JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE SAINT-VENANT

Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 16 (1871), p. 308-316.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1871_2_16__308_0>

Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état;

PAR M. DE SAINT-VENANT.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, p. 473, 7 mars 1870.)

1. L'attention a été appelée d'une manière particulière sur ces sortes de mouvements, comprenant le pétrissage, le laminage, l'emboutissage, etc., par les expériences de M. Tresca, décrites dans des Mémoires (1864 à 1870) que l'Académie a approuvés [*]. On a dû naturellement se demander quelles lois pouvaient suivre les déplacements relatifs des points des corps ainsi déformés, sans disjonction, d'une manière permanente, et quelles forces intérieures s'y trouvaient en jeu.

Déjà Cauchy s'était occupé, en passant, d'un pareil sujet, car il proposait en 1828, pour le mouvement des corps mous ou dénués d'élasticité, des formules de pression intérieure, et des équations différentielles où se trouvaient engagées les dérivées des vitesses de leurs molécules [**]. Mais comme les composantes de pression, dans un sens tangentiel aux faces, n'y sont affectées que des vitesses du glissement relatif des couches que celles-ci séparent, ces formules supposent tacitement que la matière est en même temps dénuée *de cohésion*, et ne conviennent ainsi qu'aux liquides, même sans viscosité, comme les

[*] Mémoires des 7 novembre 1864, 22 avril et 3 juin 1867, sur l'écoulement des corps solides; et 29 mai 1869, 3 janvier 1870, sur le poinçonnage. Leur impression aux *Savants étrangers* a été votée les 12 juin 1865, 10 février 1868, 14 et 21 février 1870.

[**] *Exercices de Mathématiques*, 3e année, p. 183.

formules toutes pareilles dressées pour ces derniers corps par Poisson vers le même temps, et par Navier dès 1822.

Aussi, dans un Rapport fait le 29 juin 1868, sur deux Communications théoriques de M. Tresca, qui, alors, essayait d'interpréter les faits de déformation des solides par les formules ordinaires et plus anciennes des fluides [*], la Commission signalait la nécessité, si l'on voulait un jour se servir de formules plus complètes, telles que celles de Cauchy et Navier, d'ajouter aux expressions des composantes tangentielles *une partie considérable ne dépendant pas des vitesses, qui sont d'ailleurs ordinairement faibles* dans les mouvements ou écoulements dont il était question [**].

Soit que cette simple remarque ait pu suggérer à M. Tresca de substituer un principe dynamique nouveau à celui dont il avait hasardé l'emploi, soit, ce qui est aussi probable, que l'idée lui en ait été fournie entièrement par ses propres réflexions et ses nombreuses observations, ce savant auteur a terminé son remarquable Mémoire de 1869 sur le poinçonnage [***] par une *Théorie mécanique de la déformation des solides,* paraissant très-rationnelle, où il propose d'une manière nette (cette déformation étant censée s'opérer avec des vitesses infiniment petites) de regarder *comme constantes,* ou indépendantes des dilatations, compressions et glissements déjà opérés, les intensités des forces qui continuent d'en produire, lorsque la matière solide est parvenue à cet état qu'il compare à la *fluidité* parce que l'élasticité y a disparu ou ne produit plus que des réactions relativement négligeables. Et il a, en comparant le travail des fortes pressions extérieurement exercées pour déformer les solides mis en expérience avec celui des forces intérieures supposées réagir suivant cette loi fort simple, confirmé d'une manière variée son hypothèse, en déterminant pour chaque matière les intensités constantes à attribuer ainsi à ces dernières forces, par unité superficielle des faces où elles agissent.

Ces intensités, comme il l'a reconnu expérimentalement, sont d'égales grandeurs pour les résistances au cisaillement qui agissent dans la di-

[*] *Comptes rendus,* 25 mai et 22 juin 1868.

[**] *Comptes rendus,* 29 juin; t. LXVI, p. 1308.

[***] Présenté le 24 mai 1869, *Comptes rendus,* t. LXVIII, p. 1197.

rection du glissement maximum en chaque point, et pour les résistances, soit à la compression, soit à l'extension, exercées sur les faces où il n'y a pas de glissement; égalité que vérifie facilement un raisonnement *à priori* fondé sur la remarque, que quand la densité ne change pas, toute compression ou dilatation dans un sens est nécessairement accompagnée de glissements en des sens obliques sur celui-ci, et réciproquement [*].

2. Pour déterminer les mouvements que prennent les divers points des masses ductiles ainsi déformées, il n'a été fait encore que des tentatives de *pure cinématique*, fondées à la fois sur le fait de la conservation des volumes et des densités, et sur diverses hypothèses. Celles de M. Tresca consistent à diviser le bloc dont on produit l'*écoulement* ou le *poinçonnage* en plusieurs parties (cylindre central, cylindre annulaire latéral ou enveloppe, et *jet* plein ou annulaire), et à supposer que, dans chacune, toute ligne matérielle verticale reste verticale et toute ligne horizontale reste horizontale, sauf à s'incliner et à se courber en passant d'une partie dans la suivante, après s'être brisée ou brusquement infléchie au passage. J'y ai substitué une hypothèse beaucoup plus large, qui dispense de ces divisions mentales et qui n'entraîne pas de pareilles discontinuités : elle consiste à supposer que les composantes des vitesses suivant les coordonnées sont les trois dérivées d'une même fonction par rapport à chacune, multipliées respectivement par trois constantes dont on peut faire varier à volonté, et jusqu'à l'infini, les deux rapports mutuels; et on pourrait l'appliquer facilement aux poinçonnages, comme je l'ai fait aux *écoulements* [**].

3. Mais le problème est plus que cinématique; il est mécanique, et on ne peut espérer en donner une solution vraie qu'autant qu'on aura des équations où figurent les forces agissantes, et qui soient propres à cette hydrodynamique de nouvelle espèce. Il s'agit de savoir comment on y fera entrer ces actions intérieures *d'intensité restant con-*

---

[*] Note au *Compte rendu*, 14 février 1870; t. LXX, p. 309

[**] Surtout à la Note des 1er et 8 février 1869, t. LXVIII, p. 221 et 290.

stante, dont l'existence est ainsi démontrée par un raisonnement simple, appuyé de nombreuses expériences; forces pouvant être ramenées, d'après ce qu'on vient de dire, à la seule *résistance au glissement.*

Rappelons d'abord que pour les liquides, quand on peut négliger leur frottement, qui est une autre espèce de résistance au glissement, nulle au repos, mais que des vitesses d'une certaine grandeur engendrent, si, pour un point quelconque *d'espace,* dont les coordonnées sont x, y, z, l'on appelle u, v, w les composantes, suivant leurs directions, de la vitesse du point matériel qui y passe à l'époque désignée par le temps t, et si X, Y, Z sont les composantes, dans les mêmes directions, de la force animant l'unité de volume, l'on a, ρ représentant la densité constante, et p la pression supposée égale en tous sens autour de chaque point, les quatre équations différentielles connues

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \rho\left(\mathrm{X} - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy} - w\frac{du}{dz}\right),\\ \frac{dp}{dy} &= \rho\left(\mathrm{Y} - \frac{dv}{dt} - u\frac{dv}{dx} - \ldots\right),\\ \frac{dp}{dz} &= \rho\left(\mathrm{Z} - \frac{dw}{dt} - \ldots\right); \end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0;$$

qui fourniraient pour toute époque, si l'on savait les intégrer pour les conditions particulières tant initiales qu'aux limites, les grandeurs des quatre inconnues u, v, w, p, en tous les points d'une masse liquide; par exemple de celle qui serait (comme les masses solides mises en expérience par M. Tresca) poussée hors d'un vase cylindrique, soit en bas par un piston de même diamètre, soit en haut et annulairement par un *poinçon* de diamètre un peu moindre.

Dans les équations que nous avons à établir pour la déformation des solides avec des vitesses en quelque sorte infiniment petites, ces vitesses u, v, w devront-elles entrer aussi? Cela n'est point douteux; car si, d'une part, vu leur petitesse, elles ne produisent généralement, d'une manière sensible, ni l'espèce de résistance au glissement dont on vient de parler pour les fluides, ni la résistance d'inertie que représentent les termes en u, v, w des seconds membres de (1), il faut, d'une autre part, considérer que les vitesses des divers points matériels des corps ductiles constituent les déplacements qu'ils subissent pendant chaque instant : or c'est de ces déplacements que dépendent successivement les extensions, contractions et glissements relatifs intérieurs mettant en jeu les résistances à la continuation de la déformation, et déterminant leurs directions ainsi que les rapports de leurs intensités aux divers endroits. Les vitesses u, v, w entreront donc nécessairement, non-seulement dans l'équation (2) de conservation des volumes, mais encore dans celles que nous avons à établir pour exprimer la loi des résistances intérieures. Nous les conserverons aussi, au moins provisoirement, dans les seconds membres des équations d'équilibre telles que (1), à poser entre les pressions et les forces tant motrices que d'inertie qui agissent sur un élément parallélépipède; équations où nous ajouterons même, au besoin, comme on verra au n° **6**, d'autres termes où les vitesses entrent.

Seulement, dans ces trois équations d'équilibre ayant les mêmes seconds membres que (1), avec un signe contraire [*], les premiers membres, comme pour tout corps solide ou fluide dans lequel les pressions ou tensions ne sont pas uniquement normales et égales en tous sens, doivent être trois trinômes

$$(3)\quad \frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{yx}}{dy}+\frac{dp_{zx}}{dz},\quad \frac{dp_{xy}}{dx}+\frac{dp_{yy}}{dy}+\frac{dp_{zy}}{dz},\quad \frac{dp_{xz}}{dx}+\frac{dp_{yz}}{dy}+\frac{dp_{zz}}{dz},$$

où les p avec deux sous-lettres, les unes pareilles, les autres différentes, désignent respectivement, suivant une notation de Coriolis, les composantes normales et les composantes tangentielles des pressions ou tensions sur l'unité de trois petites faces rectangulaires, dont les premières sous-lettres désignent la coordonnée normale, tandis que les secondes indiquent les sens de décomposition.

4. Maintenant, pour caractériser l'état particulier des solides dont il est question, et pour rendre le nombre des équations égal à celui des inconnues, bornons-nous ici au cas le plus simple, où l'on n'a besoin de considérer que deux coordonnées x, z en abstrayant y. Ce

[*] Ce changement de signe vient de ce que les forces intérieures des solides, appelées ordinairement *pressions* par Poisson et Cauchy, sont plus proprement des tensions ou tractions.

cas serait celui de l'*écoulement*, hors d'un vase rectangulaire, d'un solide ductile par un orifice inférieur aussi rectangulaire, ayant une même longueur égale à l'unité et qu'on peut abstraire, ou du *poinçonnage* d'un bloc parallélépipède rectangle par un outil de même forme, à côtés parallèles aux siens, et de même longueur dans le sens de y qu'on abstrait.

Alors la deuxième des équations (1) n'existe pas, et les premiers membres (3) à donner aux deux autres se réduisent à des binômes, car les dérivées par rapport à y sont zéro ainsi que tous les termes où v entre.

Or il s'agit d'exprimer :

1° Que sur la face, perpendiculaire au plan xz, mais généralement oblique aux x et aux z, où la composante tangentielle de pression est la plus grande, elle a pour intensité celle de cette résistance constante au glissement maximum ou au cisaillement, qui a été appelée

$$K$$

par M. Tresca, et dont il a mesuré les valeurs pour les diverses matières;

2° Que cette face, où la résistance au glissement est la plus grande, est aussi celle sur laquelle la vitesse de glissement relatif est un maximum.

Appelons, pour poser cette double expression, x', z' deux axes faisant l'angle α avec x, z. On aura, en vertu de l'équilibre du tétraèdre élémentaire de Cauchy, remplacé ici par un prisme triangulaire ayant ses faces perpendiculaires aux x, z, x'; on aura, dis-je, pour la composante, suivant z', de la pression sur la face perpendiculaire à x',

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} p_{x'z'} &= -p_{xx}\sin\alpha\cos\alpha + p_{zz}\sin\alpha\cos\alpha + p_{zx}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \\ &= \frac{p_{zz}-p_{xx}}{2}\sin 2\alpha + p_{zx}\cos 2\alpha. \end{aligned}\right.$$

» Maintenant : 1° Son maximum a lieu pour

$$(5)\qquad \tang 2\alpha = \frac{p_{zz}-p_{xx}}{2p_{zx}},$$

et a pour intensité

$$\frac{1}{2}\sqrt{4p_{zx}^2 + (p_{zz}-p_{xx})^2}.$$

Égalant cette expression à la quantité connue K, l'on a

$$(6) \qquad p_{zx}^2 + \left(\frac{p_{zz} - p_{xx}}{2}\right)^2 = K^2 \text{ [*]}$$

pour la quatrième équation entre les inconnues du problème.

2° Les vitesses de dilatation, par unité de longueur, dans les sens respectifs x, z sont

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{dw}{dz};$$

et la vitesse de glissement sur la face normale à x', dans la direction z', a pour valeur, u' et w' étant les composantes de la vitesse suivant x', z',

$$\frac{dw'}{dx'} + \frac{du'}{dz'};$$

c'est-à-dire qu'un petit carré matériel, ayant ses côtés parallèles aux x', aux z', aura, au bout du temps dt, deux angles aigus dont le cosinus est le produit de ce binôme par dt, ou que ses côtés opposés auront glissé l'un devant l'autre d'une quantité qui, rapportée à l'unité de leur distance, se trouve mesurée par ce même produit. Et l'on trouve facilement

$$(7) \qquad \frac{dw'}{dx'} + \frac{du'}{dz'} = \left(\frac{dw}{dz} - \frac{du}{dx}\right)\sin 2\alpha + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)\cos 2\alpha,$$

dont le maximum a lieu pour

$$(8) \qquad \operatorname{tang} 2\alpha = \frac{\dfrac{dw}{dz} - \dfrac{du}{dx}}{\dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz}}.$$

Égalant cette expression à celle (5), afin d'obtenir la coïncidence des directions de plus grand glissement et de plus grande résistance au glissement, l'on a la cinquième équation du problème.

On obtiendrait évidemment cette équation toute pareille, en exprimant que les deux faces de glissement nul sont les mêmes que celles de résistance nulle au glissement, c'est-à-dire que (4) $p_{x'z'}$ s'annule pour

---

[*] Cette équation est analogue à celle que M. Levy a eu l'idée d'établir entre les inconnues du problème de la poussée des terres [*Comptes rendus*, 7 février 1870, .LXX, p. 230, équation (3)].

le même angle 2α, ou pour les mêmes deux angles α (différant entre eux d'un angle droit), que (7) $\frac{dw'}{dx'} + \frac{du'}{dz'}$.

Observons encore qu'il y a aussi deux faces, faisant avec celles-ci 45 degrés, de glissements, l'un maximum, l'autre minimum, égaux entre eux au signe près; que, sur ces deux faces rectangulaires, les composantes normales de pression $p_{x'x'}$, $p_{z'z'}$ sont égales entre elles et à

$$\frac{p_{xx} + p_{zz}}{2}.$$

D'où il suit que dans le corps, à l'état où nous le supposons, les pressions intérieures peuvent être réduites à une pression normale $p = \frac{p_{xx} + p_{zz}}{2}$, égale en tous sens, et à une pression tangentielle K, s'exerçant sur une face déterminée, et engendrant par décomposition, sur les autres faces, des composantes tant tangentielles que normales de diverses intensités.

5. Au résumé, et en écrivant, pour nous rapprocher de la notation de M. Lamé, plus connue que celle de Coriolis,

$$N_x,\ N_z,\ T \quad \text{au lieu de} \quad p_{xx},\ p_{zz},\ p_{xz},$$

nous avons

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{dN_x}{dx} + \frac{dT}{dz} = -\rho\left(X - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx} - w\frac{du}{dz}\right),\\
&\frac{dT}{dx} + \frac{dN_z}{dz} = -\rho\left(Z - \frac{dw}{dt} - u\frac{dw}{dx} - w\frac{dw}{dz}\right),\\
&\frac{du}{dx} + \frac{dw}{dz} = 0,\\
&T^2 + \left(\frac{N_z - N_x}{2}\right)^2 = K^2,\\
&\frac{N_z - N_x}{2T} = \frac{\frac{dw}{dz} - \frac{du}{dx}}{\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}},
\end{aligned}\right.$$

pour les cinq équations d'hydrostéréodynamique ou de plasticodynamique destinées à déterminer les cinq inconnues u, w, N_x, N_z, T.

Si les équations (1), (2) des fluides supposés sans frottement ni viscosité ne peuvent que rarement être intégrées, il en sera de même, à plus forte raison, de celles (9) des solides plastiques ou rendus tels par de fortes pressions. Nous ne chercherons donc pas ici à poser les équations bien plus compliquées relatives au cas général, où il faudrait considérer les trois dimensions et employer trois coordonnées.

Mais il doit être possible d'en poser qui soient encore assez simples, à deux coordonnées semi-polaires, r (le rayon vecteur) et z, applicables aux corps cylindriques placés dans des circonstances où tout reste symétrique autour d'un même axe pris pour celui des z. Je me borne à appeler l'attention et les recherches des savants sur ce cas intéressant, qui est celui de la plupart des expériences de M. Tresca.

6. Je ferai seulement une dernière remarque : c'est que si, aux six composantes de pressions ci-dessus

$$(10)\quad p_{xx}=\mathrm{N}_x,\quad p_{yy}=\mathrm{N}_y,\quad p_{zz}=\mathrm{N}_z,\quad p_{yz}=\mathrm{T}_x,\quad p_{zx}=\mathrm{T}_y,\quad p_{xy}=\mathrm{T}_z,$$

l'on ajoute respectivement les termes

$$(11)\quad 2\varepsilon\frac{du}{dx},\quad 2\varepsilon\frac{dv}{dy},\quad 2\varepsilon\frac{dw}{dz},\quad \varepsilon\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right),\quad \varepsilon\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right),\quad \varepsilon\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right),$$

représentant, comme on sait, ce qui vient du frottement dynamique dû aux vitesses de glissement relatif dans les fluides non visqueux se mouvant avec régularité, les équations des solides plastiques, ainsi complétées, s'étendront au cas où les vitesses avec lesquelles leur déformation s'opère, sans être considérables, ne seraient plus excessivement petites, et pourraient engendrer ces résistances particulières, ordinairement négligeables, dont on a parlé au n° **3**. Les mêmes équations, avec tous ces termes, seraient propres, aussi, à exprimer les mouvements réguliers (c'est-à-dire pas assez prompts pour devenir tournoyants et tumultueux) des *fluides visqueux*, où il doit y avoir des composantes tangentielles de deux sortes, les unes variables avec les vitesses u, v, w, et mesurées par les produits (11) de ε et de leurs dérivées, les autres indépendantes de ces grandeurs des vitesses, ou les mêmes quelle que soit la lenteur du mouvement, et attribuables *à la viscosité*, dont K *représenterait alors le coefficient spécifique*.

(*Sera continué page* 369 *ci-après.*)