathcal{L}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha\theta}\right]\right\}-\frac{AHl}{\beta}(n^\beta-1), \tag{128}$$

et, si le réfrigérant est parfait, c'est-à-dire si $\theta = t$, nous aurons

$$(129)\quad U' = \frac{AHl}{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left\{1 - \frac{1+\alpha t}{1+\alpha T} - \frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}\mathcal{L}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\right]\right\} - \frac{AHl}{\beta}(n^{\beta}-1).$$

§ XXXVI. — *Valeur de* U' *dans le cas où la détente et le degré de compression correspondent au maximum d'effet utile.*

Nous déduirons cette valeur de l'équation (128), en y mettant pour n la valeur fournie par la formule (125); il nous vient, après réduction,

$$(130)\quad U' = \frac{AHl}{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left\{1 + \frac{1+\alpha t}{1+\alpha T} - 2\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T} - \frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha T}\mathcal{L}\left[\frac{(1+\alpha t)(1+\alpha T)}{(1+\alpha\theta)^2}\right]\right\},$$

et, dans le cas d'un réfrigérant parfait,

$$(131)\qquad U' = \frac{AHl}{\beta}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\left[1 - \frac{1+\alpha t}{1+\alpha T} - \frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}\mathcal{L}\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}\right].$$

Cette formule a été déjà trouvée dans la théorie des machines atmosphériques.

Nous n'ajouterons rien à ces développements analytiques, qui suffisent aux applications. Nous avons pu avec nos formules étudier sans peine des machines à cycles différents, et en particulier la machine Franchot dont M. Combes s'est occupé dans son *Exposé des principes de la théorie mécanique de la chaleur*. Les détails dans lesquels nous sommes entrés suffisent pour montrer la marche à suivre dans les divers cas.

Nous allons indiquer, par un exemple numérique, la portée de nos formules et leur utilité.

QUATRIÈME PARTIE.

APPLICATIONS NUMÉRIQUES.

§ XXXVII. — *Machine dans laquelle l'air chauffé à 800 degrés serait préalablement comprimé à 4 atmosphères, et où la détente serait poussée jusqu'à la pression atmosphérique.*

M. Burdin a calculé, il y a longtemps déjà, les effets de cette machine, et il a même fait le projet détaillé des moyens pratiques de réalisation; la concordance des résultats donnés par mes formules avec ceux qu'il a trouvés d'une autre manière servira de preuve à tous mes calculs.

Nous supposons que la section de nos cylindres soit de 1 mètre carré, et que l'air primitivement introduit occupe une longueur de 1 mètre, de sorte que l'air dont nous cherchons le travail a primitivement pour volume 1 mètre cube. Ainsi, en nous reportant au § II, où se trouvent nos notations, nous faisons, dans nos formules :

$$\begin{array}{ll} A = 1, & \alpha = 0{,}003665, \\ l = 1, & \gamma = 1{,}41, \\ t = 10^\circ, & \beta = 0{,}290780, \\ T = 800^\circ, & H = 10331, \\ \theta = 100^\circ, & n = 4, \quad m = 1. \end{array}$$

Avec ces données nous trouvons :

Travail dépensé pour la compression préalable à froid, ou $\mathfrak{C}_1$.....	$6043^{\text{kgm}},7$.
Travail de l'air à pleine pression pendant son échauffement, ou $\mathfrak{C}_2$.	17794^{kgm}.
Travail de l'air pendant sa détente, poussée jusqu'à ce qu'il ait repris la pression atmosphérique, ou $\mathfrak{C}_3$........................	$15318^{\text{kgm}},6$.
Travail de l'atmosphère après le refroidissement intérieur, dans le cas où l'air se réchauffe, ou $\mathfrak{C}_4$..............................	2761^{kgm}.
Travail de l'atmosphère dans le cas où un réfrigérant continu empêche l'air intérieur de se réchauffer, ou $\mathfrak{C}'_4$....................	6473^{kgm}.

Travail utilisable de la machine, si l'on néglige l'effet dû à la condensation, ou $\mathfrak{T}_3 + \mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1$	27068^{kgm}.
Travail utilisable de la machine complète, dans le cas d'un réfrigérant instantané, ou U	29829^{kgm}.
Travail utilisable de la machine complète, dans le cas d'un réfrigérant continu	33541^{kgm}.

Nous trouvons encore :

Température après la compression, ou τ	150°.
Chaleur engendrée par la compression	$14^{\text{cal}},26$.
Chaleur fournie par le foyer	$192^{\text{cal}},61$.
Chaleur perdue par le travail $\mathfrak{T}_2$ à pleine pression	42^{cal}.
Température après la détente	444°.
Perte de chaleur due au travail de la détente $\mathfrak{T}_3$	$36^{\text{cal}},16$.
Chaleur que l'air possède encore à la fin de sa détente	$128^{\text{cal}},70$.
Force élastique après l'action du réfrigérant, ou h	$0^{\text{atm}},52$.
Chaleur enlevée par le réfrigérant instantané	$72^{\text{cal}},36$.
Température de l'air après le travail de l'atmosphère	178°.
Chaleur emportée par l'air sortant de la machine	$49^{\text{cal}},84$.
Chaleur enlevée par le réfrigérant continu	$14^{\text{cal}},38$.
Chaleur emportée par l'air sortant de la machine	$26^{\text{cal}},69$.

De ce tableau, nous pouvons déduire les conséquences suivantes, que M. Burdin avait déjà signalées en partie dans les Notes que les *Comptes rendus* de 1835 et 1836 ont recueillies :

1° Si nous supposons réalisée une machine où l'on négligerait complétement l'effet $\mathfrak{T}_4$ ou $\mathfrak{T}'_4$ qu'on peut retirer de la pression atmosphérique après le refroidissement de l'air, et aussi le calorique qu'on peut reprendre à l'air quand il s'échappe de la machine, on voit que, pour une dépense de 193 calories, on obtient 27068 kilogrammètres de travail; si donc, pour brûler complétement et utilement le charbon, on se sert, comme air moteur, des produits mêmes de la combustion, 1 kilogramme de charbon produirait, dans cette machine, 6000 calories, et par conséquent .... 841492^{kgm}.
Mais, dans les meilleures machines de Cornouailles, on use 1 kilogramme de charbon par force de cheval et par heure; donc 1 kilogramme de charbon produit .... 270000^{kgm}.
D'où l'on voit que la machine théorique que nous étudions produit, à égale dépense de combustible .... 3,1 fois plus,
ou environ 3 fois plus que ces machines, dont il n'existe pas en France peut-être un seul modèle. Admettons maintenant, ce qui est reconnu

comme possible d'après les expériences d'Ericson, que l'on puisse reprendre une partie de la chaleur emportée par l'air au sortir de la machine, à savoir la chaleur (72 calories) déposée dans le réfrigérant, la dépense sera

$$193 - 72 = 121^{\text{cal}}.$$

Donc 1 kilogramme de charbon produirait, dans ce cas.......... $1\,342\,000^{\text{kgm}}$.

Par suite, le rapport de notre machine à celle de Cornouailles devient environ.. 5.

Ce rapport est énorme sans doute, mais il est impossible de douter de sa vérité approximative, puisque nos calculs sont incontestables. On peut cependant objecter, avec M. Reech, que, dans le cas où le cylindre à comprimer l'air et celui qui renferme le piston moteur formeraient deux machines distinctes, le calcul de l'effet utile devrait se faire autrement dans la pratique. Le travail de la compression préalable devrait être multiplié par un coefficient supérieur à l'unité, celui que l'on retire de la dilatation et de la détente par un autre coefficient inférieur à l'unité, et c'est après ces opérations que l'on prendrait la différence. On comprend que le travail utilisable serait ainsi réduit dans une bien plus grande proportion que si l'on multipliait simplement la différence U par un coefficient de réduction inférieur à l'unité. L'objection nous paraît sérieuse, et mérite toute l'attention des praticiens; M. Burdin pense toutefois qu'en établissant une solidarité convenable entre le soufflet qui comprime et le piston moteur, comme dans l'une des machines connues d'Ericson, on peut se soustraire à l'influence désastreuse de la séparation des machines, signalée par M. Reech. Nous n'avons pas à exposer ici les moyens qu'il a imaginés pour cela.

2° Considérons maintenant la machine complète, où l'on utiliserait la pression atmosphérique en laissant l'air intérieur se réchauffer. La dépense serait, en ne reprenant à l'air sortant aucune chaleur,

$$193^{\text{cal}};$$

l'effet utilisable serait

$$29\,829^{\text{kgm}};$$

donc 1 kilogramme de charbon produirait

$$178\,974\,000^{\text{kgm}} : 193 = 927\,000^{\text{kgm}}.$$

Donc cette machine serait

$$3,4 \text{ fois}$$

plus avantageuse que les machines de Cornouailles.

Si nous admettons qu'on reprenne la chaleur déposée dans le réfrigérant, la dépense se réduit à 121 calories, et la machine devient

$$5,4 \text{ fois}$$

plus économique que la machine à vapeur de comparaison.

3° Considérons enfin la machine à réfrigérant continu, et admettons que nous abandonnions toute récurrence de calorique par un calcul analogue au précédent, nous trouverons que notre machine théorique vaut

$$3,8 \text{ fois}$$

les machines de Cornouailles. Si nous reprenons encore seulement le calorique déposé dans le réfrigérant instantané, ce rapport se transforme en cet autre :

$$6,2.$$

Toutefois les difficultés qui se présenteront pour réaliser cette conception d'un réfrigérant continu nous paraissent assez considérables pour qu'on doive se borner à la machine précédente, et même à celle qui n'utilise pas la pression atmosphérique, mais qui recueille, autant que possible, la chaleur que l'air emporte au sortir de la machine.

§ XXXVIII. — *Influence du degré de compression sur le rendement de la machine.*

Nous avons laissé les données exactement les mêmes que dans le cas précédent, et nous avons supposé successivement n égal à

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9 \text{ atmosphères.}$$

A l'aide des formules de notre Mémoire, nous avons pu former le tableau suivant pour la machine, où l'on néglige l'effet dû à la pression atmosphérique après le refroidissement de l'air détendu.

Influence du degré de compression.

VALEURS diverses de n.	VALEURS de $\mathfrak{E}_3+\mathfrak{E}_2-\mathfrak{E}_1$.	DÉPENSE de calorique.	CHALEUR laissée au réfrigérant.	RENDEMENT sans récurrence.	RENDEMENT avec récurrence.
atm 1	kgm 0	cal 234,25	cal 147,21	0,00	0,00
2	16665	215,52	106,02	0,18	0,35
3	23479	202,68	85,47	0,27	0,47
4	27069	192,61	72,36	0,33	0,53
5	29163	184,20	62,89	0,37	0,56
6	30431	176,91	55,59	0,40	0,59
7	31197	170,43	49,72	0,43	0,61
8	31635	164,58	44,84	0,45	0,62
9	31847	159,24	40,69	0,47	0,64

Ce tableau suffit pour rendre manifestes plusieurs particularités intéressantes :

1° Les nombres de la seconde colonne ne croissent pas au delà de toute limite, et l'on sent même que le maximum doit être environ 32000 kilogrammètres. Le calcul algébrique fait voir en effet que la valeur de n qui correspond au maximum de $\mathfrak{E}_3+\mathfrak{E}_2-\mathfrak{E}_1$ est donnée par

$$n^{2\beta}=\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t};$$

réduite en nombre, cette formule conduit à

$$n=9^{\text{atm}},898.$$

2° Nous appelons *rendement de la machine* le rapport entre le travail fourni par la dépense d'une calorie et l'équivalent mécanique 424 kilogrammètres, qu'une machine parfaite donnerait par chaque calorie. On voit par la cinquième colonne que ce rendement croît sans cesse avec le degré de compression. Toutefois, il ne croît pas au delà d'une certaine limite; car ce calcul donne pour ce rendement l'expression très-simple

$$1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\beta}.$$

Or la plus grande compression qu'on puisse prendre pour une machine marchant à T°, c'est celle qui donnerait à l'air la température même T; cette compression est donnée par les formules

$$n^{\beta} = \frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}, \qquad \left(\frac{1}{n}\right)^{\beta} = \frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}.$$

Donc le rendement a pour limite

$$1 - \frac{1+\alpha t}{1+\alpha T},$$

ou, en réduisant en nombre,

$$0,736.$$

3° On voit aussi par la dernière colonne que, si l'on tient compte de la récurrence, c'est-à-dire de la chaleur que l'on peut reprendre dans le réfrigérant, le rendement est toujours plus fort. Il augmente sans cesse; toutefois il n'augmente pas au delà de toute limite, et le calcul montre facilement qu'il ne peut pas dépasser

$$\frac{1 - \dfrac{1+\alpha t}{1+\alpha T}}{1 - \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{1+\alpha t}{1+\alpha T}},$$

formule qui, réduite en nombre avec nos données, fournit

$$0,905.$$

Ce maximum correspond au cas où la compression fournit toute la chaleur, et où l'effet utile est nul.

4° Ainsi, d'une part, l'effet utile que l'on peut retirer d'un mètre cube d'air augmente jusqu'à ce que la compression soit précisément la racine carrée de celle qui donnerait à l'air la température de 800 degrés; mais alors on ne retire que 0,47 ou, avec récurrence, 0,64 de la force motrice représentée par le calorique dépensé. D'autre part, si le degré de compression augmente toujours et se rapproche de 98 atmosphères, l'effet utile retiré d'un mètre cube d'air diminue et tend vers zéro, la dépense tend également vers zéro, et le rendement d'une calorie croît toujours, et par le fait la machine théorique est plus avantageuse. Toutefois elle devient, par compensation, de plus en plus encombrante, et dans la pratique il paraîtra bien préférable de sacrifier un peu de la quantité de rendement à l'avantage de produire plus de travail par coup de piston.

§ XXXIX. — *Influence de la détente sur l'effet utile de la machine à* 800 *degrés et à* 4 *atmosphères de compression.*

En répétant sur la formule qui donne

$$\mathfrak{E}_3 + \mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1$$

un calcul de dérivation par rapport à m analogue à celui qui a été fait pour U′, nous trouvons que l'effet utile atteint son maximum lorsque la détente m est poussée jusqu'à l'unité. Ce résultat était facile à prévoir. Nous nous sommes donc placés, dans nos calculs numériques, dès l'abord, le plus avantageusement possible, quant à la détente.

L'exemple détaillé que nous venons de traiter suffit pour faire comprendre l'usage de nos formules, et pour donner une idée assez nette des résultats qu'on doit obtenir en variant les circonstances dans lesquelles la machine opère.

CONCLUSION.

De notre étude il résulte donc :

1° Que les machines à vapeur les plus parfaites qu'on ait pu imaginer n'ont qu'un rendement de 0,11, c'est-à-dire ne transforment en travail mécanique que 11 pour 100 du calorique qu'elles reçoivent;

2° Que la théorie mécanique, pouvant aborder et résoudre complétement le problème de l'air chaud employé comme agent moteur, indique positivement des conditions réalisables, dans lesquelles le rendement d'une machine à gaz serait jusqu'à près de 6 fois plus considérable; que, par conséquent, l'industrie, éclairée par notre calcul, peut espérer d'arriver dans cette voie à des moteurs à feu très-avantageux par rapport à ceux qui sont aujourd'hui en usage;

3° Qu'il est impossible, quel que soit le cycle adopté, de transformer complétement en travail la chaleur dépensée;

4° Que, s'il est difficile de résoudre pratiquement le problème de la transformation du calorique en travail, on doit regarder le problème inverse de la transformation du travail mécanique en chaleur comme très-bien résolu par MM. Mayer et Beaumont. En effet, en nous reportant aux deux expériences faites par M. Morin [*], et consignées dans son Rapport, nous voyons que, dans le premier cas, un travail de

$$2\,558\,448^{\text{kgm}}$$

a produit

$$3\,113^{\text{cal}},70;$$

et, par suite, un travail moteur de 424 kilogrammètres a produit

$$0^{\text{cal}},50.$$

Dans le second cas, où la vitesse de rotation est plus grande, le travail moteur a été, par heure, de

$$2\,027\,700^{\text{kgm}},$$

et la production de chaleur, par heure,

$$3\,847^{\text{cal}},10;$$

donc 424 kilogrammètres ont produit, non pas 1 calorie, mais

$$0^{\text{cal}},80.$$

Donc la machine peut avoir le rendement énorme de 80 pour 100;

---

[*] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XLII, p. 719.

donc, industriellement parlant, elle peut être regardée comme parfaite. Sans doute M. Morin a parfaitement raison de croire que cette invention n'est pas aussi utile que les inventeurs l'ont prétendu; mais il n'en est pas moins vrai qu'ils ont résolu avec un rare bonheur le problème de la transformation du travail en chaleur. Peu importe l'utilité de la solution.

Si M. Morin a jugé si désavantageusement leur ingénieux appareil, c'est qu'il a comparé le calorique employé à faire mouvoir la machine à vapeur qui fait tourner le cône frotteur de MM. Mayer et Beaumont à la chaleur donnée par cette dernière machine. Comme la machine à vapeur ne transmet qu'un dixième de ce qu'elle reçoit à la manivelle du cône, il n'est pas étonnant que la machine à frottement ne donne qu'un vingtième de cette chaleur; c'est bien la moitié de ce qu'elle reçoit.

Pour porter un jugement équitable, il me semble qu'il faut procéder autrement, et, ainsi que je l'ai fait, calculer, d'une part, le travail dépensé pour la faire tourner, et, de l'autre, le calorique produit par cette dépense.

NOTE ADDITIONNELLE.

SUR LE RENDEMENT DES MACHINES A AIR CHAUD EN GÉNÉRAL.

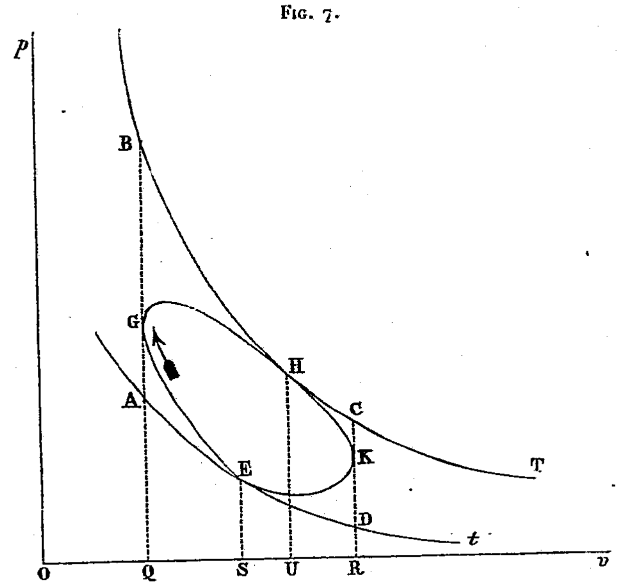
Nous avons pris dans le cours de notre travail un cycle particulier pour étudier le rendement d'une machine à air; on peut arriver à un théorème général important donnant une limite du rendement d'une machine quelconque.

Imaginons que l'air d'une machine suive le cycle d'états EGHKE tout à fait quelconque. Il part de l'état E qui correspond à sa température la plus basse t, il arrive par la courbe EGH à la température la plus élevée T, puis il revient HKE à sa température la plus basse.

Inscrivons ce cycle entre les deux courbes isothermiques t et T, et entre deux parallèles à l'axe Op. Appelons :

v_0 le volume OS qui correspond à l'état E,
v_1 le volume OQ,
v_2 le volume OU qui correspond à l'état H,
V le volume OR,
p' l'ordonnée de la courbe GHK,
p l'ordonnée de la courbe GEK,
Q_1 la dépense de chaleur positive ou négative dans le parcours de EG,
Q_2 la dépense dans le parcours de GH,
Q_3 la dépense dans le parcours de HK,
Q_4 la dépense dans le parcours de KE,
τ_0 la température en G,
τ_1 la température en K;

Fig. 7.



et remarquons que la formule (24) de notre Mémoire est générale.

Cela posé, nous aurons, en vertu de cette formule,

$$Q_1 = \frac{D_0 c'}{H\alpha}(v_1 p_1 - v_0 p_0) + \frac{D_0(c-c')}{H\alpha}\int_{v_0}^{v_1} p\,dv.$$

ou bien

$$Q_1 = D_0 c'(\tau_1 - t) - \frac{1}{E}\int_{v_1}^{v_0} p\,dv;$$

de même

$$Q_2 = D_0 c'(T - \tau_1) + \frac{1}{E}\int_{v_1}^{v_2} p'\,dv,$$

$$Q_3 = - D_0 c'(T - \tau_0) + \frac{1}{E}\int_{v_2}^{V} p'\,dv,$$

$$Q_4 = - D_0 c'(\tau_0 - t) - \frac{1}{E}\int_{v_0}^{V} p\,dv.$$

La chaleur transformée sera donc

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = \quad & D_0 c'(T - t) + \frac{1}{E}\int_{v_1}^{V} p'\,dv \\ & - D_0 c'(T - t) - \frac{1}{E}\int_{v_1}^{V} p\,dv. \end{aligned}$$

Or la chaleur dépensée est

$$D_0 c'(T - t) + \frac{1}{E}\int_{v_1}^{V} p'\,dv,$$

en faisant la somme de toutes les quantités positives des valeurs Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, et en admettant qu'il n'y ait pas de récurrence. Le rendement de la machine sera donc

$$\mathfrak{R} = 1 - \frac{D_0 c'(T - t) + \frac{1}{E}\int_{v_1}^{V} p\,dv}{D_0 c'(T - t) + \frac{1}{E}\int_{v_1}^{V} p'\,dv}.$$

Négligeons aux deux termes de la fraction la quantité $D_0 c'(T - t)$: nous la rendons plus petite, par suite la différence à l'unité augmentera; donc nous aurons

$$\mathfrak{R} < 1 - \frac{\int_{v_1}^{V} p\,dv}{\int_{v_1}^{V} p'\,dv}.$$

Mais les intégrales des deux termes représentent des aires faciles à voir, et l'on a

$$\mathfrak{R} < 1 - \frac{\text{aire QGEKR}}{\text{aire QGHKR}}.$$

Remplaçons enfin le numérateur par la quantité moindre aire QADR, et le dénominateur par la quantité supérieure aire QBCR, nous aurons *à fortiori*

$$\mathfrak{R} < 1 - \frac{\text{aire QADR}}{\text{aire QBCR}}.$$

Mais cette dernière limite est facile à évaluer, et l'on a

$$\text{aire QADR} = \mathrm{H}(1 + \alpha t)\, \mathcal{L}\frac{\mathrm{V}}{v_1}$$

et

$$\text{aire QBCR} = \mathrm{H}(1 + \alpha \mathrm{T})\, \mathcal{L}\frac{\mathrm{V}}{v_1};$$

donc enfin

$$\mathfrak{R} < 1 - \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha \mathrm{T}},$$

ou bien

$$\mathfrak{R} < \frac{\alpha(\mathrm{T} - t)}{1 + \alpha \mathrm{T}},$$

ou encore

$$\mathfrak{R} < \frac{\mathrm{T} - t}{\frac{1}{\alpha} + \mathrm{T}}.$$

Remarquons maintenant que ce rendement est celui de la machine dont l'air suivrait le cycle DABCD, dans le cas où l'on supposerait qu'il y a récurrence, ce qui serait le cas le plus avantageux. En effet :

1° De D en A, l'air sera comprimé à température constante t, la chaleur absorbée par le réfrigérant sera totalement perdue et sera donnée par l'expression (form. 40)

$$\mathrm{X}_1 = \frac{1}{\mathrm{E}}\mathrm{H}(1 + \alpha t)\mathcal{L}\frac{\mathrm{V}}{v_1};$$

2° De A en B, l'air sera chauffé à volume constant v_1, et l'on dépensera

$$X_2 = D_0 c'(T - t);$$

3° De B en C, l'air sera détendu à température constante T; la dépense de chaleur pour entretenir cette température sera

$$X_3 = \frac{1}{E} H(1 + \alpha T) \mathcal{L} \frac{V}{v_1};$$

4° De C en D, l'air sera refroidi à volume constant V, et l'on recueillera là quantité de chaleur X_2 que l'on avait dépensée de A en B.

Donc, si l'on imagine que la machine soit à récurrence parfaite, la dépense sera X_3, et la chaleur transformée $X_3 - X_1$; donc le rendement sera

$$\rho = \frac{X_3 - X_1}{X_3} = 1 - \frac{X_1}{X_3},$$

ou bien

$$\rho = 1 - \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha T}.$$

Remarquons, en outre, que ρ est indépendant des volumes entre lesquels se meut le gaz et dépendant seulement des températures extrêmes; donc nous pouvons formuler les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Toutes les machines parfaites, ayant pour cycle un quadrilatère curviligne formé de deux courbes isothermiques t, T et de deux ordonnées quelconques, ont même rendement. Ce rendement est égal à l'excès de l'unité sur le rapport des binômes de dilatation* $\rho = 1 - \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha T}$.

Théorème II. — *Une machine correspondante à un cycle fermé quelconque a un rendement inférieur à celui d'une machine parfaite fonctionnant entre les mêmes températures.*

Remarque. — Le rendement maximum peut se mettre sous la forme

$$\rho = \frac{(\alpha + \alpha T) - (1 + \alpha t)}{1 + \alpha T} = \frac{\left(\frac{1}{\alpha} + T\right) - \left(\frac{1}{\alpha} + t\right)}{\frac{1}{\alpha} + T}.$$

Appelons avec quelques auteurs *température absolue* la température comptée à partir de $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\circ}$, et désignons par T_a, t_a ces températures; on aura enfin

$$\rho = \frac{T_a - t_a}{T_a} = 1 - \frac{t_a}{T_a}.$$

C'est la formule donnée par la plupart de ceux qui ont écrit sur la thermodynamique. Elle est simple; mais elle n'est pas d'un calcul plus facile que la formule primitive.