JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Étude nouvelle sur l'équilibre le mouvement des corps solide élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres; deuxième mémoire. Des plaques planes

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 16 (1871), p. 241-274.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1871_2_16__241_0>

Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

SECOND MÉMOIRE.

DES PLAQUES PLANES.

Le but de ce Mémoire est d'établir rigoureusement, en partant des formules de la théorie de l'élasticité, les équations générales de l'équilibre et du mouvement des plaques planes très-minces, et aussi de résoudre une difficulté, provenant de la différence qui existe entre des conditions aux limites dûes à Poisson (*Sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques*, aux *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VIII, 1829, p. 538), et d'autres dues à M. Kirchhoff (*Journal de Crelle,* t. 40, 1850, p. 51).

Poisson et Cauchy ont tiré les premiers, des formules générales de l'élasticité, celles de l'équilibre et du mouvement d'une plaque plane, dans le cas particulier où cette plaque, homogène et isotrope, ne supporte sur ses bases aucune pression autre que celle de l'atmosphère, antérieure aux déformations étudiées; mais ce n'a été qu'au moyen d'une hypothèse, consistant à admettre que les forces élastiques y sont développables en séries très-convergentes suivant les puissances ascendantes de la petite coordonnée transversale, de manière qu'on puisse ne conserver dans toute relation qu'un seul terme ou au plus les deux termes des degrés les moins élevés. Cette hypothèse, certainement fausse lorsque la plaque comprend des couches de nature différente bien que contiguës, est suffisamment exacte dans le cas d'une plaque homogène. Elle a toutefois, même dans ce cas, le tort d'être seulement vraisemblable et non évidente. Aussi M. Kirchhoff a-t-il préféré, dans le Mémoire cité plus haut, admettre, comme avait précédemment fait Navier (*Société Philomathique*, 1821), que les petites droites primitivement normales aux couches leur restent normales malgré les déformations éprouvées. Quand les plaques sont isotropes comme celles qu'étudie M. Kirchhoff, et plus généralement toutes les fois que leurs bases sont des plans de symétrie de contexture, cette nouvelle hypothèse est suffisamment exacte, car elle revient à supposer que les actions tangentielles exercées par les couches les unes sur les autres sont négligeables en comparaison d'autres forces élastiques développées dans le milieu; en effet, ces actions ne dépendent alors que de l'inclinaison prise sur les plans des couches par les droites qui leur étaient primitivement normales, et leur petitesse relative, dont je démontre la réalité, entraîne celle de l'inclinaison considérée. Mais, lorsque la contexture est quelconque, les mêmes actions restent très-petites sans que l'inclinaison des normales primitives sur les couches soit d'un ordre de grandeur moindre que les autres déformations éprouvées par le milieu; ce qui montre que l'hypothèse de M. Kirchhoff, en défaut dans ce cas, ne peut être admise dans aucun, à moins d'être préalablement démontrée. Enfin, M. Gerhing, disciple de ce grand physicien-géomètre, a essayé [*], sur l'indication de son maître, de traiter sans aucune hypothèse douteuse la théorie des plaques homogènes et de contexture symétrique par rapport à trois plans rectangulaires dont l'un est supposé parallèle à leurs bases; mais il s'est appuyé sur des considérations cinématiques pareilles à celles dont M. Kirchhoff s'était déjà servi dans l'étude des tiges minces, considérations qui manquent de rigueur, comme je pense l'avoir établi dans le Mémoire précédent.

J'ai quelque espoir d'avoir été plus heureux, tout en ayant traité la question à un point de vue très-général. Je m'occupe de plaques dont les feuillets ou couches superposées peuvent être d'une nature différente, variable en leurs divers points, et d'une contexture absolument quelconque. Des équations connues de l'équilibre des corps élastiques, et en admettant qu'une des bases de la plaque ne soit soumise à aucune action autre que le pression atmosphérique antérieure aux déplacements, je déduis les expressions, sous forme d'intégrales

[*] Dans sa Thèse *De æquationibus differentialibus quibus æquilibrium et motus laminæ cristallinæ definiuntur, dissertatio inauguralis.* On peut voir aussi cette analyse de M. Gerhing dans la *Theorie der Elasticität fester Cörper* de M. Clebsch.

définies, des trois composantes suivant les axes de la force élastique exercée sur les éléments plans parallèles aux bases : ces expressions montrent que les deux composantes qui sont tangentielles ont des valeurs très-petites par rapport à celles d'autres forces élastiques, et que la troisième est encore d'un ordre de petitesse supérieur, circonstances qui permettent de les transformer de manière à n'y laisser paraître aucun autre déplacement que ceux de la couche moyenne. Les équations indéfinies de l'équilibre s'obtiennent en exprimant que ces forces deviennent égales, sur la seconde base de la plaque, aux composantes pareilles et connues de l'action extérieure qui s'y trouve exercée par unité de surface. On les étendrait facilement au cas où la première base serait soumise, comme la seconde, à des pressions données; car l'état de la plaque résulterait alors de la superposition de deux états, dans chacun desquels une des deux bases ne supporterait aucune action.

Les conditions spéciales au contour sont au nombre de quatre. Elles reviennent à dire que l'action totale extérieure, exercée sur une bande du cylindre contournant comprise entre deux génératrices infiniment voisines, équivaut statiquement à trois forces, dirigées suivant trois droites fixes, et à un couple, perpendiculaire au contour, dont les expressions sont données par la théorie en fonction des déplacements des points de la couche moyenne qui se trouvent voisins de ce cylindre. En effet, si l'on mène, par un point de l'une des génératrices considérées, trois axes rectangulaires tels que le premier soit normal au cylindre et le second dans le sens de la largeur ds de la bande, et si l'on prend les composantes totales et les moments totaux, par rapport à ces axes, des forces extérieures appliquées à la bande, le dernier des trois moments sera de l'ordre de ds^2, c'est-à-dire négligeable; et ces forces équivaudront statiquement à trois composantes $F_n\,ds$, $F_s\,ds$, $F_z\,ds$, appliquées respectivement le long des trois axes, à un couple $M_s\,ds$, normal à l'élément ds du contour de la plaque, et à un second couple $-M_n\,ds$ parallèle à la bande même. Ce dernier peut être supposé composé de deux forces, M_n, $-M_n$, de sens contraire, appliquées le long des deux génératrices qui passent par les extrémités de l'élément ds. Si l'on conçoit une série de bandes contiguës du cylindre contournant séparées par des génératrices infiniment voisines, les couples tels que $-M_n ds$ seront ainsi remplacés, sur chacune de celles-ci, par deux forces $-M_n$ et $M_n + \frac{dM_n}{ds} ds$, qui auront, à cause de la solidarité des bandes, une résultante égale à $\frac{dM_n}{ds} ds$. Cette résultante devra être jointe à la force $F_z ds$, qui est de même sens, et l'action totale exercée sur une bande du cylindre contournant sera bien réduite, par unité de longueur du contour, aux trois composantes F_n, F_s, $F_z + \frac{dM_n}{ds}$ et au couple M_s, normal au contour.

Poisson, ayant négligé de remplacer les couples parallèles au cylindre contournant par des forces dirigées suivant les génératrices de ce cylindre, et de fondre, par suite, leur effet dans celui de la composante F_z, les a regardés comme représentant un mode d'action distinct exercé sur chaque bande; ce qui lui a donné une condition de trop. M. Kirchhoff a trouvé le premier les vraies conditions au contour; il s'est servi pour cela d'une analyse rigoureuse, basée sur le calcul des variations, mais qui présente l'inconvénient de ne pas éclairer assez l'esprit en ce qu'elle ne montre pas le sens géométrique des conclusions auxquelles elle conduit, et qui d'ailleurs ne pourrait pas s'appliquer si les forces élastiques n'avaient point de potentiel, c'est-à-dire n'étaient pas les dérivées partielles d'une même fonction par rapport à six variables dont elles dépendent. Or il est douteux qu'à part les cas des milieux isotropes et des corps assez voisins du zéro absolu de température pour qu'on puisse y supposer l'amplitude des vibrations calorifiques très-petite par rapport aux intervalles moléculaires, les forces élastiques aient un potentiel. La méthode des variations, dont M. Gerhing, en se basant sur ce qu'elle avait pu seule donner les conditions précédentes, a regardé l'emploi dans la théorie de l'élasticité comme indispensable, ne vaut donc pas la méthode naturelle, consistant dans l'investigation directe et libre de chaque sujet.

Le Mémoire se termine par l'examen du cas où de grandes tensions auraient été appliquées à la plaque antérieurement aux déplacements considérés, et par l'étude de l'influence de la rigidité sur le mouvement transversal des membranes. Cette influence est soumise à des lois approchées très-simples, analogues à celles qui concernent les cordes vibrantes.

§ I. — *Préliminaires.*

Je me propose d'étudier d'abord l'équilibre, sous l'action de forces extérieures données, d'une plaque mince formée de couches sensiblement planes et parallèles, et dont la contexture, constante ou assez lentement variable d'un point à l'autre d'une même couche, pourra changer rapidement et même avec discontinuité d'une couche à ses voisines. J'admettrai que tous les éléments plans pris dans la plaque ne soient soumis par unité de surface, antérieurement aux déformations étudiées, qu'à une pression normale et constante, telle que la pression atmosphérique, dont on pourra faire abstraction. Pendant que les déformations se produiront, aucune nouvelle pression ne sera supposée s'exercer sur l'une des deux bases de la plaque; mais des actions diverses pourront être appliquées à son autre base, ainsi qu'à toute sa masse et sur son contour.

Je prendrai pour plan des xy d'un système d'axes rectangulaires des x, y, z un plan intérieur à la plaque et sensiblement parallèle à ses deux bases. Celles-ci auront pour équation, l'une $z = -\varepsilon'$, et l'autre $z = \varepsilon''$, ε', ε'' étant deux quantités positives, lentement variables avec x et y, et dont la somme est l'épaisseur 2ε de la plaque. J'admettrai qu'on ait choisi les z négatifs du côté de la base qui n'est soumise à aucune action, et j'appellerai P_x, P_y, P_z les composantes données, suivant les axes, de l'action appliquée à l'unité superficielle de l'autre base.

On sait que les composantes suivant les axes N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 des forces élastiques exercées, par unité de surface, sur les éléments menés par un point (x, y, z), sont des fonctions linéaires, sans termes constants, des six déformations simples ∂, g, qui ont pour expressions

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\partial_x = \frac{du}{dx},\quad \partial_y = \frac{dv}{dy},\quad \partial_z = \frac{dw}{dz},\\ &g_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy},\quad g_{zx} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz},\quad g_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx},\end{aligned}\right.$$

u, v, w étant les déplacements de la molécule qui a x, y, z pour coordonnées primitives. Lorsque, en particulier, la contexture est symétrique par rapport au plan des xy, N_1, N_2, N_3, T_3 dépendent seulement des trois ∂ et de g_{xy}, et T_1, T_2 dépendent seulement de g_{yz}, g_{zx}. Mais nous supposerons quelconque la contexture de la plaque.

Si l'on fait $N_3 = 0$, $T_1 = T_2 = 0$, les expressions de N_3, T_1, T_2, ainsi annulées, fournissent ∂_z, g_{yz}, g_{zx} en fonction linéaire de ∂_x, ∂_y, g_{xy}, et N_1, N_2, T_3 deviennent de simples fonctions linéaires des trois mêmes variables. Nous admettrons que les coefficients d'élasticité qui entrent dans ces dernières expressions varient, tout le long d'une normale à la plaque, proportionnellement à une même fonction positive K de z, de manière qu'on ait

$$(2)\qquad \begin{cases} N_1 = K(\beta\partial_x + \beta'\partial_y + \beta'' g_{xy}), \\ N_2 = K(\beta_1\partial_x + \beta'_1\partial_y + \beta''_1 g_{xy}), \\ T_3 = K(\gamma\partial_x + \gamma'\partial_y + \gamma'' g_{xy}); \end{cases}$$

nous admettrons aussi que les coefficients qui entrent dans les expressions de ∂_z, g_{yz}, g_{zx} en fonction de ∂_x, ∂_y, g_{xy} soient constants le long de la même normale. β, β', β'', $\beta_1, \ldots, \gamma''$ seront donc indépendants de z, mais pourront changer avec x et y; nous supposerons au contraire que la fonction K, variable, même sans continuité, avec z, soit constante ou très-lentement variable avec x et y.

L'expression $N_1\partial_x + N_2\partial_y + T_3 g_{xy}$, si l'on y substitue à N_1, N_2, T_3 les seconds membres de (2), est positive quels que soient ∂_x, ∂_y, g_{xy}. En effet, d'après la formule (12 *bis*) de mon Mémoire précédent (sur les tiges), l'expression plus générale

$$N_1\partial_x + N_2\partial_y + N_3\partial_z + T_1 g_{yz} + T_2 g_{zx} + T_3 g_{xy}$$

est essentiellement positive chez tous les corps de la nature. Or, si l'on y suppose $N_3 = 0$, $T_2 = T_1 = 0$, elle se réduit à $N_1\partial_x + N_2\partial_y + T_3 g_{xy}$, et N_1, N_2, T_3 prennent les valeurs (2). On peut donc poser, quels que soient ∂_x, ∂_y, g_{xy},

$$(2\,bis)\qquad \begin{cases} \quad (\beta\partial_x + \beta'\partial_y + \beta'' g_{xy})\partial_x \\ + (\beta_1\partial_x + \beta'_1\partial_y + \beta''_1 g_{xy})\partial_y \\ + (\gamma\partial_x + \gamma'\partial_y + \gamma'' g_{xy}) g_{xy} > 0. \end{cases}$$

Nous appellerons K_1 la moyenne des valeurs que prend K le long d'une normale 2ε à la plaque, et, assimilant cette normale à une ligne matérielle dont la densité linéaire, c'est-à-dire la masse par unité de longueur, serait K en chaque point, nous admettrons que l'on ait déterminé son centre de gravité et son moment d'inertie par rapport à ce centre. Supposons que la plaque soit plane dans son état naturel, c'est-à-dire que, dans cet état, tous les centres de gravité pareils de ses normales se trouvent sur un même plan que nous appellerons la *couche moyenne* de la plaque. En choisissant la position primitive de cette couche pour plan des xy, et appelant k une certaine quantité indépendante de z, on aura

$$(3)\qquad \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} K\,dz = 2\varepsilon K_1,\quad \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} Kz\,dz = 0,\quad \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} Kz^2\,dz = \frac{2k\varepsilon^3}{3};$$

si la fonction K se réduit à une constante, les quantités ε', ε'' seront égales à ε, et K_1, k ne seront autres que K.

Nous aurons encore à considérer des fonctions $\varphi(z)$, $\varphi_1(z)$ ainsi définies :

$$(4)\qquad \varphi(z) = \int_{-\varepsilon'}^{z} K\,dz,\quad \varphi_1(z) = \int_{-\varepsilon'}^{z} Kz\,dz,$$

dont la première, nulle pour $z = -\varepsilon'$, vaut $2\varepsilon K_1$ pour $z = \varepsilon''$, et dont la seconde s'annule pour $z = -\varepsilon'$ et pour $z = \varepsilon''$. Ces fonctions sont évidemment continues, alors même que K ne le serait pas. Les intégrales $\int\varphi(z)\,dz$, $\int\varphi_1(z)\,dz$, prises entre les limites $-\varepsilon'$ et ε'', peuvent être ramenées aux précédentes : l'intégration par parties donne, en effet, si l'on tient compte de (3) et (4),

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \varphi(z)\,dz = \varepsilon''\varphi(\varepsilon'') - \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} z\varphi'(z)\,dz = 2K_1\varepsilon\varepsilon'',\\ &\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \varphi_1(z)\,dz = [z\varphi_1(z)]_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} - \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} z\varphi_1'(z)\,dz = -\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} Kz^2\,dz = -\frac{2k\varepsilon^3}{3}. \end{aligned}\right.$$

Occupons-nous actuellement des équations d'équilibre de la plaque. Elles se divisent en équations indéfinies, applicables à tous les éléments de volume, et en conditions définies, dont les unes concernent seulement ses deux bases, d'autres les surfaces, parallèles à ces bases, sur lesquelles la constitution de la matière varie brusquement lorsqu'on les traverse, d'autres, enfin, la surface latérale ou le contour de la plaque.

Appelons, au point (x, y, z), ρ la densité, X, Y, Z les composantes suivant les axes de l'action extérieure exercée sur l'unité de masse, et nous aurons les trois équations indéfinies connues

$$(6)\qquad \begin{cases} -\dfrac{dT_2}{dz} = \dfrac{dN_1}{dx} + \dfrac{dT_3}{dy} + \rho X, \\ -\dfrac{dT_1}{dz} = \dfrac{dT_3}{dx} + \dfrac{dN_2}{dy} + \rho Y, \\ -\dfrac{dN_3}{dz} = \dfrac{dT_2}{dx} + \dfrac{dT_1}{dy} + \rho Z. \end{cases}$$

Sur les deux bases de la plaque, l'action extérieure exercée par unité de surface est directement donnée, c'est-à-dire qu'on a

$$(7)\qquad \begin{cases} \text{pour} \quad z = -\varepsilon', \quad T_2 = T_1 = N_3 = 0, \\ \text{pour} \quad z = \varepsilon'', \quad T_2 = P_x, \quad T_1 = P_y, \quad N_3 = P_z. \end{cases}$$

A la surface de séparation de deux couches contiguës de constitution différente, les déplacements u, v, w sont les mêmes de part et d'autre, et les composantes, suivant les axes, de l'action exercée sur les deux faces de chacun de ses éléments plans, sont égales et contraires. Ces deux conditions reviennent à dire que les déplacements u, v, w et les forces élastiques T_2, T_1, N_3 varient avec continuité sur toute la longueur d'une normale quelconque, 2ε, à la plaque.

Il reste à trouver les conditions spéciales au contour. Afin qu'il soit permis de faire abstraction des particularités que peut y présenter la forme ou la constitution de la plaque, ainsi que le mode de distribution des forces qui y sont appliquées, considérons une ligne matérielle $f(x, y) = 0$, située, antérieurement aux déplacements, sur le plan des xy et à une petite distance du contour, et prenons pour surface latérale de la plaque le cylindre décrit le long de cette ligne par une parallèle à l'axe des z. Le contour fictif $f(x, y) = 0$ se composera généralement d'une courbe fermée extérieure, que nous supposerons décrite en tournant dans le sens des x positifs vers les y positifs, et, si la plaque est percée en divers points, de plusieurs courbes fermées intérieures, que nous supposerons décrites en sens inverse. Soient ds un élément de ce contour au point quelconque (x, y), dx et dy ses projections sur les deux axes des x et des y : les cosinus des angles que fait cet élément avec les mêmes axes sont $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, et si l'on appelle α l'angle, variable de zéro à 2π, que fait avec les x positifs la normale menée en (x, y), au cylindre contournant, on aura $\cos\alpha = \pm \frac{dy}{ds}$, $\sin\alpha = \mp \frac{dx}{ds}$. Supposons que la normale soit menée vers le dehors de la plaque : aux points du contour où $dx = 0$ et où $dy = ds$, l'angle α sera nul; il faudra donc adopter les signes supérieurs, et poser

$$(8)\qquad \cos\alpha = \frac{dy}{ds},\quad \sin\alpha = -\frac{dx}{ds},\quad \text{ou}\quad \frac{dx}{ds} = -\sin\alpha,\quad \frac{dy}{ds} = \cos\alpha.$$

Le cylindre contournant pourra être décomposé en bandes rectangulaires de largeur infiniment petite ds et de hauteur 2ε, sur chaque élément $dz\,ds$ desquelles certaines actions extérieures seront exercées. Nous appellerons, par unité de surface, p_x, p_y, p_z les composantes de l'action extérieure exercée sur cet élément, et p_n, p_s les composantes de la même action suivant la normale correspondante et suivant l'élément ds. Des formules connues de la théorie de l'élasticité donnent

$$(9)\qquad \begin{cases} p_x = N_1 \cos\alpha + T_3 \sin\alpha, \\ p_y = T_3 \cos\alpha + N_2 \sin\alpha, \\ p_z = T_2 \cos\alpha + T_1 \sin\alpha, \end{cases}$$

et il est d'ailleurs aisé de voir que

$$p_n = p_x \cos\alpha + p_y \sin\alpha,\quad p_s = -p_x \sin\alpha + p_y \cos\alpha.$$

En substituant dans ces dernières formules les valeurs précédentes de p_x, p_y, il vient

$$(10)\qquad \begin{cases} p_n = N_1 \cos^2\alpha + N_2 \sin^2\alpha + 2T_3 \cos\alpha \sin\alpha, \\ p_s = -(N_1 - N_2) \sin\alpha \cos\alpha + T_3 (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha). \end{cases}$$

Les composantes p_n, p_s, p_z des actions exercées sur l'unité de surface de tous les éléments $dz\,ds$ d'une bande ont, par rapport à trois axes rectangulaires menés, par le point (x, y) d'où part l'élément ds, suivant la normale, suivant l'élément ds et parallèlement à l'axe des z, les trois résultantes

$$ds\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} p_n\,dz,\quad ds\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} p_s\,dz,\quad ds\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} p_z\,dz,$$

et les trois moments respectifs

$$-\,ds\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} z p_s\,dz,\quad ds\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} z p_n\,dz,\quad 0.$$

Appelons $F_n\,ds$, $F_s\,ds$, $F_z\,ds$ les trois composantes totales, $-\,M_n\,ds$, $M_s\,ds$ les deux moments, et nous aurons

$$(11)\qquad F_n = \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} p_n\,dz,\quad F_s = \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} p_s\,dz,$$

$$(12)\qquad F_z = \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} p_z\,dz,\quad M_n = \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} p_s\,z\,dz,\quad M = \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} p_n\,z\,dz.$$

Ainsi les actions extérieures exercées sur une bande $2\varepsilon\,ds$ du cylindre contournant équivalent statiquement à trois composantes appliquées au point (x, y), et à deux couples, dont l'un, de moment $M_s\,ds$, est normal à l'élément ds, et dont l'autre, de moment $-\,M_n\,ds$, est dans le plan de la bande considérée. Ce dernier couple revient lui-même à deux forces parallèles aux z, égales à M_n en valeur absolue, et appliquées, l'une au point (x, y) d'où part l'élément ds, l'autre à la seconde extrémité $(x + dx, y + dy)$ du même élément, c'est-à-dire au point d'où part l'élément suivant du contour : ces deux forces ont pour composantes,, suivant les z positifs, la première M_n et la seconde $-\,M_n$. Les couples parallèles au cylindre contournant peuvent donc être remplacés statiquement par deux forces dirigées suivant les z, appliquées à chaque point tel que $(x + dx, y + dy)$ et ayant respectivement pour valeurs $-\,M_n$, $M_n + \frac{dM_n}{ds}ds$: la résultante de ces deux forces est $\frac{dM_n}{ds}ds$. Si on la joint à $F_z\,ds$, et qu'on appelle $\mathfrak{F}_z\,ds$

la somme obtenue, les deux premières relations (12) seront remplacées par celle-ci

$$(12\ bis) \qquad \mathfrak{F}_z = \mathrm{F}_z + \frac{d\mathrm{M}_n}{ds}.$$

En résumé, l'action totale exercée sur une bande $2\varepsilon\, ds$ du cylindre contournant peut être ramenée, quant à sa résultante et à son moment, à un couple de moment $\mathrm{M}_s\, ds$ normal à l'élément ds du contour, et à une force appliquée au point d'où part cet élément. Les conditions spéciales au contour consisteront en ce que les composantes de cette force, par rapport à trois axes rectangulaires, et la valeur du couple, ou, à leur place, les déplacements suivant les mêmes axes de la couche moyenne de la plaque et l'inclinaison prise sur les z par la normale au cylindre contournant, y seront directement donnés en fonction de x, y [*].

On peut considérer plusieurs plaques qui auraient, dans leur état primitif, leurs couches moyennes sur le même plan des xy, et qui seraient, en certaines parties de leurs contours, appuyées les unes contre les autres ou soudées ensemble. Dans le premier cas, leurs couches moyennes seraient assujetties à recevoir, de part et d'autre de leurs lignes de séparation, les mêmes déplacements u, v, w; mais elles pourraient tourner autour de ces lignes, de manière à avoir des plans tangents différents : dans le second cas, non-seulement les u, v, w, mais encore les directions des plans tangents seraient les mêmes de part et d'autre des lignes de séparation. La résultante des forces $\mathrm{F}_n\, ds$, $\mathrm{F}_s\, ds$, $\mathfrak{F}_z\, ds$ exercées sur deux plaques contiguës, de part et d'autre de chaque bande de largeur ds de leur surface de séparation, serait égale, dans les deux cas, à une action extérieure totale donnée; de plus, dans le cas de plaques simplement appuyées l'une sur l'autre, chacune pourrait subir, sur la même bande de largeur ds, l'action d'un couple quelconque $\mathrm{M}_s\, ds$ également connu, tandis que, dans le cas de plaques soudées et solidaires dans leurs rotations autour de l'élément ds, ces deux moments se composeraient en un dont la valeur serait seule donnée.

---

[*] Et aussi en fonction de t, dans le cas du mouvement.

§ II. — *Équations indéfinies.*

Les équations (6), multipliées respectivement par dz, et intégrées à partir de $z = -\varepsilon'$, en observant que T_2, T_1, N_3 sont nuls à cette limite et continus tout le long d'une normale quelconque 2ε de la plaque, deviennent

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} -T_2 &= \int_{-\varepsilon'}^{z}\left(\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \rho X\right)dz,\\ -T_1 &= \int_{-\varepsilon'}^{z}\left(\frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \rho Y\right)dz,\\ -N_3 &= \int_{-\varepsilon'}^{z}\left(\rho Z + \frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy}\right)dz. \end{aligned}\right.$$

Généralement, les dérivées en x et en y de N_1, N_2, T_3 et les termes ρX, ρY seront comparables à N_1, N_2, T_3; de même les dérivées en x et y de T_2, T_1 et le terme ρZ auront des valeurs du même ordre que T_2, T_1; par suite, à cause de la petitesse de ε' et z, les relations (13) donnent T_2, T_1 très-petits par rapport à N_1, N_2, T_3, et N_3 très-petit lui-même par rapport à T_2, T_1. On peut donc supposer approximativement $T_1 = T_2 = 0$, $N_3 = 0$, obtenir par suite g_{yz}, g_{zx}, ∂_z en fonctions linéaires de ∂_x, ∂_y, g_{xy}, à moins d'erreurs comparables à T_2, T_1, et donner à N_1, N_2, T_3 les formes (2), sauf erreurs de l'ordre de T_2, T_1, ou même seulement de l'ordre de N_3, si le milieu est tel que les formules des N et de T_3 contiennent seulement les ∂ et g_{xy}.

On a d'autre part identiquement, d'après les formules (1), les relations

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\partial_x}{dz} &= -\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{dg_{zx}}{dx},\\ \frac{d\partial_y}{dz} &= -\frac{d^2w}{dy^2} + \frac{dg_{yz}}{dy},\\ \frac{dg_{xy}}{dz} &= -2\frac{d^2w}{dx\,dy} + \frac{dg_{yz}}{dx} + \frac{dg_{zx}}{dy}. \end{aligned}\right.$$

Multiplions celles-ci par dz, et intégrons les résultats à partir de $z = 0$, en observant que ∂_x, ∂_y, g_{xy} sont continus, puisque u, v le sont, le long de toute normale 2ε à la plaque, et que w, et, par suite, ses dérivées secondes en x et y ont sensiblement les mêmes valeurs sur toute cette même normale. Si nous appelons D_x, D_y, G_{xy}, G_{yz}, G_{zx} les valeurs de ∂_x, ∂_y, g_{xy}, g_{yz}, g_{zx} pour $z = 0$, valeurs dont les deux dernières seront supposées, à moins d'erreurs de l'ordre de T_1, T_2, remplacées par leurs expressions linéaires en fonction de D_x, D_y, G_{xy}, et si nous négligeons des termes insensibles par rapport à ceux qui sont conservés, et d'autres comparables à $T_2 z$, $T_1 z$, il viendra

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \partial_x &= D_x - z\left(\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{dG_{zx}}{dx}\right),\\ \partial_y &= D_y - z\left(\frac{d^2w}{dy^2} - \frac{dG_{yz}}{dy}\right),\\ g_{xy} &= G_{xy} - z\left(2\frac{d^2w}{dx\,dy} - \frac{dG_{yz}}{dx} - \frac{dG_{zx}}{dy}\right). \end{aligned}\right.$$

Posons

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{N}_1 &= 2K_1\varepsilon(\beta D_x + \beta' D_y + \beta'' G_{xy}),\\ \mathfrak{N}_2 &= 2K_1\varepsilon(\beta_1 D_x + \beta'_1 D_y + \beta''_1 G_{xy}),\\ \mathfrak{T}_3 &= 2K_1\varepsilon(\gamma D_x + \gamma' D_y + \gamma'' G_{xy}); \end{aligned}\right.$$

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} n_1 &= \beta\left(\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{dG_{zx}}{dx}\right)\\ &\quad + \beta'\left(\frac{d^2w}{dy^2} - \frac{dG_{yz}}{dy}\right) + \beta''\left(2\frac{d^2w}{dx\,dy} - \frac{dG_{yz}}{dx} - \frac{dG_{zx}}{dy}\right),\\ n_2 &= \beta_1\left(\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{dG_{zx}}{dx}\right)\\ &\quad + \beta'_1\left(\frac{d^2w}{dy^2} - \frac{dG_{yz}}{dy}\right) + \beta''_1\left(2\frac{d^2w}{dx\,dy} - \frac{dG_{yz}}{dx} - \frac{dG_{zx}}{dy}\right),\\ t_3 &= \gamma\left(\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{dG_{zx}}{dx}\right)\\ &\quad + \gamma'\left(\frac{d^2w}{dy^2} - \frac{dG_{yz}}{dy}\right) + \gamma''\left(2\frac{d^2w}{dx\,dy} - \frac{dG_{yz}}{dx} - \frac{dG_{zx}}{dy}\right), \end{aligned}\right.$$

et les relations (15) changeront (2) en

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} N_1 &= \frac{K}{2K_1\varepsilon}\mathfrak{N}_1 - Kzn_1,\\ N_2 &= \frac{K}{2K_1\varepsilon}\mathfrak{N}_2 - Kzn_2,\\ T_3 &= \frac{K}{2K_1\varepsilon}\mathfrak{T}_3 - Kzt_3. \end{aligned}\right.$$

Les erreurs ainsi commises sur N_1, N_2, T_3 seront tout au plus de l'ordre de T_2, T_1.

Par suite, d'après les notations (4), et à moins d'erreurs, comparables à $T_2 z$, $T_1 z$, qu'on pourra négliger devant T_2, T_1, on aura

$$(19)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\varepsilon'}^{z} N_1\,dz = \frac{\varphi(z)}{2K_1\varepsilon}\mathfrak{N}_1 - \varphi_1(z)\,n_1, \\ \displaystyle\int_{-\varepsilon'}^{z} N_2\,dz = \frac{\varphi(z)}{2K_1\varepsilon}\mathfrak{N}_2 - \varphi_1(z)\,n_2, \\ \displaystyle\int_{-\varepsilon'}^{z} T_3\,dz = \frac{\varphi(z)}{2K_1\varepsilon}\mathfrak{T}_3 - \varphi_1(z)\,t_3, \end{cases}$$

et les deux premières relations (13) deviendront

$$(20)\quad \begin{cases} \displaystyle -T_2 = \frac{\varphi(z)}{2K_1\varepsilon}\left(\frac{d\mathfrak{N}_1}{dx} + \frac{d\mathfrak{T}_3}{dy}\right) - \varphi_1(z)\left(\frac{dn_1}{dx} + \frac{dt_3}{dy}\right) + \int_{-\varepsilon'}^{z} \rho X\,dz, \\ \displaystyle -T_1 = \frac{\varphi(z)}{2K_1\varepsilon}\left(\frac{d\mathfrak{T}_3}{dx} + \frac{d\mathfrak{N}_2}{dy}\right) - \varphi_1(z)\left(\frac{dt_3}{dx} + \frac{dn_2}{dy}\right) + \int_{-\varepsilon'}^{z} \rho Y\,dz. \end{cases}$$

Si l'on observe que, pour $z = \varepsilon''$, T_2 et T_1 valent respectivement P_x, P_y, et que $\varphi(z) = 2K_1\varepsilon$, $\varphi_1(z) = 0$, ces deux dernières formules donnent les deux premières équations indéfinies cherchées

$$(21)\quad \begin{cases} \displaystyle \frac{d\mathfrak{N}_1}{dx} + \frac{d\mathfrak{T}_3}{dy} + P_x + \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \rho X\,dz = 0, \\ \displaystyle \frac{d\mathfrak{T}_3}{dx} + \frac{d\mathfrak{N}_2}{dy} + P_y + \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \rho Y\,dz = 0, \end{cases}$$

et les deux formules (20) sont elles-mêmes changées par ces dernières en celles-ci

$$(22)\quad \begin{cases} \displaystyle T_2 = \varphi_1(z)\left(\frac{dn_1}{dx} + \frac{dt_3}{dy}\right) + \frac{\varphi(z)}{2K_1\varepsilon}\left(P_x + \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \rho X\,dz\right) - \int_{-\varepsilon'}^{z} \rho X\,dz, \\ \displaystyle T_1 = \varphi_1(z)\left(\frac{dt_3}{dx} + \frac{dn_2}{dy}\right) + \frac{\varphi(z)}{2K_1\varepsilon}\left(P_y + \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \rho Y\,dz\right) - \int_{-\varepsilon'}^{z} \rho Y\,dz. \end{cases}$$

Substituons actuellement ces valeurs de T_2, T_1 dans la dernière (13), et nous obtiendrons une expression de $-\mathrm{N}_3$, qui, pour $z=\varepsilon''$, devra se réduire à P_z. En tenant compte de (5), on aura ainsi la troisième équation indéfinie

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}&\mathrm{P}_z+\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''}\rho\mathrm{Z}\,dz-\frac{2k\varepsilon^3}{3}\left(\frac{d^2n_1}{dx^2}+2\frac{d^2t_3}{dx\,dy}+\frac{d^2n_2}{dy^2}\right)\\&\quad+\frac{d\varepsilon''\mathrm{P}_x}{dx}+\frac{d\varepsilon''\mathrm{P}_y}{dy}+\frac{d}{dx}\left(\varepsilon''\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''}\rho\mathrm{X}\,dz-\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''}dz\int_{-\varepsilon'}^{z}\rho\mathrm{X}\,dz\right)\\&\qquad\qquad+\frac{d}{dy}\left(\varepsilon''\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''}\rho\mathrm{Y}\,dz-\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''}dz\int_{-\varepsilon'}^{z}\rho\mathrm{Y}\,dz\right)=0.\end{aligned}\right.$$

On peut négliger les quatre derniers termes du premier membre de cette équation. Considérons, par exemple, le dernier, et observons qu'on trouve, en intégrant par parties,

$$\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''}z\rho\mathrm{Y}\,dz=\varepsilon''\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''}\rho\mathrm{Y}\,dz-\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''}dz\int_{-\varepsilon'}^{z}\rho\mathrm{Y}\,dz.$$

Le dernier terme considéré équivaut donc à $\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''}\frac{d\rho\mathrm{Y}}{dy}z\,dz$, intégrale dont les éléments, à cause du facteur z, seront les uns négatifs et les autres positifs, de manière à se neutraliser très-souvent; d'ailleurs, même en supposant tous ses éléments de même signe, cette intégrale n'est que de l'ordre de grandeur de $\frac{d\rho\mathrm{Y}}{dy}\varepsilon^2$, tandis que le second terme de l'équation (23) est de l'ordre de $2\varepsilon\rho\mathrm{Z}$, et beaucoup plus grand toutes les fois que Y est seulement comparable à Z. De même, les dérivées en x et y de $\varepsilon''\mathrm{P}_x$, $\varepsilon''\mathrm{P}_y$ sont généralement négligeables en comparaison de P_z, et la troisième équation indéfinie peut être écrite simplement

$$(23\ bis)\qquad \mathrm{P}_z+\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''}\rho\mathrm{Z}\,dz=\frac{2k\varepsilon^3}{3}\left(\frac{d^2n_1}{dx^2}+2\frac{d^2t_3}{dx\,dy}+\frac{d^2n_2}{dy^2}\right).$$

Dans les trois équations indéfinies (21) et (23 *bis*), il faudra substituer à $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{T}_3$, n_1, n_2, t_3 leurs expressions (16) et (17) en fonction linéaire de D_x, D_y, G_{xy}, w, puis, aux déformations D_x, D_y, G_{xy} de la couche centrale, leurs valeurs $\frac{du_0}{dx}$, $\frac{dv_0}{dy}$, $\frac{du_0}{dy}+\frac{dv_0}{dy}$, où u_0, v_0 sont les deux premiers déplacements des points de cette couche. Alors ces trois équations ne contiendront plus que les trois fonctions inconnues de x et y appelées u_0, v_0, w, qu'elles serviront à déterminer conjointement avec les conditions spéciales dont nous parlerons au paragraphe suivant. Lorsque u_0, v_0, w seront connus, les formules (15) et (2) donneront en tous les points de la plaque les déformations ∂_x, ∂_y, g_{xy} et les forces N_1, N_2, T_3; puis les formules (22) feront connaître T_2, T_1; enfin la troisième (13) donnera les très-petites valeurs que prend N_3, de telle sorte que toutes les forces élastiques, et, par suite, les déformations ∂, g seront déterminées avec une approximation d'autant plus grande que l'épaisseur 2ε sera plus petite.

Examinons le cas particulier où le milieu est isotrope autour de l'axe des z et a ses coefficients d'élasticité indépendants de x, y. Les expressions des forces élastiques sont alors, d'après les formules (10) de mon Mémoire précédent (sur les tiges), en appelant λ, λ', μ, μ', μ'', ν six coefficients d'élasticité et θ la dilatation $\partial_x+\partial_y+\partial_z$,

$$(24)\quad \begin{cases} N_1=\lambda\theta+\nu\partial_z+2\mu\partial_x, & N_2=\lambda\theta+\nu\partial_z+2\mu\partial_y, \quad N_3=\lambda'\theta+2\mu'\partial_z, \\ T_1=\mu'' g_{yz}, & T_2=\mu'' g_{zx}, \quad T_3=\mu g_{xy}. \end{cases}$$

Si l'on fait $T_2=T_1=N_3=0$, il vient

$$(24\ bis)\qquad \partial_z=-\frac{\lambda'}{\lambda'+2\mu'}(\partial_x+\partial_y),\quad g_{yz}=g_{zx}=0,$$

et les expressions de N_1, N_2, T_3 prennent la forme (2), avec

$$(24\ ter)\qquad \begin{cases} K\beta=K\beta'_1=\dfrac{(\lambda+2\mu)(\lambda'+2\mu')-\lambda'(\lambda+\nu)}{\lambda'+2\mu'}, \\ K\beta'=K\beta_1=\dfrac{\lambda(\lambda'+2\mu')-\lambda'(\lambda+\nu)}{\lambda'+2\mu'}, \\ K\gamma''=\mu,\quad \beta''=\beta''_1=\gamma=\gamma'=0. \end{cases}$$

Ces relations donnent $\beta=\beta'_1=\beta'+2\gamma''=\beta_1+2\gamma''$, et les trois équations (21), (23 *bis*), en y substituant les valeurs (16), (17), de $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$,

$\mathfrak{T}_3$, n_1, n_2, t_3, deviennent

$$
(25)\quad\left\{
\begin{aligned}
&2\mathrm{K}_1\varepsilon\left[(\beta_1+\gamma'')\frac{d\left(\dfrac{du_0}{dx}+\dfrac{dv_0}{dy}\right)}{dx}+\gamma''\left(\frac{d^2u_0}{dx^2}+\frac{d^2u_0}{dy^2}\right)\right]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+\mathrm{P}_x+\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''}\rho\mathrm{X}\,dz=0,\\
&2\mathrm{K}_1\varepsilon\left[(\beta_1+\gamma'')\frac{d\left(\dfrac{du_0}{dx}+\dfrac{dv_0}{dy}\right)}{dy}+\gamma''\left(\frac{d^2v_0}{dx^2}+\frac{d^2v_0}{dy^2}\right)\right]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+\mathrm{P}_y+\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''}\rho\mathrm{Y}\,dz=0,\\
&\mathrm{P}_z+\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''}\rho\mathrm{Z}\,dz=\frac{2k\varepsilon^3}{3}\beta\left(\frac{d^4w}{dx^4}+2\frac{d^4w}{dx^2dy^2}+\frac{d^4w}{dy^4}\right).
\end{aligned}\right.
$$

Supposons le milieu homogène et complétement isotrope, c'est-à-dire tel que $\lambda'=\lambda$, $\nu=0$, $\mu''=\mu'=\mu$, $\mathrm{K}=\mathrm{K}_1=k=1$, et que, par suite,

$$
(26)\qquad \beta=\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu},\quad \beta_1=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu},\quad \gamma''=\mu;
$$

les formules (25) seront alors identiques aux équations connues de l'équilibre des plaques.

§ III. — *Conditions spéciales aux contours des plaques.*

Les formules (11), (12), (10) et (9) permettent d'exprimer les actions F_n, F_s, F_z, M_n, M_s exercées sur l'unité de longueur du contour. Si l'on y substitue à N_1, N_2, T_3, T_2, T_1 leurs valeurs (18) et (22), et que l'on néglige, dans l'expression de F_z, les mêmes termes très-petits que dans (23), et, dans celles de M_n, M_s, des termes de l'ordre de $\mathrm{T}_2\varepsilon^2$, $\mathrm{T}_1\varepsilon^2$, c'est-à-dire de l'ordre de $\varphi_1(z)\varepsilon^2$ ou de ε^4, il vient

$$
(27)\quad\left\{
\begin{aligned}
\mathrm{F}_n&=\mathfrak{N}_1\cos^2\alpha+\mathfrak{N}_2\sin^2\alpha+2\mathfrak{T}_3\cos\alpha\sin\alpha,\\
\mathrm{F}_s&=-(\mathfrak{N}_1-\mathfrak{N}_2)\sin\alpha\cos\alpha+\mathfrak{T}_3(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha);
\end{aligned}\right.
$$

$$(28)\quad \begin{cases} F_z = -\frac{2k\varepsilon^3}{3}\left[\left(\frac{dn_1}{dx}+\frac{dt_3}{dy}\right)\cos\alpha + \left(\frac{dt_3}{dx}+\frac{dn_2}{dy}\right)\sin\alpha\right], \\ M_n = -\frac{2k\varepsilon^3}{3}[-(n_1-n_2)\sin\alpha\cos\alpha + t_3(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)], \\ M_s = -\frac{2k\varepsilon^3}{3}[n_1\cos^2\alpha + n_2\sin^2\alpha + 2t_3\cos\alpha\sin\alpha]. \end{cases}$$

Mais nous avons vu (formule 12 *bis*) que les deux actions F_z et M_n se réduisent à une seule action totale, parallèle à l'axe des z, et égale à $F_z + \frac{dM_n}{ds}$.

Les conditions relatives au contour consisteront, soit à supposer connues directement, dans les formules (27) et (28), les quatre actions F_n, F_s, $F_z + \frac{dM_n}{ds}$, M_s, c'est-à-dire les composantes, suivant trois directions rectangulaires, de la force qui agit sur l'unité de longueur du contour, et le moment du couple, normal à ce contour, qui tend à fléchir la plaque, soit à se donner, au lieu de l'une ou de plusieurs de ces trois composantes, les déplacements du bord considéré de la plaque suivant les directions correspondantes, déplacements qui sont $u_0\cos\alpha + v_0\sin\alpha$ dans le sens de la normale au cylindre contournant, $-u_0\sin\alpha + v_0\cos\alpha$ dans celui de l'élément ds et w dans le sens des z, ou à se donner enfin, au lieu du moment M_s, l'inclinaison par rapport aux z de la normale au cylindre contournant, c'est-à-dire la dérivée $\frac{dw}{dx}\cos\alpha + \frac{dw}{dy}\sin\alpha$ de w le long de la droite matérielle, normale au contour et tangente à la couche moyenne, que le couple M_s tend à faire tourner autour du contour : nous représenterons cette dérivée par $\frac{dw}{dN}$.

Si plusieurs plaques situées sur un même plan sont appuyées les unes contre les autres ou soudées, les conditions spéciales à leurs contours de séparation seront celles que j'ai indiquées à la fin du § I.

§ IV. — *Unité de la solution du problème de l'équilibre.*

Les équations indéfinies (21), (23 *bis*), et les conditions indiquées au paragraphe précédent, déterminent les déplacements d'équilibre u_0,

v_0, w, à cela près de termes correspondants à un petit mouvement d'ensemble de la plaque et dont on peut faire abstraction. Pour le démontrer, il suffit de faire voir que, si l'on y substitue $u_0 + u'_0$, $v_0 + v'_0$, $w + w'$ à u_0, v_0, w, et si l'on suppose que u_0, v_0, w vérifient toutes ces relations, les nouveaux déplacements u'_0, v'_0, w' ne pourront que correspondre à un petit déplacement d'ensemble de la plaque. Afin d'abréger, représentons par D'_x, D'_y, G'_{xy} les expressions $\frac{du'_0}{dx}$, $\frac{dv'_0}{dy}$, $\frac{du'_0}{dy} + \frac{dv'_0}{dx}$, par G'_{yz}, G'_{zx} les fonctions linéaires obtenues en accentuant D_x, D_y, G_{xy} dans les expressions de G_{yz}, G_{zx}, et appelons $\mathfrak{N}'_1$, $\mathfrak{N}'_2$, $\mathfrak{T}'_3$, n'_1, n'_2, t'_3 les seconds membres de (16) et (17) avec D_x, D_y, G_{xy}, G_{yz}, G_{zx}, w accentués, et de même F'_n, F'_s, F'_z, M'_n, M'_s les seconds membres de (27) et (28) avec $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{T}_3$, n_1, n_2, t_3 accentués. Les trois équations indéfinies (21) et (23 *bis*) deviendront

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\mathfrak{N}'_1}{dx} + \frac{d\mathfrak{T}'_3}{dy} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{T}'_3}{dx} + \frac{d\mathfrak{N}'_2}{dy} = 0,\\ &0 = \frac{d}{dx}\left[\frac{2k\varepsilon^3}{3}\left(\frac{dn'_1}{dx} + \frac{dt'_3}{dy}\right)\right] + \frac{d}{dy}\left[\frac{2k\varepsilon^3}{3}\left(\frac{dt'_3}{dx} + \frac{dn'_2}{dy}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

Les conditions spéciales au contour seront devenues :

1° Aux bords où une plaque n'est pas touchée par une autre,

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &F'_n = 0 \quad \text{ou} \quad u'_0 \cos\alpha + v'_0 \sin\alpha = 0,\\ &F'_s = 0 \quad \text{ou} \quad -u'_0 \sin\alpha + v'_0 \cos\alpha = 0,\\ &F'_z + \frac{dM'_n}{ds} = 0 \quad \text{ou} \quad w' = 0,\\ &M'_s = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dw'}{dN} = 0; \end{aligned}\right.$$

2° Aux bords où deux plaques se touchent,

(31) u'_0, v'_0, w', F'_n, F'_s sont égaux de part et d'autre du contour de séparation, tandis que l'expression $F'_z + \frac{dM'_n}{ds}$ y est égale et contraire, et, de plus, le moment M'_s est nul de part et d'autre si les deux plaques sont seulement appuyées, tandis que ce moment y est égal de part et d'autre, et $\frac{dw}{dN}$ égal et contraire, si elles sont soudées.

Multiplions les équations (29) respectivement par u'_0, v'_0, w', puis par $dx\,dy$, et intégrons les résultats sur toute l'étendue de la couche moyenne de la plaque, en employant l'intégration par parties, d'après le procédé bien connu qui m'a permis d'obtenir la formule (15) du Mémoire précédent (sur les tiges). Si l'on désigne par $\int_s$ une intégrale prise sur toute la longueur du contour de chaque plaque, et par $\int_\sigma$ une intégrale prise sur toute la surface σ de sa couche moyenne, surface dont un élément $d\sigma = dx\,dy$, les deux premières équations (29) donneront, en ajoutant les résultats,

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_s [u'_0(\mathfrak{N}'_1 \cos\alpha + \mathfrak{T}'_3 \sin\alpha) + v'_0(\mathfrak{N}'_2 \sin\alpha + \mathfrak{T}'_3 \cos\alpha)]ds \\ &\qquad\qquad - \int_\sigma (\mathfrak{N}'_1 D'_x + \mathfrak{N}'_2 D'_y + \mathfrak{T}'_3 G'_{xy})\,d\sigma = 0. \end{aligned}\right.$$

La troisième (29) donnera de même

$$\begin{aligned} &\int_s w' \frac{2k\varepsilon^3}{3}\left[\left(\frac{dn'_1}{dx} + \frac{dt'_3}{dy}\right)\cos\alpha + \left(\frac{dt'_3}{dx} + \frac{dn'_2}{dy}\right)\sin\alpha\right]ds \\ &\qquad - \int_\sigma \frac{2k\varepsilon^3}{3}\left[\frac{dw'}{dx}\left(\frac{dn'_1}{dx} + \frac{dt'_3}{dy}\right) + \frac{dw'}{dy}\left(\frac{dt'_3}{dx} + \frac{dn'_2}{dy}\right)\right]d\sigma = 0, \end{aligned}$$

résultat dont la première intégrale n'est autre que $-\int_s w' F'_z ds$. En décomposant la seconde en quatre autres, supposant le facteur $\frac{2k\varepsilon^3}{3}$, qui varie très-peu avec x et y, placé à côté de n'_1, n'_2, t'_3 sous les signes $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, et appliquant encore une fois la même méthode d'intégration par parties, il vient

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &-\int_s w' F'_z ds \\ &-\int_s \frac{2k\varepsilon^3}{3}\left[\frac{dw'}{dx}(n'_1\cos\alpha + t'_3 \sin\alpha) + \frac{dw'}{dy}(t'_3\cos\alpha + n'_2\sin\alpha)\right]ds \\ &\qquad + \int_\sigma \frac{2k\varepsilon^3}{3}\left(n'_1\frac{d^2w'}{dx^2} + 2t'_3\frac{d^2w'}{dx\,dy} + n'_2\frac{d^2w'}{dy^2}\right)d\sigma = 0. \end{aligned}\right.$$

Observons que les formules (27) et les deux dernières (28) donnent identiquement

$$(34)\quad \begin{cases} F_n \cos\alpha - F_s \sin\alpha = \mathfrak{N}_1 \cos\alpha + \mathfrak{T}_3 \sin\alpha, \\ F_n \sin\alpha + F_s \cos\alpha = \mathfrak{N}_2 \sin\alpha + \mathfrak{T}_3 \cos\alpha, \\ M_s \cos\alpha - M_n \sin\alpha = -\dfrac{2k\varepsilon^3}{3}(n_1 \cos\alpha + t_3 \sin\alpha), \\ M_s \sin\alpha + M_n \cos\alpha = -\dfrac{2k\varepsilon^3}{3}(n_2 \sin\alpha + t_3 \cos\alpha). \end{cases}$$

Remplaçons les seconds membres de ces relations, supposées accentuées, par les premiers dans les formules (32) et (33), et celles-ci deviendront

$$(32\,bis)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_s [F'_n(u'_0 \cos\alpha + v'_0 \sin\alpha) + F'_s(-u'_0 \sin\alpha + v'_0 \cos\alpha)]\,ds \\ \qquad\qquad \displaystyle -\int_\sigma (\mathfrak{N}'_1 D'_x + \mathfrak{N}'_2 D'_y + \mathfrak{T}'_3 G'_{xy})\,d\sigma = 0, \end{cases}$$

$$(33\,bis)\quad \begin{cases} \displaystyle -\int_s w' F'_z\,ds + \int_s M'_n\left(-\frac{dw'}{dx}\sin\alpha + \frac{dw'}{dy}\cos\alpha\right)ds \\ \displaystyle \quad + \int_s M'_s\left(\frac{dw'}{dx}\cos\alpha + \frac{dw'}{dy}\sin\alpha\right)ds \\ \displaystyle \quad + \int_\sigma \frac{2k\varepsilon^3}{3}\left(n'_1 \frac{d^2w'}{dx^2} + 2t'_3 \frac{d^2w'}{dx\,dy} + n'_2 \frac{d^2w'}{dy^2}\right)d\sigma = 0. \end{cases}$$

Dans ces relations, la partie des intégrales $\int_s$ qui concerne les contours où une plaque n'en touche aucune autre est identiquement nulle. Cela est évident pour (32 *bis*), d'après les deux premières conditions (30). Quant à (33 *bis*), on peut observer que l'expression $-\frac{dw'}{dx}\sin\alpha + \frac{dw'}{dy}\cos\alpha$ y est égale à la dérivée de w' le long de l'élément ds; d'où il suit que la seconde intégrale de (33 *bis*), $\int_s M'_n \frac{dw'}{ds}\,ds$, intégrée par parties sur toute la longueur de chaque courbe fermée du contour s, devient $-\int_s w' \frac{dM'_n}{ds}\,ds$. En remarquant, en outre, que

$\frac{dw'}{dx}\cos\alpha + \frac{dw'}{dy}\sin\alpha = \frac{dw'}{dN}$, les intégrales en s de (33 *bis*) auront pour somme

$$(35) \qquad -\int_s \left[w'\left(F'_z + \frac{dM'_n}{ds}\right) - M'_s \frac{dw'}{dN}\right] ds,$$

et la partie de cette somme qui est relative aux contours non communs à deux plaques sera bien nulle, d'après les deux dernières conditions (30). D'ailleurs, s'il y a plusieurs plaques appuyées les unes contre les autres ou soudées ensemble, on pourra ajouter membre à membre les relations (32 *bis*) relatives à toutes ces plaques, et aussi les relations (33 *bis*), dans lesquelles on aura remplacé les premières parties par leurs valeurs (35); dans les deux sommes, les intégrales en s concernant les contours de séparation disparaîtront comme ayant leurs éléments des deux côtés d'un même contour égaux et contraires, ou nuls, d'après les conditions (31).

Désignons par $\sum$ des sommes s'étendant à tous les éléments $d\sigma$ de la couche moyenne des plaques considérées, et les deux résultats totaux obtenus seront

$$(36) \qquad \begin{cases} \sum (\mathfrak{N}'_1 D'_x + \mathfrak{N}'_2 D'_y + \mathfrak{T}'_3 G'_{xy})\, d\sigma = 0, \\ \sum \frac{2k\varepsilon^3}{3}\left(n'_1 \frac{d^2w'}{dx^2} + 2t'_3 \frac{d^2w'}{dx\,dy} + n'_2 \frac{d^2w'}{dy^2}\right) d\sigma = 0. \end{cases}$$

Or, en substituant dans la première (36), à $\mathfrak{N}'_1$, $\mathfrak{N}'_2$, $\mathfrak{T}'_3$, leurs valeurs, qui sont les seconds membres de (16) avec D_x, D_y, G_{xy} accentués, et en se rappelant l'inégalité (2 *bis*), on trouve que la parenthèse et, par suite, le premier membre de cette relation sont essentiellement positifs, et ne peuvent être nuls que si l'on a $D'_x = D'_y = G'_{xy} = 0$, et, par suite, $G'_{yz} = G'_{zx} = 0$. Mais alors, en substituant à n'_1, n'_2, t'_3 leurs valeurs (17) avec w' au lieu de w, la seconde (36) donne également $\frac{d^2w'}{dx^2} = \frac{d^2w'}{dy^2} = \frac{d^2w'}{dx\,dy} = 0$. Donc, les déplacements u'_0, v'_0 sont tels, que les déformations D'_x, D'_y, G'_{xy} soient nulles, et ils correspondent à un simple déplacement d'ensemble de la couche moyenne dans son plan; le déplacement transversal w' a ses dérivées secondes nulles, et il est par suite linéaire en x et y, c'est-à-dire qu'il correspond à un mouvement d'ensemble de la couche moyenne hors de son plan. Si l'on fait abstraction de ces mouvements d'ensemble, le problème de l'équilibre des plaques est bien déterminé.

§ V. — *Équations générales des petits mouvements.*

Ces équations se déduisent de celles de l'équilibre en joignant dans celles-ci, aux actions extérieures, des forces fictives, dites d'*inertie*, dont les composantes suivant les axes, rapportées à l'unité de masse, sont $-\frac{d^2u}{dt^2}$, $-\frac{d^2v}{dt^2}$, $-\frac{d^2w}{dt^2}$. A cause de la forme linéaire des équations, on peut déterminer à part les déplacements pour lesquels les plaques, soumises aux actions extérieures données qui ne varient pas pendant le mouvement, se trouveraient en équilibre, et appeler u, v, w l'excès sur ces déplacements d'équilibre des déplacements réels des molécules à l'époque quelconque t, par rapport à leurs positions primitives. Alors les relations propres à représenter le mouvement ne contiendront pas d'autres actions extérieures que les forces même d'inertie.

Nous supposerons que la plaque vibre dans un milieu assez peu résistant pour qu'on puisse faire pendant le mouvement, sur la base $z = \varepsilon''$, $P_x = P_y = P_z = 0$. Si, observant que les déplacements u, v, w sont, à fort peu près, les mêmes sur toute la longueur de chaque normale 2ε à la plaque, on efface de u_0, v_0 l'indice zéro, et qu'on appelle ρ_1 la densité moyenne sur chaque normale en posant

$$(37) \qquad \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \rho \, dz = 2\varepsilon\rho_1,$$

les trois équations indéfinies (21) et (23 *bis*) deviendront

$$(38) \qquad 2\rho_1\varepsilon\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{N}_1}{dx} + \frac{d\mathfrak{T}_3}{dy}, \quad 2\rho_1\varepsilon\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{T}_3}{dx} + \frac{d\mathfrak{N}_2}{dy},$$

$$(39) \qquad 2\rho_1\varepsilon\frac{d^2w}{dt^2} = -\frac{2k\varepsilon^3}{3}\left(\frac{d^2n_1}{dx^2} + 2\frac{d^2t_3}{dx\,dy} + \frac{d^2n_2}{dy^2}\right),$$

relations dans lesquelles, pour qu'elles contiennent seulement les inconnues u, v, w, il faudra substituer à $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{T}_3$, n_1, n_2, t_3 leurs expressions (16) et (17), et puis à D_x, D_y, G_{xy} leurs valeurs $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}$.

Occupons-nous actuellement des conditions spéciales aux contours. Nous supposerons que les plaques y supportent en général des masses étrangères solides, assujetties à les suivre dans leurs déplacements u, v, w et comparables à une infinité de points voisins placés sur le plan des xy; si certaines lignes composées de points pareils ne se trouvaient pas sur les bords des plaques, mais à l'intérieur de leur surface, on les assimilerait aux lignes de séparation de deux plaques soudées ensemble. Les actions extérieures exercées sur un élément ds des contours et dépendant du mouvement équivaudront à une force unique ayant pour composantes totales suivant les axes, si l'on appelle $\rho' ds$ la masse étrangère entraînée par cet élément, les composantes pareilles de son inertie, c'est-à-dire $-\rho'\frac{d^2u}{dt^2}ds$, $-\rho'\frac{d^2v}{dt^2}ds$, $-\rho'\frac{d^2w}{dt^2}ds$. La même action, rapportée à l'unité de longueur du contour, et projetée successivement sur la normale au cylindre contournant, sur l'élément ds et sur l'axe des z, donnera, pour ses composantes suivant ces directions respectives,

$$(40)\quad -\rho'\frac{d^2}{dt^2}(u\cos\alpha+v\sin\alpha),\quad -\rho'\frac{d^2}{dt^2}(-u\sin\alpha+v\cos\alpha),\quad -\rho'\frac{d^2w}{dt^2}.$$

Si le contour considéré n'est pas commun à deux plaques, ces expressions devront être égalées respectivement aux expressions, données par (27) et (28), de F_n, F_s, $F_z+\frac{dM_n}{ds}$; de plus, on aura, dans (28), $M_s=0$, à moins que la dérivée $\frac{dw}{dN}$ ne soit directement donnée, auquel cas l'agent qui lui donnerait à chaque instant cette valeur équivaudrait à un couple M_s ayant l'expression (28).

Si le contour considéré est commun à deux plaques contiguës, les u, v, w y sont égaux de part et d'autre, et de plus les trois expressions (40) sont les résultantes respectives des actions F_n, F_s, $F_z+\frac{dM_n}{ds}$, exercées sur les deux plaques. Quant aux moments M_s, ils sont nuls de chaque côté de la ligne de séparation, lorsque les plaques sont seulement appuyées l'une contre l'autre, à moins que les dériveés $\frac{dw}{d\text{N}}$ n'y soient directement données, et ils sont égaux de part et d'autre lorsque les plaques sont soudées; de plus, dans ce cas, les deux dérivées $\frac{dw}{d\text{N}}$ y sont égales et contraires.

Si l'on joint à toutes ces conditions celles-ci que les déplacements u, v, w et les vitesses $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ doivent être supposés donnés pour $t = 0$, les valeurs de u, v, w à toute époque seront complétement déterminées. En effet, remplaçons dans ces équations, comme au paragraphe précédent, u, v, w par $u + u'$, $v + v'$, $w + w'$, et elles deviendront :

1° Les équations indéfinies

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} &2\rho_1\varepsilon\frac{d^2u'}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{N}'_1}{dx} + \frac{d\mathfrak{T}'_3}{dy},\quad 2\rho_1\varepsilon\frac{d^2v'}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{T}'_3}{dx} + \frac{d\mathfrak{N}'_2}{dy},\\ &2\rho_1\varepsilon\frac{d^2w'}{dt^2} = -\frac{2k\varepsilon^3}{3}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dn'_1}{dx} + \frac{dt'_3}{dy}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{dt'_3}{dx} + \frac{dn'_2}{dy}\right)\right]; \end{aligned}\right.$$

2° Les conditions relatives au contour où une plaque n'est touchée par aucune autre :

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} &-\rho'\frac{d^2}{dt^2}(u'\cos\alpha + v'\sin\alpha) = \text{F}'_n, &&\text{ou}\quad u'\cos\alpha + v'\sin\alpha = 0,\\ &-\rho'\frac{d^2}{dt^2}(-u'\sin\alpha + v'\cos\alpha) = \text{F}'_s, &&\text{ou}\quad -u'\sin\alpha + v'\cos\alpha = 0,\\ &-\rho'\frac{d^2w'}{dt^2} = \text{F}'_z + \frac{d\text{M}'_n}{ds}, &&\text{ou}\quad w' = 0,\\ &\qquad 0 = \text{M}'_s, &&\text{ou}\quad \frac{dw'}{d\text{N}} = 0; \end{aligned}\right.$$

3° Les conditions spéciales aux contours le long desquels deux plaques se touchent :

$$(43)\left\{\begin{array}{l} u',\ v',\ w',\ \text{égaux de part et d'autre du contour considéré,} \\ -\rho'\dfrac{d^2}{dt^2}(u'\cos\alpha + v'\sin\alpha) = \text{la différence des deux valeurs de } F'_n \text{ des} \\ \qquad\qquad \text{deux côtés de ce contour,} \\ -\rho'\dfrac{d^2}{dt^2}(-u'\sin\alpha + v'\cos\alpha) = \text{la différence des deux valeurs pa-} \\ \qquad\qquad \text{reilles de } F'_s, \\ -\rho'\dfrac{d^2w'}{dt^2} = \text{la somme des deux valeurs pareilles de } F'_z + \dfrac{dM'_n}{ds}, \\ \text{et, de plus,} \\ M'_s = 0 \text{ des deux côtés si les deux plaques sont seulement appuyées,} \\ M'_s \text{ égaux de part et d'autre et } \dfrac{dw'}{dN} \text{ égaux et de signe contraire de part et} \\ \quad \text{d'autre si elles sont soudées;} \end{array}\right.$$

4° Les conditions concernant l'état initial :

$$(44)\qquad u' = v' = w' = 0, \quad \frac{du'}{dt} = \frac{dv'}{dt} = \frac{dw'}{dt} = 0 \text{ pour } t = 0.$$

Pour démontrer que u', v', w' seront forcément nuls pour $t \gtrless 0$, multiplions les trois équations (41) par $u'\,dx\,dy$, $v'\,dx\,dy$, $w'\,dx\,dy$, et intégrons les résultats après avoir ajouté les deux premiers sur toute la surface d'une plaque, en opérant exactement comme au paragraphe précédent. Il viendra

$$\begin{aligned} &\int_\sigma 2\rho_1\varepsilon\left(u'\frac{d^2u'}{dt^2} + v'\frac{d^2v'}{dt^2}\right)d\sigma, \\ &\quad = \int_s [F'_n(u'\cos\alpha + v'\sin\alpha) + F'_s(-u'\sin\alpha + v'\cos\alpha)]\,ds \\ &\qquad - \int_\sigma (\mathfrak{N}'_1 D'_x + \mathfrak{N}'_2 D'_y + \mathfrak{G}'_3 G'_{xy})\,d\sigma, \\ &\int_\sigma 2\rho_1\varepsilon w'\frac{d^2w'}{dt^2}\,d\sigma \\ &\quad = \int_s \left[w'\left(F'_z + \frac{dM'_n}{ds}\right) - \frac{dw'}{dN}M'_s\right]ds \\ &\qquad - \int_\sigma \frac{2k\varepsilon^3}{3}\left(n'_1\frac{d^2w'}{dx^2} + 2t'_3\frac{d^2w'}{dx\,dy} + n'_2\frac{d^2w'}{dy^2}\right)d\sigma. \end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre les résultats pareils relatifs aux diverses plaques qui se touchent, et observons que les intégrales en s seront nulles d'après les conditions (42), (43), aux contours où il n'y a pas de masses étrangères ρ', et vaudront respectivement, pour les deux équations, aux contours où se trouvent ces masses,

$$\begin{aligned} &-\Sigma\rho'\Big[(u'\cos\alpha+v'\sin\alpha)\frac{d^2}{dt^2}(u'\cos\alpha+v'\sin\alpha)\\ &\qquad +(-u'\sin\alpha+v'\cos\alpha)\frac{d^2}{dt^2}(-u'\sin\alpha+v'\cos\alpha)\Big]ds,\\ &-\Sigma\rho' w'\frac{d^2 w'}{dt^2}ds, \end{aligned}$$

les signes Σ s'étendant à tous les éléments de ces contours. Faisons passer ces termes dans les premiers membres, et nous aurons

$$(44\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma 2\rho_1\varepsilon\left(u'\frac{d^2u'}{dt^2}+v'\frac{d^2v'}{dt^2}\right)d\sigma\\ &\quad+\Sigma\rho'\Big[(u'\cos\alpha+v'\sin\alpha)\frac{d^2}{dt^2}(u'\cos\alpha+v'\sin\alpha)\\ &\qquad\quad+(-u'\sin\alpha+v'\cos\alpha)\frac{d^2}{dt^2}(-u'\sin\alpha+v'\cos\alpha)\Big]ds\\ &\quad=-\Sigma(\mathfrak{N}'_1 D'_x+\mathfrak{N}'_2 D'_y+\mathfrak{G}'_3 G'_{xy})d\sigma,\\ &\Sigma 2\rho_1\varepsilon w'\frac{d^2w'}{dt^2}d\sigma+\Sigma\rho' w'\frac{d^2w'}{dt^2}ds\\ &\quad=-\sum\frac{2k\varepsilon^3}{3}\left(n'_1\frac{d^2w'}{dx^2}+2t'_3\frac{d^2w'}{dx\,dy}+n'_2\frac{d^2w'}{dy^2}\right)d\sigma. \end{aligned}\right.$$

Or, observons que la fonction u', par exemple, et sa dérivée $\frac{du'}{dt}$, étant nulles pour $t=0$, ne peuvent cesser de l'être l'une sans l'autre pour $t \gtrless 0$, et, qu'à l'instant où elles cesseraient d'être nulles, la dérivée seconde $\frac{d^2u'}{dt^2}$ aurait ou prendrait le signe de $\frac{du'}{dt}$, tandis qu'elle aurait le signe contraire de celui de $\frac{du'}{dt}$ avant le moment de l'annulation de $\frac{du'}{dt}$; pour la même raison, u' et $\frac{du'}{dt}$ auraient même signe après s'être annulées et signe contraire avant. Donc, pour $t \gtrless 0$, u' et $\frac{d^2u'}{dt^2}$ auraient même signe et donneraient un produit positif. Il en est de même des

34..

autres produits fonctions de t qui entrent dans les premiers membres de (44 *bis*), de telle sorte que ces premiers membres sont essentiellement positifs. Or le second membre de la première formule (44 *bis*) est essentiellement négatif d'après ce qui a été démontré au paragraphe précédent, et on ne peut satisfaire à cette relation qu'en faisant, quel que soit t, $u' = v' = 0$, $D'_x = D'_y = G'_{xy} = 0$, et, par suite, $G'_{yz} = G'_{zx} = 0$. Mais alors le second membre de la deuxième (44 *bis*) est aussi essentiellement négatif, et il faut poser $w' = 0$. On a donc bien, à toute époque, $u' = v' = w' = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Je ne m'occuperai pas d'intégrer les équations de l'équilibre ou du mouvement des plaques. On peut voir de beaux exemples de ces intégrations dans Navier (*Bulletin de la Société philomathique*, année 1823, p. 92), qui a étudié, par exemple, l'équilibre d'une plaque horizontale rectangulaire supportant des poids et appuyée sur son contour; dans Poisson (*Sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques*, aux *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1829, t. VIII), qui s'occupe, entre autres questions, du mouvement transversal d'une plaque circulaire lorsque les lignes nodales sont des cercles concentriques, et dans M. Kirchhoff (*Journal de Crelle*, 1850, t. 40, p. 51), qui étudie le même mouvement transversal lorsque les lignes nodales sont à la fois des cercles concentriques et des rayons.

§ VI. — *Cas où la plaque est soumise à des tractions considérables, antérieures aux déplacements. — Vibrations des membranes en tenant compte de la rigidité.*

Terminons ce Mémoire par l'étude d'une plaque soumise, sur son contour, antérieurement aux déplacements considérés, à des tractions assez considérables pour qu'il faille tenir compte de leur action pendant que ces déplacements s'effectuent et pour avoir même altéré la contexture naturelle du corps. La plaque est alors analogue à une membrane tendue, dont les mouvements transversaux, bien qu'assez influencés par la rigidité, sont dûs principalement aux tensions initiales. Considérons-la d'abord dans son état primitif, état dans lequel nous supposerons toujours qu'aucune action extérieure ne soit appliquée à son intérieur, et divisons-la, par des plans normaux aux x et aux y, en éléments plans rectangulaires de hauteur 2ε et de base $dx\,dy$. On sait qu'il passe, par tout point d'un corps, trois éléments plans rectangulaires sur lesquels les actions exercées sont normales; nous supposerons que ces éléments plans aient partout, à fort peu près, dans l'état primitif de la plaque, les mêmes directions choisies pour celles des plans coordonnés, et nous appellerons N_1^0, N_2^0, N_3^0 leurs valeurs respectives par unité de surface. L'équilibre d'un parallélépipède élémentaire $dx\,dy\,dz$ exigera que N_1^0 soit indépendant de x, N_2^0 de y, N_3^0 de z. Par suite, $N_3^0 = 0$, puisque cette force est supposée nulle aux deux extrémités d'une normale 2ε. Quant à N_1^0 et N_2^0, si les actions exercées sur les faces latérales des éléments de volume $2\varepsilon\,dx\,dy$ sont rigoureusement normales à ces faces, comme nous le supposerons, l'équilibre de ces éléments exigera que les intégrales

$$\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} N_1^0\,dz,\quad \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} N_2^0\,dz,\ \text{que nous appellerons respectivement } Q_x,\ Q_y,$$

soient rigoureusement constantes, la première le long de toute parallèle aux x, la seconde le long de toute parallèle aux y, alors même que l'épaisseur $\varepsilon' + \varepsilon''$ ou 2ε varierait lentement d'un point à l'autre; les points d'application de la tension $Q_x\,dy$ exercée sur les diverses sections normales $2\varepsilon\,dy$ d'un filet de plaque parallèle aux x et de largeur constante, devront être rigoureusement sur une parallèle aux x; et, de même, les points d'application de la tension $Q_y\,dx$, exercée sur les diverses sections normales $2\varepsilon\,dx$ d'un filet parallèle aux y, devront se trouver sur une parallèle aux y.

Nous supposerons que N_1^0, dont les variations, suivant les x, seront très-lentes et négligeables sur une petite longueur, varie d'une manière continue avec y, et d'une manière aussi rapide qu'on voudra, même discontinue, avec z. De même, N_2^0 aura sa dérivée par rapport à y négligeable, et pourra avoir ses dérivées par rapport à x et à z, la première sensible, la seconde aussi grande qu'on voudra. Les trois équations indéfinies de l'équilibre ne seront plus précisément les équations (6), mais celles-ci extraites de mon Étude sur les ondes liquides périodiques [*Savants étrangers*, t. XX, 1871 (*voir* form. 3 *bis* de ce

Mémoire)]:

$$
(45)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}-\frac{dN_1^0}{dy}\frac{dv}{dx}-\frac{dN_1^0}{dz}\frac{dw}{dx}+\rho X=0,\\
&\frac{dT_3}{dx}+\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}-\frac{dN_2^0}{dz}\frac{dw}{dy}-\frac{dN_2^0}{dx}\frac{du}{dy}+\rho Y=0,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz}+\rho Z=0.
\end{aligned}\right.
$$

Les formules des forces élastiques qu'il conviendra d'employer seront celles que j'ai établies dans le même Mémoire (*voir* la note placée à la fin de la troisième Note complémentaire), et qui donneront dans le cas actuel

$$
(46)\quad \left\{\begin{aligned}
&N_1=N_1^0\left(1-\frac{dv}{dy}-\frac{dw}{dz}\right)+N'_1,\\
&N_2=N_2^0\left(1-\frac{dw}{dz}-\frac{du}{dx}\right)+N'_2,\quad N_3=N'_3,\\
&T_1=N_2^0\frac{dw}{dy}+T'_1,\quad T_2=N_1^0\frac{dw}{dx}+T'_2,\\
&\qquad T_3=N_1^0\frac{dv}{dx}+N_2^0\frac{du}{dy}+T'_3;
\end{aligned}\right.
$$

Dans ces formules, N'_1, N'_2, N'_3, T'_1, T'_2, T'_3 sont les composantes suivant les axes des petites forces élastiques, produites par les six déformations ∂, g et fonctions linéaires de ces déformations, qui viennent se joindre aux composantes normales N_1^0, N_2^0, 0, pour donner, après les déplacements u, v, w, les vraies forces élastiques exercées sur l'unité de surface primitive des trois éléments plans primitivement normaux aux axes des coordonnées.

Les expressions (46) des N, T, changent les trois équations (45) en celles-ci

$$
(47)\quad \left\{\begin{aligned}
&-\frac{dT'_2}{dz}=\frac{dN'_1}{dx}+\frac{dT'_3}{dy}+\rho X+N_2^0\frac{d^2u}{dy^2},\\
&-\frac{dT'_1}{dz}=\frac{dT'_3}{dx}+\frac{dN'_2}{dy}+\rho Y+N_1^0\frac{d^2v}{dx^2},\\
&-\frac{dN'_3}{dz}=\frac{dT'_2}{dx}+\frac{dT'_1}{dy}+\rho Z+N_1^0\frac{d^2w}{dx^2}+N_2^0\frac{d^2w}{dy^2}.
\end{aligned}\right.
$$

Cherchons actuellement les conditions relatives aux deux bases de la plaque et aux surfaces de séparation de deux couches hétérogènes, s'il y en a. Toutes ces surfaces ont pour caractère commun d'être, dans leurs positions primitives, parallèles au plan des xy. Leur normale en un point est donc, à toute époque, perpendiculaire à l'élément rectiligne, primitivement parallèle aux x, qui fait avec les axes des x, y, z des angles ayant respectivement pour cosinus, 1, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dw}{dx}$, et à l'élément rectiligne, primitivement parallèle aux y, qui fait avec les mêmes axes des angles ayant les cosinus $\frac{du}{dy}$, 1, $\frac{dw}{dy}$: les cosinus pareils qui fixent la direction de cette normale sont donc $-\frac{dw}{dx}$, $-\frac{dw}{dy}$, 1. Par suite, des formules connues, déduites de la considération du tétraèdre de Cauchy, donnent, pour les composantes suivant les axes de la force élastique exercée sur l'unité de surface d'un élément plan primitivement parallèle aux xy, les valeurs respectives suivantes :

$$-\mathrm{N}_1\frac{dw}{dx}-\mathrm{T}_3\frac{dw}{dy}+\mathrm{T}_2,$$

$$-\mathrm{T}_3\frac{dw}{dx}-\mathrm{N}_2\frac{dw}{dy}+\mathrm{T}_1,$$

$$-\mathrm{T}_2\frac{dw}{dx}-\mathrm{T}_1\frac{dw}{dy}+\mathrm{N}_3;$$

les formules (46) réduisent ces valeurs à T'_2, T'_1, N'_3. Donc les conditions spéciales aux deux bases de la plaque et aux surfaces de séparation des couches hétérogènes, reviennent à dire, comme au § I, que T'_2, T'_1, N'_3, u, v, w varient avec continuité sur toute la longueur d'une normale 2ε à la plaque, et que l'on a, pour $z=-\varepsilon'$, $\mathrm{T}'_2=\mathrm{T}'_1=\mathrm{N}'_3=0$, pour $z=\varepsilon''$, $\mathrm{T}'_2=\mathrm{P}_x$, $\mathrm{T}'_1=\mathrm{P}_y$, $\mathrm{N}'_3=\mathrm{P}_z$. On en déduira, par suite, pour T'_2, T'_1, N'_3, des expressions pareilles à celles (13) précédemment obtenues pour T_2, T_1, N_3, mais avec ces différences que $\rho\mathrm{X}$, $\rho\mathrm{Y}$, $\rho\mathrm{Z}$ seront actuellement remplacés par les expressions $\rho\mathrm{X}+\mathrm{N}^0_2\frac{d^2u}{dy^2}$, $\rho\mathrm{Y}+\mathrm{N}^0_1\frac{d^2v}{dx^2}$, $\rho\mathrm{Z}+\mathrm{N}^0_1\frac{d^2w}{dx^2}+\mathrm{N}^0_2\frac{d^2w}{dy^2}$. Si la plaque ou membrane n'est pas dénuée de rigidité, c'est-à-dire si T'_2, T'_1 ont des valeurs sensibles, ces expressions ne seront pas incomparablement plus grandes que les autres termes des seconds membres de (47); on pourra négliger encore T'_2, T'_1 devant N'_1, N'_2, T'_3, négliger même N'_3 devant T'_2, T'_1, et mettre, par suite, N'_1, N'_2, T'_3 sous les formes (2). Comme d'ailleurs rien n'empêchera d'établir les relations (15), qui sont purement cinématiques, toutes les formules du § II s'appliqueront au cas actuel, à cela près, que les N, T devront y être remplacés par les N', T' et ρX, ρY, ρZ par $\rho X + N_2^0 \frac{d^2 u}{dy^2}$, $\rho Y + N_1^0 \frac{d^2 v}{dx^2}$, $\rho Z + N_1^0 \frac{d^2 w}{dx^2} + N_2^0 \frac{d^2 w}{dy^2}$.

En particulier, les trois équations indéfinies de l'équilibre seront, au lieu de (21) et (23 *bis*),

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} &P_x + \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \rho X\,dz + Q_y \frac{d^2 u_0}{dy^2} + \frac{d\mathfrak{N}_1}{dx} + \frac{d\mathfrak{T}_3}{dy} = 0,\\ &P_y + \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \rho Y\,dz + Q_x \frac{d^2 v_0}{dx^2} + \frac{d\mathfrak{T}_3}{dx} + \frac{d\mathfrak{N}_2}{dy} = 0,\\ &P_z + \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon''} \rho Z\,dz + Q_x \frac{d^2 w}{dx^2} + Q_y \frac{d^2 w}{dy^2}\\ &\qquad = \frac{2k\varepsilon^3}{3}\left(\frac{d^2 n_1}{dx^2} + 2\frac{d^2 t_3}{dx\,dy} + \frac{d^2 n_2}{dy^2}\right). \end{aligned}\right.$$

Quant aux conditions spéciales au contour, il faudra suivre les mêmes méthodes qu'aux §§ I et III, c'est-à-dire chercher les composantes suivant un élément du contour de la couche moyenne, suivant la normale au cylindre contournant, et suivant une perpendiculaire à ces deux directions, de la force élastique exercée sur un élément du cylindre contournant, en tenant compte, dans les termes comparables à N_1^0, N_2^0, des petits changements amenés dans ces directions par les déplacements considérés, et ainsi des petites variations de grandeur éprouvées par les éléments superficiels du cylindre; puis on prendra les composantes et les moments, par rapport aux mêmes droites, des actions totales exercées sur une bande du cylindre comprise entre deux génératrices primitivement distantes de ds.

Mais je ne développerai pas ce sujet. Je me contenterai d'étudier l'effet de la rigidité sur les vibrations transversales d'une membrane constituée de la même manière sur toute sa surface, également tendue en tout sens et isotrope autour de ses normales, enfin fixée à ses bords et assez flexible pour que le mouvement soit dû surtout aux tensions initiales. Si ρ_1 désigne la densité moyenne, $Q = Q_x = Q_y$ la tension initiale par unité de longueur du contour, la troisième formule (48), dont le second nombre deviendra celui de la dernière (25), donnera l'équation indéfinie du mouvement

$$(49) \qquad 2\varepsilon\rho_1 \frac{d^2w}{dt^2} = Q\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2}\right) - \frac{2k\beta\varepsilon^3}{3}\left(\frac{d^4w}{dx^4} + 2\frac{d^4w}{dx^2\,dy^2} + \frac{d^4w}{dy^4}\right).$$

Dans cette équation, le dernier terme, dû à la rigidité, est très-petit par rapport au second, dû à la tension initiale Q; on peut donc calculer la valeur de ce troisième terme en supposant à w la même forme que si la membrane était parfaitement flexible. Or, dans ce dernier cas, on aurait

$$(50) \qquad w = \sum W_i(A_i \cos m_i \omega t + B_i \sin m_i \omega t),$$

ω étant une constante, égale à $\sqrt{\frac{Q}{2\varepsilon\rho_1}}$, W_i une fonction de x, y, et m_i un nombre, tels que

$$(51) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2W_i}{dx^2} + \dfrac{d^2W_i}{dy^2} + m_i^2 W_i = 0 & \text{en tout point de la membrane,} \\ W_i = 0, & \text{sur le contour,} \end{cases}$$

A_i, B_i des constantes arbitraires dépendant de l'état initial, et $\sum$ un signe de sommation s'étendant à toutes les valeurs possibles de m_i ou plutôt de m_i^2, valeurs qui sont, comme on le démontre aisément, essentiellement réelles, et même positives à part la première $m_0^2 = 0$ qui donne $W_0 = 0$. Pour des membranes de même forme, mais de longueur et de largeur différentes, les valeurs de m_i sont en raison inverse de l'une de ces dimensions; enfin, lorsque la membrane vibre dans sa totalité sans autres lignes nodales que ses bords, comme nous l'admettrons, on peut, à une première approximation, réduire w à son premier terme $W_1(A_1 \cos m_1 \omega t + B_1 \sin m_1 \omega t)$. Mais alors, si l'on différentie, soit deux fois par rapport à x, soit deux fois par rapport à y, la relation

$$\frac{d^2 W_1}{dx^2} + \frac{d^2 W_1}{dy^2} + m_1^2 W_1 = 0,$$

et que l'on ajoute les deux résultats, il vient

$$\frac{d^4 W_1}{dx^4} + 2\frac{d^4 W_1}{dx^2\, dy^2} + \frac{d^4 W_1}{dy^4} = -m_1^2\left(\frac{d^2 W_1}{dx^2} + \frac{d^2 W_1}{dy^2}\right);$$

par suite, une première valeur approchée du dernier terme de (49) est

$$\frac{2k\beta\varepsilon^3 m_1^2}{3}\left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2}\right),$$

et cette équation (49) devient

$$(52)\qquad 2\varepsilon\rho_1 \frac{d^2 w}{dt^2} = \left(Q + \frac{2k\beta\varepsilon^3 m_1^2}{3}\right)\left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2}\right).$$

Donc, lorsqu'une membrane imparfaitement flexible vibre dans sa totalité sous l'effet d'une tension constante, ses vibrations se font sensiblement comme si elle était sans rigidité, mais que sa tension, par unité de longueur du contour, fût augmentée d'une quantité égale au produit des deux tiers du coefficient moyen d'élasticité de ses couches, appelé $k\beta$, par le cube de sa demi-épaisseur et par un nombre m_1^2, dépendant de la forme de la membrane et en raison inverse de sa surface. Si, par exemple, la membrane est rectangulaire, de longueur a et de largeur b, ce qui permet de prendre $W = \sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{i'\pi y}{b}$, i et i' étant deux entiers positifs, ce nombre m_1^2 correspond à $i = i' = 1$ et vaut $\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$.