JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. MANNHEIM

Démonstration géométrique d'une propriété de la transformation par rayons vecteurs réciproques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 16 (1871), p. 317-320.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1871_2_16__317_0>

Démonstration géométrique d'une propriété de la transformation par rayons vecteurs réciproques;

PAR M. A. MANNHEIM.

Une lettre de sir William Thompson, insérée dans le tome XII de ce journal, 1re série, a été, comme l'on sait, l'occasion d'un travail très-intéressant de M. Liouville.

Dans ce travail, M. Liouville a démontré les propriétés fondamentales de la méthode de transformation qu'il a nommée *transformation par rayons vecteurs réciproques*.

C'est seulement à partir de cette publication que cette méthode de transformation a fixé, comme elle le méritait, l'attention des géomètres.

M. Liouville, le premier, fit connaître cette propriété importante, que, par une transformation directe d'une figure, on peut obtenir le résultat de transformations successives.

La démonstration qu'il en a donnée est purement analytique. Je ne crois pas qu'on en ait donné de démonstration géométrique pour ce qui concerne les figures de l'espace. Je viens aujourd'hui combler cette lacune.

Désignons par (F) une figure quelconque, par (F_1) sa transformée, par (F_2) la transformée de (F_1); je vais faire voir que l'on peut obtenir une figure symétrique de (F_2) par rapport à un plan en transformant directement la figure donnée (F).

Appelons o le pôle et p^2 la puissance de la première transformation, o_1 et p_1^2 le pôle et la puissance de la deuxième transformation; enfin o_2 le pôle de la transformation qui permettra d'obtenir une figure égale à (F_2), et dont il s'agit de prouver l'existence.

Soient a un point de (F), a_1 le point de (F_1) correspondant à a et a_2 le point de (F_2) correspondant à a_1. Si le pôle o_2 existe, il est sur la circonférence qui contient les trois points a, a_1, o_1. En effet, en vertu de la première transformation, cette circonférence se transforme en elle-même, et, comme elle contient le pôle o_1, le résultat de la deuxième transformation sera une droite. Pour obtenir directement une droite, on doit placer le pôle o_2 sur cette circonférence.

Je dis que le pôle o_2 doit être aussi un point de la droite oo_1, c'est-à-dire qu'alors ce pôle sera le point unique où la droite oo_1 rencontre la circonférence dont je viens de parler. Pour le montrer, employons une deuxième circonférence, celle qui passe par ce point, le point o et le point a. Considérée comme faisant partie de la première figure, elle se transforme suivant la droite a_1o_1; mais cette ligne contenant le pôle o_1 se transforme en elle-même dans la deuxième transformation, c'est-à-dire qu'elle reste une droite.

Le pôle o_2, devant transformer la deuxième circonférence suivant une droite, doit être un point de cette courbe; il est donc au point où cette circonférence coupe la première, point qui n'est autre que celui où la première circonférence est rencontrée par la droite oo_1.

Désignons toujours ce point par o_2, et cherchons la puissance de transformation x^2 qu'il faut joindre à ce pôle pour compléter les données de la transformation directe dont nous nous proposons de montrer l'existence.

Considérons un point quelconque d de (F); appelons d_1 et d_2 les points correspondants de (F_1) et (F_2); enfin désignons par a_3 et d_3 les transformées de a et d en prenant o_2 et x^2 pour pôle et puissance de transformation.

Menons les droites ad, a_1d_1, a_2d_2, a_3d_3, l'on a

$$a_3d_3 = \frac{ad \times x^2}{o_2a \times o_2d};$$

mais, en employant la première transformation, on a

$$ad = \frac{a_1d_1 \times p^2}{oa_1 \times od_1}, \quad o_2a = \frac{o_1a_1 \times p^2}{oo_1 \times oa_1}, \quad o_2d = \frac{o_1d_1 \times p^2}{oo_1 \times od_1}.$$

Portant ces valeurs dans la relation précédente et réduisant, il vient

$$a_3 d_3 = \frac{a_1 d_1}{o_1 a_1 \times o_1 d_1} \times \frac{x^2 . \overline{oo_1}^2}{p^2}.$$

Mais $\frac{a_1 d_1}{o_1 a_1 \times o_1 d_1} = \frac{a_2 d_2}{p_1^2}$; on a donc

$$a_3 d_3 = a_2 d_2 \times \frac{x^2 . \overline{oo_1}^2}{p^2 . p_1^2}.$$

Si nous voulons avoir $a_3 d_3 = a_2 d_2$, il faut que $x^2 = \frac{p^2 . p_1^2}{\overline{oo_1}^2}$.

La grandeur et la direction du segment ad n'entrant pas dans cette expression, cette valeur de x^2 est la puissance de transformation cherchée.

Joignons le point a aux points b et c situés sur le plan oao_1; désignons par b_1, c_1, b_2, c_2 les points correspondant à b et c. Désignons aussi par b_3, c_3 les points transformés de b et de c par rapport à o_2, en adoptant pour puissance la valeur de x^2 que nous venons de trouver.

Les deux triangles $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$, d'après ce qui précède, auront leurs côtés égaux chacun à chacun.

Je dis que ces côtés sont également inclinés sur la droite oo_1. Décrivons une circonférence passant par les points o_2, a, b : la tangente en o_2 à cette circonférence est parallèle à $a_3 b_3$. En transformant cette circonférence par rapport au pôle o, elle devient une circonférence passant par $o_1 a_1 b_1$; la tangente au point o_1 à cette circonférence est parallèle à $a_2 b_2$. Mais les tangentes en o_2 et o_1 à ces deux circonférences sont également inclinées sur la droite oo_1; il en est donc de même des droites $a_2 b_2$, $a_3 b_3$ qui leur sont parallèles.

Il résulte de là que les deux triangles $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$ ne peuvent pas être amenés à se superposer par simple glissement; mais l'un peut être amené à coïncider avec le symétrique de l'autre obtenu par rapport à une perpendiculaire à la droite oo_1.

Joignons le point d_2 aux sommets du triangle $a_2 b_2 c_2$, le point d_3 aux sommets a_3, b_3, c_3. Les distances des points d_2 et d_3 aux sommets de ces triangles sont respectivement égales; par suite, les points d_2 et d_3 sont à égale distance du plan de ces triangles.

Lorsque les deux triangles sont amenés à être symétriques par rapport à une perpendiculaire à oo_1, les points d_1, d_2 sont symétriques par rapport au plan mené par cette droite perpendiculairement à oo_1. Comme tous les points de (F) peuvent être déterminés par leurs distances aux sommets du triangle *abc*, ce que je viens de dire pour le point *d* s'étend à tous les points de cette figure.

Ainsi, *la figure* (F_3), *que l'on peut obtenir en transformant directement* (F) *par rapport à* o_2, *peut être amenée à coïncider avec la figure symétrique de* (F_2) *prise par rapport à un plan perpendiculaire à* oo_1.

Ce résultat obtenu, il est facile de voir comment l'on doit continuer lorsque l'on a un plus grand nombre de transformations.