JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres; premier mémoire. Des tiges

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 16 (1871), p. 125-240.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1871_2_16__125_0>

Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres;

Par M. J. BOUSSINESQ.

PREMIER MÉMOIRE [*].

DES TIGES.

Poisson et Cauchy ont les premiers essayé de déduire des formules de la théorie générale de l'élasticité les lois approchées de la flexion des tiges ou verges minces, lois qu'on avait obtenues jusque-là en supposant que les fibres longitudinales de ces corps restent constamment, pendant la flexion, parallèles entre elles et perpendiculaires aux sections qui leur étaient primitivement normales, et en admettant aussi que ces fibres résistent à l'extension ou à la compression, comme si chacune d'elles était isolée de ses voisines. L'hypothèse sur laquelle Poisson et Cauchy se sont appuyés, et dont le premier a déduit en outre une théorie de la torsion des verges rondes et le second un essai de la théorie de celle des verges rectangulaires, consiste à admettre que les forces élastiques exercées sur les éléments plans menés à l'intérieur de la tige sont développables en séries très-convergentes, suivant les puissances entières des petites coordonnées transversales de ces points, de manière qu'on puisse, dans toute relation, ne conserver, parmi les termes qui y subsistent, que ceux d'un seul degré ou au plus des deux degrés les moins élevés. Or cette hypothèse, qui n'est nullement évidente *à priori*, doit être abandonnée, du

---

[*] Présénté à l'Académie des Sciences, le 3 avril 1871, et analysé au *Compte rendu* de la séance de ce jour. (Voir *Comptes rendus*, t. LXXII, p. 407.)

moins en général; car elle est en contradiction avec des formules rigoureuses que M. de Saint-Venant a obtenues pour certains modes très-naturels d'application des actions extérieures, supposées exercées seulement sur les deux bases des tiges; et elle s'est trouvée aussi, dans divers cas, tels que celui de la torsion des tiges carrées, en désaccord avec l'expérience (*voir* le *Cours de Mécanique appliquée de Navier*, annoté par M. de Saint-Venant, t. I, 4^e Appendice, p. 617 à 645).

Le mode d'application, étudié par ce dernier géomètre, des forces qui agissent sur les extrémités des tiges, est celui pour lequel les fibres n'exercent les unes sur les autres que des actions dirigées suivant leurs tangentes, et ont leur allongement par unité de longueur, variable, sur toute l'étendue de chaque section normale, en fonction linéaire des coordonnées transversales. M. de Saint-Venant, se bornant aux tiges homogènes et de contexture symétrique par rapport à ces sections normales, a démontré qu'un tel mode d'application est toujours possible (et conduit, dans le cas d'une simple flexion, aux lois connues, mais seulement approchées, de ce phénomène), quels que soient la force et le couple résultants, généralement donnés, de toutes les actions appliquées à chaque extrémité de la tige. Il a fait remarquer aussi que tout autre mode d'application, à chacune des extrémités, d'actions statiquement équivalentes à la même résultante et au même couple, produirait les mêmes déformations, si ce n'est très-près de l'extrémité considérée; car ces différents modes ne diffèrent les uns des autres que par l'application, aux divers points matériels qui la composent, de forces qui se font équilibre, et dont, par suite, il est presque évident que l'effet doit être insensible à une distance finie des mêmes points. M. de Saint-Venant a donc établi le premier, sur ses vraies bases, la théorie générale de l'équilibre des corps prismatiques dont la surface latérale n'est soumise qu'à la pression atmosphérique antérieure aux phénomènes étudiés; car il a fait connaître les vraies actions élastiques et les vraies déformations qui s'y trouvent en jeu à une distance finie des extrémités, c'est-à-dire aux points où ces phénomènes sont soumis à des lois indépendantes du mode particulier d'application des forces exercées aux extrémités mêmes.

Toutefois, il reste encore à démontrer, en s'appuyant seulement sur les équations générales de l'élasticité et sur la petitesse supposée des dimensions transversales des tiges par rapport à leur longueur, que ce mode d'application est bien indifférent, c'est-à-dire que l'action mutuelle des fibres, à une distance finie des extrémités, est toujours dirigée à fort peu près suivant leurs tangentes, et que leur dilatation sur toute l'étendue de chaque section est une simple fonction linéaire des coordonnées transversales. Cette démonstration et l'établissement corrélatif des formules fondamentales de la déformation d'une tige constituent le premier objet du Mémoire actuel. Je les expose pour le cas général où des actions quelconques seraient appliquées, non-seulement près des extrémités, mais encore sur la masse entière de la tige, et où celle-ci serait hétérogène, mais de contexture symétrique par rapport à ses sections normales, et formée de fibres qui, isolées, subiraient les mêmes déformations latérales si on les soumettait à de simples tensions, produisant sur toutes la même dilatation longitudinale. Ainsi que M. de Saint-Venant l'a remarqué (même édition de Navier, § 7 des notes des n^{os} **21** et **80**), cette dernière condition est nécessaire pour que, dans les phénomènes d'extension et de flexion, les fibres ne se gênent pas mutuellement sur leurs surfaces contiguës et n'exercent pas les unes sur les autres cette action normale qu'on veut éviter.

M. Kirchoff a essayé de donner, d'un tout autre point de vue, une théorie complétement rationnelle des tiges élastiques très-minces (*Journal de Crelle,* t. LVI, p. 285, ou même édition de Navier, t. I, Appendice complémentaire, §§ 95 et 96). Il suppose qu'on mène, par chaque point matériel de l'axe de la tige et antérieurement aux déformations étudiées, un système d'axes rectangulaires des x', y', z', dirigés, celui des x' suivant l'axe de la tige et les deux autres suivant les deux axes d'inertie principaux de la section normale correspondante, puis que, pendant les déplacements, ce système se meuve, tout en conservant sa rectangularité, de manière que son origine coïncide toujours avec le même point matériel, et que son axe des x' et son plan des $x'y'$ ne cessent pas d'y être respectivement tangents à la même ligne et à la même surface matérielles. Un point de la tige très-voisin de l'un de ces systèmes peut lui être rapporté avant et après les déformations. Comme il y a une infinité de systèmes pareils, le point considéré sera déterminé, dans l'état primitif, au moyen de ses coordonnées x', y', z' par rapport à l'un d'eux, et de la distance s', mesurée sur l'axe de la tige, de l'origine du système adopté à celle de la tige elle-même. Après les déformations, les déplacements relatifs u', v', w' du même point matériel, c'est-à-dire les accroissements reçus par les coordonnées primitives x', y', z', seront fonctions des quatre variables indépendantes x', y', z', s'. M. Kirchoff a démontré qu'il existe, entre leurs dérivées premières en x' et leurs dérivées pareilles en s', trois relations simples auxquelles j'arrive plus simplement en exprimant que la position dans l'espace d'un point de la tige est la même, quel que soit le système d'axes très-voisins auxquels on la rapporte. Dans ces relations, les trois dérivées de u', v', w' en s' doivent être généralement comparables à u', v', w', qui s'annulent pour $x' = y' = z' = 0$, et qui sont du même ordre de petitesse que les déformations produites multipliées par x', y', z'. M. Kirchoff les néglige; mais alors rien ne prouve qu'il ne faille pas négliger aussi, dans les mêmes formules, d'autres termes qui paraissent généralement comparables à u', v', w', et qui lui permettent d'expliquer les phénomènes de flexion et de torsion. Sa théorie est donc implicitement basée sur une hypothèse particulière, dont la vérité n'est pas évidente. Comme les dérivés de u', v', w' en s' caractérisent les différences qui existent entre les déformations subies au même instant par les tronçons successifs en lesquels on peut concevoir la tige divisée, cette hypothèse revient à admettre que les sections menées sur une longueur finie, avant les déplacements, normalement à l'axe de la tige, se trouvent, après les déplacements, déformées sensiblement de la même manière. Quand la tige est de la nature de celles que j'étudie dans ce Mémoire, c'est-à-dire de contexture symétrique par rapport à ses sections normales, cette hypothèse se trouve être en général, et en tant que seulement approximative, conforme à la réalité.

En résumé, la théorie de M. Kirchoff conduit, dans le cas de tiges dont la contexture est symétrique par rapport à leurs sections normales, aux vraies formules approchées de la flexion et de la torsion; mais elle me paraît reposer sur une hypothèse douteuse *à priori*, consistant à admettre que les sections normales, primitivement égales entre elles, sont encore, sur une longueur finie, égales après les déplacements. Elle a aussi l'inconvénient de laisser parmi les quantités qu'elle néglige comme trop petites, les actions tangentielles exercées, dans le cas de la flexion inégale, à travers les divers éléments plans d'une de ces sections, forces qu'il est cependant intéressant d'étudier, puisque leur résultante est égale et contraire à celle des actions extérieures qui produisent la flexion.

Le Mémoire actuel contient, pour la détermination de ces forces tangentielles lorsqu'il s'agit de tiges fléchies ou tordues, homogènes sur toute l'étendue d'une section normale, une méthode nouvelle et simple qui permet de les obtenir sans calculer le déplacement longitudinal des divers points. Cette méthode a l'avantage de révéler une grande analogie entre les lois de la torsion et celles de l'écoulement permanent et bien régulier d'un liquide dans un tube rectiligne mouillé par ce liquide. Admettons, par exemple, que la tige tordue soit sans aucune cavité intérieure et de contexture isotrope autour de son axe, et concevons un tube qui aurait précisément la même section normale que cette tige et qui serait plein d'un liquide coulant, par filets rectilignes et parallèles, sous l'effort d'une pression constante : si l'on trace sur cette section, supposée appartenir successivement au tube et à la tige, les courbes, dites d'*égale vitesse,* tout le long desquelles la vitesse des filets fluides est constante, l'action tangentielle, dans la tige, exercée sur la section en chacun de leurs points, leur sera précisément tangente; de plus, si la pression qui produit l'écoulement est convenablement déterminée, la dérivée, dans le sens normal à ces courbes, de la vitesse des filets fluides, sera numériquement égale, en chaque point, à la force tangentielle exercée par unité de surface au même point de la section de la tige, et le double du volume liquide écoulé dans l'unité de temps aura de même la valeur numérique du moment total des forces qui produisent la torsion. Les intégrations que comportent ces deux questions peuvent être effectuées, non-seulement pour une infinité de formes, elliptique, triangulaire régulière, rectangulaire, etc., étudiées par M. de Saint-Venant dans son Mémoire sur la torsion (*Savants étrangers,* t. XIV, 1855), mais encore toutes les fois que la section est limitée par des courbes ou des portions de courbes appartenant à deux systèmes de lignes orthogonales et isothermes. Ce problème de calcul intégral n'est alors qu'un cas particulier de celui des températures stationnaires dans les cylindres isothermes, dont la belle solution, aussi simple que générale, a été donnée par M. Lamé (11ᵉ des *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, Paris, 1859); M. Clebsch (*Theorie der elasticität fester cörper*, Leipzig, 1862, §§ 32 à 35) en a développé le calcul, au point de vue spécial de la torsion, pour une section comprise entre deux ellipses homofocales.

Après avoir brièvement appliqué les lois de l'extension, de la flexion et de la torsion à divers problèmes d'équilibre et de mouvement d'une tige rectiligne dont les déformations totales sont très-petites, j'étends ces lois au cas où des tensions, généralement variables d'une fibre à l'autre et pouvant être assez grandes pour avoir altéré la contexture primitive de la tige, seraient exercées sur celle-ci antérieurement aux déplacements étudiés. C'est le cas des cordes élastiques, c'est-à-dire des tiges assez fortement tendues pour que leur rigidité ait sur la flexion bien moins d'influence que la tension initiale. J'applique les formules obtenues à l'étude du mouvement transversal d'une corde pareillement constituée sur toute sa longueur, fixée à ses deux extrémités, et qui vibre dans un plan perpendiculaire à un des axes d'inertie principaux de ses sections normales. Les vibrations se font à fort peu près comme si la corde était parfaitement flexible, mais que sa tension fût augmentée d'une quantité égale au produit du nombre π par le carré de l'inverse de sa longueur et par le moment d'inertie d'une section autour de l'axe principal considéré, moment obtenu en supposant à chaque élément de la section une densité superficielle égale au coefficient d'élasticité de la fibre que coupe cet élément. Si fortement que soit tendue la corde, pourvu qu'elle ne se désagrége pas et que sa section varie assez peu, les coefficients d'élasticité de ses fibres seront constants d'après la loi expérimentale dite de *Gerstner;* par suite, la quantité qu'il faut ajouter à la tension vraie pour avoir la tension fictive est bien indépendante de cette tension, comme l'ont prouvé des expériences connues de Savart.

§ I. — *Rappel des équations générales de l'élasticité.*

Concevons un corps solide dont les molécules seraient soustraites à l'action de la pesanteur, et dont tout élément plan, pris dans son intérieur, ne serait soumis qu'à une pression normale et constante par unité de surface, telle que la pression atmosphérique; puis supposons qu'on applique sur sa surface et à tous les points matériels qui le composent des forces capables d'imprimer à ces points de petits déplacements et de se faire équilibre au moyen des réactions intérieures que ces déplacements développent. Appelons : x, y, z les coordonnées primitives d'une molécule quelconque M du corps par rapport à un système d'axes rectangulaires fixes; u, v, w, fonctions de x, y, z, les trois déplacements suivant les axes de la même molécule, c'est-à-dire les excès sur x, y, z de ses coordonnées après que le nouvel équilibre s'est établi; ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} six quantités, appelées respectivement *dilatations* et *glissements*, dont les expressions sont

$$(1)\quad \partial_x=\frac{du}{dx},\ \partial_y=\frac{dv}{dy},\ \partial_z=\frac{dw}{dz},\ g_{yz}=\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy},\ g_{zx}=\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz},\ g_{xy}=\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx},$$

et qui caractérisent parfaitement les déformations éprouvées par la matière autour de la molécule M (les dilatations ∂ sont les accroissements reçus par l'unité de longueur des trois petites droites matérielles qui partent de M, et qui étaient, avant les déplacements, parallèles aux axes; les glissements g sont les cosinus des angles presque droits que forment deux à deux ces droites après les déplacements); N_1, T_3, T_2; T_3, N_2, T_1; T_2, T_1, N_3 les composantes, suivant les axes, de la force élastique exercée, dans le nouvel état d'équilibre, sur l'unité superficielle des éléments plans menés par la molécule M perpendiculairement à chacun des trois axes; ρ la densité primitive autour de la même molécule, et X, Y, Z les composantes suivant les axes de l'action extérieure rapportée à l'unité de masse; enfin p_x, p_y, p_z les composantes pareilles de la force, rapportée à l'unité superficielle, qui est exercée du dehors sur un point de la surface, et m, n, p les cosinus des angles que fait avec les axes la normale à la surface, menée en ce point et à l'extérieur. On sait :

1° Que N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 sont des fonctions linéaires de ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}, sans termes constants, et dont les coefficients, fonctions données de x, y, z, dépendent de la nature élastique du corps; il en résulte que ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} sont à l'inverse six fonctions pareilles des N, T;

2° Que le nouvel équilibre est régi par les trois équations indéfinies

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}+\rho X=0,\\ &\frac{dT_3}{dx}+\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}+\rho Y=0,\\ &\frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz}+\rho Z=0, \end{aligned}\right.$$

auxquelles il faut joindre les trois conditions, spéciales à la surface,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} p_x&=mN_1+nT_3+pT_2,\\ p_y&=mT_3+nN_2+pT_1,\\ p_z&=mT_2+nT_1+pN_3. \end{aligned}\right.$$

Ces équations, dans lesquelles on devrait substituer aux N, T leurs expressions en fonction des ∂, g, ne peuvent suffire à déterminer ces six dernières quantités, du moins lorsqu'on ne les remplace pas par leurs valeurs (1). Il faut y joindre d'autres relations, exprimant à quelles conditions nécessaires, et généralement suffisantes, six fonctions données de x, y, z peuvent représenter trois dilatations ∂ et trois glissements g. Ces relations, données par M. de Saint-Venant [*], sont celles-ci :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\partial_x}{dy\,dz}=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{dg_{zx}}{dy}+\frac{dg_{xy}}{dz}-\frac{dg_{yz}}{dx}\right),\\ &\frac{d^2\partial_y}{dz\,dx}=\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left(\frac{dg_{xy}}{dz}+\frac{dg_{yz}}{dx}-\frac{dg_{zx}}{dy}\right),\\ &\frac{d^2\partial_z}{dx\,dy}=\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{dg_{yz}}{dx}+\frac{dg_{zx}}{dy}-\frac{dg_{xy}}{dz}\right),\\ &\frac{d^2 g_{yz}}{dy\,dz}=\frac{d^2\partial_y}{dz^2}+\frac{d^2\partial_z}{dy^2},\\ &\frac{d^2 g_{zx}}{dz\,dx}=\frac{d^2\partial_z}{dx^2}+\frac{d^2\partial_x}{dz^2},\\ &\frac{d^2 g_{xy}}{dx\,dy}=\frac{d^2\partial_x}{dy^2}+\frac{d^2\partial_y}{dx^2}. \end{aligned}\right.$$

---

[*] *Mécanique appliquée* de Navier, annotée par M. de Saint-Venant, t. I, Appendice III, § 32.

On peut les établir comme il suit.

En désignant respectivement par x_0, y_0, z_0 une valeur particulière de x, y, z, et par f_1, f_2, f_3 trois fonctions arbitraires, on tire des trois premières formules (1)

$$(5)\qquad \begin{cases} u = \int_{x_0}^{x} \partial_x dx + f_1(y, z), \\ v = \int_{y_0}^{y} \partial_y dy + f_2(z, x), \\ w = \int_{z_0}^{z} \partial_z dz + f_3(x, y). \end{cases}$$

Ces valeurs de u, v, w, portées dans les trois autres formules (1), les changent en

$$(5\ bis)\qquad \begin{cases} \frac{df_2}{dz} + \frac{df_3}{dy} = g_{yz} - \int_{y_0}^{y} \frac{d\partial_y}{dz} dy - \int_{z_0}^{z} \frac{d\partial_z}{dy} dz, \\ \frac{df_3}{dx} + \frac{df_1}{dz} = g_{zx} - \int_{z_0}^{z} \frac{d\partial_z}{dx} dz - \int_{x_0}^{x} \frac{d\partial_x}{dz} dx, \\ \frac{df_1}{dy} + \frac{df_2}{dx} = g_{xy} - \int_{x_0}^{x} \frac{d\partial_x}{dy} dx - \int_{y_0}^{y} \frac{d\partial_y}{dx} dy; \end{cases}$$

celles-ci, respectivement différentiées en x, y, z, et résolues ensuite par rapport aux trois dérivées secondes qui entrent alors dans leurs premiers membres, donnent

$$(6)\qquad \begin{cases} \frac{d^2 f_1}{dy\,dz} = \frac{1}{2}\left(\frac{dg_{zx}}{dy} + \frac{dg_{xy}}{dz} - \frac{dg_{yz}}{dx}\right) - \int_{x_0}^{x} \frac{d^2\partial_x}{dy\,dz} dx, \\ \frac{d^2 f_2}{dz\,dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{dg_{xy}}{dz} + \frac{dg_{yz}}{dx} - \frac{dg_{zx}}{dy}\right) - \int_{y_0}^{y} \frac{d^2\partial_y}{dz\,dx} dy, \\ \frac{d^2 f_3}{dx\,dy} = \frac{1}{2}\left(\frac{dg_{yz}}{dx} + \frac{dg_{zx}}{dy} - \frac{dg_{xy}}{dz}\right) - \int_{z_0}^{z} \frac{d^2\partial_z}{dx\,dy} dz. \end{cases}$$

En exprimant que les premiers membres, et par suite les seconds, de ces dernières sont respectivement indépendants de x, de y, de z, on obtient, pour conditions nécessaires, les trois premières (4). D'ailleurs, si celles-ci sont vérifiées, et si F_1, F_2, F_3, φ_1, φ_2, φ_3 désignent six fonctions d'une seule variable, il est évident qu'on aura, en intégrant les relations (6) :

$$
(7)\quad \begin{cases}
f_1 = F_1(y) + \varphi_1(z) + \displaystyle\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} \frac{d^2 f_1}{dy\,dz}\,dy\,dz, \\
f_2 = F_2(z) + \varphi_2(x) + \displaystyle\int_{z_0}^{z}\int_{x_0}^{x} \frac{d^2 f_2}{dz\,dx}\,dz\,dx, \\
f_3 = F_3(x) + \varphi_3(y) + \displaystyle\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \frac{d^2 f_3}{dx\,dy}\,dx\,dy,
\end{cases}
$$

où les intégrales doubles, dans lesquelles on pourra remplacer les dérivées secondes de f_1, f_2, f_3 par leurs valeurs (6), seront des fonctions parfaitement déterminées de y et de z, de z et de x, de x et de y.

Les relations (7), étant équivalentes à (6), le sont par suite aux relations (5 *bis*) différentiées respectivement en x, y, z, et, pour qu'elles le deviennent aux relations (5 *bis*) elles-mêmes, il faut et il suffit qu'elles vérifient ces relations (5 *bis*) respectivement pour $x = x_0$, pour $y = y_0$, pour $z = z_0$, c'est-à-dire qu'on ait

$$
(8)\quad \begin{cases}
\text{pour } x = x_0, \quad F'_2(z) + \varphi'_3(y) = g_{yz} - \displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{d\partial_y}{dz}\,dy - \int_{z_0}^{z} \frac{d\partial_z}{dy}\,dz, \\
\text{pour } y = y_0, \quad F'_3(x) + \varphi'_1(z) = g_{zx} - \displaystyle\int_{z_0}^{z} \frac{d\partial_z}{dx}\,dz - \int_{x_0}^{x} \frac{d\partial_x}{dz}\,dx, \\
\text{pour } z = z_0, \quad F'_1(y) + \varphi'_2(x) = g_{xy} - \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{d\partial_x}{dy}\,dx - \int_{y_0}^{y} \frac{d\partial_y}{dx}\,dy.
\end{cases}
$$

Chacune de ces dernières est elle-même possible à la condition nécessaire et suffisante que la dérivée seconde de son second membre, en y et z pour la première, en z et x pour la seconde, en x et y pour la troisième, soit nulle comme l'est la dérivée pareille du premier membre. Il vient ainsi les trois dernières conditions (4), qui sont vraies, non-seulement pour $x = x_0$, ou pour $y = y_0$, ou pour $z = z_0$, mais encore et par suite pour des valeurs quelconques de x, y, z, ainsi qu'on le reconnaît d'ailleurs directement en différentiant (5 *bis*) au lieu des relations plus particulières (8). Celles-ci donneront les six dérivées F', φ' avec trois constantes arbitraires qui paraîtront, une fois avec le signe + et une fois avec le signe —, la première dans F'_2 et φ'_3, la seconde dans F'_3 et φ'_1, la troisième dans F'_1 et φ'_2. On intégrera une fois pour obtenir les fonctions F, φ, et les expressions de f_1, f_2, f_3 contiendront en tout six constantes arbitraires que l'on pourra faire nulles, car elles correspondront à un petit mouvement d'ensemble quelconque du corps, mouvement dont il est permis de faire abstraction.

§ II. — *Formules des forces élastiques pour diverses espèces de milieux.*

Je me bornerai ci-après à l'étude de milieux symétriques par rapport à un des plans coordonnés, à celui des yz par exemple, c'est-à-dire tels que, lorsqu'on change le sens de l'axe des x, l'expression des forces élastiques y soit la même qu'avec le premier système d'axes. Comme ce changement d'axes revient à transformer simplement T_2, T_3 en $-T_2$, $-T_3$, x en $-x$, u en $-u$, g_{zx} en $-g_{zx}$, g_{xy} en $-g_{xy}$, sans rien changer à N_1, N_2, N_3, T_1, y, z, v, w, ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, les expressions de N_1, N_2, N_3, T_1 ne pourront contenir que les quatre termes affectés des ∂ et de g_{yz}, et T_2, T_3 auront seulement les deux termes affectés de g_{zx}, g_{xy}. En tirant à l'inverse les ∂, g en fonction des N, T, les trois ∂ et g_{yz} dépendront des N et de T_1, tandis que g_{zx}, g_{xy} dépendront de T_2, T_3. On aura des formules de la forme

$$(9)\qquad \begin{cases} \partial_x = AN_1 - BN_2 - B'N_3 + CT_1, \\ \partial_y = -\eta AN_1 + \text{des termes en } N_2,\ N_3,\ T_1, \\ \partial_z = -\eta' AN_1 + \text{des termes en } N_2,\ N_3,\ T_1, \\ g_{yz} = \eta'' AN_1 + \text{des termes en } N_2,\ N_3,\ T_1, \\ g_{zx} = GT_2 + HT_3, \\ g_{xy} = G'T_3 + H'T_2. \end{cases}$$

Les coefficients A, B, B', η, η', G, G' sont positifs. Cela provient de ce que, chez tous les solides naturels : 1° la dilatation ∂_x croît et les autres ∂_y, ∂_z décroissent lorsque la traction normale N_1, qui est exercée dans le sens des x, grandit; 2° ∂_x diminue, au contraire, quand les autres tractions N_2, N_3 augmentent; 3° le cosinus g_{zx} de l'angle que forment deux petites lignes matérielles menées dans l'état primitif du milieu, et en partant de la molécule M, parallèlement aux z positifs et aux x positifs, augmente évidemment lorsque grandit la force T_2 exercée dans le sens de l'une de ces lignes sur un élément plan perpendiculaire à l'autre, et de même g_{xy} doit croître avec T_3.

Il existe toujours une position des axes rectangulaires des y et des z pour laquelle on a $C=0$, et une position des mêmes axes pour laquelle $H+H'=0$; de plus, les expressions C^2-4BB', $(H+H')^2-4CC'$ ont les mêmes valeurs pour toutes les positions de ces axes, et sont négatives [*].

---

[*] Pour démontrer ces diverses propositions, rappelons d'abord quelques formules générales de la théorie de l'élasticité. Supposons que l'on prenne, au lieu des axes rectangulaires des x, y, z, de nouveaux axes rectangulaires des x', y', z' ayant même origine, mais faisant avec les premiers des angles dont les cosinus seront respectivement nommés : m, n, p pour celui des x'; m', n', p' pour celui des y'; m'', n'', p'' pour celui des z'. Appelons : x', y', z' et u', v', w' les coordonnées primitives et les déplacements, par rapport à ce système d'axes, de la molécule dont x, y, z et u, v, w étaient les coordonnées primitives et les déplacements dans le premier système; N'_1, N'_2, N'_3, T'_1, T'_2, T'_3 les composantes, suivant les nouveaux axes, des forces exercées sur l'unité superficielle des éléments plans perpendiculaires à ces axes; $\partial_{x'}$, $\partial_{y'}$, $\partial_{z'}$, $g_{y'z'}$, $g_{z'x'}$, $g_{x'y'}$ les dilatations ∂ et les glissements g dans le nouveau système, c'est-à-dire les expressions

$$\frac{du'}{dx'},\quad \frac{dv'}{dy'},\quad \frac{dw'}{dz'},\quad \frac{dv'}{dz'}+\frac{dw'}{dy'},\quad \frac{dw'}{dx'}+\frac{du'}{dz'},\quad \frac{du'}{dy'}+\frac{dv'}{dx'}.$$

Les formules ordinaires de la transformation des coordonnées donneront

$$(a)\quad\left\{\begin{aligned}
&x=mx'+m'y'+m''z',\quad y=nx'+n'y'+n''z',\quad z=px'+p'y'+p''z';\\
&x'=mx+ny+pz,\quad y'=m'x+n'y+p'z,\quad z'=m''x+n''y+p''z;\\
&u'=mu+nv+pw,\quad v'=m'u+n'v+p'w,\quad w'=m''u+n''v+p''w;\\
&\qquad\frac{d}{dx'}=m\frac{d}{dx}+n\frac{d}{dy}+p\frac{d}{dz},\\
&\qquad\frac{d}{dy'}=m'\frac{d}{dx}+n'\frac{d}{dy}+p'\frac{d}{dz},\\
&\qquad\frac{d}{dz'}=m''\frac{d}{dx}+n''\frac{d}{dy}+p''\frac{d}{dz};
\end{aligned}\right.$$

Si, outre le plan des yz, il y a un second plan de symétrie de contexture, celui des zx par exemple, les expressions des N ne pourront plus contenir g_{yz}, ni celle de T_1 les ∂, ni celle de T_2, g_{xy}, ni enfin

---

et, par suite,

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned} &\partial_{x'} \text{ ou } \frac{du'}{dx'} = m^2\partial_x + n^2\partial_y + p^2\partial_z + np\,g_{yz} + pm g_{zx} + mn g_{xy},\\ &g_{y'z'} \text{ ou } \frac{dv'}{dz'} + \frac{dw'}{dy'} = 2\,(m'm''\partial_x + n'n''\partial_y + p'p''\partial_z)\\ &\qquad\qquad + (n'p''+p'n'')g_{yz} + (p'm''+m'p'')g_{zx} + (m'n''+n'm'')g_{xy},\\ &\partial_{y'},\ \partial_{z'},\ g_{z'x'},\ g_{x'y'} = \text{des expressions pareilles, mais avec d'autres accents sur } m,\ n,\ p. \end{aligned}\right.$$

On peut exprimer les N, T en fonction des N′, T′. Il suffit d'observer que les formules (3), qui sont applicables à tous les éléments plans construits dans un corps, et non pas seulement à ceux de sa surface, permettent d'obtenir les composantes, suivant trois axes rectangulaires, ceux des x', y', z' par exemple, de la force élastique exercée sur l'unité de surface de l'élément plan déterminé par les cosinus des angles de sa normale avec ces axes, en fonction des forces N'_1, N'_2, N'_3, T'_1 T'_2, T'_3 exercées sur les éléments perpendiculaires aux mêmes axes des x', y', z'. Pour l'élément perpendiculaire aux x, dont la direction est déterminée par les cosinus m, m', m'', ces trois composantes sont :

$$mN'_1 + m'T'_3 + m''T'_2,\quad mT'_3 + m'N'_2 + m''T'_1,\quad mT'_2 + m'T'_1 + m''N'_3.$$

Celles-ci, multipliées respectivement par m, m', m'' et ajoutées, donneront N_1, composante suivant les x de la force exercée sur l'élément plan qui leur est perpendiculaire; multipliées par n, n', n'' et ajoutées, elles donneront T_3, composante suivant les y de la même force; multipliées de même par p, p', p'' et ajoutées, elles donneront T_2. On trouve ainsi

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned} &N_1 = m^2N'_1 + m'^2N'_2 + m''^2N'_3 + 2\,(m'm''T'_1 + m''mT'_2 + mm'T'_3),\\ &T_2 = pmN'_1 + p'm'N'_2 + p''m''N'_3 + (p'm''+m'p'')T'_1 + (p''m+m''p)T'_2 + (pm'+mp')T'_3,\\ &T_3 = mnN'_1 + m'n'N'_2 + m''n''N'_3 + (m'n''+n'm'')T'_1 + (m''n+n''m)T'_2 + (mn'+nm')T'_3.\\ &\text{On obtiendrait des valeurs pareilles pour } N_2,\ N_3,\ T_1. \end{aligned}\right.$$

Les expressions de $\partial_{x'}$, $\partial_{y'}$,..., $g_{x'y'}$, en fonction de N'_1, N'_2,..., T'_3, s'obtiendront en substituant, dans les formules (b), à ∂_x, ∂_y,..., g_{xy}, leurs valeurs, (9) par exemple, en N_1, N_2,..., T_3, puis à ces N, T leurs expressions (c).

Supposons actuellement que le changement d'axes se borne à faire tourner dans leur plan, et d'un angle α, l'ensemble des deux axes des y et des z. On aura

$$\begin{aligned} &m = 1, && n = 0, && p = 0;\\ &m' = 0, && n' = \cos\alpha, && p' = \sin\alpha;\\ &m'' = 0, && n'' = -\sin\alpha, && p'' = \cos\alpha; \end{aligned}$$

celle de T_3, g_{zx}. Donc les N seront simplement fonctions des ∂; T_1, T_2, T_3 ne dépendront respectivement que de g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}, et le plan des xy sera un troisième plan de symétrie de contexture. Les coefficients C, H, H′ des formules précédentes seront nuls.

Le milieu sera *isotrope* autour de l'axe des x, et celui-ci prendra

---

et les formules (b), (c) deviendront

$$(b')\quad \left\{\begin{aligned} &\partial_{x'} = \partial_x,\\ &\partial_{y'} = \partial_y \cos^2\alpha + \partial_z \sin^2\alpha + \tfrac{1}{2} g_{yz} \sin 2\alpha,\\ &\partial_{z'} = \partial_z \cos^2\alpha + \partial_y \sin^2\alpha - \tfrac{1}{2} g_{yz} \sin 2\alpha,\\ &g_{y'z'} = -(\partial_y - \partial_z)\sin 2\alpha + g_{yz}\cos 2\alpha,\\ &g_{z'x'} = g_{zx}\cos\alpha - g_{xy}\sin\alpha,\\ &g_{x'y'} = g_{xy}\cos\alpha + g_{zx}\sin\alpha; \end{aligned}\right.$$

$$(c')\quad \left\{\begin{aligned} &N_1 = N'_1,\\ &N_2 = N'_2\cos^2\alpha + N'_3\sin^2\alpha - T'_1\sin 2\alpha,\\ &N_3 = N'_3\cos^2\alpha + N'_2\sin^2\alpha + T'_1\sin 2\alpha,\\ &T_1 = \tfrac{1}{2}(N'_2 - N'_3)\sin 2\alpha + T'_1\cos 2\alpha,\\ &T_2 = T'_2\cos\alpha + T'_3\sin\alpha,\\ &T_3 = T'_3\cos\alpha - T'_2\sin\alpha. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas des formules (9), pour lequel les ∂ et g_{yz} sont indépendants de T_2, T_3 et g_{zx}, g_{xy} indépendants des N et de T_1, on peut observer que $\partial_{x'}$, $\partial_{y'}$, $\partial_{z'}$, $g_{y'z'}$ ne dépendront encore que de N_1, N_2, N_3, T_1, et par suite de N'_1, N'_2, N'_3, T'_1, et que $g_{z'x'}$, $g_{x'y'}$ dépendront seulement de T_2, T_3 et par suite de T'_2, T'_3.

Le coefficient, analogue à C, dont T'_1 sera affecté dans l'expression de $\partial_{x'}$, est simplement

$$(d)\qquad (B - B')\sin 2\alpha + C\cos 2\alpha.$$

Pour que ce coefficient soit nul, il suffit de faire $\tang 2\alpha = \frac{-C}{B - B'}$; ce qui prouve bien qu'il existe une position des axes des y et des z pour laquelle $C = 0$.

Le coefficient, analogue à H, dont T'_3 sera affecté dans l'expression de $g_{z'x'}$ est

$$\cos\alpha(G\sin\alpha + H\cos\alpha) - \sin\alpha(G'\cos\alpha + H'\sin\alpha),$$

et le coefficient, analogue à H′, qui affecte T'_2 dans l'expression de $g_{x'y'}$ est de même

$$\cos\alpha(-G'\sin\alpha + H'\cos\alpha) + \sin\alpha(G\cos\alpha - H\sin\alpha);$$

le nom d'*axe d'élasticité* [*], si l'on peut, sans changer les formules des N, T, non-seulement échanger entre eux les deux axes des y et des z (ce qui entraîne l'égalité du coefficient de ∂_y à celui de ∂_z dans N_1, et de ceux de ∂_x, ∂_y, ∂_z dans N_2 et g_{zx} dans T_2 respectivement à ceux de ∂_x, ∂_z, ∂_y dans N_3 et g_{xy} dans T_3), mais encore faire tourner d'un

---

la somme de ces deux coefficients,

$$(e) \qquad (G - G')\sin 2\alpha + (H + H')\cos 2\alpha,$$

s'annule pour $\tang 2\alpha = -\frac{H + H'}{G - G'}$. Donc il existe un système d'axes des y et des z pour lequel la somme $H + H'$ est nulle.

Les coefficients, analogues à B et B', dont N'_2 et N'_3 sont affectés dans l'expression de $\partial_{x'}$, sont respectivement

$$B\cos^2\alpha + B'\sin^2\alpha - \tfrac{1}{2}C\sin 2\alpha, \quad B\sin^2\alpha + B'\cos^2\alpha + \tfrac{1}{2}C\sin 2\alpha;$$

si l'on retranche quatre fois leur produit du carré du coefficient (d), analogue à C, et qu'on réduise après avoir effectué les calculs, il vient

$$\begin{aligned}&[(B - B')\sin 2\alpha + C\cos 2\alpha]^2 \\ &\quad - 4(B\cos^2\alpha + B'\sin^2\alpha - \tfrac{1}{2}C\sin 2\alpha)(B\sin^2\alpha + B'\cos^2\alpha + \tfrac{1}{2}C\sin 2\alpha) = C^2 - 4BB'.\end{aligned}$$

Donc la somme $C^2 - 4BB'$ est la même pour tous les systèmes rectangulaires des axes des y et des z, et, comme elle est évidemment négative pour celui qui donne $C = 0$, elle l'est toujours.

De même, les coefficients, analogues à G et G', dont sont affectés respectivement T'_2 dans l'expression $g_{z'x'}$ et T'_3 dans celle de $g_{x'y'}$, sont

$$G\cos^2\alpha + G'\sin^2\alpha - \tfrac{1}{2}(H + H')\sin 2\alpha, \quad G\sin^2\alpha + G'\cos^2\alpha + \tfrac{1}{2}(H + H')\sin 2\alpha.$$

En retranchant quatre fois leur produit du carré de l'expression (e), analogue à $H + H'$, il vient, après quelques réductions, $(H + H')^2 - 4GG'$: donc cette expression a bien la même valeur, quel que soit le système d'axes des y et des z, et, comme elle est négative pour celui qui donne $H + H' = 0$, elle l'est dans tous les cas.

[*] Au § VIII d'un Mémoire *sur les ondes dans les milieux isotropes déformés* (*Journal de Mathématiques*, t. XIII, 1870), j'ai appelé, comme dans les Traités de double réfraction, *axes d'élasticité* les intersections de trois plans rectangulaires de symétrie de contexture. Il conviendrait peut-être de ne donner ce nom, comme je le fais dans le Mémoire actuel, qu'aux droites tout autour desquelles les élasticités sont pareillement distribuées; mais on pourrait aussi appeler ces dernières *axes d'isotropie*.

angle quelconque, autour de l'axe des x, le système des deux autres axes; ce qui oblige, comme on le démontre le plus simplement en supposant cette rotation infiniment petite, à faire le coefficient de ∂_y, dans l'expression de N_2, égal à celui de ∂_z dans la même expression, plus le double du coefficient de g_{yz} dans celle de T_1. Il en résulte que, si λ, μ, λ', μ', μ'', ν sont six coefficients d'élasticité, et si θ désigne la dilatation cubique, égale à $\partial_x + \partial_y + \partial_z$, les formules des N, T seront

$$(10) \quad \begin{cases} N_1 = \lambda'\theta + 2\mu'\partial_x, & T_1 = \mu g_{yz}, \\ N_2 = \lambda\theta + \nu\partial_x + 2\mu\partial_y, & T_2 = \mu'' g_{zx}, \\ N_3 = \lambda\theta + \nu\partial_x + 2\mu\partial_z, & T_3 = \mu'' g_{xy}. \end{cases}$$

En ajoutant les trois de ces relations où entrent les N, puis ramenant le second membre du résultat à ne contenir que ∂_x et θ, et éliminant enfin ∂_x au moyen de la première (10), il vient

$$(11) \qquad \theta = \frac{(\mu - \nu) N_1 + \mu' (N_2 + N_3)}{2(\lambda + \mu)\mu' + (\mu - \nu)\lambda'},$$

et ensuite

$$(10\ bis) \quad \begin{cases} \partial_x = \dfrac{2(\lambda + \mu) N_1 - \lambda' (N_2 + N_3)}{2[2(\lambda + \mu)\mu' + (\mu - \nu)\lambda']}, \\ \partial_y = \dfrac{-2\mu(\lambda + \nu) N_1 + [2(\lambda + 2\mu)\mu' + (2\mu - \nu)\lambda'] N_2 - (2\lambda\mu' - \nu\lambda') N_3}{4\mu[2(\lambda + \mu)\mu' + (\mu - \nu)\lambda']}, \\ \partial_z = \dfrac{-2\mu(\lambda + \nu) N_1 + [2(\lambda + 2\mu)\mu' + (2\mu - \nu)\lambda'] N_3 - (2\lambda\mu' - \nu\lambda') N_2}{4\mu[2(\lambda + \mu)\mu' + (\mu - \nu)\lambda']}, \\ g_{yz} = \dfrac{T_1}{\mu}, \quad g_{zx} = \dfrac{T_2}{\mu''}, \quad g_{xy} = \dfrac{T_3}{\mu''}, \end{cases}$$

S'il y a enfin un second axe d'élasticité, celui des y par exemple, N_1 et N_3, T_1 et T_3 devront se changer l'un en l'autre si l'on permute entre eux les deux axes des x et des z : on devra donc avoir $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu$, $\nu = 0$, $\mu'' = \mu$. L'axe des z sera un troisième axe d'élasticité, les formules des forces élastiques ne changeront pas lorsqu'on passera d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre quelconque, et le milieu sera dit *isotrope* ou *d'élasticité constante dans toutes les directions*.

Mais passons au cas général d'une contexture quelconque, et cherchons à exprimer analytiquement qu'il faut toujours dépenser un certain travail pour écarter un corps de son état naturel, fait d'expérience universellement admis. Considérons un simple élément de volume ayant ses arêtes primitivement parallèles aux axes et respectivement désignées par dx, dy, dz, et supposons cet élément soumis, sur ses faces opposées, à des forces sans cesse égales et contraires, uniformément distribuées sur chacune et lentement croissantes à partir du moment où elles sont nulles, de manière à se faire toujours équilibre si le corps était rigide, et à ne produire effectivement que des vitesses insensibles. Si nous supposons que les déplacements u, v, w varient ensemble pour toutes les molécules, proportionnellement à une même fonction du temps, de manière à conserver toujours entre eux les mêmes rapports, les déformations ∂, g, fonctions linéaires des dérivées premières en x, y, z de u, v, w, et, par suite, les N, T, fonctions linéaires des ∂, g, varieront aussi comme la même fonction du temps. Cela posé, appelons x, y, z les coordonnées primitives, et u, v, w les déplacements de la molécule située au sommet de l'élément de volume considéré qui a les coordonnées les plus petites. La face $dy\,dz$, qui passe par ce sommet, est soumise, suivant les axes des x, des y et des z, aux forces $-N_1\,dy\,dz$, $-T_3\,dy\,dz$, $-T_2\,dy\,dz$, que l'on peut supposer appliquées au centre de cette face, centre dont les déplacements ne diffèrent pas sensiblement de u, v, w. Le travail élémentaire de ces forces, obtenu en les multipliant par les projections du, dv, dw sur les axes des x, y, z du déplacement de leur point d'application, a pour expression

$$-N_1\,dy\,dz\,du, \qquad -T_3\,dy\,dz\,dv, \qquad -T_2\,dy\,dz\,dw,$$

ou bien

$$-\frac{N_1}{u}\,dy\,dz\,u\,du, \quad -\frac{T_3}{v}\,dy\,dz\,v\,dv, \quad -\frac{T_2}{w}\,dy\,dz\,w\,dw;$$

si l'on intègre à partir de l'époque où l'on avait $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, et si l'on observe que les rapports $\frac{N_1}{u}$, $\frac{T_3}{v}$, $\frac{T_2}{w}$ sont indépendants du temps, il vient, pour le travail total des forces exercées sur la première face $dy\,dz$ de l'élément de volume,

$$-\tfrac{1}{2}dy\,dz\left[\frac{N_1}{u}u^2+\frac{T_3}{v}v^2+\frac{T_2}{w}w^2\right] \quad \text{ou} \quad -\tfrac{1}{2}dy\,dz\,[N_1u+T_3v+T_2w].$$

Le travail des forces exercées sur la seconde face $dy\,dz$ aura évidemment la même expression, mais changée de signe et augmentée de sa différentielle par rapport à x. Comme N_1, T_3, T_2 ont les mêmes valeurs sur les deux faces $dy\,dz$, cette différentielle est

$$\tfrac{1}{2}dx\,dy\,dz\left[N_1\frac{du}{dx}+T_3\frac{dv}{dx}+T_2\frac{dw}{dx}\right].$$

En opérant ainsi pour les autres faces, et faisant la somme totale des travaux dépensés pour écarter l'élément de son état naturel, il vient

$$(12)\qquad \tfrac{1}{2}dx\,dy\,dz[N_1\partial_x+N_2\partial_y+N_3\partial_z+T_1g_{yz}+T_2g_{zx}+T_3g_{xy}].$$

Comme cette expression doit être essentiellement positive, la relation cherchée est

$$(12\ bis)\qquad N_1\partial_x+N_2\partial_y+N_3\partial_z+T_1g_{yz}+T_2g_{zx}+T_3g_{xy}>0.$$

Si l'on substitue, dans le premier membre de cette inégalité, aux ∂, g leurs expressions linéaires en fonction des N, T, ce premier membre sera une fonction 2Φ des N, T, homogène et du second degré, qui pourra être mise sous la forme

$$(12\ ter)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\Phi = {} & \mathrm{a}(N_1+\alpha N_2+\alpha' N_3+\alpha'' T_1+\alpha''' T_2+\alpha^{\text{IV}} T_3)^2\\ &+\mathrm{b}(N_2+\beta N_3+\beta' T_1+\beta'' T_2+\beta''' T_3)^2\\ &+\mathrm{c}(N_3+\gamma T_1+\gamma' T_2+\gamma'' T_3)^2\\ &+\mathrm{d}(T_1+\delta T_2+\delta' T_3)^2\\ &+\mathrm{e}(T_2+\varepsilon T_3)^2\\ &+\mathrm{f}\,T_3^2,\end{aligned}\right.$$

avec des coefficients a, b, c, d, e, f plus grands que zéro. En effet, la partie de Φ qui contient N_1 est de la forme

$$a(N_1^2 + 2\alpha N_1 N_2 + 2\alpha' N_1 N_3 + 2\alpha'' N_1 T_1 + 2\alpha''' N_1 T_2 + 2\alpha^{IV} N_1 T_3),$$

où a est positif (puisque Φ, essentiellement positif lui-même, se réduit à aN_1^2 lorsque N_1 est la seule des quantités N, T qui ne soit pas nulle), et où α, α', α'', α''', α^{IV} sont quelconques. En ajoutant à ces termes tout ce qu'il faut pour compléter le carré

$$a(N_1 + \alpha N_2 + \alpha' N_3 + \alpha'' T_1 + \alpha''' T_2 + \alpha^{IV} T_3)^2,$$

et retranchant ce qui est ainsi ajouté du reste de la fonction Φ, cette fonction se composera du carré précédent, plus d'une expression homogène du second degré, qui n'aura plus que les cinq variables N_2, N_3, T_1, T_2, T_3. Si l'on convient de faire N_1 égal à

$$-\alpha N_2 - \alpha' N_3 - \alpha'' T_1 - \alpha''' T_2 - \alpha^{IV} T_3,$$

Φ se réduira même à cette expression, de laquelle, en raisonnant exactement comme sur l'expression complète, on tirera successivement les carrés qui ont b, c, d, e, f pour coefficients.

On pourrait, dans le premier membre de (12 *bis*), remplacer les N, T par leurs valeurs en fonction des ∂, g. Alors la fonction Φ, homogène et du second degré, par rapport aux ∂, g, pourrait être mise sous une forme analogue à (12 *ter*), mais qui contiendrait les ∂, g au lieu des N, T.

Il est un cas très-important, et peut-être même applicable à tous les corps de la nature, pour lequel l'expression (12) représente le travail employé à écarter un élément de volume de son état naturel, sans que les N, T varient proportionnellement pendant toute la durée du phénomène. C'est lorsque la partie de ce travail, qui est effectuée pendant un temps très-court

$$dx\,dy\,dz(N_1 d\partial_x + N_2 d\partial_y + N_3 d\partial_z + T_1 dg_{yz} + T_2 dg_{zx} + T_3 dg_{xy}),$$

est une différentielle exacte, ou que, Φ étant supposé exprimé en fonction des ∂, g, on a

$$(13)\quad N_1 = \frac{d\Phi}{d\partial_x},\quad N_2 = \frac{d\Phi}{d\partial_y},\quad N_3 = \frac{d\Phi}{d\partial_z},\quad T_1 = \frac{d\Phi}{dg_{yz}},\quad T_2 = \frac{d\Phi}{dg_{zx}},\quad T_3 = \frac{d\Phi}{dg_{xy}}.$$

Dans le même cas, si l'on suppose Φ exprimé en fonction des N, T, les expressions des ∂, g seront

$$(13\,bis)\qquad \left\{\begin{aligned} \partial_x &= \frac{d\Phi}{dN_1}, & \partial_y &= \frac{d\Phi}{dN_2}, & \partial_z &= \frac{d\Phi}{dN_3}, \\ g_{yz} &= \frac{d\Phi}{dT_1}, & g_{zx} &= \frac{d\Phi}{dT_2}, & g_{xy} &= \frac{d\Phi}{dT_3}. \end{aligned}\right.$$

En effet, en différentiant par rapport à ∂_x le potentiel Φ, il viendra

$$N_1 \text{ ou } \frac{d\Phi}{d\partial_x} = \frac{d\Phi}{dN_1}\frac{dN_1}{d\partial_x} + \frac{d\Phi}{dN_2}\frac{dN_2}{d\partial_x} + \frac{d\Phi}{dN_3}\frac{dN_3}{d\partial_x} + \frac{d\Phi}{dT_1}\frac{dT_1}{d\partial_x} + \frac{d\Phi}{dT_2}\frac{dT_2}{d\partial_x} + \frac{d\Phi}{dT_3}\frac{dT_3}{d\partial_x}.$$

Le second membre de cette relation ne diffère de l'expression linéaire de N_1 en fonction des ∂, g qu'en ce que $\frac{d\Phi}{dN_1}, \frac{d\Phi}{dN_2}, \ldots, \frac{d\Phi}{dT_3}$ y remplacent $\partial_x, \partial_y, \ldots, g_{xy}$. Comme on aurait des expressions pareilles de N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 en différentiant Φ par rapport à ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}, il faut bien que $\partial_x, \partial_y, \ldots, g_{xy}$ soient précisément égaux à $\frac{d\Phi}{dN_1}, \frac{d\Phi}{dN_2}, \ldots, \frac{d\Phi}{dT_3}$.

§ III. — *Étude d'une tige de très-petite section. Considérations préliminaires.*

Supposons que le milieu élastique considéré soit un corps sensiblement cylindrique sur une étendue comparable aux dimensions de ses sections transversales, mais d'une longueur totale beaucoup plus grande que ces dimensions mêmes. Après des déplacements aussi considérables qu'on voudra, mais tels que les ∂, g soient partout très-petits, une portion de ce corps, comprise entre deux sections normales assez voisines, n'aura subi que de petits déplacements u, v, w par rapport à un système d'axes pris dans son intérieur et assujettis aux mêmes mouvements d'ensemble que cette partie du corps. Si donc, à un moment donné quelconque, on décompose, suivant ce système d'axes supposés fixes durant un instant très-court, toutes les forces, y compris celles d'inertie lorsque le corps est en mouvement, qui agissent sur la portion considérée, les formules précédentes leur seront applicables. Nous supposerons le plan des yz parallèle aux sections.

Le corps pourra être plein ou tubulaire, et, dans ce dernier cas, avoir un nombre quelconque de cavités intérieures; mais nous admettrons que sa surface latérale, sensiblement cylindrique et composée généralement d'une nappe extérieure et d'une ou de plusieurs nappes intérieures, ne soit soumise à aucune action autre que la pression atmosphérique antérieure aux déplacements. Soient : σ une section normale, et $d\sigma$ ou $dy\,dz$ un de ses éléments; s le contour de cette section, formé d'une partie extérieure et de parties intérieures; ds un élément de ce contour, dont nous supposerons la partie extérieure décrite en tournant dans le sens des y positifs vers les z positifs et les parties intérieures décrites en sens contraire; dy, dz les projections de cet élément sur les axes des y et des z, et m, n, p les cosinus des angles que fait avec les axes la normale à la surface latérale, menée en un point du même élément et hors de la section σ. Ces cosinus sont $m=0$, $n=\pm\frac{dz}{ds}$, $p=\mp\frac{dy}{ds}$; mais, d'après la manière dont le contour est décrit, la normale menée hors de la section σ fait un angle aigu ou un angle obtus avec l'axe des y, suivant qu'on a $dz>0$ ou $dz<0$; donc il faut prendre les signes supérieurs, et poser

$$(13\ ter)\qquad m=0,\quad n=\frac{dz}{ds},\quad p=-\frac{dy}{ds},\quad \text{ou}\quad dz=n\,ds,\quad dy=-p\,ds.$$

Les équations (3) se réduiront ainsi à

$$(14)\quad\left\{\begin{array}{l} T_3 n + T_2 p = 0,\quad N_2 n + T_1 p = 0,\quad T_1 n + N_3 p = 0,\\ \text{ou bien}\\ T_3\,dz - T_2\,dy = 0,\quad N_2\,dz - T_1\,dy = 0,\quad T_1\,dz - N_3\,dy = 0\\ (\text{sur le contour } s).\end{array}\right.$$

La constitution de la matière dont la tige est formée sera supposée généralement variable d'un point à l'autre, assez lentement le long d'une parallèle quelconque à l'axe des x, mais aussi rapidement qu'on voudra d'un point à l'autre d'une section normale, et même brusquement sur certaines lignes données de chaque section, lignes que nous appellerons s_1. En désignant par n_1, p_1 les cosinus des angles que la normale à l'une de ces lignes, menée dans un sens déterminé, fait avec les axes des y et des z, l'égalité des composantes suivant les x, les y et les z des forces exercées de part et d'autre de l'élément plan perpendiculaire à cette normale obligera de supposer aux trois expressions $n_1 T_3 + p_1 T_2$, $n_1 N_2 + p_1 T_1$, $n_1 T_1 + p_1 N_3$ les mêmes valeurs quand N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 sont pris d'un côté de l'élément plan, que lorsqu'ils sont pris de l'autre côté. Il est clair de même, puisque la matière n'est supposée nulle part se disjoindre, que les déplacements u, v, w seront égaux des deux côtés du même élément plan. Telles sont les conditions, au nombre de six, spéciales aux surfaces de séparation de deux parties de tige adjacentes, mais de différente constitution.

Ces conditions, jointes à (14), permettent de déduire des équations (2) une formule très-importante qui nous servira souvent. Appelons U, V, W trois fonctions de x, y, z, continues dans tout l'intérieur d'une section σ, mais d'ailleurs quelconques, et supposons que leurs dérivées premières en y et z soient également continues, excepté sur les lignes de chaque section où la constitution de la matièrie varie beaucoup, lignes des deux côtés desquelles ces dérivées pourront prendre des valeurs différentes. Ajoutons les équations (2) membre à membre, après les avoir respectivement multipliées par $\mathrm{U}d\sigma$, $\mathrm{V}d\sigma$, $\mathrm{W}d\sigma$, et intégrons le résultat dans tout l'intérieur de la section σ. Nous pourrons diviser la section σ en régions dans chacune desquelles la constitution de la matière ne varie qu'avec continuité d'un point aux points voisins; chacune de ces régions sera limitée par un contour appartenant aux lignes s et s_1, formé d'une partie extérieure et peut-être aussi de courbes fermées intérieures; nous supposerons ces lignes décrites dans le même sens que le contour s, c'est-à-dire de telle sorte que, si l'on appelle ds un de leurs éléments, pris positivement, dy et dz les projections de cet élément sur les axes des y et des z, n et p les cosinus des angles que fait avec ces axes la normale menée hors de la région, on ait $dz = n ds$, $dy = -p ds$. En intégrant d'abord dans cette région seulement, on pourra transformer plusieurs termes au moyen de l'intégration par parties. Par exemple, l'expression $\mathrm{U}\frac{d\mathrm{T}_3}{dy}d\sigma$ pourra être remplacée identiquement par $\frac{d\mathrm{UT}_3}{dy}dy\,dz - \mathrm{T}_3\frac{d\mathrm{U}}{dy}d\sigma$; on intégrera le premier terme, pour une même valeur de z et de dz, sur toute l'étendue des parties, comprises dans la région, en lesquelles une parallèle à l'axe des y est divisée par les lignes s et s_1 : en caractérisant par les indices o, 1 les valeurs des fonctions aux deux extrémités d'une de ces parties, le terme intégré sera remplacé, pour chacune d'elles, par la différence $(\mathrm{UT}_3)_1 dz - (\mathrm{UT}_3)_0 dz$; or, dans le premier terme de cette différence, dz est la projection $(nds)_1$, sur l'axe des z, d'un élément ds du contour de la région; dans le second terme, dz est la valeur absolue de la projection négative $(nds)_0$ d'un autre élément du même contour; cette différence peut donc être remplacée par $(\mathrm{UT}_3 ds)_1 + (\mathrm{UT}_3 ds)_0$. En opérant ainsi sur toute l'étendue de la région, il viendra

$$\int \mathrm{U}\frac{d\mathrm{T}_3}{dy}d\sigma = \int \mathrm{UT}_3 nds - \int \mathrm{T}_3\frac{d\mathrm{U}}{dy}d\sigma,$$

les intégrales où entre $d\sigma$ étant prises sur toute l'étendue de la région considérée et celle où entre ds l'étant sur tout le contour de cette région. On opérera de même pour tous les termes qui contiennent une dérivée des N, T par rapport à y ou par rapport à z, et la relation

$$\int\left[\mathrm{U}\left(\frac{d\mathrm{T}_3}{dy}+\frac{d\mathrm{T}_2}{dz}+\frac{d\mathrm{N}_1}{dx}+\rho\mathrm{X}\right)+\mathrm{V}\left(\frac{d\mathrm{N}_2}{dy}+\frac{d\mathrm{T}_1}{dz}+\frac{d\mathrm{T}_3}{dx}+\rho\mathrm{Y}\right)\right.$$
$$\left.+\mathrm{W}\left(\frac{d\mathrm{T}_1}{dy}+\frac{d\mathrm{N}_3}{dz}+\frac{d\mathrm{T}_2}{dx}+\rho\mathrm{Z}\right)\right]d\sigma = 0$$

deviendra

$$\int[\mathrm{U}(n\mathrm{T}_3+p\mathrm{T}_2)+\mathrm{V}(n\mathrm{N}_2+p\mathrm{T}_1)+\mathrm{W}(n\mathrm{T}_1+p\mathrm{N}_3)]ds$$
$$-\int\left[\mathrm{T}_3\frac{d\mathrm{U}}{dy}+\mathrm{T}_2\frac{d\mathrm{U}}{dz}+\mathrm{N}_2\frac{d\mathrm{V}}{dy}+\mathrm{N}_3\frac{d\mathrm{W}}{dz}+\mathrm{T}_1\left(\frac{d\mathrm{V}}{dz}+\frac{d\mathrm{W}}{dy}\right)\right]d\sigma$$
$$+\int\left[\mathrm{U}\left(\frac{d\mathrm{N}_1}{dx}+\rho\mathrm{X}\right)+\mathrm{V}\left(\frac{d\mathrm{T}_3}{dx}+\rho\mathrm{Y}\right)+\mathrm{W}\left(\frac{d\mathrm{T}_2}{dx}+\rho\mathrm{Z}\right)\right]d\sigma = 0.$$

Si l'on ajoute tous les résultats pareils relatifs aux diverses régions de la section σ, les intégrales prises sur les lignes s_1 se détruiront; car, à la limite de deux régions adjacentes, U, V, W auront les mêmes valeurs par hypothèse, et les expressions $n\mathrm{T}_3+p\mathrm{T}_2$, $n\mathrm{N}_2+p\mathrm{T}_1$, $n\mathrm{T}_1+p\mathrm{N}_3$ seront égales en valeur absolue, d'après les conditions spéciales aux lignes s_1, mais de signes contraires à cause des deux directions opposées que prend la normale suivant qu'elle est menée hors d'une région ou hors de l'autre. Les intégrales prises sur le contour s étant d'ailleurs nulles d'après les relations (14), il viendra, en désignant par $\int_\sigma$ des intégrales prises sur toute l'étendue de la section σ,

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_\sigma \left[T_3 \frac{dU}{dy} + T_2 \frac{dU}{dz} + N_2 \frac{dV}{dy} + N_3 \frac{dW}{dz} + T_1\left(\frac{dV}{dz} + \frac{dW}{dy}\right)\right] d\sigma \\ &\quad = \int_\sigma \left[U\left(\frac{dN_1}{dx} + \rho X\right) + V\left(\frac{dT_3}{dx} + \rho Y\right) + W\left(\frac{dT_2}{dx} + \rho Z\right)\right] d\sigma. \end{aligned}\right.$$

C'est la relation importante que je me proposais d'établir.

Considérons encore une des régions de σ dans lesquelles la constitution de la matière ne varie qu'avec continuité d'un point aux points voisins, et observons qu'il est naturel d'y supposer les forces élastiques N, T, variables également d'une manière continue. Le contour de cette région a au moins deux éléments perpendiculaires à l'axe des y et deux perpendiculaires à l'axe des z. La condition spéciale à ce contour montre qu'aux premiers de ces éléments les forces T_3, N_2, T_1 sont les mêmes que dans la région adjacente, et qu'il en est ainsi aux seconds de ces éléments pour les forces T_2, T_1, N_3. Or, en passant de ces nouvelles régions dans d'autres, et considérant les éléments des contours de séparation qui sont perpendiculaires, soit aux y, soit aux z, on finira par arriver à des éléments pareils du contour même de la section σ, éléments sur lesquels on a, d'après (14), soit $T_3 = N_2 = T_1 = 0$, soit $T_2 = T_1 = N_3 = 0$. Donc, la section σ ayant toutes ses dimensions très-petites, les forces N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 ne peuvent qu'être fort petites dans toute son étendue par rapport aux valeurs absolues moyennes de leurs dérivées premières en y et z. D'ailleurs la continuité, sur une longueur finie de la tige, des N, T et de leurs dérivées en y, z, exige que les dérivées en x de toutes ces quantités ne soient pas d'un ordre de grandeur plus élevé que l'ordre de ces quantités elles-mêmes, si ce n'est toutefois aux points voisins des extrémités de la tige, ou plus généralement, de ceux où la constitution de la matière et les conditions dans lesquelles elle se trouve varieraient brusquement dans le sens des x. Si l'on fait abstraction de ces points tout particuliers, les deux dernières équations (2) pourront être réduites à

$$\frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} = 0, \quad \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} = 0.$$

En effet, si nous considérons, par exemple, la seconde des équations (2), les termes $\frac{dN_2}{dy}$, $\frac{dT_1}{dz}$ pourront être, soit de l'ordre de $\frac{dT_3}{dx}$, soit incomparablement plus petits, soit incomparablement plus grands. Dans les deux premiers cas, N_2 et T_1 seront, d'après ce qui précède, négligeables par rapport à T_3 [*], et l'on pourra poser en comparaison $N_2 = 0$, $T_1 = 0$; dans le troisième cas, la seconde équation (2) se réduira sensiblement aux deux termes $\frac{dN_2}{dy}$, $\frac{dT_1}{dz}$, car le dernier ρY n'est jamais que de l'ordre de $\frac{dT_3}{dx}$. Donc on pourra poser toujours $\frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} = 0$. Les deux dernières équations (2) étant ainsi simplifiées, la relation générale (15), si l'on y fait $U = 0$, se réduit à

$$(15\ bis) \qquad \int_\sigma \left[N_2 \frac{dV}{dy} + N_3 \frac{dW}{dz} + T_1 \left(\frac{dV}{dz} + \frac{dW}{dy} \right) \right] d\sigma = 0.$$

Faisons-y successivement $W = 0$, $V = y$, $= z$, $= y^2$, $= yz$, $= z^2$, et $V = 0$, $W = z$, $= y$, $= z^2$, $= zy$, $= y^2$, et il viendra aisément les neuf relations

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_\sigma (N_2, N_3 \text{ ou } T_1)\, d\sigma = 0, \\ &\int_\sigma (N_2, N_3 \text{ ou } T_1)\, y\, d\sigma = 0, \\ &\int_\sigma (N_2, N_3 \text{ ou } T_1)\, z\, d\sigma = 0. \end{aligned} \right.$$

Si, au contraire, nous supposons $V = v$, $W = w$, la relation (15 *bis*) devient

$$(17) \qquad \int_\sigma [N_2 \partial_y + N_3 \partial_z + T_1 g_{yz}]\, d\sigma = 0.$$

---

[*] Car on vient de voir que N_2 et T_1 sont négligeables devant leurs dérivées premières en y, z, dérivées supposées au plus, dans ces deux premiers cas, comparables $\frac{dT_3}{dx}$ et par suite à T_3.

Enfin, supposons qu'on différentie en x la première équation (2), en admettant, ce qui aura toujours lieu, que la dérivée $\frac{d\rho X}{dx}$ ne soit pas beaucoup plus grande que la dérivée seconde $\frac{d^2 N_1}{dx^2}$; celle-ci devra être du même ordre que les dérivées premières en y, z de $\frac{dT_3}{dx}$, $\frac{dT_2}{dx}$, c'est-à-dire au plus du même ordre que $\frac{dT_3}{dy}$, $\frac{dT_2}{dz}$.

§ IV. — *Détermination de* N_2, N_3, T_1.

Je me bornerai au cas où la tige est d'une contexture symétrique par rapport au plan des yz, c'est-à-dire au cas où les ∂, g sont donnés en fonction des N, T par les formules (9), et je supposerai même que les coefficients η, η', η'' soient constants sur toute l'étendue d'une même section. Les ∂, g auront généralement leurs dérivées en x, y, z comparables aux dérivées pareilles des N, T [*]. En particulier, les dérivées secondes en x de ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz} seront du même ordre que les dérivées secondes en x de N_1, N_2, N_3, T_1, c'est-à-dire, d'après la remarque qui termine le paragraphe précédent, au plus du même ordre que N_2, N_3, T_1, $\frac{dT_3}{dy}$, $\frac{dT_2}{dz}$. Il en sera de même des dérivées premières en y, z de $\frac{dg_{zx}}{dx}$, $\frac{dg_{xy}}{dx}$, dérivées comparables aux dérivées pareilles de g_{zx}, g_{xy} ou de T_2, T_3. Il suit de là que la première et les deux dernières des relations (4) pourront s'écrire à fort peu près

$$\frac{d^2\partial_x}{dy\,dz} = 0, \quad \frac{d^2\partial_x}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2\partial_x}{dy^2} = 0.$$

Elles donnent en effet dans chaque région de σ, pour les dérivées secondes en y et z de ∂_x, des valeurs au plus comparables à N_2, N_3, T_1, $\frac{dT_3}{dy}$, $\frac{dT_2}{dz}$; par suite, en multipliant ces valeurs par dy ou dz et intégrant,

[*] J'admets dans ce paragraphe, pour abréger le langage, que l'unité de force choisie soit telle, que les N, T se trouvent numériquement du même ordre de grandeur que les ∂, g.

on trouvera que les parties, variables avec y, z dans chaque région, de $\frac{d\partial_z}{dy}$, $\frac{d\partial_z}{dz}$, sont au plus comparables aux produits de N_2, N_3, T_1 par y, z et aux parties variables de T_3, T_2, lesquelles sont elles-mêmes du même ordre que T_3, T_2, ou que g_{xy}, g_{zx}. Or $\frac{d\partial_z}{dy}$, $\frac{d\partial_z}{dz}$ valent identiquement, d'après (1), $-\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{dg_{xy}}{dx}$, $-\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{dg_{zx}}{dx}$, c'est-à-dire $-\frac{d^2v}{dx^2}$, $-\frac{d^2w}{dx^2}$, sauf erreur au plus comparable à g_{xy}, g_{zx}, et v, w, ainsi par suite que leurs dérivées secondes en x, sont continues sur toute l'étendue d'une section σ : donc les dérivées premières $\frac{d\partial_x}{dy}$, $\frac{d\partial_x}{dz}$ sont égales, sur toute l'étendue d'une section σ, à deux quantités constantes, augmentées de termes au plus comparables aux produits de N_2, N_3, T_1 par y, z, et à T_3, T_2. En multipliant encore par dy, dz, ajoutant et intégrant, ces termes ne donneront dans ∂_x que des parties négligeables, c'est-à-dire insensibles en comparaison de N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, et aussi en comparaison des ∂, g. Par conséquent, si l'on appelle $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$ trois fonctions arbitraires de x, et si l'on observe que u et par suite $\frac{du}{dx}$ ou ∂_x sont continus sur toute l'étendue de σ, il viendra

$$(18)\qquad \partial_x = \mathcal{A} + \mathcal{B}z + \mathcal{B}_1 y.$$

Étudions actuellement l'expression $N_2\partial_y + N_3\partial_z + T_1 g_{yz}$ qui entre dans le premier membre de (17). Elle fait partie de l'expression plus générale, essentiellement positive, qui constitue le premier membre de l'inégalité (12 *bis*) et qui a été désignée par 2Φ. Comme, d'après les formules (9), ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz} ne dépendent que de N_1, N_2, N_3, T_1, et g_{zx}, g_{xy} de T_2, T_3, cette expression plus générale est la somme de deux autres entièrement distinctes et essentiellement positives, car chacune d'elles peut subsister quand l'autre est nulle; la seconde, ne contenant que T_2, T_3, pourra être mise sous la forme $e(T_2+\varepsilon T_3)^2+fT_3^2$, c'est-à-dire qu'on aura

$$(19)\qquad T_2 g_{zx} + T_3 g_{xy} = e(T_2+\varepsilon T_3)^2 + fT_3^2;$$

la première, $N_1\partial_x + N_2\partial_y + N_3\partial_z + T_1 g_{yz}$, contenant N_1, N_2, N_3, T_1, sera la somme de quatre carrés, dont le premier est, d'après les formules (9),

$$A\left(N_1 - \frac{BN_2 + B'N_3 - CT_1}{2A} - \frac{\eta N_2 + \eta' N_3 - \eta'' T_1}{2}\right)^2,$$

et dont les trois autres ont la forme

$$b(N_2 + \beta N_3 + \beta' T_1)^2, \quad c(N_3 + \gamma T_1)^2, \quad dT_1^2.$$

La partie de cette expression qui est indépendante de N_1 serait évidemment identique à $N_2\partial_y + N_3\partial_z + T_1 g_{yz}$, si, avant de substituer à ∂_y, ∂_z, g_{yz} leurs valeurs (9), on en ôtait les trois termes affectés de N_1, termes qui sont respectivement $-\eta AN_1$, $-\eta' AN_1$, $\eta'' AN_1$. On a donc l'identité

$$\begin{aligned} & A\left(\frac{BN_2 + B'N_3 - CT_1}{2A} + \frac{\eta N_2 + \eta' N_3 - \eta'' T_1}{2}\right)^2 \\ & \quad + b(N_2 + \beta N_3 + \beta' T_1)^2 + c(N_3 + \gamma T_1)^2 + dT_1^2 \\ & \qquad = (N_2\partial_y + N_3\partial_z + T_1 g_{yz}) + AN_1(\eta N_2 + \eta' N_3 - \eta'' T_1), \end{aligned}$$

ou bien, après quelques transformations faciles et en remplaçant $BN_2 + B'N_3 - CT_1 - AN_1$ par $-\partial_x$,

$$(19\ bis)\quad \left\{ \begin{aligned} & N_2\partial_y + N_3\partial_z + T_1 g_{yz} \\ & \quad = A\left(\frac{BN_2 + B'N_3 - CT_1}{2A} - \frac{\eta N_2 + \eta' N_3 - \eta'' T_1}{2}\right)^2 \\ & \qquad + b(N_2 + \beta N_3 + \beta' T_1)^2 + c(N_3 + \gamma T_1)^2 \\ & \qquad + dT_1^2 - (\eta N_2 + \eta' N_3 - \eta'' T_1)\partial_x. \end{aligned} \right.$$

Substituons, dans (17), le second membre de cette relation (19 *bis*) au premier, et observons que, ∂_x étant linéaire en y et z, et les coefficients η, η', η'' étant supposés constants dans toute l'étendue de σ, les neuf formules (16) donnent

$$\int_\sigma (\eta N_2 + \eta' N_3 - \eta'' T_1)\partial_x = 0;$$

il viendra

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} & \int_\sigma \Big[A\left(\frac{BN_2 + B'N_3 - CT_1}{2A} - \frac{\eta N_2 + \eta' N_3 - \eta'' T_1}{2}\right)^2 \\ & \qquad + b(N_2 + \beta N_3 + \beta' T_1)^2 + c(N_3 + \gamma T_1)^2 + dT_1^2 \Big] d\sigma = 0. \end{aligned} \right.$$

L'intégrale du premier membre, formée d'éléments qui sont la somme de quatre carrés, ne peut être nulle que si chacun de ces carrés s'annule identiquement. On aura donc partout

$$(21) \qquad T_1 = 0, \quad N_3 = 0, \quad N_2 = 0,$$

et par suite, d'après (9),

$$(22) \qquad \partial_y = -\eta\partial_x, \quad \partial_z = -\eta'\partial_x, \quad g_{yz} = \eta''\partial_x,$$

valeurs qui, en y substituant l'expression (18) de ∂_x, rendent identique la quatrième condition de compatibilité (4).

Ainsi, *lorsqu'une tige de contexture symétrique par rapport à ses sections normales n'est soumise sur sa surface à aucune action, si ce n'est vers ses extrémités, et que, de plus, ses fibres longitudinales sont constituées de telle manière qu'elles subiraient d'égales déformations latérales* ∂_y, ∂_z, g_{yz}, *si on les soumettait à des tractions produisant sur toutes la même dilatation* ∂_x, *cette dilatation et les déformations latérales* ∂_y, ∂_z, g_{yz} *varient, à fort peu près, linéairement sur toute l'étendue de chaque section, et les composantes, perpendiculaires à l'axe de la tige, des forces élastiques exercées sur les éléments plans parallèles à cet axe, peuvent être négligées par rapport aux autres forces élastiques. Toutefois il peut y avoir exception pour les parties de la tige très-voisines de ses extrémités.*

Si l'on substitue, dans les trois relations (22), à ∂_x sa valeur (18), et à ∂_y, ∂_z, g_{yz} leurs expressions (1), les deux premières, multipliées respectivement par dy, dz et intégrées, donneront, en appelant f_1, f_2 des fonctions arbitraires de deux variables,

$$(23) \qquad \begin{cases} v = f_1(z, x) - \eta\left(\mathcal{A}y + \mathcal{B}yz + \frac{1}{2}\mathcal{B}_1 y^2\right), \\ w = f_2(y, x) - \eta'\left(\mathcal{A}z + \mathcal{B}_1 zy + \frac{1}{2}\mathcal{B}z^2\right). \end{cases}$$

La troisième (22) devient ensuite

$$(24) \quad -\frac{df_1}{dz} + \left[\tfrac{1}{2}\eta''\mathcal{A} + (\eta'\mathcal{B}_1 + \eta''\mathcal{B})z\right] = \frac{df_2}{dy} - \left[\tfrac{1}{2}\eta''\mathcal{A} + (\eta\mathcal{B} + \eta''\mathcal{B}_1)y\right];$$

or le premier membre de celle-ci est indépendant de y, et le second l'est de z. L'un et l'autre sont donc une simple fonction $\mathcal{C}$ de x, et l'on a

$$\frac{df_1}{dz} = -\mathcal{C} + [\tfrac{1}{2}\eta''\mathcal{A} + (\eta'\mathcal{B}_1 + \eta''\mathcal{B})z],$$
$$\frac{df_2}{dy} = \mathcal{C} + [\tfrac{1}{2}\eta''\mathcal{A} + (\eta\mathcal{B} + \eta''\mathcal{B}_1)y];$$

d'où il résulte, en intégrant après avoir respectivement multiplié par dz, dy, et en appelant $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$ certaines fonctions de x,

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} v &= \mathcal{D} - \mathcal{C}z + \tfrac{1}{2}[\eta''\mathcal{A}z + (\eta'\mathcal{B}_1 + \eta''\mathcal{B})z^2] \\ &\quad - \eta[\mathcal{A}y + \mathcal{B}yz + \tfrac{1}{2}\mathcal{B}_1 y^2], \\ w &= \mathcal{D}_1 + \mathcal{C}y + \tfrac{1}{2}[\eta''\mathcal{A}y + (\eta\mathcal{B} + \eta''\mathcal{B}_1)y^2] \\ &\quad - \eta'[\mathcal{A}z + \mathcal{B}_1 zy + \tfrac{1}{2}\mathcal{B}z^2]. \end{aligned}\right.$$

Exprimons qu'avec ces valeurs de v, w, l'expression $\frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz$ ou $\left(g_{xy} - \frac{dv}{dx}\right)dy + \left(g_{zx} - \frac{dw}{dx}\right)dz$ est une différentielle exacte, c'est-à-dire que la dérivée en z de $g_{xy} - \frac{dv}{dx}$ est égale à la dérivée en y de $g_{zx} - \frac{dw}{dx}$; en appelant K la dérivée de $\mathcal{C}$ par rapport à x, il viendra la relation suivante, qu'on peut appeler *condition d'intégrabilité de u,*

$$(26)\quad \frac{dg_{xy}}{dz} - \frac{dg_{zx}}{dy} + 2K + \frac{d(2\eta\mathcal{B} + \eta''\mathcal{B}_1)}{dx}y - \frac{d(2\eta'\mathcal{B}_1 + \eta''\mathcal{B})}{dx}z = 0.$$

La seconde et la troisième des conditions de compatibilité (4) sont actuellement vérifiées, comme les quatre autres; car, si l'on y remplace ∂_y, ∂_z, g_{yz} par leurs expressions linéaires en y et z, ces conditions deviennent identiques à la relation (26) différentiée en y ou en z.

§ V. — *Détermination de* N_1, T_3, T_2.

Les composantes N_2, N_3, T_1 étant nulles, la première formule (9) donne, en représentant comme à l'ordinaire par E le coefficient d'élasticité $\frac{1}{A}$,

$$(27)\qquad N_1 = E\partial_x = E(\mathcal{A} + \mathcal{B}z + \mathcal{B}_1 y);$$

la force N_1 sera donc connue si nous parvenons à obtenir les valeurs de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$.

Occupons-nous actuellement des forces élastiques T_2, T_3, les seules dont la forme reste à déterminer. Comme nous avons déjà satisfait aux deux dernières équations indéfinies (2), aux six conditions de compatibilité (4), aux équations définies concernant N_2, N_3, T_1 et aux conditions de continuité de v et w, nous ne pouvons plus employer, outre les formules obtenues au paragraphe précédent et la condition de continuité de u sur toute l'étendue de la section σ, que la première équation indéfinie (2), la première relation (14), spéciale au contour s, et la relation analogue relative aux lignes s_1. Ces équations, en remplaçant dans la première $\frac{dN_1}{dx}$ par sa valeur tirée de (27), sont :

$$(28)\qquad \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} + \rho X + \frac{d.\mathrm{E}\mathcal{A}}{dx} + \frac{d.\mathrm{E}\mathcal{B}}{dx}z + \frac{d.\mathrm{E}\mathcal{B}_1}{dx}y = 0;$$

(29) sur tout le contour s, $T_3 dz - T_2 dy = 0$: en un point quelconque d'une ligne s_1, l'expression $T_3 dz - T_2 dy$ doit prendre des valeurs égales dans les deux régions de σ que cette ligne sépare.

On substituera dans ces équations, à T_3, T_2, leurs expressions linéaires en fonction de g_{xy}, g_{zx}, puis à g_{xy}, g_{zx}, leurs valeurs $\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$, $\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}$, et enfin à $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dw}{dx}$ les expressions que les relations (25), différentiées en x, donneront pour ces dérivées. Les équations (28) et (29) ne contiendront plus d'autres inconnues que u et de simples fonctions de x, notamment $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}$. Il est clair qu'il faut chercher d'autres relations pouvant servir à déterminer ces fonctions de x.

Pour cela, concevons d'abord qu'on assimile les sections normales σ à des surfaces matérielles ayant en chacun de leurs points, par unité d'aire, une masse égale à la valeur du coefficient d'élasticité E en ce point; comme la tige est supposée sensiblement cylindrique et sa constitution peu variable avec x, nous pouvons admettre que les centres de gravité de ces surfaces soient tous, sur une petite longueur, alignés à peu près le long d'une même droite à laquelle elles sont précisément normales et qui est l'axe de la tige, et admettre aussi que les axes principaux d'inertie des mêmes surfaces, relatifs à ces centres de gravité, se trouvent tous, antérieurement aux déplacements, dans deux plans rectangulaires passant par l'axe de la tige. Nous supposerons que les axes des x, y, z, par rapport auxquels les déplacements d'une partie assez courte de la tige sont très-petits, aient été choisis de manière à coïncider primitivement avec l'axe de la tige et avec les deux axes d'inertie principaux d'une des sections σ comprises dans cette partie. D'après les propriétés connues des centres de gravité et des axes d'inertie principaux, on aura, pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites assez rapprochées,

$$(30) \qquad \int_\sigma \mathrm{E}y\,d\sigma = \int_\sigma \mathrm{E}z\,d\sigma = 0, \quad \int_\sigma \mathrm{E}yz\,d\sigma = 0.$$

De plus, si l'on appelle $\mathcal{E}$ la valeur moyenne de E sur toute l'étendue d'une section, $\mathcal{E}\mathrm{I}$, $\mathcal{E}\mathrm{I}'$ les deux moments d'inertie principaux de cette section relatifs à son centre de gravité, ces quantités auront pour valeurs

$$(31) \qquad \mathcal{E} = \frac{1}{\sigma}\int_\sigma \mathrm{E}\,d\sigma, \quad \mathcal{E}\mathrm{I} = \int_\sigma \mathrm{E}z^2\,d\sigma, \quad \mathcal{E}\mathrm{I}' = \int_\sigma \mathrm{E}y^2\,d\sigma.$$

Cela posé, menons, par le centre de gravité d'une section $x = x_0$, trois axes parallèles à ceux des x, des y et des z, et observons que le problème de l'équilibre serait indéterminé si l'on ne donnait pas les résultantes suivant ces trois axes des forces qui agissent sur toute la portion de la tige située au delà de la section considérée, du côté des x positifs, et les moments totaux de ces forces par rapport aux mêmes axes. Appelons respectivement $\mathcal{N}$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}$ ces résultantes, et M, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$ ces moments, quantités supposées connues, et, d'après des principes élémentaires de statique, égalons-les aux résultantes et aux moments pareils des forces extérieures ρX, ρY, ρZ qui agissent par unité de volume sur le tronçon de la tige compris entre la section $x = x_0$ et une autre section assez voisine $x = x_0 + \Delta x$, et des actions élastiques exercées sur cette seconde section. Les résultantes de toutes ces forces sont respectivement, suivant les axes menés par le centre de gravité de la section $x = x_0$, parallèlement à ceux des x, des y et des z,

$$(32)\quad \begin{cases} \mathfrak{N} = \int_{x_0}^{x} dx \int_{\sigma} \rho X d\sigma + \int_{\sigma} N_1 d\sigma, \\ \mathfrak{F}_1 = \int_{x_0}^{x} dx \int_{\sigma} \rho Y d\sigma + \int_{\sigma} T_3 d\sigma, \\ \mathfrak{F} = \int_{x_0}^{x} dx \int_{\sigma} \rho Z d\sigma + \int_{\sigma} T_2 d\sigma. \end{cases}$$

Pour obtenir leurs moments respectifs autour des mêmes axes, observons que les coordonnées des divers points du tronçon, par rapport à ces axes, n'ont pu changer que de quantités insensibles à cause de la petitesse des déformations ∂, g, et qu'on peut les supposer, après les déplacements, à fort peu près égales à leurs valeurs primitives $x - x_0$, y, z. Les moments cherchés seront ainsi

$$(32\ bis)\quad \begin{cases} M = \int_{x_0}^{x} dx \int_{\sigma} \rho (yZ - zY) d\sigma + \int_{\sigma} (yT_2 - zT_3) d\sigma, \\ \mathfrak{M} = \int_{x_0}^{x} dx \int_{\sigma} \rho [zX - (x - x_0) Z] d\sigma + \int_{\sigma} [zN_1 - (x - x_0) T_2] d\sigma, \\ \mathfrak{M}_1 = \int_{x_0}^{x} dx \int_{\sigma} \rho [(x - x_0) Y - yX] d\sigma + \int_{\sigma} [(x - x_0) T_3 - yN_1] d\sigma. \end{cases}$$

Dans la première formule (32) et dans les deux dernières (32 *bis*), substituons à N_1 sa valeur (27), et tenons compte des relations (30) et (31). Il viendra

$$\int_{\sigma} N_1 d\sigma = \mathcal{A} \mathcal{E} \sigma, \quad \int_{\sigma} z N_1 d\sigma = \mathcal{B} \mathcal{E} I, \quad \int_{\sigma} y N_1 d\sigma = \mathcal{B}_1 \mathcal{E} I'.$$

Remplaçons en outre, dans les deux dernières relations (32 *bis*), $\int_{\sigma} T_2 d\sigma$, $\int_{\sigma} T_3 d\sigma$ par leurs valeurs tirées des deux dernières (32), et ensuite les termes

$$-(x-x_0)\mathfrak{F},\quad -(x-x_0)\mathfrak{F}_1,$$
$$(x-x_0)\int_{x_0}^{x}dx\int_\sigma \rho Z\,d\sigma,$$
$$(x-x_0)\int_{x_0}^{x}dx\int_\sigma \rho Y\,d\sigma,$$

respectivement par les expressions suivantes, qui ont les mêmes valeurs, ainsi qu'on le reconnait en différentiant ces termes,

$$-\int_{x_0}^{x}\mathfrak{F}dx,\quad -\int_{x_0}^{x}\mathfrak{F}_1\,dx,$$
$$\int_{x_0}^{x}\left[(x-x_0)\int_\sigma \rho Z\,d\sigma+\int_{x_0}^{x}dx\int_\sigma \rho Z\,d\sigma\right]dx,$$
$$\int_{x_0}^{x}\left[(x-x_0)\int_\sigma \rho Y\,d\sigma+\int_{x_0}^{x}dx\int_\sigma \rho Y\,d\sigma\right]dx.$$

La première relation (32) et les trois (32 *bis*) deviendront

$$(33)\quad\left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{N}=\mathcal{A}\mathcal{E}\sigma+\int_{x_0}^{x}dx\int_\sigma \rho X\,d\sigma,\\
&\mathfrak{M}=\mathfrak{B}\mathcal{E}I+\int_{x_0}^{x}\left[-\mathfrak{F}+\int_\sigma \rho zX\,d\sigma+\int_{x_0}^{x}dx\int_\sigma \rho Z\,d\sigma\right]dx,\\
&-\mathfrak{M}_1=\mathfrak{B}_1\mathcal{E}I'+\int_{x_0}^{x}\left[-\mathfrak{F}_1+\int_\sigma \rho yX\,d\sigma+\int_{x_0}^{x}dx\int_\sigma \rho Y\,d\sigma\right]dx,\\
&M=\int_\sigma (yT_2-zT_3)\,d\sigma+\int_{x_0}^{x}dx\int_\sigma \rho(yZ-zY)\,d\sigma.
\end{aligned}\right.$$

Quant aux deux dernières (32), il est inutile de s'en occuper; car elles résultent de l'équation (28), des deux conditions spéciales (29) et des valeurs de $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ données par deux des relations (33). En effet, si, U désignant une fonction continue quelconque de x, y, z, on multiplie la première (28) par $U\,d\sigma$, et si l'on intègre dans toute l'étendue d'une section σ, en opérant comme on l'a fait pour établir la formule (15), et en tenant compte des deux premières conditions spéciales (29), il viendra

$$(34)\quad \int_\sigma \left(\mathrm{T}_3 \frac{d\mathrm{U}}{dy} + \mathrm{T}_2 \frac{d\mathrm{U}}{dz}\right) d\sigma = \int_\sigma \mathrm{U} \left(\rho \mathrm{X} + \frac{d.\mathrm{E}\mathcal{A}}{dx} + \frac{d.\mathrm{E}\mathcal{B}}{dx} z + \frac{d.\mathrm{E}\mathcal{B}_1}{dx} y\right) d\sigma.$$

Or cette relation, suivant qu'on pose $\mathrm{U} = y$ ou $\mathrm{U} = z$, devient aisément l'une ou l'autre des deux dernières (32). Faisons, par exemple, $\mathrm{U} = z$, remplaçons, dans (34), $\frac{d.\mathrm{E}\mathcal{A}}{dx}$ par $\mathrm{E}\frac{d\mathcal{A}}{dx} + \mathcal{A}\frac{d\mathrm{E}}{dx}$, et de même $\frac{d.\mathrm{E}\mathcal{B}}{dx}$, $\frac{d.\mathrm{E}\mathcal{B}_1}{dx}$ par leurs valeurs analogues, puis observons que, la surface latérale de la tige étant sensiblement cylindrique, on peut différentier, par rapport à x, les relations (30) et (31) sans faire varier σ ni $d\sigma$, et écrire notamment

$$\int_\sigma \frac{d\mathrm{E}}{dx} y\, d\sigma = 0, \quad \int_\sigma \frac{d\mathrm{E}}{dx} z\, d\sigma = 0, \quad \int_\sigma \frac{d\mathrm{E}}{dx} yz\, d\sigma = 0, \quad \int_\sigma \frac{d\mathrm{E}}{dx} z^2 d\sigma = \frac{d.\mathcal{E}\mathrm{I}}{dx}:$$

la relation (34) sera simplement

$$(35)\quad \int_\sigma \mathrm{T}_2 d\sigma = \int_\sigma \rho z \mathrm{X} d\sigma + \frac{d\mathcal{B}}{dx} \mathcal{E}\mathrm{I} + \mathcal{B} \frac{d.\mathcal{E}\mathrm{I}}{dx} = \int_\sigma \rho z \mathrm{X} d\sigma + \frac{d.\mathcal{B}\mathcal{E}\mathrm{I}}{dx};$$

or la seconde (33), différentiée par rapport à x, donne

$$\frac{d.\mathcal{B}\mathcal{E}\mathrm{I}}{dx} = \mathcal{F} - \int_\sigma \rho z \mathrm{X} d\sigma - \int_{x_0}^{x} dx \int_\sigma \rho \mathrm{Z} d\sigma,$$

ce qui rend la relation (35) identique à la troisième (32).

Les valeurs de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$ étant fournies par les trois premières formules (33), il est clair que la relation (27) fera complétement connaître N_1; je vais démontrer que les relations (28), (29), et la quatrième (33) déterminent ensuite T_3, T_2, pourvu qu'on y remplace provisoirement, comme il a été dit, T_3, T_2 par leurs expressions linéaires en fonction de g_{zx}, g_{xy}, ces glissements eux-mêmes par leurs valeurs $\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}$, $\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$, et $\frac{dw}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ par les expressions que donnent pour ces dérivées les relations (25) différentiées en x.

Il suffit de faire voir pour cela que toutes les valeurs possibles de u, continues dans tout l'intérieur d'une section, qui vérifient ces équations pour des valeurs données de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$, conduisent absolument aux mêmes valeurs de T_3, T_2, ou, en d'autres termes, que, si l'on remplace dans ces équations u par $u+u'$, les fonctions de x inconnues Θ, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$ par $\Theta+\Theta'$, $\mathcal{D}+\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}_1+\mathcal{D}'_1$, et enfin T_2, T_3, g_{zx}, g_{xy}, v, w, fonctions linéaires de u, Θ, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$, ou de leurs dérivées, par $T_2+T'_2$, $T_3+T'_3$, $g_{zx}+g'_{zx}$, $g_{xy}+g'_{xy}$, $v+v'$, $w+w'$, on aura forcément

$$T'_2=0,\quad T'_3=0.$$

En effet, la substitution de $u+u'$, $\Theta+\Theta'$, $\mathcal{D}+\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}_1+\mathcal{D}'_1$, $T_2+T'_2$, $T_3+T'_3$, $v+v'$, $w+w'$ à u, Θ, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$, T_2, T_3, v, w change les équations (25), (28), (29) et la dernière (33) en celles-ci :

(36) $$v'=\mathcal{D}'-\Theta' z,\quad w'=\mathcal{D}'_1+\Theta' y;$$

(37) $$\frac{dT'_3}{dy}+\frac{dT'_2}{dz}=0;$$

(38) $$\begin{cases}\text{sur le contour } s,\quad T'_3\,dz-T'_2\,dy=0:\\ \text{des deux côtés des lignes } s_1, \text{ l'expression}\quad T'_3\,dz-T'_2\,dy\\ \text{prend des valeurs égales;}\end{cases}$$

(39) $$0=\int_\sigma (yT'_2-zT'_3)\,d\sigma.$$

Désignons par U' une fonction qui, comme u', varie avec continuité dans tout l'intérieur de chaque section, bien que ses dérivées puissent être discontinues sur les lignes s_1, et, après avoir multiplié (37) par $U'd\sigma$, intégrons par parties le résultat dans tout l'intérieur d'une section σ, en tenant compte des relations (38), comme nous l'avons fait pour établir la formule (34) ou la formule (15). Nous obtiendrons

(40) $$\int_\sigma\left(T'_3\frac{dU'}{dy}+T'_2\frac{dU'}{dz}\right)d\sigma=0.$$

Supposons d'abord successivement $U'=y$ et $U'=z$, il viendra

(41) $$\int_\sigma T'_3\,d\sigma=0,\quad \int_\sigma T'_2\,d\sigma=0.$$

Faisons encore $U' = u'$, et observons que, d'après (36),

$$\frac{du'}{dy} = g'_{xy} - \frac{dv'}{dx} = g'_{xy} - \frac{d\mathfrak{P}'}{dx} + \frac{d\mathfrak{S}'}{dx} z, \quad \frac{du'}{dz} = g'_{xz} - \frac{d\mathfrak{P}'_1}{dx} - \frac{d\mathfrak{S}'}{dx} y;$$

la relation (40) donnera

$$\int_\sigma (T'_3 g'_{xy} + T'_2 g'_{zx})\, d\sigma$$
$$= \frac{d\mathfrak{P}'}{dx} \int_\sigma T'_3 d\sigma + \frac{d\mathfrak{P}'_1}{dx} \int_\sigma T'_2 d\sigma + \frac{d\mathfrak{S}'}{dx} \int_\sigma (y T'_2 - z T'_3)\, d\sigma.$$

Or le second nombre de cette relation est nul, d'après (39) et (41). Donc le premier l'est aussi, et, comme l'expression $T'_2 g'_{zx} + T'_3 g'_{xy}$ est, par sa forme, essentiellement positive d'après (19), il faudra qu'on ait $T'_2 = 0$, $T'_3 = 0$.

Nous admettrons désormais que les intégrales $\int_\sigma \rho z X d\sigma$, $\int_\sigma \rho y X d\sigma$ soient négligeables dans les formules (33). Cette supposition est permise pour deux raisons : 1° l'expression $\int_\sigma \rho X d\sigma$ n'est généralement que de l'ordre de grandeur de $\mathfrak{F}$ ou $\mathfrak{F}_1$, et les intégrales considérées étant au plus comparables au produit de cette expression par les dimensions transversales de la tige, sont négligeables devant $\mathfrak{F}$ ou $\mathfrak{F}_1$; 2° ces mêmes intégrales seraient nulles si le centre des forces parallèles $\rho X d\sigma$, supposées appliquées aux éléments $d\sigma$ d'une section, coïncidait avec le centre de gravité de la section ; or ces deux centres ne seront jamais qu'à une distance insensible l'un de l'autre.

Étudions spécialement le cas où la force X est supposée constante sur toute l'étendue d'une même section σ, et où, la tige étant homogène, les coefficients A ou $\frac{1}{E}$, η, η', η'', G, G', H, H' des formules (9) et la densité ρ sont constants. Les relations (30) et (31) se réduisent alors à

$$\int_\sigma y d\sigma = 0, \quad \int_\sigma z d\sigma = 0, \quad \int_\sigma yz d\sigma = 0, \quad \mathcal{E} = E, \quad I = \int_\sigma z^2 d\sigma, \quad I' = \int_\sigma y^2 d\sigma.$$

Proposons-nous de déterminer directement, dans ce cas, en fonction des trois données $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}$, M, les forces T_2, T_3 sur toute l'étendue de la section quelconque $x = x_0$. Les formules (33) donneront

$$(42)\quad \frac{d\mathcal{A}}{dx} = -\frac{\rho X}{E},\quad \frac{d\mathcal{B}}{dx} = \frac{\mathcal{F}}{EI},\quad \frac{d\mathcal{B}_1}{dx} = \frac{\mathcal{F}_1}{EI'},\quad M = \int_\sigma (y T_2 - z T_3)\, d\sigma.$$

Si l'on appelle φ une certaine fonction de y, z, l'équation (28), qu'on pourra écrire

$$\frac{d}{dy}\left(T_3 + \frac{\mathcal{F}_1}{2I'} y^2\right) + \frac{d}{dz}\left(T_2 + \frac{\mathcal{F}}{2I} z^2\right) = 0,$$

permettra de poser

$$(43)\qquad T_2 = -\frac{d\varphi}{dy} - \frac{\mathcal{F}}{2I} z^2,\quad T_3 = \frac{d\varphi}{dz} - \frac{\mathcal{F}_1}{2I'} y^2;$$

la condition d'intégrabilité (26), si l'on y substitue à g_{zx}, g_{xy} leurs valeurs (9), deviendra l'équation indéfinie

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} & G\frac{d^2\varphi}{dy^2} + G'\frac{d^2\varphi}{dz^2} - (H + H')\frac{d^2\varphi}{dy\,dz} \\ & \quad + 2K + \frac{\mathcal{F}}{EI}[2\eta y - (\eta'' + H'E)z] - \frac{\mathcal{F}_1}{EI'}[2\eta' z - (\eta'' + HE)y] = 0. \end{aligned}\right.$$

Enfin la condition (29), spéciale au contour s, donnera

$$(45)\qquad d\varphi + \frac{\mathcal{F}}{2I} z^2\, dy - \frac{\mathcal{F}_1}{2I'} y^2\, dz = 0 \quad \text{(le long du contour } s\text{)},$$

et la quatrième relation (42) sera changée en

$$(46)\qquad M = -\int_\sigma \left(y\frac{d\varphi}{dy} + z\frac{d\varphi}{dz} + \frac{\mathcal{F}}{2I} y z^2 - \frac{\mathcal{F}_1}{2I'} z y^2\right) d\sigma.$$

Lorsque la tige est pleine, c'est-à-dire que le contour s ne comprend qu'une seule courbe fermée, ces relations déterminent φ, à cela près d'une constante arbitraire qui ne change rien aux dérivées de φ en y et z, ni par suite à T_2, T_3. Mais il n'en est plus ainsi lorsque la tige est creuse, ou que le coutour s comprend une courbe extérieure et une ou plusieurs autres courbes distinctes et fermées, situées dans la première. En effet, la condition d'intégrabilité (26) ou (44) exprime seulement que l'intégrale

$$\int du \quad \text{ou} \quad \int\left(g_{xy}dy + g_{zx}dz - \frac{dv}{dx}dy - \frac{dw}{dx}dz\right),$$

prise entre deux points extrêmes et le long d'une certaine ligne, a la même valeur, si l'on remplace cette ligne par une autre infiniment voisine qui joigne les mêmes points extrêmes. Lorsque la section σ est pleine, deux lignes quelconques qui joignent deux points peuvent être amenées à coïncider au moyen d'une série de déformations infiniment petites qui rapprochent de plus en plus l'une d'elles de l'autre, et, par suite, la constance de u pour une valeur quelconque de y et z est assurée au moyen de la condition (44), quel que soit le chemin qui conduise au point (y, z). Mais il n'en est pas ainsi lorsque la section comprend dans son intérieur un ou plusieurs espaces qui lui sont étrangers.

Les déplacements u et par suite la relation (44) n'étant considérés que dans les espaces appartenant à σ, on ne pourra relier, au moyen de déformations infiniment petites, deux lignes menées entre deux points, qu'autant que ces lignes ne comprendront entre elles aucune des courbes intérieures qui font partie du contour s. Dans le cas contraire, on ne pourra passer de l'une de ces lignes à l'autre qu'au moyen de lignes intermédiaires telles, que deux successives diffèrent parfois de tout le contour d'une de ces courbes intérieures comprises entre les deux lignes considérées. La continuité de u ne sera donc assurée que si l'on a

$$(47) \qquad \int\left(g_{xy}dy + g_{zx}dz - \frac{dv}{dx}dy - \frac{dw}{dx}dz\right) = 0,$$

l'intégrale étant prise tout le long d'une quelconque des courbes fermées intérieures du contour s. On y substituera, à g_{xy}, g_{zx} leurs expressions (9) en fonction de T_2, T_3 et puis, d'après (43), en fonction de φ, à $\frac{dv}{dx}$ et $\frac{dw}{dx}$ leurs valeurs tirées de (25) : on pourra faire abstraction, dans ces valeurs, des termes constants $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d\omega_1}{dx}$, et de ceux qui contiendront la dérivée de $\mathcal{A}$ en x, termes qui, multipliés par dy ou par dz, et intégrés sur toute la longueur d'un contour fermé, donnent zéro pour résultat.

Les relations (44), (45), (46) et (47) détermineront complétement φ, à une constante près. En effet, si nous y remplaçons φ par $\varphi+\varphi'$, K par $K+K'$, et si nous représentons $-\frac{d\varphi'}{dy}$, $\frac{d\varphi'}{dz}$ par $T'_2, T'_3, G'T'_3+H'T'_2$, $GT'_2+HT'_3$ par g'_{xy}, g'_{zx}, les relations (44), (45), (46) et (47) deviendront

$$(48)\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{dg'_{xy}}{dz}-\dfrac{dg'_{zx}}{dy}+2K'=0,\\ d\varphi'=0,\quad \text{sur le contour } s,\\ 0=-\displaystyle\int_\sigma\left(y\frac{d\varphi'}{dy}+z\frac{d\varphi'}{dz}\right)d\sigma,\\ \displaystyle\int[g'_{xy}dy+g'_{zx}dz+K'(zdy-ydz)]=0,\\ \quad\text{sur chaque courbe fermée intérieure du contour } s.\end{array}\right.$$

Enfin, sans rien changer aux dérivées de φ', on pourra supposer $\varphi'=0$ en un point de la courbe extérieure du contour s, et, à cause de $d\varphi'=0$ le long de cette courbe, la fonction φ' sera nulle sur toute sa longueur.

Multiplions la première équation (48) par $\varphi' d\sigma$, et intégrons par parties exactement comme nous avons fait pour la formule (15). En remplaçant les cosinus n, p par leurs valeurs (13 *ter*) et désignant par $\int_s$ une intégrale prise sur toute l'étendue du contour, il viendra

$$-\int_s\varphi'(g'_{xy}dy+g'_{zx}dz)-\int_\sigma\left(g'_{xy}\frac{d\varphi'}{dz}-g'_{zx}\frac{d\varphi'}{dy}\right)d\sigma+2K'\int_\sigma\varphi'd\sigma=0.$$

En intégrant de même par parties le second membre de la troisième relation (48), il vient

$$0=-\int_s\varphi'(ydz-zdy)+2\int_\sigma\varphi'd\sigma;$$

cette relation permet d'éliminer $2\int_\sigma\varphi'd\sigma$ de la précédente; celle-ci, en y remplaçant $-\frac{d\varphi'}{dy}$, $\frac{d\varphi'}{dz}$ par T'_2, T'_3 devient ainsi

$$(49)\qquad \left\{\begin{aligned} &-\int_s \varphi'[g'_{xy}dy + g'_{zx}dz + K'(z\,dy - y\,dz)] \\ &\qquad\qquad -\int_\sigma (T'_3 g'_{xy} + T'_2 g'_{zx})\,d\sigma = 0. \end{aligned}\right.$$

Or $\varphi' = 0$ sur la partie extérieure de s, ce qui annule la portion de la première intégrale de (49) qui concerne cette partie du contour : sur chacune des courbes intérieures de s, φ' est constant, puisqu'on y a $d\varphi' = 0$, et l'on peut faire sortir φ' du signe $\int$; mais alors chacune de de ces portions devient nulle en vertu des quatrièmes relations (48), Il ne reste ainsi, dans (49), que la seconde intégrale, dont tous les éléments ont essentiellement le même signe, puisque, d'après (19), l'expression $T'_3 g'_{xy} + T'_2 g'_{zx}$ est positive par sa forme même. On aura donc forcément $T'_3 = 0$, $T'_2 = 0$, et, par suite, $\varphi' = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

En résumé, si l'on suppose données les actions extérieures exercées sur toute la masse de la tige et à ses extrémités, les forces élastiques T_3, T_2 seront connues sur une section quelconque de la tige, pourvu qu'on puisse effectuer les intégrations indiquées dans ce paragraphe. D'autre part, la formule (27) jointe aux trois premières (33), donnera N_1, et N_2, N_3, T_1 sont nulles. Donc toutes les forces élastiques exercées à l'intérieur de la tige seront connues, et il en sera par suite de même des six déformations élémentaires ∂, g. Il faudra toutefois excepter les parties de la tige situées à de petites distances des extrémités; car les dérivées de N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, dans le sens de l'axe, n'y sont pas très-petites, comme le suppose notre analyse, par rapport à leurs dérivées dans les sens transversaux, si ce n'est pour certains modes très-particuliers d'application des forces qui agissent aux extrémités mêmes.

§ VI. — *Forme de la tige après les déplacements.*

La forme nouvelle de la tige sera connue, si l'on sait construire et associer, après les déplacements : 1° les divers éléments matériels infiniment petits en lesquels on peut supposer que son axe ait été préalablement divisé; 2° la surface en laquelle s'est changée la section, primitivement normale, menée par un point quelconque de cet axe. Nous appellerons s' la distance primitive, comptée le long de l'axe, d'une quelconque de ces sections, ou du point matériel où elle coupe l'axe, à une extrémité de celui-ci prise pour origine, et nous supposerons la tige divisée en tronçons infiniment minces dont l'un sera compris entre cette section normale et celle qui était d'abord à une distance de l'origine exprimée par $s' + ds'$.

Les points matériels compris dans le tronçon considéré seront rapportés, avant et après les déplacements, à un système d'axes rectangulaires de x', y', z', ayant : 1° son origine au point matériel de l'axe de la tige qui était d'abord à la distance s' de l'origine de la tige; 2° son axe des x' constamment tangent, en ce point, à l'axe de la tige, et 3° son plan des $x'y'$ également tangent à la ligne matérielle qui coïncidait, antérieurieurement aux déplacements, avec l'axe des y', et qui était un des axes d'inertie principaux de la section.

Nous appellerons x', y', z' les trois coordonnées primitives, par rapport à ce système d'axes, d'un point matériel quelconque du tronçon, et $x' + u'$, $y' + v'$, $z' + w'$ les coordonnées du même point après les déplacements. Le tronçon n'ayant qu'une longueur primitive égale à ds', la coordonnée x' sera infiniment petite; de plus, les déplacements v', w' sont très-petits par rapport à y', z', sans quoi les déformations ∂, g ne seraient pas très-petites comme on le suppose. Enfin, pour $x' = y' = z' = 0$, on aura : 1° $u' = v' = w' = 0$, puisque le même point matériel sert toujours d'origine; 2° $\frac{dv'}{dx'} = \frac{dw'}{dx'} = 0$, puisque l'axe des x' est tangent à l'axe de la tige, ou que les déplacements v', w' sont nuls suivant cet axe sur une longueur infiniment petite; 3° $\frac{dw'}{dy'} = 0$, car le plan des $x'y'$ ne cesse pas de contenir, sur une longueur infiniment petite, la ligne matérielle qui coïncidait d'abord avec l'axe des y'. Il résulte donc du choix qu'on a fait des axes des x', y', z', les relations

$$(50)\quad u' = v' = w' = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dv'}{dx'} = \frac{dw'}{dx'} = \frac{dw'}{dy'} = 0, \quad \text{pour} \quad x' = y' = z' = 0.$$

Si l'axe de la tige, c'est-à-dire le lieu géométrique, antérieurement aux déplacements, des centres de gravité des sections normales (en supposant aux divers points de celles-ci des densités superficielles égales aux coefficients d'élasticité E en ces points), n'est pas occupé par la matière de la tige, mais se trouve situé, soit dans une cannelure formée par son contour extérieur, soit dans une cavité intérieure quand elle est tubulaire, on peut néanmoins se représenter cette cannelure ou cette cavité comme occupée par une matière d'une densité et d'une résistance infiniment petites, dont les divers points subiraient des déplacements transversaux v, w donnés par les mêmes formules (25) que ceux des points effectifs de la tige, et des déplacements longitudinaux u, continus, du même ordre de grandeur que ceux de la tige, et astreints seulement à être égaux, sur la surface de la cannelure ou de la cavité, aux déplacements u effectifs, et à varier avec x de manière que la dilatation ∂_x y soit régie, comme dans la tige, par la formule (18). Ce cas sera ainsi ramené à celui d'une tige dont l'axe est situé dans l'espace occupé par sa matière, et on pourra lui appliquer les considérations précédentes : par exemple, la suite des points matériels fictifs qui coïncidait primitivement avec l'axe géométrique de la tige pourra être regardée, après les déplacements, comme son axe matériel.

Nous chercherons d'abord le moyen de calculer u', v', w' pour tous les points du tronçon considéré, afin de construire en particulier la section normale qui coïncidait primitivement avec le plan des $x'y'$ et l'élément de l'axe de la tige (dont nous appellerons O′, O'_1 les extrémités) qui mesurait la longueur ds' du tronçon; puis nous verrons comment on pourrait fixer, en partant de la seconde extrémité O'_1 de cet élement prise pour origine, les nouveaux axes des x', y', z' relatifs au tronçon suivant, de manière à rattacher chaque tronçon au précédent, et à déterminer ainsi la forme complète de la tige, quelque grandes que soient les déformations totales qu'elle a subies.

Il est évident que les axes des x', y', z' spéciaux aux divers tronçons étaient, antérieurement aux déplacements observés, sensiblement parallèles aux axes des x, y, z considérés aux paragraphes précédents. Il sera donc permis, pour la petite portion de la tige dont les déplacements u, v, w par rapport aux axes des x, y, z sont très-petits, et suivent par suite les lois établies dans ces paragraphes, de remplacer, dans les formules qui expriment ces lois, ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} par $\frac{du'}{dx'}$, $\frac{dv'}{dy'}$, $\frac{dw'}{dz'}$, $\frac{dv'}{dz'}+\frac{dw'}{dy'}$, $\frac{dw'}{dx'}+\frac{du'}{dz'}$, $\frac{du'}{dy'}+\frac{dv'}{dx'}$.

Nous supposerons que la section normale dont la distance primitive à l'origine de la tige est s' soit justement celle dont nous avons appelé au paragraphe précédent x_0 la distance primitive à l'origine des coordonnées x, y, z. En comparant le système des x', y', z' à celui des x, y, z, il est clair qu'on aura, pour tous les points du tronçon, $x' = x - x_0$, $y' = y$, $z' = z$, et que u', v', w' ne pourront différer de u, v, w, si ce n'est dans les termes qui correspondent à un petit mouvement d'ensemble des axes des x, y, z par rapport au tronçon. Les valeurs de v', w' seront donc fournies par les formules (25) dans lesquelles il faudra remplacer x par $x_0 + x'$, y par y', z par z', et où les fonctions Φ, Φ_1 se détermineront en exprimant que $v' = w' = 0$ et $\frac{dv'}{dx} = \frac{dw'}{dx} = 0$ pour $x' = y' = z' = 0$. Sauf erreur infiniment petite de l'ordre de x'^2, on aura, par suite,

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} v' &= -\mathcal{C}z' + \tfrac{1}{2}\left[\eta''\mathcal{A}z' + (\eta'\mathcal{B}_1 + \eta''\mathcal{B})z'^2\right] \\ &\quad - \eta(\mathcal{A}y' + \mathcal{B}y'z' + \tfrac{1}{2}\mathcal{B}_1 y'^2). \\ w' &= \mathcal{C}y' + \tfrac{1}{2}\left[\eta''\mathcal{A}y' + (\eta\mathcal{B} + \eta''\mathcal{B}_1)y'^2\right] \\ &\quad - \eta'(\mathcal{A}z' + \mathcal{B}_1 y'z' + \tfrac{1}{2}\mathcal{B}z'^2). \end{aligned}\right.$$

Les valeurs de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$ pour x' très-petit sont, d'après (33) $\Big[$en négligeant, comme il a été dit après les formules (41), $\int_\sigma \rho z \mathrm{X}\, d\sigma$, $\int_\sigma \rho y \mathrm{X}\, d\sigma\Big]$,

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{\mathcal{E}\sigma}\left(\mathcal{N} - x'\int_\sigma \rho \mathrm{X}\, d\sigma\right), \\ \mathcal{B} &= \frac{1}{\mathcal{E}\mathrm{I}}(\mathcal{M} + x'\mathcal{F}), \\ \mathcal{B}_1 &= \frac{1}{\mathcal{E}\mathrm{I}'}(-\mathcal{M}_1 + x'\mathcal{F}_1); \end{aligned}\right.$$

on les portera dans (51) et dans l'expression de ∂_x,

$$(52\ bis) \qquad \partial_x = \mathcal{A} + \mathcal{B} z' + \mathcal{B}_1 y'.$$

Le coefficient $\mathfrak{C}$, qui entre encore dans les expressions de v', w', se calcule aisément : sa dérivée par rapport à x a été désignée, aux paragraphes précédents, par K, et déterminée, sur la section $x = x_0$, en même temps que T_2, T_3. Sauf erreur de l'ordre x'^2, $\mathfrak{C}$ est donc égal à Kx', augmenté de sa valeur pour $x' = 0$; or celle-ci, devant être telle que, pour $x' = y' = z' = 0$, on ait, d'après (50), $\frac{dw'}{dy'} = 0$, n'est autre que celle de $-\frac{1}{2}\eta''\mathcal{A}$ pour $x' = 0$, et vaut $-\frac{\eta''\mathfrak{M}}{2\mathcal{E}\sigma}$. On a donc

$$(53) \qquad \mathfrak{C} = -\frac{\eta''\mathfrak{M}}{2\mathcal{E}\sigma} + Kx'.$$

Les formules (51), avec les valeurs (52) et (53) de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$, $\mathfrak{C}$, fourniront v' et w', non-seulement pour $x' = 0$, c'est-à-dire sur la première base du tronçon, mais encore, sauf erreur de l'ordre x'^2, dans tout l'intérieur du tronçon. On pourra donc en déduire les valeurs de $\frac{dv'}{dx'}$, $\frac{dw'}{dx'}$ pour $x' = 0$. Ces valeurs, portées dans les identités

$$(53\ bis) \qquad \frac{du'}{dy'} = g_{xy} - \frac{dv'}{dx'}, \quad \frac{du'}{dz'} = g_{zx} - \frac{dw'}{dx'},$$

permettront ensuite, en intégrant celles-ci après les avoir respectivement multipliées par dy', dz' et ajoutées, de déterminer u' sur toute l'étendue de la première base du tronçon, puisqu'on y suppose connues T_3, T_2, et, par suite, g_{xy}, g_{zx}. La constante introduite par l'intégration se déterminera en exprimant que $u' = 0$ pour $y' = z' = 0$. Si même T_3, T_2 ont été déterminés, non pas au moyen des équations de (43) à (47), qui les fournissent directement, mais par les équations (28), (29) et la dernière (33), qui ne les donnent qu'en calculant préalablement u, aucune nouvelle intégration ne sera nécessaire; car il suffira, pour rendre u égal à u', de déterminer les constantes introduites par l'intégration de manière à vérifier les relations (50). En remplaçant enfin, dans (52 *bis*), ∂_x par $\frac{du'}{dx'}$, multipliant par dx' et intégrant à partir de $x' = 0$, le déplacement u' sera connu dans tout le tronçon avec une erreur de l'ordre de x'^3 seulement. Les déplacements v', w' sont du second degré en y' et z'; u' est d'un degré quelconque, ou même transcendant, par rapport aux mêmes variables.

Les valeurs de u', v', w' pour $x' = 0$ permettront d'obtenir les coordonnées u', $y' + v'$, $z' + w'$ de tout point de la première base du tronçon, c'est-à-dire de la surface en laquelle s'est transformée la section normale qui coupait primitivement la tige à la distance s' de son origine. Comme v' et w' sont très-petits par rapport à y', z', son ordonnée u', parallèle aux x', qui correspond aux coordonnées $y' + v'$, $z' + w'$ suivant les y' et les z', ne diffère que d'une quantité négligeable de celle qui correspond aux coordonnées y', z', de telle sorte que l'équation de cette surface sera connue dès qu'on aura, pour $x' = 0$, l'expression de u' en fonction de y', z'.

Quant à l'élément $O'O'_1$, primitivement égal à ds', de l'axe de la tige, on le construira en portant dans le sens des x' positifs, à partir de l'origine O', une droite égale à $(1 + \partial_x)\,ds'$, c'est-à-dire à $\left(1 + \frac{\mathfrak{N}}{\mathcal{E}\sigma}\right) ds'$.

Il ne restera plus ensuite qu'à fixer les directions à donner aux axes des x', y', z' relatifs au tronçon suivant, afin de pouvoir : 1° rattacher ce nouveau tronçon à celui qui le précède; 2° calculer les moments M, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, et les composantes X, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}$, par rapport à ces nouveaux axes, des forces extérieures exercées sur ce tronçon et sur tous ceux qui le suivent, forces dont les points d'applications et de directions absolues dans l'espace seront généralement donnés, en même temps que leur intensité; 3° et, par suite, obtenir les nouvelles positions des points de ce tronçon en répétant sur lui l'étude faite sur le précédent. Pour cela, j'observe d'abord que l'origine O'_1 du nouveau système des x', y', z' est située, comme il vient d'être dit, sur l'axe des x' du tronçon précédent et à la distance $\left(1 + \frac{\mathfrak{N}}{\mathcal{E}\sigma}\right) ds'$ de l'origine relative à ce tronçon.

Il suffit donc, pour construire ces nouveaux axes, de connaître leurs directions, c'est-à-dire les cosinus des angles qu'ils font avec ceux du tronçon précédent. Les valeurs qu'ont ces cosinus antérieurerement aux déplacements doivent être données, et elles le seront, si l'on connaît le rayon de courbure primitif R_0 de l'axe de la tige au point O', l'angle δ_0, variable de o à 2π, que faisait ce rayon avec la partie positive de l'axe des y' mené par ce point, et l'angle $K_0\,ds'$ que faisait avec cet axe la projection, sur le plan des $y'z'$, de l'axe principal d'inertie correspondant de la nouvelle section normale menée par O'_1. D'après des formules connues de géométrie, concernant les directions des rayons de courbure, les cosinus des angles du nouvel axe des x' mené par O'_1, avec ceux des x', y', z' du précédent tronçon, auront pour valeurs antérieures aux déplacements, en négligeant les quantités de l'ordre de ds'^2, 1, $\frac{\cos\delta_0}{R_0}ds'$, $\frac{\sin\delta_0}{R_0}ds'$; le nouvel axe des y', perpendiculaire à celui des x', et faisant avec l'axe des z' du précédent tronçon l'angle $\frac{\pi}{2} - K_0\,ds'$, aura de même sa direction antérieure aux déplacements déterminée, par rapport aux axes du précédent tronçon, par les cosinus $-\frac{\cos\delta_0}{R_0}ds'$, 1, $K_0\,ds'$; enfin les cosinus pareils relatifs au nouvel axe des z', qui est normal aux deux autres, vaudront

$$-\frac{\sin\delta_0}{R_0}ds',\ -K_0\,ds',\ 1.$$

Cherchons actuellement les valeurs qu'auront ces cosinus après les déplacements. Soient dx', dy', dz' les projections primitives, sur les axes des x', y', z' dont l'origine est en O', d'un élément matériel rectiligne mené à partir de O'_1. Après les déplacements, les projections pareilles de cet élément vaudront

$$\begin{gathered}\left(1+\frac{du'}{dx'}\right)dx' + \frac{du'}{dy'}dy' + \frac{du'}{dz'}dz',\\ \frac{dv'}{dx'}dx' + \left(1+\frac{dv'}{dy'}\right)dy' + \frac{dv'}{dz'}dz',\\ \frac{dw'}{dx'}dx' + \frac{dw'}{dy'}dy' + \left(1+\frac{dw'}{dz'}\right)dz',\end{gathered}$$

et les cosinus des angles de sa direction avec les axes seront proportionnels à ces expressions, dans lesquelles dx', dy', dz' pourront être remplacés par les valeurs primitives de ces cosinus, et les dérivées $\frac{dv'}{dx'}$, $\frac{dw'}{dx'}$, $\frac{dw'}{dy'}$, qui sont nulles, d'après (50), au point O', par les valeurs approchées qu'elles ont en O'_1, savoir $\frac{d^2v'}{dx'^2}ds'$, $\frac{d^2w'}{dx'^2}ds'$, $\frac{d^2w'}{dx'dy'}ds'$. On trouve ainsi, en substituant 1, $\frac{\cos\delta_0}{R_0}ds'$, $\frac{\sin\delta_0}{R_0}ds'$ à dx', dy', dz' et négligeant les produits des dérivées de v', w' par la courbure $\frac{1}{R_0}$ supposée assez petite, que le nouvel axe des x', c'est-à-dire l'élément de l'axe de la tige qui part de O'_1, fait avec les x', y', z' du précédent tronçon des angles ayant pour cosinus 1, $\left(\frac{\cos\delta_0}{R_0}+\frac{d^2v'}{dx'^2}\right)ds'$, $\left(\frac{\sin\delta_0}{R_0}+\frac{d^2w'}{dx'^2}\right)ds'$. Si l'on substitue au contraire $-\frac{\cos\delta_0}{R_0}ds'$, 1, $K_0\,ds'$ à dx', dy', dz', on trouve que les cosinus pareils, pour l'élément rectiligne qui coïncidait primitivement avec le nouvel axe des y', sont $\frac{du'}{dy'}$, 1, $\left(K_0+\frac{d^2w'}{dx'dy'}\right)ds'$. Donc le nouvel axe des z', perpendiculaire à cette direction et au nouvel axe de x', aura les cosinus de ses angles avec les x', y', z' du précédent tronçon, égaux à $-\left(\frac{\sin\delta_0}{R_0}+\frac{d^2v'}{dx'^2}\right)ds'$, $-\left(K_0+\frac{d^2w'}{dx'dy'}\right)ds'$, 1. Enfin, les cosinus pareils, pour le nouvel axe des y', qui est normal aux deux autres, seront $-\left(\frac{\cos\delta_0}{R_0}+\frac{d^2w'}{dx'^2}\right)ds'$, 1, $\left(K_0+\frac{d^2w'}{dx'dy'}\right)ds'$. Dans toutes ces expressions, $\frac{d^2v'}{dx'^2}$, $\frac{d^2w'}{dx'^2}$ peuvent être remplacés identiquement par $\frac{dg_{xy}}{dx'}-\frac{d\partial_x}{dy'}$, $\frac{dg_{xz}}{dx'}-\frac{d\partial_x}{dz'}$, ou bien, d'après (52 *bis*) et (52), par $\frac{dg_{xy}}{dx'}+\frac{\mathfrak{M}_1}{\varepsilon I'}$, $\frac{dg_{xz}}{dx'}-\frac{\mathfrak{M}}{\varepsilon I}$; les relations (51), (52) et (53) donneront aussi, pour $x'=y'=z'=0$,

$$\frac{d^2w'}{dx'dy'}=K-\frac{\eta''}{2\varepsilon\sigma}\int_\sigma \rho X\,d\sigma,$$

en supposant, pour abréger, η'' et $\varepsilon\sigma$ constants.

Les cosinus des angles que font, avec les axes des x', y', z' menés par O', les nouveaux axes pareils menés par O'_1 sont donc

$$(54)\left\{\begin{array}{l} 1,\quad \left(\frac{\cos\delta_0}{R_0}+\frac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}+\frac{dg_{xy}}{dx'}\right)ds',\qquad \left(\frac{\sin\delta_0}{R_0}-\frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}+\frac{dg_{zx}}{dx'}\right)ds',\\ \text{pour le nouvel axe des } x';\\ -\left(\frac{\cos\delta_0}{R_0}+\frac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}+\frac{dg_{xy}}{dx'}\right)ds',\quad 1,\quad \left(K_0+K-\frac{\eta''}{2\mathcal{E}\sigma}\int_\sigma \rho X\,d\sigma\right)ds',\\ \text{pour le nouvel axe des } y';\\ -\left(\frac{\sin\delta_0}{R_0}-\frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}+\frac{dg_{zx}}{dx'}\right)ds',\quad -\left(K_0+K-\frac{\eta''}{2\mathcal{E}\sigma}\int_\sigma \rho X\,d\sigma\right)ds',\quad 1,\\ \text{pour celui des } z', \end{array}\right.$$

formules dans lesquelles des dérivées $\frac{dg_{xy}}{dx'}$, $\frac{dg_{zx}}{dx'}$ sont prises pour $x'=y'=z'=0$.

Ces formules, ainsi que les expressions (51) de v', w', peuvent être simplifiées en observant que les dimensions des sections σ sont très-petites. De là il résulte d'abord qu'on peut négliger les termes $\frac{dg_{zx}}{dx'}$, $\frac{dg_{xy}}{dx'}$. En effet, d'après les relations (9), g_{zx}, g_{xy}, et, par suite, leurs dérivées en x' sont généralement du même ordre de grandeur que GT_2, $G'T_3$, et aussi, en général, que $\frac{1}{\mathcal{E}}T_2$, $\frac{1}{\mathcal{E}}T_3$. Or, à cause des deux dernières relations (32), qui, pour $x'=0$, sont

$$\int_\sigma T_2\,d\sigma=\mathcal{F},\quad \int_\sigma T_3\,d\sigma=\mathcal{F}_1,$$

T_2, T_3 se composent : 1° d'un terme égal à leur valeur moyenne $\frac{\mathcal{F}}{\sigma}$ ou $\frac{\mathcal{F}_1}{\sigma}$, terme négligeable en comparaison de $\frac{\mathfrak{M}}{I}$ ou de $\frac{-\mathfrak{M}_1}{I'}$, car $\mathfrak{M}$, $-\mathfrak{M}_1$ sont de l'ordre de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$, tandis que les moments d'inertie I, I' de la section σ, sont incomparablement plus petits que σ; 2° d'un autre terme variable d'un point à l'autre de la section et partout très-petit de l'ordre des dimensions de σ, puisque, ayant sa valeur moyenne nulle, ce terme change de signe et s'annule en certains points de la section. Ainsi les cosinus des angles que font avec les axes des x', y', z'

d'un tronçon les axes pareils du tronçon suivant sont à fort peu près

$$(55)\quad \left\{\begin{array}{l} 1,\quad \left(\dfrac{\cos\delta_0}{R_0}+\dfrac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}\right)ds',\qquad \left(\dfrac{\sin\delta_0}{R_0}-\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}\right)ds', \\ \text{pour le nouvel axe des } x'; \\ -\left(\dfrac{\cos\delta_0}{R_0}+\dfrac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}\right)ds',\quad 1,\qquad \left(K_0+K-\dfrac{n''}{2\mathcal{E}\sigma}\displaystyle\int_\sigma \rho X\, d\sigma\right)ds', \\ \text{pour celui des } y'; \\ -\left(\dfrac{\sin\delta_0}{R_0}-\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}\right)ds',\qquad -\left(K_0+K-\dfrac{n''}{2\mathcal{E}\sigma}\displaystyle\int_\sigma \rho X\, d\sigma\right)ds',\quad 1, \\ \text{pour celui des } z'. \end{array}\right.$$

Les valeurs moyennes, sur toute l'étendue d'une section, de GT_2, $G'T_3$, et, par suite, de g_{zx}, g_{xy}, étant du même ordre que $\frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}\sigma}$ ou $\frac{-\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}\sigma}$, sont, par suite, négligeables, non-seulement devant $\frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}$ ou $\frac{-\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}$, mais encore devant $\frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}z'$ ou $\frac{-\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}y'$, car I, I' sont de l'ordre de $\sigma z'^2$, $\sigma y'^2$. Donc les valeurs moyennes de g_{zx}, g_{xy} pourront être supposées nulles en comparaison des déformations ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, qui sont au moins de l'ordre de $\frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}z' - \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}y'$. Par suite, *si* g_{zx}, g_{xy} *ne sont nulle part d'un ordre de grandeur supérieur à celui de leurs valeurs moyennes, ce qui arrive dans le cas d'une tige fléchie, on peut* supposer partout nuls ces glissements, ou, ce qui revient au même, *admettre que les sections primitivement perpendiculaires aux fibres longitudinales de la tige, sont encore, après les déformations, normales à ces fibres.*

La première ligne des relations (55) exprime une loi intéressante, consistant en ce que *l'inclinaison, sur chacun des deux axes principaux d'une section normale, de la tangente menée à l'axe de la tige en un point de cet axe distant de ds' de la section considérée, est égale à sa valeur primitive* $\frac{\cos\delta_0}{R_0}ds'$ *ou* $\frac{\sin\delta_0}{R_0}ds'$, *augmentée du produit de ds' par le rapport* $\frac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}$ *ou* $\frac{-\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}$. Si l'on appelle R le rayon de courbure, en O', de l'axe de la tige après les déplacements, δ l'angle de ce rayon avec l'axe des y', des formules de géométrie qui ont été déjà employées pour obtenir la première ligne des relations (54) donneront

$$\frac{\cos\delta}{R} = \frac{\cos\delta_0}{R_0} + \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}, \quad \frac{\sin\delta}{R} = \frac{\sin\delta_0}{R_0} - \frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I};$$

d'où

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{\cos\delta_0}{R_0} + \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}\right)^2 + \left(\frac{\sin\delta_0}{R_0} - \frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}\right)^2}.$$

Supposons, en particulier, que R_0 soit infini, et nous aurons le théorème suivant, bien connu :

Pour obtenir la courbure, en un point donné, de la fibre moyenne d'une tige primitivement rectiligne, il faut construire les deux axes d'inertie principaux, relatifs au centre de gravité, de la section normale menée par ce point, en supposant à cette section une densité superficielle égale, en chacun de ses points, au coefficient d'élasticité de la fibre qui y passe, prendre ensuite les deux moments totaux, par rapport à ces axes, de toutes les forces extérieures, y compris celles d'inertie dans le cas du mouvement, qui agissent sur la partie de la tige située au delà de cette section, et extraire la racine carrée de la somme des carrés des rapports de chacun de ces deux moments au moment d'inertie correspondant de la section.

Il n'est plus permis de négliger g_{zx}, g_{xy} dans le cas d'une tige simplement tordue. Alors les moments $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$ sont nuls, ainsi que les actions $\mathfrak{N}$, X et les déformations ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}; il ne subsiste que les glissements g_{zx}, g_{xy} et les forces T_2, T_3, dont les valeurs moyennes sont nulles, mais qui n'en produisent pas moins le phénomène de la torsion.

La petitesse de y', z' permet encore de négliger, dans les formules (51), les termes qui contiennent leurs carrés ou leurs produits, ce qui, en substituant à $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ leurs valeurs (52), donne

$$(51\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} v' &= \left[-Kx' + \frac{\eta''}{2\mathcal{E}\sigma}\left(2\mathfrak{N} - x'\int_\sigma \rho X d\sigma\right)\right]z' \\ &\qquad - \frac{\eta}{\mathcal{E}\sigma}\left(\mathfrak{N} - x'\int_\sigma \rho X d\sigma\right)y', \\ w' &= \left(Kx' - \frac{\eta'' x'}{2\mathcal{E}\sigma}\int_\sigma \rho X d\sigma\right)y' - \frac{\eta'}{\mathcal{E}\sigma}\left(\mathfrak{N} - x'\int_\sigma \rho X d\sigma\right)z'. \end{aligned}\right.$$

Les formules (55), étant basées, comme (54), sur l'hypothèse de la petitesse des sections normales, sont peut-être aussi exactes que celles-ci plus compliquées, lorsque la tige considérée est imparfaitement cylindrique ou soumise dans son intérieur et vers ses extrémités à des actions appliquées d'une manière quelconque. Toutefois ces formules plus compliquées peuvent avoir aussi leur utilité; car elles sont vraies, quelque grandes que soient les sections normales des tiges, lorsque celles-ci sont bien cylindriques et que des actions extérieures sont appliquées à leur intérieur ou sur leurs bases de manière à vérifier exactement les hypothèses $N_2 = N_3 = T_1 = 0$. L'analyse du paragraphe actuel et du précédent ne repose en effet que sur ces hypothèses, dont nous avons montré la vérité approximative, à une distance finie des extrémités des tiges, pour tout mode d'application des forces, pourvu que les sections soient assez petites.

§ VII. — *Théorie de M. Kirchoff.*

M. Kirchoff, dans son *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement d'une tige élastique infiniment mince* (*Journal de Crelle,* t. LVI, p. 285), a exposé une autre théorie basée sur des considérations de pure cinématique, et qui conduit aux résultats approchés du paragraphe précédent toutes les fois que la force X n'est pas très-grande. Je vais exposer cette théorie, qui ne me semble rigoureuse qu'à la condition d'être compliquée d'une hypothèse dont la vérité ne me paraît pas certaine *à priori,* et qui, vérifiée en général, revient alors à l'hypothèse, faite par M. de Saint-Venant, de la nullité des forces N_2, N_3, T_1.

M. Kirchoff divise la tige, par des sections normales très-voisines, en tronçons d'une longueur comparable aux dimensions de leurs bases, et il rapporte chaque tronçon, avant et après les déplacements, aux mêmes axes des x', y', z' que j'ai adoptés, après lui, au paragraphe précédent, mais en supposant mes tronçons infiniment courts, alors même que les sections seraient seulement très-petites. On peut supposer que tout point O' de l'axe de la tige soit l'origine d'un système d'axes des x', y', z', caractérisé par la distance primitive s' de O' à l'origine de la tige, et l'on peut appeler x', y', z' les coordonnées primitives, et u', v', w' les déplacements, par rapport à un quelconque de ces systèmes d'axes, d'une molécule M très-voisine de leur origine O'. Les déplacements u', v', w' seront ainsi des fonctions continues des quatre variables indépendantes x', y', z', s'; car ils varieront, soit lorsque, le système des axes coordonnés et par suite s' ne changeant pas, on fera seulement varier x', y', z', soit lorsque, x', y', z' restant les mêmes, on fera varier s' en considérant divers points situés pareillement par rapport à des axes différents.

M. Kirchoff considère une tige primitivement rectiligne et non torse (c'est-à-dire qu'il suppose $R_0 = \infty$, $K_0 = 0$), cas auquel il ramène celui d'une tige courbe, et il démontre qu'il existe certaines relations entre les dérivées partielles $\frac{du'}{ds'}$ et $\frac{du'}{dx'}$, $\frac{dv'}{ds'}$ et $\frac{dv'}{dx'}$, $\frac{dw'}{ds'}$ et $\frac{dw'}{dx'}$. J'établirai plus simplement ces relations en exprimant que la molécule M occupe la même position dans l'espace, soit qu'on la rapporte au système d'axes dont l'origine O' est à une distance s' de l'origine de la tige, soit qu'on la rapporte à un autre système ayant son origine O'_1 très-voisine de O', et à une distance de l'origine de la tige primitivement égale à $s' + ds'$. Par rapport à ce nouveau système d'axes, pour lequel s' s'est changé en $s' + ds'$, les coordonnées primitives de M sont évidemment $x' - ds'$, y', z', tandis qu'elles étaient x', y', z' par rapport à celui dont l'origine est en O'. Par suite, les déplacements de M, qui étaient u', v', w' pour celui-ci, seront

$$u' - \frac{du'}{dx'}ds' + \frac{du'}{ds'}ds', \quad v' - \frac{dv'}{dx'}ds' + \frac{dv'}{ds'}ds', \quad w' - \frac{dw'}{dx'}ds' + \frac{dw'}{ds'}ds',$$

dans le second système, et les coordonnées de M, après les déformations étudiées, se trouveront devenues :

$$(56) \quad \begin{cases} x' + u', \quad y' + v', \quad z' + w' & \text{par rapport au premier système;} \\ \left.\begin{array}{l} x' + u' - \left(1 + \dfrac{du'}{dx'} - \dfrac{du'}{ds'}\right) ds', \\ y' + v' - \left(\dfrac{dv'}{dx'} - \dfrac{dv'}{ds'}\right) ds', \\ z' + w' - \left(\dfrac{dw'}{dx'} - \dfrac{dw'}{ds'}\right) ds' \end{array}\right\} & \text{par rapport au second.} \end{cases}$$

Or, on sait qu'en appelant $\mathrm{p}\,ds'$, $\mathrm{q}\,ds'$, $\mathrm{r}\,ds'$ trois certaines quantités infiniment petites, les cosinus des angles que font les seconds axes, dont l'origine est en O'_1, avec les premiers, dont l'origine est en O', sont :

$$(55\ bis)\quad \left\{\begin{array}{llll} 1, & \mathrm{r}\,ds', & -\mathrm{q}\,ds' & \text{pour le nouvel axe des } x'; \\ -\mathrm{r}\,ds', & 1, & \mathrm{p}\,ds' & \text{pour le nouvel axe des } y'; \\ \mathrm{q}\,ds', & -\mathrm{p}\,ds', & 1 & \text{pour celui des } z'. \end{array}\right.$$

De plus, d'après les formules ordinaires de transformation, la coordonnée, suivant un axe du premier système, d'un point quelconque de l'espace, est égale à la coordonnée pareille de la seconde origine O'_1, augmentée des trois produits des coordonnées du même point dans le second système par les cosinus respectifs des angles que font les axes de ce système avec l'axe considéré du premier. Si l'on appelle ∂_0 la dilatation de $O'O'_1$, c'est-à-dire si l'on suppose, après les déplacements,

$$O'O'_1 = (1+\partial_0)ds',$$

les coordonnées de O'_1 seront $(1+\partial_0)ds'$, o, o, et l'application de la règle précédente au point M, dont les coordonnées dans les deux systèmes sont égales aux expressions (56), donnera les trois relations cherchées

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{du'}{dx'} &= \partial_0 + \mathrm{q}(z'+w') - \mathrm{r}(y'+v') + \frac{du'}{ds'}, \\ \frac{dv'}{dx'} &= \qquad \mathrm{r}(x'+u') - \mathrm{p}(z'+w') + \frac{dv'}{ds'}, \\ \frac{dw'}{dx'} &= \qquad \mathrm{p}(y'+v') - \mathrm{q}(x'+u') + \frac{dw'}{ds'}. \end{aligned}\right.$$

Les coordonnées $x'+u'$, $y'+v'$, $z'+w'$ peuvent être réduites, dans ces formules, à leurs parties constantes x', y', z'; car, x', y', z' étant en général de l'ordre de grandeur des dimensions d'un tronçon de la tige, et ce tronçon étant rapporté à des axes qui le suivent dans tous ses mouvements d'ensemble, u', v', w' ne pourraient devenir comparables à x', y', z' que si les déformations ∂, g cessaient d'être très-petites. Les relations (57) peuvent donc être réduites à

$$
(57\ bis)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{du'}{dx'} &= \partial_0 + \mathrm{q} z' - \mathrm{r} y' + \frac{du'}{ds'},\\
\frac{dv'}{dx'} &= \qquad\ \mathrm{r} x' - \mathrm{p} z' + \frac{dv'}{ds'},\\
\frac{dw'}{dx'} &= \qquad\ \mathrm{p} y' - \mathrm{q} x' + \frac{dw'}{ds'}.
\end{aligned}
\right.
$$

Observons que les fonctions u', v', w', $\frac{dv'}{dx'}$, $\frac{dw'}{dx'}$, $\frac{dw'}{dy'}$ sont généralement très-petites par rapport à leurs dérivées premières en x', y', z'; car, d'après (50), elles s'annulent à l'origine O', ou pour $x' = y' = z' = 0$, et ne peuvent être, près de cette origine, que de l'ordre de leurs dérivées premières multipliées par les coordonnées x', y', z'. Cela ayant lieu quel que soit s', les dérivées par rapport à s' de u', v', w', $\frac{dv'}{dx'}$, $\frac{dw'}{dx'}$, $\frac{dw'}{dy'}$ devront être généralement du même ordre que ces fonctions elles-mêmes, et seront peut-être comparables aux termes $\mathrm{q} z'$, $-\mathrm{r} y'$, $\mathrm{r} x'$,... [*]. On n'a donc pas, *à priori*, le droit de négliger, dans les formules (57 *bis*), les termes très-petits $\frac{du'}{ds'}$, $\frac{dv'}{ds'}$, $\frac{dw'}{ds'}$, à moins de négliger en même temps les termes $\mathrm{q} z'$, $-\mathrm{r} y'$, $\mathrm{r} x'$,..., qui paraissent du même ordre de grandeur, et, par suite, de renoncer à l'étude de la flexion et de la torsion, représentées principalement par ces termes. Or M. Kirchoff, se basant simplement sur la petitesse des termes $\frac{du'}{ds'}$, $\frac{dv'}{ds'}$, $\frac{dw'}{ds'}$, croit pouvoir les supprimer des formules (57 *bis*) en gardant tous les autres; ce qui le conduit à une théorie simple de la flexion et de la torsion des tiges infiniment minces.

---

[*] Toutefois l'expérience montre que la torsion p et la flexion $\sqrt{\mathrm{q}^2 + \mathrm{r}^2}$ peuvent atteindre des valeurs finies, dans les tiges très-minces simplement fléchies ou tordues, sans que les limites d'élasticité de ces tiges soient dépassées, c'est-à-dire sans que les déformations ∂, g, qui sont comparables aux dérivées premières de u', v', w' en x', y' z', cessent d'être très-petites. On peut donc, en s'appuyant sur ce fait, supposer, dans l'étude de la flexion et de la torsion simples, les ∂, g très-petits en comparaison de p, q, r, et négliger par suite (comme le fait M. Kirchoff sans en donner cette raison) les dérivées premières en s' de u', v', w' devant les termes $\mathrm{q} z'$, $\mathrm{r} y'$.... Mais une théorie ne doit pas s'appuyer sur un fait dont elle peut se passer.

Voyons dans quels cas les formules obtenues au paragraphe précédent sont d'accord avec les relations (57 *bis*) ainsi simplifiées. Les relations (51 *bis*) donnent, pour $x' = 0$,

$$\frac{dv'}{dx'} = \left(-K - \frac{\eta''}{2\mathcal{E}\sigma}\int_\sigma \rho X d\sigma\right) z' + \left(\frac{\eta}{\mathcal{E}\sigma}\int_\sigma \rho X d\sigma\right) y',$$
$$\frac{dw'}{dx'} = \left(\ \ K - \frac{\eta''}{2\mathcal{E}\sigma}\int_\sigma \rho X d\sigma\right) y' + \left(\frac{\eta'}{\mathcal{E}\sigma}\int_\sigma \rho X d\sigma\right) z'.$$

Pour x' très-petit de l'ordre de y', z', il faut ajouter aux seconds membres de ces formules de petits accroissements, sensiblement égaux à $\frac{d^2 v'}{dx'^2}x'$, $\frac{d^2 w'}{dx'^2}x'$. Or on trouve aisément, comme au paragraphe précédent,

$$\frac{d^2 v'}{dx'^2} = \frac{dg_{xy}}{dx} - \frac{d\partial_x}{dy'} = \frac{dg_{xy}}{dx} + \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'} = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'},$$
$$\frac{d^2 w'}{dx'^2} = \frac{dg_{zx}}{dx} - \frac{d\partial_x}{dz'} = \frac{dg_{zx}}{dx} - \frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I} = -\frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}.$$

Il résulte donc de l'analyse du paragraphe précédent, en écrivant d'abord, d'après (52 *bis*) et (52), l'expression de ∂_x ou $\frac{du'}{dx'}$:

$$(58)\quad \begin{cases} \dfrac{du'}{dx'} = \dfrac{1}{\mathcal{E}\sigma}\left(\mathfrak{N} - x'\displaystyle\int_\sigma \rho X d\sigma\right) + \dfrac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}z' - \dfrac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}y', \\ \dfrac{dv'}{dx'} = \left(-K - \dfrac{\eta''}{2\mathcal{E}\sigma}\displaystyle\int_\sigma \rho X d\sigma\right) z' + \left(\dfrac{\eta}{\mathcal{E}\sigma}\displaystyle\int_\sigma \rho X d\sigma\right) y' + \dfrac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'}x', \\ \dfrac{dw'}{dx'} = \left(\ \ K - \dfrac{\eta''}{2\mathcal{E}\sigma}\displaystyle\int_\sigma \rho X d\sigma\right) y' + \left(\dfrac{\eta'}{\mathcal{E}\sigma}\displaystyle\int_\sigma \rho X d\sigma\right) z' - \dfrac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}x'. \end{cases}$$

Si l'on observe que, d'après les expressions (55) et (55 *bis*) comparées (et puisqu'on suppose $K_0 = 0$, $R_0 = \infty$),

$$(55\ ter)\qquad \mathfrak{p} = K - \frac{\eta''}{2\mathcal{E}\sigma}\int_\sigma \rho X d\sigma,\quad \mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I},\quad \mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}I'},$$

et que ∂_0 est la valeur $\frac{\mathfrak{N}}{\mathcal{E}\sigma}$ de ∂_x pour $x' = y' = z' = 0$, l'identification des formules (57 *bis*) et (58) donnera

$$(59)\quad \frac{du'}{ds'} = -\frac{x'}{\mathcal{E}\sigma}\int_\sigma \rho X d\sigma,\quad \frac{dv'}{ds'} = \frac{-\eta'' z' + \eta y'}{\mathcal{E}\sigma}\int_\sigma \rho X d\sigma,\quad \frac{dw'}{ds'} = \frac{\eta' z'}{\mathcal{E}\sigma}\int_\sigma \rho X d\sigma.$$

Ces valeurs de $\frac{du'}{ds'}, \frac{dv'}{ds'}, \frac{dw'}{ds'}$ ne sont pas toujours très-petites par rapport à $\mathfrak{q}z'$, $-\mathfrak{r}y', \ldots$; elles sont même beaucoup plus grandes dans le cas où la tige est, par exemple, verticale et simplement soumise à son propre poids, ou quand elle vibre longitudinalement. Mais, en général, l'intégrale $\int_\sigma \rho X d\sigma$ est au plus de l'ordre des moments $\mathfrak{M}$ ou $\mathfrak{M}_1$, et, à cause de la petitesse des rapports $\frac{I}{\sigma}, \frac{I'}{\sigma}$, les dérivées en s' de u', v', w' sont négligeables devant $\mathfrak{q}z'$, $-\mathfrak{r}y', \ldots$: l'hypothèse de M. Kirchoff est donc alors réalisée.

Les dérivées $\frac{du'}{ds'}, \frac{dv'}{ds'}, \frac{dw'}{ds'}$ caractérisent évidemment les variations que subissent la forme et les dimensions de divers tronçons primitivement égaux, lorsqu'on passe de l'un de ces tronçons aux suivants. L'hypothèse de M. Kirchoff, qui annule ces dérivées, revient donc à dire que des tronçons successifs, primitivement égaux, restent égaux après les déplacements; ou que, du moins, les petites variations de forme ou de grandeur observées lorsqu'on passe de l'un à l'autre peuvent être négligées dans les formules fondamentales (57 *bis*), même lorsqu'on conserve les autres petits termes de ces formules.

§ VIII. — *Décomposition de l'action totale exercée sur un tronçon de la tige en six actions élémentaires, qui produisent respectivement une extension ou une contraction, deux flexions égales, deux flexions inégales et une torsion.*

Considérons un tronçon assez court pour que sa forme soit toujours à fort peu près cylindrique, et pour que les quantités $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1$, M, $\int_\sigma \rho X d\sigma$, relatives à ses diverses sections normales, aient sensiblement les mêmes valeurs dans toute son étendue. Ce tronçon pourra être de longueur finie si son axe était primitivement rectiligne, et si la force extérieure appliquée à l'unité de masse est parallèle à l'axe de la tige et telle que l'expression $\int_\sigma \rho X d\sigma$ soit indépendante de x; car alors les composantes $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1$ suivant les y et les z, ainsi que le moment M autour de l'axe des x, des actions exercées sur toute la partie de la tige qui est au delà d'une section quelconque du tronçon considéré, se réduiront aux composantes et au moment pareils des forces appliquées aux points de la tige qui sont situés au delà du tronçon. Admettons que tous les coefficients d'élasticité E, η, η', η'', G, G', H, H' soient indépendants de x. Nous rapporterons ce tronçon à un système d'axes coordonnés des x', y', z' entièrement pareils à ceux des deux paragraphes précédents; mais, afin de simplifier certaines formules, nous prendrons l'origine au centre de gravité de la seconde base du tronçon, de manière à avoir $x' < 0$ dans l'intérieur du tronçon et $x' = 0$ (ou $x = x_0$) sur cette base même. Les relations (33) deviendront

$$(59\,bis)\qquad \begin{cases} \mathcal{A} = \dfrac{1}{\mathcal{E}\sigma}\left(\mathcal{N} - x'\displaystyle\int_\sigma \rho\,\mathrm{X}\,d\sigma\right), \\ \mathcal{B} = \dfrac{\mathcal{M} + \mathcal{F}x'}{\mathcal{E}\mathrm{I}}, \quad \mathcal{B}_1 = \dfrac{-\mathcal{M}_1 + \mathcal{F}_1 x'}{\mathcal{E}\mathrm{I}'}, \\ \mathrm{M} = \displaystyle\int_\sigma (y'\mathrm{T}_2 - z'\mathrm{T}_3)\,d\sigma. \end{cases}$$

Nous supposerons successivement : 1° que les deux composantes $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}$, suivant les y et suivant les z, et les moments M, $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1$ par rapport aux trois axes, des forces appliquées à la section $x' = 0$, soient égaux à zéro, mais que les actions X, dans tout l'intérieur du tronçon, et $\mathcal{N}$, appliquée à la seconde base parallèlement à l'axe des x', conservent leurs valeurs données; 2° que chacune des quantités $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$, M ait sa valeur donnée, toutes les autres étant nulles, ainsi que $\mathcal{N}$ et X. Nous obtiendrons ainsi six états élémentaires du tronçon, à chacun desquels correspondront, pour les six déformations ∂, g, et pour les déplacements u', v', w', certaines valeurs dont les sommes respectives donneront les vraies valeurs de ces déformations et de ces déplacements.

1° Si, d'abord, la force exercée sur la seconde base du tronçon se réduit à la traction normale $\mathcal{N}$, il résultera, des relations (18), (22) et (59 *bis*),

$$\partial_x = \frac{1}{\mathcal{E}\sigma}\left(\mathcal{N} - x'\int_\sigma \rho\,\mathrm{X}\,d\sigma\right), \quad \partial_y = -\eta\partial_x, \quad \partial_z = -\eta'\partial_x, \quad g_{yz} = \eta''\partial_x.$$

Les formules (28), (29), (59 *bis*) donneront de plus

$$\mathrm{T}_2 = 0, \quad \mathrm{T}_3 = 0, \quad \text{d'où} \quad g_{zx} = 0, \quad g_{xy} = 0.$$

Les glissements g_{zx}, g_{xy} étant nuls, les fibres longitudinales restent perpendiculaires aux sections primitivement planes qui leur étaient normales avant les déplacements. Il suit de là qu'il n'y a pas de torsion de ces fibres, c'est-à-dire que celles qui entourent l'une d'entre elles ne se sont pas inclinées, toutes en hélices de même sens, autour de cette fibre moyenne; en effet, si nous construisons, dans une section normale quelconque, les deux lignes de courbure qui partent du pied de la fibre moyenne considérée, celle-ci sera restée dans un même plan avec chacune de ses deux voisines prises sur ces deux lignes de courbure. De plus, les longueurs des fibres ayant conservé entre elles les mêmes rapports, puisque les dilatations ∂_x ne dépendent pas de y', z', deux sections normales, infiniment voisines, sont inclinées l'une sur l'autre de la même manière qu'avant les déplacements, et il n'y a pas de flexion.

Les forces X, $\mathfrak{X}$ ne produisent donc ni torsion, ni flexion, mais simplement des dilatations ou des contractions longitudinales accompagnées de contractions ou de dilatations latérales, et aussi, lorsque η'' n'est pas nul ou que la contexture du milieu n'a pas d'autres plans de symétrie que les sections normales, de glissements transversaux g_{yz}.

2° et 3° Supposons actuellement que X, $\mathfrak{X}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$, M soient égaux à zéro, et qu'un des deux moments $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$ subsiste seul, ou, ce qui revient au même, que la seconde base du tronçon ne soit soumise qu'à des forces équivalentes à un couple ayant son axe parallèle à celui des y' ou à celui des z'. Faisons, par exemple, $\mathfrak{M}_1 = 0$. Les formules (28), (29) et (59 *bis*) donneront $T_2 = 0$, $T_3 = 0$. Il en résulte, comme précédemment, $g_{zx} = 0$, $g_{xy} = 0$, c'est-à-dire que les fibres longitudinales seront restées perpendiculaires aux sections normales, et qu'il n'y aura pas de torsion. D'ailleurs, comme on aura

$$(60) \qquad \partial_x = \frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I} z', \quad \partial_y = -\eta \partial_x, \quad \partial_z = -\eta' \partial_x, \quad g_{yz} = \eta'' \partial_x,$$

les dilatations ∂ et le glissement g_{yz} seront nuls pour $z' = 0$, c'est-à-dire sur la fibre centrale, et très-petits de l'ordre de z' sur les autres fibres; d'où il suit que la tige ne sera soumise, en somme, à aucune dilatation, ni à aucun glissement bien sensibles.

Les sections normales seront planes après les déplacements comme avant. En effet, les fibres longitudinales, restées normales à chacune de ces sections, font avec les axes des angles dont on trouverait facilement, en opérant comme on l'a fait pour établir la première ligne des expressions (54), que les cosinus valent respectivement 1, $\frac{dv'}{dx'}+\frac{\cos\delta_0}{R_0}x'$, $\frac{dw'}{dx'}+\frac{\sin\delta_0}{R_0}x'$. Or ces cosinus sont constants sur toute l'étendue d'une même section normale, c'est-à-dire que leurs dérivées en y', z' sont nulles : on a d'abord $\frac{d^2v'}{dx'\,dy'}=\frac{d\partial_y}{dx'}=0$, $\frac{d^2w'}{dx'\,dz'}=\frac{d\partial_z}{dx'}=0$, d'après (60); et, quant aux deux autres dérivées $\frac{d^2v'}{dx'\,dz'}$, $\frac{d^2w'}{dx'\,dy'}$, elles sont nulles aussi, car elles sont égales entre elles, puisque les deux relations $g_{xy}=0$, $g_{zx}=0$, différentiées respectivement en z' et y', donnent $\frac{d^2v'}{dx'\,dz'}=-\frac{d^2u'}{dy'\,dz'}$, $\frac{d^2w'}{dx'\,dy'}=-\frac{d^2u'}{dy'\,dz'}$, et, d'autre part, leur somme, exprimée par $\frac{dg_{yz}}{dx'}$, est nulle d'après (60).

Les fibres, restées ainsi parallèles les unes aux autres, se sont dilatées d'après (60), de manière que, de deux sections normales infiniment voisines, la seconde ait tourné, par rapport à la première, autour de son intersection par le plan des $x'y'$, d'un angle égal au produit de $\frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}$ par la distance primitive des deux sections.

Ainsi, le couple $\mathfrak{M}$ ne produit sur le tronçon aucune torsion, ni aucune dilatation ou contraction bien sensibles, mais une flexion partout égale, parallèle au plan du couple, et dans laquelle les sections primitivement normales aux fibres restent planes et normales à ces fibres.

Considérons spécialement les cas où la tige était primitivement rectiligne, et calculons les cosinus 1, $\frac{dv'}{dx'}$, $\frac{dw'}{dx'}$ des angles que fait alors avec les axes un élément d'une fibre longitudinale. Si l'on différentie, par rapport à x', les relations $g_{xy}=0$, $g_{zx}=0$, il vient

$$\frac{d^2v'}{dx'^2}=-\frac{d\partial_x}{dy'}=0,\quad \frac{d^2w'}{dx'^2}=-\frac{d\partial_x}{dz'}=-\frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}I}.$$

Multiplions par dx' et intégrons à partir de $x'=0$, en observant que, sur toute l'étendue de la section $x' = 0$, qui est restée plane, on a $\frac{dv'}{dx'} = 0$, $\frac{dw'}{dx'} = 0$; il viendra

$$\frac{dv'}{dx'} = 0, \quad \frac{dw'}{dx'} = -\frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}\mathrm{I}}x'.$$

Désignons par α, β, γ les angles que fait avec les axes un élément d'une fibre longitudinale, et leurs cosinus auront pour expressions

$$(60\ bis) \qquad \cos\alpha = 1, \quad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = -\frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}\mathrm{I}}x'.$$

Il est clair que, si l'on avait $\mathfrak{M} = 0$, $\mathfrak{M}_1 =$ une quantité donnée, on obtiendrait encore une flexion partout égale, mais parallèle au plan des $x'y'$. L'ensemble des déformations dues à $\mathfrak{M}$ et à $\mathfrak{M}_1$ s'obtiendra en ajoutant les expressions des déplacements u', v', w', dûs à $\mathfrak{M}$ et de ceux qui sont dûs à $\mathfrak{M}_1$. Les glissements totaux g_{zx}, g_{xy} seront donc encore nuls, et les cosinus $\frac{dv'}{dx'}$, $\frac{dw'}{dx'}$ seront encore indépendants de y', z', c'est-à-dire que les sections normales seront encore, après les déformations, planes et perpendiculaires aux fibres. Les angles α, β, γ, que feront avec les axes les éléments de ces fibres, auront pour cosinus, dans le cas d'une tige primitivement rectiligne,

$$\cos\alpha = 1, \quad \cos\beta = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}\mathrm{I}'}x', \quad \cos\gamma = -\frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}\mathrm{I}}x'.$$

Le plan auquel restent parallèles les fibres fléchies fait, avec celui des $x'y'$, un angle dont la tangente est

$$\frac{\cos\gamma}{\cos\beta} = -\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_1}\frac{\mathrm{I}'}{\mathrm{I}}.$$

Ce plan ne coïncide avec celui du couple résultant des deux couples $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$ que lorsque les deux moments d'inertie principaux I, I' de la section sont égaux.

L'angle de deux tangentes infiniment voisines, menées à une même fibre, sera

$$\sqrt{(d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2},$$

ou bien

$$\frac{dx'}{\mathcal{E}}\sqrt{\frac{\mathfrak{M}^2}{I^2}+\frac{\mathfrak{M}_1^2}{I'^2}}.$$

La courbure de la fibre centrale, dont la dilatation ∂_x est nulle, sera le quotient de cet angle par la longueur dx' de l'arc; cette courbure est constante, c'est-à-dire que la tige se courbe en arc de cercle.

4° et 5° Supposons actuellement que X, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, M étant nuls, l'une des deux constantes $\mathfrak{F}$ ou $\mathfrak{F}_1$ ait seule sa valeur donnée, et que l'autre soit égale à zéro. Cela revient à supposer que la seconde base du tronçon supporte seulement des forces dont la résultante passe par son centre de gravité et est parallèle à l'un de ses deux axes principaux d'inertie, celui des z' si $\mathfrak{F}_1 = 0$, et celui des y' si $\mathfrak{F} = 0$. Faisons, par exemple, $\mathfrak{F}_1 = 0$. Il résultera des relations (18), (22), (59 *bis*)

$$\partial_x = \frac{\mathfrak{F}}{\mathcal{E}I}x'z',\quad \partial_y = -\eta\partial_x,\quad \partial_z = -\eta'\partial_x,\quad g_{yz} = \eta''\partial_x.$$

Nous avons vu d'ailleurs, après les formules (55), que les glissements g_{zx}, g_{xy} sont assez petits pour pouvoir être négligés. Les fibres longitudinales restent donc sensiblement normales aux sections, et, par suite, il n'y a pas de torsion sensible. Les fibres sont encore, à fort peu près, parallèles les unes aux autres; car on reconnaît, comme précédemment [*voir* après les formules (60)], que les dérivées en y', z' des cosinus $\frac{dv'}{dx'} + \frac{\cos\delta_0}{R_0}x'$, $\frac{dw'}{dx'} + \frac{\sin\delta_0}{R_0}x'$ des angles qu'elles font avec les axes des y' et des z' sont, non pas nulles, mais de l'ordre de y', z', et, par conséquent, négligeables. On peut donc admettre que les sections restent, à fort peu près, planes, mais que, de deux infiniment voisines et primitivement distantes de dx', la seconde tourne, par rapport à la première, autour de son intersection par le plan des $x'y'$, d'un angle égal à $\frac{\mathfrak{F}x'}{\mathcal{E}I}dx'$, et par conséquent proportionnel à x'.

La force $\mathfrak{F}$ a donc pour effet de produire une flexion inégale, parallèle au plan de $z'x'$.

Considérons spécialement le cas où la tige était primitivement rectiligne, et calculons les cosinus $\frac{dv'}{dx'}$, $\frac{dw'}{dx'}$ des angles β, γ que fait alors avec les axes des y' et des z' un élément de la fibre moyenne. On a

$$\frac{d^2v'}{dx'^2}=\frac{dg_{xy}}{dx'}-\frac{d\partial_x}{dy'}=\frac{dg_{xy}}{dx'},\quad \frac{d^2w'}{dx'^2}=\frac{dg_{zx}}{dx'}-\frac{d\partial_x}{dz'}=\frac{dg_{zx}}{dx}-\frac{\mathfrak{F}x'}{\mathcal{E}I}.$$

Or, soit à cause de la petitesse de g_{xy}, g_{zx}, soit, même en tenant compte de ces glissements, parce que, $\frac{d\mathfrak{M}}{dx'}$ ou $\frac{\mathfrak{F}}{\mathcal{E}I}$ étant indépendant de x', g_{zx}, g_{xy} le sont aussi d'après (28) et (29), on peut négliger $\frac{dg_{xy}}{dx'}$, $\frac{dg_{zx}}{dx}$, et il vient

$$\frac{d^2v'}{dx'^2}=0,\quad \frac{d^2w'}{dx'^2}=-\frac{\mathfrak{F}x'}{\mathcal{E}I}.$$

Multiplions par dx' et intégrons à partir de $x'=0$, en observant que l'on a, pour $x'=0$ et sur la fibre moyenne, $\frac{dv'}{dx'}=0$, $\frac{dw'}{dx'}=0$; nous trouverons, pour les angles α, β, γ d'un élément de cette fibre avec les axes,

$$\cos\alpha=1,\quad \cos\beta=0,\quad \cos\gamma=-\frac{\mathfrak{F}}{2\mathcal{E}I}x'^2.$$

Si l'on veut déterminer les très-petites courbures prises par les sections normales, il faut calculer g_{zx}, g_{xy}, ou bien T_2, T_3. Bornons-nous au cas où la tige est homogène et non tubulaire; les formules (43), (44), (45), (46) donneront pour cela

$$(61)\qquad T_2=-\frac{d\varphi}{dy}-\frac{\mathfrak{F}}{2I}z^2,\quad T_3=\frac{d\varphi}{dz};$$

$$(62)\quad\left\{\begin{aligned}&G\frac{d^2\varphi}{dy^2}+G'\frac{d^2\varphi}{dz^2}-(H+H')\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}+2K\\&\qquad+\frac{\mathfrak{F}}{EI}[2\eta y-(\eta''+H'E)z]=0,\\&d\varphi+\frac{\mathfrak{F}}{2I}z^2dy=0\ \text{le long du contour},\\&0=-\int_\sigma\left(y\frac{d\varphi}{dy}+z\frac{d\varphi}{dz}+\frac{\mathfrak{F}}{2I}z^2y\right)d\sigma,\end{aligned}\right.$$

auxquelles on peut joindre celle-ci, $\varphi=0$ en un point de la section, par exemple pour $y=z=0$.

La constante K est nulle au moins dans deux cas: 1° lorsque la section a un centre de figure; 2° lorsqu'elle a l'axe des z pour axe de symétrie, et que la contexture du milieu est en même temps symétrique par rapport au plan des zx. En effet, dans le premier cas, les équations (62) et celles du contour de la section ne changent nullement lorsqu'on change y en $-y$, z en $-z$, φ en $-\varphi$, K en $-$K; d'où il suit que, si K est supposé connu et φ déterminé en fonction de y, z, on satisfera également aux conditions du problème en prenant $-$K au lieu de K, et, au lieu de φ, pour chaque point $(-y, -z)$ de la section, la valeur obtenue de φ, au point (y, z), changée de signe. Comme le problème n'a qu'une solution, il faut donc poser

$$\mathrm{K} = -\mathrm{K} = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(-y, -z) = -\varphi(y, z).$$

Dans le second cas, la constitution du milieu étant symétrique par rapport au plan des zx, on doit avoir, dans les formules (9), $\eta'' = 0$, $\mathrm{H} = \mathrm{H}' = 0$; avec ces réductions, les relations (62) ne changent pas, non plus que l'équation du contour, lorsqu'on change seulement y en $-y$, φ en $-\varphi$, K en $-$K; d'où il résulte, comme précédemment, que le changement de y en $-y$ change φ en $-\varphi$, et que $\mathrm{K} = 0$. Dans les deux cas, la dernière relation (62) est identiquement vérifiée; car, à chaque élément $d\sigma$ en correspond un autre égal pour lequel y, z et φ ou seulement y et φ ont les mêmes valeurs, mais de signes contraires, que sur le premier, de manière à annuler l'intégrale qui forme le second membre de cette relation. Sur chacun de ces deux éléments, les dérivées $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ sont, dans le premier cas, égales et de même signe, tandis que, dans le second cas, la première $\frac{d\varphi}{dy}$ est égale et de même signe, et la seconde, $\frac{d\varphi}{dz}$, égale et de signe contraire; par suite, la force T_2 y est égale dans les deux cas, tandis que T_3 y est égale et de même signe dans le premier, égale et de signe contraire dans le second.

Il est clair que la force $\mathcal{F}_1$ produirait une flexion inégale, parallèle au plan des $x'y'$, et que, comme dans le cas précédent (2° et 3°), mais d'une manière seulement approchée, l'ensemble des deux forces $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ produirait une flexion dans laquelle les fibres longitudinales, sensiblement parallèles les unes aux autres, resteraient à très-peu près perpendiculaires aux sections normales. Les angles α, β, γ que feraient avec les axes des x', y', z' une tangente aux fibres seraient, dans le cas d'une tige primitivement rectiligne,

$$\cos\alpha = 1, \quad \cos\beta = -\frac{\mathcal{F}_1 x'^2}{2\mathcal{E}I'}, \quad \cos\gamma = -\frac{\mathcal{F} x'^2}{2\mathcal{E}I};$$

par suite on aurait, pour la tangente de l'angle fait avec le plan des $x'y'$ par celui de chaque fibre fléchie,

$$\frac{\cos\gamma}{\cos\beta} = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_1}\frac{I'}{I};$$

ce plan ne coïncide avec celui suivant lequel la tige est sollicitée à fléchir, c'est-à-dire avec le plan qui contient la résultante des forces $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$, que dans le cas où, I égalant I', toutes les droites menées dans le plan d'une section par son centre de gravité sont des axes d'inertie principaux de cette section.

6° Admettons enfin que X, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ soient nuls, et que des forces équivalentes à un couple de moment M, perpendiculaire à l'axe de la tige, soient seules appliquées à la seconde base du tronçon. Les formules (59 *bis*) donneront $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 = 0$, et on aura partout $N_1 = 0$, $\partial_x = \partial_y = \partial_z = g_{yz} = 0$. Les fibres longitudinales conservent sensiblement leur forme primitive. En effet, cette forme dépend des variations, le long des fibres elles-mêmes, des cosinus $1, \frac{dv'}{dx'} + \frac{\cos\delta_0}{R_0}x', \frac{dw'}{dx'} + \frac{\sin\delta_0}{R_0}x'$ des angles qu'elles font avec les axes, c'est-à-dire, à fort peu près, des dérivées en x' de ces cosinus. Or ces dérivées identiquement égales, à cause de $\partial_x = 0$, à $0, \frac{\cos\delta_0}{R_0} + \frac{dg_{zy}}{dx'}, \frac{\sin\delta_0}{R_0} + \frac{dg_{zz}}{dx'}$, peuvent être réduites à $0, \frac{\cos\delta_0}{R_0}, \frac{\sin\delta_0}{R_0}$ et rendues ainsi indépendantes des déplacements u', v', w'. Car, si aucune force, parallèle aux y' ou aux z', n'est appliquée à l'intérieur du tronçon, le moment M ne dépend pas de x', et T_2, T_3, g_{zx}, g_{xy}, K, qui, d'une section à l'autre, varient seulement avec ce moment M, n'en dépendent pas non plus; donc les deux dérivées $\frac{dg_{zy}}{dx'}$, $\frac{dg_{zz}}{dx'}$ sont nulles. Dans le cas contraire, elles sont au plus du même ordre de grandeur que g_{xy}, g_{zx}, c'est-à-dire de l'ordre des coordonnées transversales y', z', et, par suite, très-petites.

Ainsi, on peut supposer nulles les dérivées secondes $\frac{d^2v'}{dx'^2}$, $\frac{d^2w'}{dy'^2}$, et, par suite, constantes, le long d'une même fibre, les dérivées premières $\frac{dv'}{dx'}$, $\frac{dw'}{dx'}$; or on a, sur la fibre moyenne, $v'=w'=0$, $\frac{dv'}{dx'}=\frac{dw'}{dx'}=0$, pour $x'=0$; les déplacements v', w' seront donc nuls sur toute cette fibre, et les équations (51), (53) donneront

$$v' = -Kx'z', \quad w' = Kx'y'. \tag{63}$$

Enfin, u', T_3, T_2 se détermineront par les relations (28), (29) et la dernière (59 *bis*), devenues

(63 *bis*)
$$\frac{dT_3}{dy'}+\frac{dT_2}{dz'}=0;$$

sur le contour, $T_3 dz' - T_2 dy' = 0$;

en un point quelconque d'une ligne s_1, l'expression $T_3 dz' - T_2 dy'$ prendra des deux côtés des valeurs égales;

$$\int_\sigma (y'T_2 - z'T_3)\, dy'dz' = M;$$

équations dans lesquelles on remplacera T_3, T_2 par leurs expressions linéaires en g_{xy}, g_{zx}, et g_{xy}, g_{zx}, d'après (63), par

$$\frac{du'}{dy'}-Kz', \quad \frac{du'}{dz'}+Ky'.$$

On y joindra, pour achever de déterminer u', la relation $\frac{du'}{dx'}=0$ et aussi la condition $u'=0$ pour $x'=y'=z'=0$.

Observons que ces équations et (63) auraient les mêmes formes, avec la même valeur numérique de l'angle K, si, l'origine des coordonnées rectangulaires étant transportée en un point matériel quelconque du tronçon, l'axe des x' y était constamment tangent à la fibre longitudinale qui passe par ce point, et si le plan des $x'y'$ était dirigé arbitrairement, mais de manière à se trouver, à l'origine des coordonnées, constamment tangent à la surface matérielle avec laquelle il coïncide avant les déplacements. Supposons d'abord que, sans changer l'origine, on donne aux axes des y', z' une nouvelle direction, en les faisant simplement tourner d'un angle α autour de celui des x'; d'après les formules ordinaires de transformation, x' et u' n'auront pas changé, mais les coordonnées y', z' et les déplacements v', w' seront remplacés par d'autres y'', z'', v'', w'' dirigés suivant les nouveaux axes et égaux respectivement à $y'\cos\alpha + z'\sin\alpha$, $z'\cos\alpha - y'\sin\alpha$, $v'\cos\alpha + w'\sin\alpha$, $w'\cos\alpha - v'\sin\alpha$, et l'on aura bien identiquement, si les relations (63) sont vérifiées, $v'' = -\mathrm{K}x'z''$, $w'' = \mathrm{K}x'y''$. Si nous admettons actuellement que les nouveaux axes subissent, pendant que s'effectuent les déplacements de la tige, trois petites rotations quelconques, de manière à prendre des directions un peu différentes, les déplacements v'', w'' recevront respectivement les petites augmentations $\mathrm{r}x' - \mathrm{p}z''$, $\mathrm{p}y'' - \mathrm{q}x'$, correspondant à trois petites rotations relatives p, q, r de la tige autour des axes des x', y'', z''. Enfin, si l'origine est transportée en un autre point quelconque et subit elle-même, pendant que les déplacements s'effectuent, une petite translation quelconque, x', y'', z'' seront augmentés chacun d'une constante, et, en outre, v'', w'' recevront de petites augmentations arbitraires. Ainsi, en convenant d'effacer un accent à v'', w'', y'', z'', les nouveaux déplacements v', w' seront exprimés par $-\mathrm{K}(x' + \text{const.})z' - \mathrm{p}z'$, $\mathrm{K}(x' + \text{const.})y' + \mathrm{p}y'$, augmentés chacun d'une fonction linéaire et arbitraire de x'. Mais cette fonction linéaire est nulle, puisqu'on a par hypothèse $v' = w' = 0$ sur toute la longueur du nouvel axe des x'. De plus, le nouveau plan des $x'y'$ restant toujours, pour $x' = 0$, tangent à la surface matérielle avec laquelle il coïncidait avant les déplacements, on doit avoir $\frac{dw'}{dy'} = 0$ pour $x' = y' = z' = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{K} \times \text{const.} + \mathrm{p} = 0$: il vient donc, dans le nouveau système d'axes, $v' = -\mathrm{K}x'z'$, $w' = \mathrm{K}x'y'$, et, par suite, $g_{xy} = \frac{du'}{dy'} - \mathrm{K}z'$, $g_{zx} = \frac{du'}{dz'} + \mathrm{K}y'$. D'ailleurs, N_1 et X désignant identiquement, en chaque point, les mêmes forces que dans le système primitif d'axes, on a toujours $\mathrm{N}_1 = 0$, $\mathrm{X} = 0$, et la première des équations (2), jointe à la première des conditions (14), spéciales au contour s, à la première des conditions spéciales aux courbes s_1, et à la quatrième des relations (59 *bis*) (laquelle est évidemment la même pour tous les systèmes d'axes dans lesquels le plan des $y'z'$ est parallèle aux sections, puisque le couple M qui sollicite la tige normalement à son axe est toujours le même), donnera, pour déterminer T_2,

T_3, u', le système (63 *bis*), dans lequel les coefficients d'élasticité seront relatifs aux nouveaux axes.

La fibre moyenne $y' = z' = 0$ ne subit aucune flexion, ni aucune dilatation; mais chaque section tourne en bloc autour de cette fibre, en même temps que ses divers éléments superficiels sont soumis, perpendiculairement à leur plan, aux petits déplacements u'. En effet, pour $x' = 0$, v' et w' sont nuls, c'est-à-dire que les divers points de la section normale prise pour plan des $y'z'$ n'exécutent, parallèlement à ce plan, aucun mouvement relatif les uns par rapport aux autres, et ne peuvent que tourner d'un commun mouvement de rotation autour de la fibre moyenne. Il en est de même de la section située à la distance x' du plan des $y'z'$: les déplacements $v' = -Kx'z'$, $w' = Kx'y'$ sont précisément ceux qui se produisent quand cette section tourne autour de la fibre moyenne, par rapport au plan des $y'z'$ et dans le sens des y' positifs vers des z' positifs, d'un angle égal à Kx'.

A part les petits déplacements perpendiculaires aux plans des sections, la tige subit donc une simple torsion, égale à K *par unité de longueur.*

Le mouvement de rotation des sections autour de la fibre moyenne est incomparablement plus considérable que le déplacement u', parallèle à cette fibre, de leurs divers points. Car, la torsion étant K par unité de longueur, ce mouvement est mesuré par des angles de l'ordre de K et par des déplacements de l'ordre de Kz' ou Ky'. Or les dérivées en y' et z' de u' sont comparables à Kz' ou à Ky' [*], et le déplacement u', pour s'annuler sur la fibre moyenne, ne pourra qu'être de l'ordre de Kz'^2 ou Ky'^2, c'est-à-dire incomparablement plus petit.

Admettons que la tige soit symétrique de forme et de contexture par rapport à son axe, de manière que les équations des courbes s, s_1 et les coefficients d'élasticité qui entrent dans les expressions de T_2, T_3 restent les mêmes lorsqu'on tranforme y', z' en $-y'$, $-z'$. Les équations (63 *bis*) ne changeront pas, lorsque, u' conservant en chaque point d'une section la même valeur, on changera simplement la di-

---

[*] C'est-à-dire aux dérivées de v', w' par rapport à x'.

rection des axes, c'est-à-dire y', z' en $-y'$, $-z'$; en effet, dy', dz' y changeront de signe en même temps que les expressions de T_3, T_2, fonctions linéaires de g_{xy}, g_{zx} ou de $\frac{du'}{dy'} - Kz'$, $\frac{du'}{dz'} + Ky'$. Comme les équations des contours s, s_1 seront aussi les mêmes, il en résulte que u' a la même valeur au point $(-y', -z')$ qu'au point (y', z'), et que les forces T_2, T_3 ont les mêmes valeurs absolues, mais avec des signes contraires, en deux points d'une section symétriquement placés par rapport au centre de figure de cette section. Ces forces sont, par suite, nulles à ce centre.

Si la tige est symétrique de forme ou de contexture par rapport à un plan mené suivant son axe, celui des $z'x'$ par exemple, on aura $H = H' = 0$, T_3, T_2 ne dépendront respectivement que de g_{xy}, g_{zx}, c'est-à-dire de $\frac{du'}{dy'} - Kz'$, $\frac{du'}{dz'} + Ky'$; si l'on change y' en $-y'$, u' en $-u'$, la fonction T_3 restera la même, T_2 changera de signe, $\frac{dT_3}{dy'}$, $\frac{dT_2}{dz'}$ en changeront aussi, l'expression $T_3 dz' - T_2 dy'$ restera la même, et les équations (63 *bis*) n'auront pas changé. Donc, u' aura des valeurs égales et contraires aux deux points (y', z'), $(-y', z')$; en ces deux points, T_3 aura des valeurs égales, T_2 des valeurs égales et contraires. Par suite, la force T_2, dans chaque section, sera nulle sur toute la ligne $y' = 0$, et l'on aura, sur la même ligne, $g_{zx} = 0$, c'est-à-dire que les droites matérielles prises dans une section et primitivement contenues dans le plan de symétrie restent perpendiculaires aux fibres longitudinales de la tige. Lorsque celle-ci offre deux plans de symétrie menés suivant son axe, comme, par exemple, si elle est isotrope et à section triangulaire équilatérale, la fibre située à leur intersection, c'est-à-dire l'axe de la tige, reste de même perpendiculaire aux lignes matérielles de chaque section primitivement contenues dans les deux plans de symétrie, et se trouve, après comme avant les déplacements, normale aux sections : on a donc alors, tout le long de l'axe de la tige, $g_{zx} = 0$, $g_{xy} = 0$, et, par suite, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$.

Il doit y avoir, en général, un ou plusieurs points de chaque section où T_2, T_3 et par suite les glissements g_{zx}, g_{xy} sont à la fois nuls. En effet, à cause des deux dernières équations (32), réduites à $\int_\sigma T_3\, d\sigma = 0$,

$\int_\sigma T_2\, d\sigma = 0$, il y une ou plusieurs lignes le long desquelles $T_3 = 0$, et d'autres le long desquelles $T_2 = 0$: aux points d'intersection de ces deux systèmes de lignes, on aura donc $T_3 = T_2 = 0$. Ces points sont les mêmes, quelle que soit la valeur de l'angle K qui mesure la torsion. En effet, les équations (63 *bis*) ne changent pas, si l'on y multiplie à la fois u', K, M, et, par suite, g_{zx}, g_{xy}, T_2, T_3 par un même nombre : ce qui indique que u', K, g_{zx}, g_{xy}, T_2, T_3 varient proportionnellement à M.

§ IX. — *Lois générales de la torsion. — Rapports du problème de la torsion avec celui de l'écoulement régulier d'un liquide dans un tube rectiligne et de section constante, mouillé par ce liquide.*

D'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent, les lois approchées de l'extension, de la contraction et des flexions égales ou inégales peuvent être obtenues sans qu'on ait besoin d'intégrer, pour chaque forme de section et pour chaque sorte de contexture de la tige, aucun système d'équations aux dérivées partielles. Mais il n'en est pas ainsi lorsqu'il s'agit de la torsion : les déformations ∂, g se réduisent dans ce cas aux deux glissements g_{zx}, g_{xy}, négligeables dans tous les autres, et qu'on ne peut obtenir sans intégrer les équations (28) et (29), alors réduites à (63 *bis*). Faute de pouvoir effectuer en général cette intégration, cherchons s'il n'existerait pas, pour chaque forme de section et chaque mode de contexture, une relation simple entre l'angle K qui mesure la torsion et le couple M qui la produit.

Nous venons déjà d'observer que, pour une même tige plus ou moins tordue, K et M sont proportionnels. Considérons actuellement deux tiges ayant leurs sections semblables et constituées de manière qu'en deux points homologues de ces sections, G, G', H, H' aient les mêmes valeurs. Soit a le rapport de similitude, c'est-à-dire le nombre par lequel les coordonnées y', z' d'un point de la première doivent être multipliées pour donner celles du point homologue de la seconde. Si les équations (63 *bis*) sont supposées se rapporter à la première, et qu'on veuille les changer en celles qui régissent la seconde en admettant que l'angle K soit le même dans les deux, il suffira d'y supposer partout y', z', dy', dz' multipliés par a, et u', M remplacés par le déplacement longitudinal et le moment de torsion relatifs à la seconde tige. Or, si l'on a soin de multiplier, dans ces équations, non-seulement y', z', dy', dz' par a, mais aussi u' par a^2 et M par a^4, chacune de ces relations sera encore vérifiée; car on aura multiplié ses deux membres par une même puissance de a : donc, pour une même valeur de l'angle K, qui mesure la torsion, le déplacement longitudinal u' et le moment M relatifs à la seconde tige sont respectivement proportionnels au carré et à la quatrième puissance des dimensions homologues, ou bien à l'aire d'une section normale et à son carré.

D'après cela, si nous appelons τ la valeur du moment de torsion pour une tige dont la section vaut 1, et qui est tordue par unité de longueur d'un angle égal à l'unité, le moment M d'une tige de même forme, et constituée de la même manière aux points homologues, mais ayant une section quelconque σ, et tordue par unité de longueur d'un angle K, sera donné par la formule

$$M = \tau\sigma^2 K. \tag{64}$$

Ainsi, le moment de torsion est proportionnel à l'angle qui mesure la torsion par unité de longueur, au carré de la section de la tige, et à un coefficient qui dépend de la forme de la section et de la constitution élastique de la tige.

Ces lois sont pareilles à celles qui régissent l'écoulement permanent et bien régulier d'un liquide dans un tube mouillé par ce liquide (*voir* le § IV d'un Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides, au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2^e série, t. XIII, 1868). Cela provient de ce que les deux problèmes sont analytiquement très-semblables et conduisent même à des équations différentielles toutes pareilles, lorsque la tige dont on étudie la torsion est homogène et non tubulaire.

Études ce cas particulier d'une tige homogène et pleine par la méthode indiquée dans la seconde partie du § V. Nous avons vu à la fin du paragraphe précédent, que les équations (63 *bis*) sont applicables quelle que soit la fibre longitudinale choisie pour axe des x', ou bien pour axe des x (en convenant d'effacer les accents de x', y', z'), et quelle que soit la direction de l'axe des y. Nous supposerons que cette direction soit celle pour laquelle la somme des deux coefficients $H + H'$ est nulle, direction dont l'existence a été établie dans la Note du § II. La première équation (63 *bis*) revient à dire qu'en appelant φ une certaine fonction de y et de z, on a

$$T_2 = -\frac{d\varphi}{dy}, \quad T_3 = \frac{d\varphi}{dz}. \tag{65}$$

La condition spéciale au contour s, $T_3\,dz - T_2\,dy = 0$, devient ainsi $\frac{d\varphi}{dz}dz + \frac{d\varphi}{dy}dy = 0$. Comme on peut ajouter à φ une constante quelconque, de manière à avoir $\varphi = 0$ en un point du contour, cette condition revient à poser $\varphi = 0$ sur toute la ligne s.

D'ailleurs, l'identité $\frac{dg_{xy}}{dz} - \frac{dg_{zx}}{dy} - \frac{d^2 v}{dx\,dz} + \frac{d^2 w}{dx\,dy} = 0$, si l'on y substitue à v, w leurs valeurs (63), $-Kxz$, Kxy, et à g_{xy}, g_{zx} leurs expressions tirées de (9) et de (65), devient l'équation indéfinie

$$G\frac{d^2\varphi}{dy^2} + G'\frac{d^2\varphi}{dz^2} - (H + H')\frac{d^2\varphi}{dy\,dz} + 2K = 0,$$

ou bien, en observant que $H + H' = 0$, et divisant par G,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2\varphi}{dy^2} + \dfrac{G'}{G}\dfrac{d^2\varphi}{dz^2} + \dfrac{2K}{G} = 0, \\ \text{à laquelle on joindra la condition} \\ \varphi = 0 \text{ sur le contour extérieur.} \end{array}\right. \tag{66}$$

L'expression (63 *bis*) de M, devenue $-\int_\sigma\left(y\frac{d\varphi}{dy} + z\frac{d\varphi}{dz}\right)d\sigma$, peut être transformée au moyen de l'intégration par parties appliquée comme nous avons fait souvent, en $-\int_s \varphi(y\,dz - z\,dy) + 2\int_\sigma \varphi\,d\sigma$. Comme la fonction φ est nulle sur tout le contour, il vient simplement

$$M = 2\int_\sigma \varphi\,d\sigma. \tag{67}$$

Cela posé, pour comparer le problème de la torsion à celui de l'écoulement d'un liquide dans un tube, faisons

$$z\sqrt{\frac{G}{G'}} = z_1,$$

et l'équation indéfinie (66) deviendra

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz_1^2} + \frac{2K}{G} = 0. \tag{66 bis}$$

Comme $\frac{2K}{G}$ est une constante, cette équation est pareille à celle qui donne la vitesse permanente, supposée représentée par φ, en tout point, ayant pour coordonnées y, z_1, de la section d'un tube cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe des x. De plus, si $F(y, z) = 0$ est l'équation de la section du contour de la tige, la condition au contour

$$\varphi = 0 \text{ pour } F(y, z) = 0 \quad \text{ou pour} \quad F\left(y, z_1\sqrt{\frac{G'}{G}}\right) = 0,$$

est la même que la condition relative au contour de la section du même tube, pourvu que le liquide mouille partout le tube, et que ce contour ait pour équation

$$F\left(y, z_1\sqrt{\frac{G'}{G}}\right) = 0. \tag{68}$$

Donc la fonction φ, à laquelle nous a conduit la théorie de la torsion, exprimerait aussi la vitesse des divers filets d'un liquide qui remplirait un tube dont la section serait représentée par (68). J'ai montré au § IV du Mémoire cité plus haut, qu'en appelant ϖ un certain coefficient dépendant seulement de la forme de la section (68), la dépense dans ce tube serait égale au produit de ϖ par le terme constant $\frac{2K}{G}$ de l'équation (66 *bis*) et par le carré de la section (68). Celle-ci, $\int dy\,dz_1$, est égale à $\sqrt{\frac{G}{G'}}\int dy\,dz$, ou à $\sigma\sqrt{\frac{G}{G'}}$. Mais la même dépense a aussi pour expression la somme des produits de chaque élément $dy\,dz_1$ de la section (68) par la vitesse correspondante φ, c'est-à-dire

$$\int \varphi\, dy\, dz_1 = \sqrt{\frac{G}{G'}} \int_\sigma \varphi\, d\sigma, \quad \text{ou, d'après (67),} \quad = \frac{M}{2}\sqrt{\frac{G}{G'}}.$$

En égalant ces deux expressions de la dépense, on tire

$$(69) \qquad M = \frac{4\varpi}{\sqrt{GG'}}\sigma^2 K.$$

Cette formule donne immédiatement le moment M de torsion, pour une tige dont la section σ a son contour représenté par $F(y, z) = 0$, si on connait le coefficient ϖ dont se trouve affectée l'expression de la dépense dans un tube dont la section a son contour représenté par $F\left(y, z_1\sqrt{\frac{G'}{G}}\right) = 0$ [*].

---

[*] Par exemple, quand ce dernier contour est une ellipse ayant b, c pour demi-axes, on a

$$\varpi = \frac{1}{4\pi\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)} = \frac{0,0796}{\frac{b}{c} + \frac{c}{b}}$$

(*voir* § V du Mémoire cité).

Si c'est un rectangle ayant b pour demi-longueur, et c pour demi-largeur,

$$\varpi = \frac{\alpha}{\frac{b}{c} + \frac{c}{b}},$$

où α, coefficient exprimé en série transcendante, prend les valeurs

$$0,0703;\ 0,0715;\ 0,0731;\ 0,0746;\ 0,0757;\ 0,0789;\ 0,0833 \ \text{ou}\ \frac{1}{12},$$

pour

$$\frac{b}{c} = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 10,\ \infty.$$

(*voir* § VI).

Enfin, si c'est un triangle équilatéral,

$$\varpi = \frac{1}{20\sqrt{3}} = 0,0289$$

(*voir* Note II, à la fin du même Mémoire).

Cherchons actuellement les lois qui régissent la force élastique appliquée à un élément $d\sigma$ d'une section, force dont les composantes suivant les axes des x, y, z, rapportées à l'unité de surface, sont N_1, T_3, T_2. Cette force est tangentielle, puisque $N_1 = 0$. Elle est égale en grandeur à $\sqrt{T_3^2 + T_2^2}$ ou à $\sqrt{\frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}}$, expression que nous représenterons d'une manière abrégée, avec M. Lamé, par $\Delta_1 \varphi$; de plus, sa direction fait avec les axes des y et des z des angles ayant respectivement pour cosinus $\frac{T_3}{\Delta_1 \varphi}$, $\frac{T_2}{\Delta_1 \varphi}$, ou bien $\frac{1}{\Delta_1 \varphi}\frac{d\varphi}{dz}$, $\frac{-1}{\Delta_1 \varphi}\frac{d\varphi}{dy}$. Ceci posé, considérons les courbes infiniment voisines qui ont pour équation $\varphi =$ const., courbes qui seraient celles d'égale vitesse dans un tube plein de liquide, et dont chacune, composée d'un ou de plusieurs orbes fermés, enveloppe toutes les suivantes pour lesquelles φ va en croissant, jusqu'à la plus centrale, réduite à un ou plusieurs points où φ atteint sa plus grande valeur. La normale menée en (y, z) à la surface $\varphi =$ const. qui passe par ce point, et du côté où φ grandit, fait avec les axes des y et des z des angles dont les cosinus $\frac{1}{\Delta_1 \varphi}\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{1}{\Delta_1 \varphi}\frac{d\varphi}{dz}$, indiquent qu'elle est justement perpendiculaire à la force exercée sur l'élément $d\sigma$ situé au même point. De plus, si nous appelons $d\varepsilon$ l'élément de cette normale qui mesure la distance de la courbe considérée et de celle sur laquelle la constante prend la valeur $\varphi + d\varphi$, dy et dz les deux projections, égales à $\frac{1}{\Delta_1 \varphi}\frac{d\varphi}{dy}d\varepsilon$, $\frac{1}{\Delta_1 \varphi}\frac{d\varphi}{dz}d\varepsilon$, de ε sur les deux axes des y et des z, il viendra

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz = \Delta_1 \varphi . d\varepsilon, \quad \text{ou bien} \quad \Delta_1 \varphi = \frac{d\varphi}{d\varepsilon}.$$

Ainsi, *les forces exercées aux divers points d'une section sont partout dirigées suivant les courbes* $\varphi =$ const., *qui seraient celles d'égale vitesse dans des tubes, et elles sont égales en chaque point, par unité de surface, à la dérivée de* φ *suivant la normale menée en ce point à la courbe* $\varphi =$ const., *qui y passe; elles ont la même expression que le glissement relatif, dans un tube, de deux couches liquides adjacentes.*

Si l'on construit les courbes $\varphi =$ const., en partant du contour même ($\varphi = 0$) des sections, ces courbes reproduisent les irrégularités du contour, mais en les affaiblissant de plus en plus, de manière à être le plus distantes les unes des autres aux points situés sur les grands diamètres des sections et à être généralement le plus rapprochées à ceux qui correspondent aux petits diamètres. Aux divers points d'une même courbe $\varphi = \text{const.}$, la force $\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ varie en raison inverse de la distance $d\varepsilon$ de cette courbe à sa voisine; ses valeurs maxima auront donc lieu en général sur les petits diamètres des sections, et ses valeurs minima sur les grands. Il est clair d'ailleurs que cette force devra être en moyenne d'autant plus grande qu'on se rapprochera davantage du contour, c'est-à-dire qu'on s'éloignera davantage des points centraux des sections où elle est nulle et où φ est maximum. La force $\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ atteint donc en général ses plus grandes valeurs vers les points du contour les plus rapprochés des points centraux où elle est nulle, et où la vitesse serait le plus grande s'il s'agissait de l'écoulement d'un liquide dans un tube de forme analogue. Il me paraît probable que, même dans les cas les plus exceptionnels, ces plus grandes valeurs de $\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ devront encore être cherchées sur le contour des sections et non dans leur intérieur : c'est ce qu'a pensé M. de Saint-Venant après avoir reconnu la vérité de ce principe dans un grand nombre de cas que je me contenterai d'indiquer au paragraphe suivant.

Si, au lieu de considérer la force totale $\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$, on s'occupe de ses composantes $-\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, il est facile de montrer qu'elles ne deviennent jamais maxima ou minima dans l'intérieur des sections. Appelons $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ les coordonnées d'un point très-voisin de (y, z), et $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)'$, $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)'$ les valeurs de $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ en ce point. Pour ne considérer que la première de ces deux dérivées, il est évident que la série de Taylor donnera

$$(70)\quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)' - \frac{d\varphi}{dy} &= \frac{d^2\varphi}{dy^2}\Delta y + \frac{d^2\varphi}{dy\,dz}\Delta z \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{d^3\varphi}{dy^3}\Delta y^2 + 2\frac{d^3\varphi}{dy^2dz}\Delta y\,\Delta z + \frac{d^3\varphi}{dy\,dz^2}\Delta z^2\right) + \ldots \end{aligned} \right.$$

L'ensemble des termes du second membre qui sont du second degré par rapport à Δy, Δz conservera le même signe pour toutes les valeurs possibles du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta z}$, à la condition nécessaire et suffisante que

$$\left(\frac{d^3\varphi}{dy^2 dz}\right)^2 - \frac{d^3\varphi}{dy^3}\frac{d^3\varphi}{dy\,dz^2} \overset{=}{<} 0.$$

Or l'équation (66), différentiée respectivement en y et en z, donne

$$\frac{d^3\varphi}{dy\,dz^2} = -\frac{G}{G'}\frac{d^3\varphi}{dy^3}, \quad \frac{d^3\varphi}{dy^2 dz} = -\frac{G'}{G}\frac{d^3\varphi}{dz^3},$$

ce qui change la relation précédente en

$$G^3\left(\frac{d^3\varphi}{dy^3}\right)^2 + G'^3\left(\frac{d^3\varphi}{dz^3}\right)^2 \overset{=}{<} 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d^3\varphi}{dy^3} = 0, \quad \frac{d^3\varphi}{dz^3} = 0;$$

et il en résulte

$$\frac{d^3\varphi}{dy\,dz^2} = 0, \quad \frac{d^3\varphi}{dy^2 dz} = 0.$$

Ainsi, pour Δy et Δz très-petits, la somme des termes du second membre de (70) qui ne sont pas linéaires en Δy et Δz change de signe pour des valeurs convenables du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta z}$, si ce n'est peut-être aux points où toutes les dérivées troisièmes de φ s'annuleraient à la fois. Supposons qu'on prenne, à partir de chaque point (y, z) du plan des yz, une ordonnée x égale à la valeur correspondante de $\frac{d\varphi}{dy}$; et appelons x' l'ordonnée, égale à $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)'$, qui sera menée à partir de $(y + \Delta y,\ z + \Delta z)$. Le lieu des extrémités de toutes ces ordonnées donnera une surface, et l'on aura

$$(71)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{x}' - \mathrm{x} &= \frac{d^2\varphi}{dy^2}\Delta y + \frac{d^2\varphi}{dy\,dz}\Delta z \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{d^3\varphi}{dy^3}\Delta y^2 + 2\frac{d^3\varphi}{dy^2 dz}\Delta y\,\Delta z + \frac{d^3\varphi}{dy\,dz^2}\Delta z^2\right) + \dots \end{aligned} \right.$$

Le plan tangent en (x, y, z), mené à cette surface, aura pour équation, en appelant x_1, y_1, z_1 les coordonnées courantes,

$$(72) \qquad \mathrm{x}_1 - \mathrm{x} = \frac{d^2\varphi}{dy^2}(y_1 - y) + \frac{d^2\varphi}{dy\,dz}(z_1 - z).$$

D'après ce qui vient d'être dit, si l'on fait $y_1 - y = \Delta y$, $z_1 - z = \Delta z$, la différence $\mathrm{x}' - \mathrm{x}_1$, tout près du point (x, y, z), sera tantôt positive et tantôt négative. Donc la surface (71) est coupée par ses plans tangents, tout près du point de contact, de manière à se trouver en partie d'un côté de ces plans et en partie de l'autre côté, ou à avoir ses deux courbures principales de sens inverse, excepté peut-être pour les valeurs de (y, z), qui annulent à la fois toutes les dérivées troisièmes de φ et par suite ces courbures. Il en résulte que l'ordonnée x n'est nulle part maximum ou minimum; car, si elle l'était pour une valeur de (y, z), en construisant le plan (72) tangent, à l'extrémité de cette ordonnée, à la surface (71), celle-ci devrait, tout autour du point ou de la ligne de contact, quitter le plan tangent en se dirigeant partout d'un même côté de ce plan, c'est-à-dire sans le traverser: un plan mené de ce côté, parallèlement au plan tangent, et à une distance infiniment petite de celui-ci, devrait donc couper la surface (71) suivant une courbe fermée qui aurait nécessairement des parties convexes; or il est clair qu'en ces parties la surface (71) serait convexe elle-même et aurait ses deux courbures principales de même sens, ce qui est démontré impossible.

Donc les dérivées $\frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$ ne peuvent être nulle part maxima ou minima dans l'intérieur des sections, et l'on aura leurs plus grandes et leurs plus petites valeurs en prenant les maxima et les minima de celles qu'elles acquièrent aux divers points du contour.

Terminons ce paragraphe en cherchant les relations qu'il faudrait joindre à (65), (66), et la modification à introduire dans (67), si, la tige étant creuse, la section σ se trouvait limitée, non-seulement par son contour extérieur, que nous continuerons à appeler s, mais encore par une courbe fermée intérieure s_0, enveloppant un espace σ_0 étranger à la tige. Il y aurait alors de plus : 1° la condition $\mathrm{T}_3\,dz - \mathrm{T}_2\,dy = 0$ ou $d\varphi = 0$ spéciale à ce nouveau contour, et qui, en y appelant φ_0 la valeur de φ, s'écrirait simplement $\varphi_0 = \text{const.}$; 2° une relation pareille à (47), exprimant la continuité du déplacement u' dans tout l'intérieur de la section. En y substituant à v, w leurs valeurs $-\mathrm{K}xz$, $\mathrm{K}xy$, à g_{xy}, g_{zx} leurs expressions (9), et $-\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ à T_2, T_3, cette condition devient

$$\int_{s_0}\left[\left(\mathrm{G}'\frac{d\varphi}{dz} - \mathrm{H}'\frac{d\varphi}{dy}\right)dy - \left(\mathrm{G}\frac{d\varphi}{dy} - \mathrm{H}\frac{d\varphi}{dz}\right)dz - \mathrm{K}(y\,dz - z\,dy)\right] = 0.$$

Or, si l'on change, comme nous avons fait plusieurs fois, des intégrales prises dans tout l'intérieur d'une section en d'autres prises sur son contour, et si l'on observe que le contour s_0 est supposé décrit en tournant dans le sens des z positifs vers les y positifs, on trouve aisément

$$\sigma_0 = \int_{\sigma_0} dz\,dy = \int_{s_0} z\,dy,\quad \sigma_0 = \int_{\sigma_0} dy\,dz = -\int_{s_0} y\,dz.$$

De plus, sur le contour s_0, on a $\frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz = 0$, et, par suite, à cause de $\mathrm{H}' = -\mathrm{H}$, $-\mathrm{H}'\frac{d\varphi}{dy}dy + \mathrm{H}\frac{d\varphi}{dz}dz = 0$. Les deux relations qu'il faudra joindre à (65) et (66) sont donc

$$(73)\qquad \varphi_0 = \text{const.},\quad 2\mathrm{K}\sigma_0 + \int_{s_0}\left(\mathrm{G}'\frac{d\varphi}{dz}dy - \mathrm{G}\frac{d\varphi}{dy}dz\right) = 0.$$

Quant à l'expression de M, $-\int_{\sigma}\left(y\frac{d\varphi}{dy} + z\frac{d\varphi}{dz}\right)d\sigma$, nous avons déjà vu (avant la formule 67), qu'elle se change en

$$-\int\varphi(y\,dz - z\,dy) + 2\int_{\sigma}\varphi\,d\sigma,$$

où la première intégrale est prise sur toute l'étendue du contour tant extérieur qu'intérieur. Comme $\varphi = 0$ sur le contour extérieur, cette intégrale se réduit $-\varphi_0\int_{s_0}(y\,dz - z\,dy)$, ou à $2\varphi_0\sigma_0$. Il vient donc, au lieu de (67),

$$(67\ bis)\qquad \mathrm{M} = 2\left(\int_{\sigma}\varphi\,d\sigma + \varphi_0\sigma_0\right).$$

Lorsqu'on a trouvé l'expression de φ pour une section pleine, cette expression peut servir si la même section est évidée suivant une des courbes qui ont pour équation $\varphi = \text{const.}$; en effet, elle vérifie la première condition (73) et elle satisfait aussi à la seconde; car elle donne, dans tout l'intérieur de la partie évidée σ_0, $G\frac{d^2\varphi}{dy^2} + G'\frac{d^2\varphi}{dz^2} + 2K = 0$, relation qui, multiplée par $dydz$ et intégrée sur toute l'étendue de l'aire σ_0, devient justement la seconde (73). Le moment de torsion est alors la différence de ceux que donneraient, pour une valeur égale de K, deux tiges pleines dont les sections auraient, l'une le contour s, l'autre le contour s_0 : le moment de la première serait $2\int_{\sigma+\sigma_0}\varphi\,d\sigma$, et celui de la seconde $2\int_{\sigma_0}(\varphi-\varphi_0)\,d\sigma$, car la même fonction φ pourrait servir au calcul de la torsion de cette seconde tige, pourvu qu'on la diminuât de la constante φ_0, afin de la rendre nulle sur le contour s_0 : la différence de ces deux moments est bien $2\left(\int_\sigma \varphi\,d\sigma + \varphi_0\sigma_0\right)$, c'est-à-dire l'expression (67 *bis*) de M.

§ X. — *Sections pleines pour lesquelles les intégrations relatives à la torsion et à la flexion inégale ont pu être effectuées.*

Pour évaluer, aux divers points d'une section, les forces T_2, T_3 et le déplacement u', dans le cas de la torsion d'une tige pleine homogène, et dans celui de sa flexion inégale, il faut intégrer, dans le premier cas, le système (66), et, dans le second, en se bornant à des sections symétriques de forme et de contexture par rapport au plan des zx, sollicitées à fléchir parallèlement à ce plan, le système (62) réduit à

$$(74)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{dy^2} + \dfrac{G'}{G}\dfrac{d^2\varphi}{dz^2} + \dfrac{2\mathfrak{F}\eta}{GEI}y = 0, \\ \left(\dfrac{d\varphi}{dy} + \dfrac{\mathfrak{F}}{2I}z^2\right)dy + \dfrac{d\varphi}{dz}dz = 0 \text{ sur le contour}, \\ \varphi = 0 \quad \text{pour} \quad y = z = 0. \end{cases}$$

M. de Saint-Venant a effectué ces intégrations pour les sections les plus usuelles, en partant d'équations qui reviennent à (66) ou à (74), mais qui contiennent, au lieu de φ, le déplacement u', et il a pu ainsi déterminer les formes que prennent les sections primitivement normales aux fibres, les points où se produisent les plus grandes déformations et les valeurs maxima que le moment M et la force $\mathfrak{F}$ ne peuvent dépasser sans altérer la constitution de la tige. Ces questions sont traitées dans les beaux Mémoires sur la torsion (*Savants étrangers*, t. XIV, 1855) et sur la flexion des prismes (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. I, 2e série, 1856), et aussi dans l'édition de la *Mécanique appliquée de Navier*, annotée par M. de Saint-Venant (Note du n° 156). Je me contenterai ici d'indiquer les expressions de φ que fournit, pour ces cas, l'intégration des équations (66) et (74).

1° Les équations indéfinies des systèmes (66) et (74) sont d'abord vérifiées par des expressions entières de y et z, qui ont, si b, c désignent des constantes arbitraires, une première partie de la forme

$$(75)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{K}\frac{b^2c^2}{c^2\mathrm{G}+b^2\mathrm{G}'}\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right), \quad \text{ou encore} \quad -\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{G}}y^2, \quad \text{pour} \quad (66),\\ &\text{et} \quad -\frac{\mathfrak{F}\eta}{3\mathrm{GEI}}y^3 \quad \text{pour} \quad (74),\end{aligned}\right.$$

suivie d'une autre partie φ_1, qui doit vérifier l'équation

$$(76)\qquad \frac{d^2\varphi_1}{dy^2}+\frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{G}}\frac{d^2\varphi_1}{dz^2}=0,$$

et dont les termes d'un degré quelconque m ont par suite pour somme, en appelant J et J' deux constantes arbitraires,

$$(77)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{J}\left[y^m-\frac{m(m-1)}{1.2}y^{m-2}\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}z^2+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}y^{m-4}\left(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}\right)^2z^4-\ldots\right]\\ &\quad+\mathrm{J}'\left[\frac{m}{1}y^{m-1}\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}z-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}y^{m-3}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}\right)^3z^3+\ldots\right].\end{aligned}\right.$$

Dans le problème de la torsion, on pourra poser

$$(78)\qquad \varphi=\mathrm{K}\frac{b^2c^2}{c^2\mathrm{G}+b^2\mathrm{G}'}\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)+\varphi_1,$$

pourvu que la section soit limitée par un des contours, de formes infiniment variées, qui ont pour équation

$$(79)\qquad K\frac{b^2c^2}{c^2G+b^2G'}\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)+\varphi_1=0.$$

Les plus intéressants de ces contours sont : 1° pour $\varphi_1=0$, une ellipse dont b, c sont les demi-axes ; 2° si $G'=G$, et qu'on fasse $c=b$, $\varphi_1=\frac{2K}{3\sqrt{3}Gb}(y^3-3yz^2)$, un triangle équilatéral dont le côté est $3b$, et qui a pour équation

$$1-\frac{y^2+z^2}{b^2}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{y^3-3yz^2}{b^3}=0,\quad \text{ou}\quad \left[\left(1-\frac{y}{b\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{z}{b}\right)^2\right]\left[1+\frac{2y}{b\sqrt{3}}\right]=0;$$

3° si $G'=G$ et que b'^2, c'^2, n étant des constantes arbitraires, on pose

$$b^2=c^2=\frac{2(1+n)b'^2c'^2}{b'^2+c'^2},$$

$$\varphi_1=\frac{Kb^2}{2G(1+n)b'^2c'^2}\left[(1+2n)(b'^2-c'^2)(y^2-z^2)-2n(y^4-6y^2z^2+z^4)\right],$$

des courbes symétriques par rapport aux axes des y et des z, qui ont b', c' pour demi-axes et pour équation

$$c'^2y^2+b'^2z^2-n(b'^2-c'^2)(y^2-z^2)+n(y^4-6y^2z^2+z^4)=(1+n)b'^2c'^2;$$

toutefois, elles ne sont fermées, si l'on suppose $c'^2<b'^2$, qu'autant que n est compris entre $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ et $\frac{-c'^2}{b'^2+c'^2}$; parmi ces courbes, il convient de distinguer : un carré à côtés concaves et à angles légèrement aigus qu'on obtient en faisant $b'=c'$, $n=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$, un autre carré à angles arrondis dont les côtés ont leur partie moyenne concave, et qu'on obtient lorsque $b'=c'$, $n=0,2$; pour $c'<b'$ et $n>0$ plusieurs courbes qui ressemblent aux sections des rails de chemins de fer; pour $c'^2<0$ et $n>0$ des orbes ovales; 4° enfin (lorsque $G'=G$) des contours en forme de croix de Malte, qui ont pour équation

$$y^2+z^2-\frac{48}{49}\frac{16}{17}\frac{y^4-6y^2z^2+z^4}{b'^2}+\frac{12}{49}\frac{16}{17}\frac{y^8-28y^6z^2+70y^4z^4-28y^2z^6+z^8}{b'^6}$$
$$=b'^2\left(1-\frac{36}{49}\frac{16}{17}\right).$$

L'intégrale

$$(80)\qquad \varphi=-\frac{\mathfrak{F}n}{3\,\mathrm{GEI}}y^3+\varphi_1$$

s'applique moins bien au problème de la flexion, parce que le contour y a pour équation, non pas simplement $\varphi=0$, mais bien la seconde équation (74), qui reste à intégrer. Cette intégration peut se faire, lorsque, n et c désignant deux constantes arbitraires, on prend

$$\varphi_1=\frac{\mathfrak{F}}{2\mathrm{I}(n+1)}\left[-nc^2y+\frac{\mathrm{G}'}{3\mathrm{G}}\left(y^3-3y\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}z^2\right)\right],$$

ou bien

$$\varphi=\frac{\mathfrak{F}}{2\mathrm{I}}\left[-\frac{2n}{3\mathrm{GE}}y^3-\frac{nc^2}{n+1}y+\frac{\mathrm{G}'}{3(n+1)\mathrm{G}}\left(y^3-3y\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}z^2\right)\right],$$

et l'équation finie du contour qu'on obtient est, si l'on appelle b une troisième constante arbitraire,

$$(1-\mathrm{K})\left(\frac{y}{b}\right)^n+\mathrm{K}\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,\quad \text{où}\quad \mathrm{K}=\frac{\mathrm{EG}'-2(n+1)n}{(n-2)\mathrm{EG}}\frac{b^2}{c^2}.$$

Cette équation représente une courbe qui a b, c pour demi-axes, et qui se réduit à une ellipse si l'on y choisit n de manière que $\mathrm{K}=1$.

2° Lorsque la section est un rectangle ayant son centre à l'origine et ses côtés $2b$, $2c$ parallèles aux axes, les intégrales des systèmes (66) et (74) sont transcendantes.

Considérons d'abord le système (66). En appelant k' un nombre entier et posant

$$k=(2k'+1)\frac{\pi}{2b},$$

l'expression

$$\varphi = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{G}}\left[b^2 - y^2 + \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \mathrm{L}\,\frac{e^{kz\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}} + e^{-kz\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}}}{e^{kc\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}} + e^{-kc\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}}}\cos ky\right],$$

vérifiera l'équation indéfinie (66) et donnera même $\varphi = 0$ sur les deux côtés $y = \pm b$, car on aura sur ces côtés $\cos ky = 0$. Il suffira donc de déterminer les coefficients L de manière à donner $\varphi = 0$ sur les deux côtés $z = \pm c$, ou bien

$$\sum_{k'=0}^{k'=\infty} \mathrm{L} \cos ky = y^2 - b^2 \quad \text{pour } y \text{ compris entre } -b \text{ et } +b.$$

Cela aura lieu, si l'on prend, d'après une formule connue d'analyse,

$$\mathrm{L} = \frac{2}{b}\int_0^b (y^2 - b^2)\cos ky\,dy = \mp\frac{4}{bk^3},$$

en prenant le signe $-$ pour k' pair et $+$ pour k' impair. Ainsi l'expression définitive de φ sera

$$(81)\quad \varphi = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{G}b}\left[b(b^2 - y^2) + \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \frac{\mp 4}{k^3}\,\frac{e^{kz\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}} + e^{-kz\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}}}{e^{kc\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}} + e^{-kc\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}}}\cos ky\right] \text{[*]}.$$

Passons au système (74). En supposant encore k' entier et

$$k = \frac{k'\pi}{b},$$

la formule

$$\varphi = -\frac{\mathcal{G}\eta}{\mathrm{GEI}}\left[\frac{y^3}{3} + \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \mathrm{L}\,\frac{e^{kz\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}} + e^{-kz\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}}}{k\left(e^{kc\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}} + e^{-kc\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'}}}\right)}\sin ky\right]$$

---

[*] On peut voir au Mémoire cité plus haut [*Sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides*, formules (17 *bis*)], une autre expression de φ, qui équivaut à (81), mais où b et c, y et z entrent symétriquement.

vérifie l'équation indéfinie (74), la condition $\varphi = 0$ pour $y = z = 0$, et la relation $\frac{d\varphi}{dz} = 0$ pour $y = \pm b$, relation à laquelle se réduit, sur les deux côtés $y = \pm b$, la condition spéciale au contour. Il ne reste plus qu'à choisir les coefficients L de manière à satisfaire à cette condition sur les deux autres côtés, c'est-à-dire à avoir

$$\frac{d\varphi}{dy} + \frac{\mathcal{F}}{2I} z^2 = 0 \quad \text{pour} \quad z = \pm c,$$

ou bien

$$\sum_{k'=0}^{k'=\infty} \mathrm{L} \cos ky = \frac{\mathrm{GE}\,c^2}{2\eta} - y^2 \text{ pour } y \text{ compris entre } \pm b.$$

D'après la formule qui donne, si $f(y)$ est une fonction paire, connue de $y = -b$ à $y = +b$,

$$f(y) = \frac{1}{b}\int_0^b f(y)\,dy + \frac{2}{b}\sum_{k'=1}^{k'=\infty} \cos ky \int_0^b f(y) \cos ky\,dy,$$

il viendra

$$\mathrm{L} = \frac{1}{b}\int_0^b \left(\frac{\mathrm{GE}\,c^2}{2\eta} - y^2\right) dy = \frac{\mathrm{GE}\,c^2}{2\eta} - \frac{b^2}{3} \quad \text{pour} \quad k' = 0,$$

$$\mathrm{L} = \frac{2}{b}\int_0^b \left(\frac{\mathrm{GE}\,c^2}{2\eta} - y^2\right) \cos ky\,dy = \frac{\pm 4}{k^2} \quad \text{pour} \quad k' > 0,$$

en adoptant le signe + pour k' impair et le signe — pour k' pair. L'expression définitive de φ sera, par suite [*],

$$(82)\quad \varphi = -\frac{\mathcal{F}\eta}{\mathrm{GEI}}\left[\frac{y}{3} + \left(\frac{\mathrm{GE}\,c^2}{2\eta} - \frac{b^2}{3}\right) y + \sum_{k'=1}^{k'=\infty} \frac{\pm 4}{k^3} \frac{e^{kz\sqrt{\frac{G}{G'}}} + e^{-kz\sqrt{\frac{G}{G'}}}}{e^{kc\sqrt{\frac{G}{G'}}} + e^{-kc\sqrt{\frac{G}{G'}}}} \sin ky\right].$$

---

[*] L'intégration des équations (66) relatives à la torsion, en y joignant même les conditions (73) s'il y a des cavités intérieures, peut encore être effectuée toutes les fois que, G' égalant G, la tige est limitée en tous sens par des surfaces appartenant

§ XI. — *Exemples divers d'équilibre et de mouvement d'une tige rectiligne dont les déformations totales sont très-petites.*

Admettons que les déplacements u, v, w, tous rapportés à un même système d'axes rectangulaires des x, y, z, soient très-petits sur toute l'étendue de la tige, supposée primitivement rectiligne et non torse, qui ainsi s'écartera peu de l'axe des x, et sera comprise entre deux abscisses $x = x_0$ et $x = x_1$ ayant pour différence la longueur de la tige. On pourra faire pour toute la tige ce qui a été fait aux paragraphes précédents pour un tronçon assez court, c'est-à-dire obtenir les

---

à deux systèmes de cylindres orthogonaux et isothermes Si l'on prend $\varphi = -\frac{K}{G}y^2 + \varphi_1$, les équations (66) et (73) deviendront

$$\frac{d^2\varphi_1}{dy^2} + \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} = 0,$$

$$\varphi_1 = \frac{K}{G}y^2 \text{ aux divers points du contour extérieur,}$$

$\varphi_1 = \frac{K}{G}y^2 + \text{const.}$, aux divers points de chaque courbe fermée du contour intérieur, en se réservant de déterminer la constante pour chacune de ces courbes de manière que la seconde condition (73) y soit vérifiée.

Le problème de la torsion, ainsi posé, sera identique à celui des températures stationnaires dans la tige proposée, supposée athermane, homogène et isotrope, si l'on admet que les diverses génératrices de sa surface soient entretenues à des températures φ_1, exprimées sur chacune par $\frac{K}{G}y^2$ ou par $\frac{K}{G}y^2 + \text{const.}$ Or, ce problème a été traité dans toute sa généralité et quelles que fûssent même ces températures, par M. Lamé (*Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, XI^e^, XII^e^ et XIII^e^ Leçons; Paris, 1859). M. Lamé applique sa solution, aussi simple que s'il s'agissait d'une poutre rectangulaire en équilibre de température, à divers cas où la section est limitée par deux cercles excentriques ou par quatre portions de cercles, et par des lemniscates et des hyperboles. Quant au cas particulier intéressant, et qu'il se contente d'indiquer (XI^e^ Leçon, § CVIII), où la section σ est comprise entre deux ellipses homofocales, M. Clebsch en a développé le calcul, au point de vue spécial de la torsion (*Théorie de l'élasticité des corps solides*, Leipzig, 1862, §§ XXXIII, XXXIV et XXXV).

déplacements vrais d'équilibre en ajoutant respectivement ceux qui auraient lieu pour divers systèmes plus simples d'application des forces extérieures. Par exemple, supposons appliquées à la seconde base de la tige, au lieu des forces qui y agissent réellement : 1° trois forces $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{F}'_1$, $\mathfrak{F}'$ appliquées à son centre de gravité, dirigées parallèlement aux trois axes des x, y, z, et égales aux résultantes suivant ces axes respectifs des actions réellement appliquées à cette extrémité de la tige; 2° trois couples respectivement perpendiculaires aux axes des x, des y, des z, et ayant leurs moments M', $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}'_1$ par rapport à ces axes égaux aux moments pareils résultants de ces actions. Appelons d'autre part : ρ' la valeur moyenne de ρ sur toute l'étendue d'une section σ; y_0, z_0 les coordonnées transversales du centre de gravité d'une section, déterminé dans l'hypothèse que chaque élément $d\sigma$ ait sa densité superficielle égale à la densité ρ, c'est-à-dire de manière que $\int_\sigma \rho(y - y_0)\, d\sigma = 0$, $\int_\sigma \rho(z - z_0)\, d\sigma = 0$ (ce centre de gravité est distinct généralement de celui qu'on obtient en supposant à chaque élément $d\sigma$ une densité superficielle égale à E, et par lequel nous admettons que l'axe des x soit mené); X, comme aux paragraphes précédents, la composante suivant les x de l'action extérieure exercée au point (x, y, z) sur l'unité de masse; Y_0 et Z_0 les composantes de cette action suivant les y et les z au point (x, y_0, z_0), $Y_0 - \zeta(z - z_0)$, $Z_0 + \zeta(y - y_0)$ les composantes pareilles (dans lesquelles nous supposerons ζ une simple fonction de x), pour le point (x, y, z). Les déplacements vrais pourront s'obtenir en ajoutant ceux qui auraient lieu, si le prisme était séparément soumis, dans son intérieur et sur sa seconde base : 1° aux forces X et $\mathfrak{X}'$; 2° aux couple $\mathfrak{M}'$, appliqué à sa seconde base; 3° au couple pareil $\mathfrak{M}'_1$; 4° à la force $\mathfrak{F}'$ et aux actions Z_0 supposées appliquées, par unité de masse, à toutes les molécules des diverses sections normales; 5° de même, aux forces $\mathfrak{F}'_1$ et Y_0; 6° enfin, au couple M', appliqué à la seconde base, et à des actions suivant les y et les z égales respectivement, par unité de masse, à $-\zeta(z - z_0)$ et à $\zeta(y - y_0)$.

Pour appliquer à ces cas les formules du § VIII, il faut se rappeler que, dans ce paragraphe, x', y', z' et u', v', w' désignent les coordonnées primitives et les déplacements des divers points d'un tronçon quelconque par rapport à trois axes rectangulaires dont deux sont les axes d'inertie principaux de la seconde base du tronçon. Par suite, les ∂, g, les N, T et les dérivées en x', y', z' des diverses fonctions que l'on peut avoir à considérer y sont les mêmes que si on adoptait, au lieu de ces axes, d'autres axes primitivement parallèles à ceux-là, en particulier ceux que nous adoptons actuellement, et dont nous supposerons l'origine, par exemple, au centre de gravité de la première base de la tige. De plus, si l'on veut appliquer en particulier ces formules à un tronçon dont la seconde base serait à la distance x de l'origine, il faut y remplacer $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{N}$, M, $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1$ par les composantes totales suivant les deux axes d'inertie principaux de cette base et leur perpendiculaire commune, et par les moments résultants relatifs aux mêmes droites, de toutes les forces extérieures qui agissent sur la partie de la tige comprise entre l'abscisse donnée x et l'abscisse extrême x_1. On trouve facilement :

1° Dans le cas où les forces se réduisent à X et $\mathcal{N}'$,

$$(83)\quad \mathcal{N} = \mathcal{N}' + \int_x^{x_1} dx \int_\sigma \rho \mathrm{X}\, d\sigma, \quad \mathcal{F}_1 = \mathcal{F} = 0, \quad \mathcal{M} = \mathcal{M}_1 = \mathrm{M} = 0;$$

2° et 3° Quand un des couples $\mathcal{M}'$, $\mathcal{M}'_1$ perpendiculaire aux y ou aux z est seul appliqué à la seconde base de la tige, sans qu'aucune force agisse sur son intérieur,

$$(84)\quad \begin{cases} \text{Soit}\quad \mathcal{M} = \mathcal{M}', & \mathcal{N} = \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = 0, \quad \mathcal{M}_1 = \mathrm{M} = 0, \\ \text{Soit}\quad \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}'_1, & \mathcal{N} = \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = 0, \quad \mathcal{M} = \mathrm{M} = 0; \end{cases}$$

4° Dans le cas où les forces se réduisent à Z_0 et $\mathcal{F}'$,

$$(85)\quad \begin{cases} \mathcal{F} = \mathcal{F}' + \int_x^{x_1} \rho' \mathrm{Z}_0 \sigma\, dx, \quad \mathcal{M} = -\mathcal{F}'(x_1 - x) - \int_x^{x_1} \rho' \mathrm{Z}_0 \sigma (x' - x)\, dx', \\ \mathcal{N} = \mathcal{F}_1 = 0, \quad \mathcal{M}_1 = \mathrm{M} = 0; \end{cases}$$

dans l'intégrale $\int_x^{x_1} \rho' \mathrm{Z}_0 \sigma (x' - x)\, dx'$, x' désigne les abscisses comprises entre x qui est celle de la section considérée, et x_1 qui est celle de l'extrémité de la tige; ρ', Z_0, σ y sont donc fonctions de x';

5° De même, s'il n'y a que les forces Y_0 et $\mathcal{F}'_1$,

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}'_1 + \int_x^{x_1} \rho' Y_0 \sigma dx, \quad \mathcal{M}_1 = \mathcal{F}'_1 (x_1 - x) + \int_x^{x_1} \rho' Y_0 \sigma (x' - x) dx',$$

$$\mathcal{N} = \mathcal{F} = 0, \quad \mathcal{M} = M = 0;$$

6° Enfin, supposons que les forces se réduisent au couple M′, perpendiculaire aux x, sur la seconde base, et aux composantes $-\zeta(z - z_0)$, $\zeta(y - y_0)$, respectivement parallèles aux y et aux z, sur l'unité de masse; appelons J le moment d'inertie polaire d'une section, autour du point (y_0, z_0) de la section (moment calculé dans l'hypothèse que chaque élément $d\sigma$ ait une densité superficielle égale à ρ), c'est-à-dire l'intégrale $\int_\sigma \rho [(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] d\sigma$, et observons que l'expression $\int_\sigma \rho (yZ - zY) d\sigma$, ou $\zeta \int_\sigma \rho [y(y - y_0) + z(z - z_0)] d\sigma$ devient aisément $\left[\text{à cause de} \int_\sigma \rho (y - y_0) d\sigma = \int_\sigma \rho (z - z_0) d\sigma = 0\right]$, ζJ. Nous trouverons

$$(86) \quad M = M' + \int_x^{x_1} \zeta J \, dx, \quad \mathcal{N} = \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = 0, \quad \mathcal{M} = \mathcal{M}_1 = 0.$$

Dans chacun de ces cas, les formules du § V permettront d'obtenir complétement N_1, T_3, T_2 pour chaque valeur de x, c'est-à-dire sur toute l'étendue des diverses sections normales de la tige, et, si l'on divise celle-ci en tronçons très-courts, les formules du § VI donneront ensuite la nouvelle forme de chaque tronçon, et par suite de toute la tige.

Dans les cinq premiers cas, où il n'y aura pas de torsion sensible, il est particulièrement intéressant de chercher ce que devient la fibre centrale de la tige, celle qui correspond à $y = z = 0$. Les deux identités

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{d\partial_x}{dz} + \frac{dg_{zx}}{dx}, \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{d\partial_x}{dy} + \frac{dg_{xy}}{dx},$$

dans lesquelles, d'après les raisonnements qui précèdent les formules (55), on pourra négliger les dérivées en x de g_{zx}, g_{xy}, deviennent, au moyen de (52) et (52 *bis*),

$$(87) \qquad \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{E}\mathrm{I}}, \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathcal{E}\mathrm{I}'}.$$

Ces équations détermineront complétement v et w sur toute la longueur de la fibre centrale; car on pourra supposer les axes choisis de manière que, pour $x = 0$, on ait sur cette fibre, $u = v = w = 0$, $\frac{dv}{dx} = \frac{dw}{dx} = 0$.

Quant à u, les mêmes relations (52) et (52 *bis*) donneront, sur la fibre centrale,

$$(87\ bis) \qquad \partial_x \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dx} = \frac{\mathfrak{N}}{\mathcal{E}\sigma},$$

relation qui, multipliée par dx, et intégrée à partir de $x = 0$, déterminera complétement u, puisqu'on a, pour $x = 0$, $u = 0$.

Dans le premier cas, où les forces se réduisent à X et $\mathfrak{N}'$, on aura, d'après (83), (87) et (87 *bis*),

$$(83\ bis) \qquad v = w = 0, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\mathcal{E}\sigma}\left(\mathfrak{N}' + \int_x^{x_1} dx \int_\sigma \rho \mathrm{X}\, d\sigma\right).$$

La fibre centrale reste droite; mais elle est dilatée ou contractée.

Dans les second et troisième cas, il résulte de (84) et des mêmes relations (87), (87 *bis*), en supposant $\mathcal{E}$, I, I′ indépendants de x,

$$(84\ bis) \qquad \begin{cases} \text{soit} \quad u = v = 0, \quad w = -\dfrac{\mathfrak{M}'}{2\mathcal{E}\mathrm{I}} x^2, \\ \text{soit} \quad u = w = 0, \quad v = \dfrac{\mathfrak{M}'_1}{2\mathcal{E}\mathrm{I}'} x^2; \end{cases}$$

la fibre centrale n'est ni comprimée, ni dilatée; mais elle est fléchie en un arc de cercle dont le plan est parallèle à celui des zx ou à celui des xy, et dont la courbure est $\frac{-\mathfrak{M}'}{\mathcal{E}\mathrm{I}}$ ou $\frac{\mathfrak{M}'_1}{\mathcal{E}\mathrm{I}'}$.

Dans le quatrième cas, où les forces se réduisent à Z_0 et à $\mathfrak{F}'$, les relations (85) et les mêmes (87), (87 *bis*), donneront

$$u = v = 0, \quad w = \int_0^x dx \int_0^x \frac{dx}{\mathcal{E}\mathrm{I}} \left[\mathfrak{F}'(x_1 - x) + \int_x^{x_1} \rho' \mathrm{Z}_0 \sigma (x' - x) dx' \right].$$

Le fibre n'est ni dilatée, ni contractée; mais elle est fléchie parallèlement au plan des zx, et sa courbure en chaque point est

$$(85\ bis) \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{\mathcal{E}\mathrm{I}} \left[\mathfrak{F}'(x_1 - x) + \int_x^{x_1} \rho' \mathrm{Z}_0 \sigma (x' - x) dx' \right].$$

Il en est de même dans le cinquième cas, à cela près que le plan de la flexion est celui des xy.

Étudions enfin le sixième cas. Nous ferons passer l'axe des x, pour ce cas seulement, par les centres de gravité (y_0, z_0) des sections, obtenus en supposant aux divers éléments de celles-ci, des densités superficielles égales à ρ, et nous appellerons fibre centrale le lieu des points matériels qui joindront ces centres. Les formules (86) et (87) donneront $v = w = 0$ pour $y = z = 0$; et, comme on aura d'ailleurs partout $\partial_x = 0$, la fibre centrale ne sera, ni fléchie, ni dilatée, ni contractée. De plus, d'après des considérations placées vers la fin du § VIII, on peut regarder u comme nul à côté de v, w, et supposer que la tige est simplement tordue autour de la fibre centrale, c'est-à-dire que les sections qui lui étaient primitivement normales n'ont pas cessé de l'être et sont encore sensiblement planes, mais qu'elles ont simplement tourné autour d'elle d'angles inégaux. A la distance x de l'origine, la torsion par unité de longueur, c'est-à-dire la dérivée par rapport à x de l'angle dont les sections ont tourné, est égale à la quantité K des formules de (63) à (69). Donc, si l'on appelle, comme dans (64), τ un coefficient qui ne dépend que de la constitution du milieu et de la forme de la section σ, cette formule (64) donnera

$$(86\ bis) \qquad \mathrm{M} \quad \text{ou} \quad \mathrm{M}' + \int_x^{x_1} \zeta \mathrm{J}\, dx = \tau \mathrm{K} \sigma^2.$$

Cette formule donnera K pour toutes les valeurs de x, et, par suite, les positions relatives de toutes les sections.

Supposons actuellement qu'on fasse vibrer la tige, et proposons-nous de trouver les équations différentielles de son mouvement. Nous distinguerons principalement, conformément à ce qu'indique l'expérience, des vibrations longitudinales, transversales, tournantes. Chaque extrémité de la tige sera, ou libre, ou simplement appuyée sur un corps fixe, ou encastrée, c'est-à-dire fixée sur une longueur très-petite, ou obligée d'entraîner un corps rigide de masse et de figure données, ou enfin unie, soit directement, soit par l'intermédiaire d'un corps rigide de masse **M**, à une autre tige qui fera suite à la première.

D'après le principe de la superposition des petits effets, nous pourrons calculer à part les déplacements d'équilibre dus aux forces qui ne varient pas pendant le mouvement, et à part les déplacements qui dépendent des forces produites par le mouvement même. Comme nous ne voulons nous occuper ici que de ces derniers, les forces X, Y, Z se réduiront à celles d'inertie $-\frac{d^2u}{dt^2}$, $-\frac{d^2v}{dt^2}$, $-\frac{d^2w}{dt^2}$, et celles qui seront exercées aux extrémités de la tige seront nulles si la tige y est libre, ou égales, dans le cas contraire, aux réactions des corps sur lesquels elle s'appuie ou qu'elle entraîne dans son mouvement.

1° Dans le cas des vibrations longitudinales, le déplacement u sera sensiblement constant sur toute l'étendue d'une même section, et la troisième équation (83 *bis*), dans laquelle il faudra faire $X = -\frac{d^2u}{dt^2}$ et $\int_\sigma \rho\, d\sigma = \rho'\sigma$, donnera

$$(87\,a)\quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\mathcal{E}\sigma}\left(\mathfrak{N}' - \int_x^{x_1} \rho' \frac{d^2u}{dt^2}\sigma\, dx\right),\ \text{ou}\ \int_x^{x_1} \rho' \frac{d^2u}{dt^2}\sigma\, dx = \mathfrak{N}' - \mathcal{E}\sigma\frac{du}{dx}.$$

En différentiant cette relation par rapport à x, il vient l'équation indéfinie

$$(87\,b)\qquad \rho'\sigma\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\sigma\frac{du}{dx}\right).$$

Si l'on fait $x = x_1$, la relation $(87\,a)$ devient $\mathfrak{N}' = \mathcal{E}\sigma\frac{du}{dx}$, ce qui signifie que l'action excercée, à travers une section, par la matière située par rapport à cette section du côté des x positifs, est le produit de $\mathcal{E}\sigma$ par la dilatation linéaire ∂_x, de la tige, sur cette section. Par suite, on a $\frac{du}{dx} = 0$ à toute extrémité libre, et $\mathcal{E}\sigma \frac{du}{dx} = \mp \mathbf{M} \frac{d^2 u}{dt^2}$, à une extrémité où la tige est fixée à un corps solide de masse $\mathbf{M}$ qu'elle entraîne dans son mouvement, en adoptant $-\mathbf{M}$ ou $+\mathbf{M}$, suivant que la masse $\mathbf{M}$ est à la seconde extrémité de la tige ou à la première; car cette masse exerce sur la tige, et suivant les x positifs, une action égale à sa force d'inertie $-\mathbf{M} \frac{d^2 u}{dt^2}$; les actions statiques de cette masse, telles que son poids, sont supposées avoir été distraites et comptées en tant que changeant simplement l'état d'équilibre. Si la tige considérée est liée à une autre par l'intermédiaire d'un corps rigide de masse $\mathbf{M}$, en appelant u_1 les déplacements de la seconde tige, il est clair d'abord qu'on aura, à l'extrémité commune, $u = u_1$, et, comme la force motrice de la masse $\mathbf{M}$ sera la résultante des deux tractions exercées sur cette masse par les deux tiges, on aura en outre, en désignant par σ_1, $\mathcal{E}_1$ la section et le coefficient moyen d'élasticité de la seconde

$$\mathbf{M} \frac{d^2 u}{dt^2} = \mathcal{E}_1 \sigma_1 \frac{du_1}{dx} - \mathcal{E}\sigma \frac{du}{dx}.$$

En résumé, les déplacements devront vérifier, sur toute la longueur de chaque tige, une équation indéfinie telle que (87 b), et en outre, aux extrémités de ces tiges, les relations spéciales suivantes :

$$(87\ c)\begin{cases} \mathcal{E}\sigma \dfrac{du}{dx} = \mathcal{X}' & \text{à une extrémité où la traction } \mathcal{X}' \text{ est donnée,} \\ \dfrac{du}{dx} = 0 & \text{à une extrémité libre,} \\ u = 0 & \text{à une extrémité fixe [*],} \\ \mathcal{E}\sigma \dfrac{du}{dx} \pm \mathbf{M} \dfrac{d^2 u}{dt^2} = 0 & \text{à une extrémité où une masse } \mathbf{M} \text{ est entraînée,} \\ u = u_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}\sigma \dfrac{du}{dx} + \mathbf{M} \dfrac{d^2 u}{dt^2} = \mathcal{E}_1 \sigma_1 \dfrac{du_1}{dx} & \text{à une extrémité où deux} \\ \qquad \text{tiges se relient et supportent une masse } \mathbf{M}. \end{cases}$$

2° Considérons actuellement des vibrations transversales supposées

[*] Cette condition deviendrait $u =$ une fonction donnée de t, si l'extrémité, au lieu d'être fixe, était assujettie à des déplacements donnés.

se faire, pour fixer les idées, dans le plan des zx. Le déplacement w sera sensiblement le même sur toute l'étendue d'une section σ, et la force d'inertie d'une tranche dont l'abscisse est x' et la longueur dx' vaudra, par suite, $-\rho'\sigma\frac{d^2w}{dt^2}dx'$. La seconde extrémité de la tige sera soumise, à chaque instant de son mouvement, à une force $\mathcal{F}'$ dirigée suivant les z et à un couple $\mathfrak{M}'$ parallèle au plan des zx. La relation (85 *bis*), en ajoutant à la parenthèse de son second membre le moment $\mathfrak{M}'$ changé de signe, conformément à ce qu'indique la première (87), deviendra

$$(88)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2w}{dx^2} = \dfrac{1}{\mathcal{E}\mathrm{I}}\left[-\mathfrak{M}' + \mathcal{F}'(x_1 - x) - \displaystyle\int_x^{x_1} \rho'\sigma\frac{d^2w}{dt^2}(x'-x)\,dx'\right], \\ \text{ou}\quad -\displaystyle\int_x^{x_1}\rho'\sigma\frac{d^2w}{dt^2}(x'-x)\,dx' = \mathfrak{M}' - \mathcal{F}'(x_1-x) + \mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}; \\ \text{d'où il résulte, en différentiant par rapport à } x, \\ \displaystyle\int_x^{x_1}\rho'\sigma\frac{d^2w}{dt^2}dx = \mathcal{F}' + \frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}\right). \end{array}\right.$$

Celle-ci, différentiée encore en x, donnera l'équation indéfinie

$$(88\ bis)\qquad \rho'\sigma\frac{d^2w}{dt^2} + \frac{d^2}{dx^2}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}\right) = 0.$$

De plus, il résulte de (88) que, pour $x = x_1$, $\mathfrak{M}' = -\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}$, $\mathcal{F}' = -\frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}\right)$; c'est-à-dire que le moment total $\mathfrak{M}'$ et la composante suivant les z, des forces exercées à travers une section par la matière située, par rapport à cette section, du côté des x positifs, ont respectivement pour expressions $-\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}$ et $-\frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}\right)$; la composante et le moment pareils des forces exercées par la matière située de l'autre côté de la même section seront évidemment égaux, mais contraires. Si une extrémité est libre, on y a donc $\frac{d^2w}{dx^2} = 0$, $\frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}\right) = 0$. Si elle est appuyée sur un point fixe qui n'exercera évidemment qu'une simple réaction normale $\mathcal{F}'$, le moment $\mathfrak{M}'$ sera nul, et l'on y aura $w = 0$, $\frac{d^2w}{dx^2} = 0$. Si elle est encastrée, c'est-à-dire appuyée sur deux points fixes infiniment voisins, le couple $\mathfrak{M}'$ ne sera pas plus nul que la force $\mathfrak{F}'$; mais il est clair qu'on pourra poser les deux relations $w = 0$, $\frac{dw}{dx} = 0$. Si une masse $\mathbf{M}$, placée à l'extrémité de la tige, subit les déplacements w de cette extrémité, sans tourner sur elle-même, elle exerce sur la tige une simple action normale à son axe et égale à $-\mathbf{M}\frac{d^2w}{dt^2}$; on a donc à cette extrémité $\frac{d^2w}{dx^2} = 0$, $-\frac{d}{dx}\left(\varepsilon \mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}\right) = \mp \mathbf{M}\frac{d^2w}{dt^2}$, en adoptant $-\mathbf{M}$ ou $+\mathbf{M}$ suivant que la masse $\mathbf{M}$ est placée à la seconde extrémité de la tige ou à la première. Enfin, supposons qu'à l'extrémité $x = x_1$ se trouve une masse $\mathbf{M}$ assujettie à subir, sans tourner, les déplacements w, mais que la première tige y soit elle-même liée à une seconde, de manière que leurs axes se touchent. Il est clair qu'on aura d'abord, en appelant w_1 le déplacement transversal de la seconde tige, $w_1 = w$; mais, de plus, si l'on conçoit le tronçon compris entre deux sections normales infiniment voisines, construites, l'une dans la première tige et l'autre dans la seconde, la somme des composantes suivant les z des forces exercées sur ce tronçon sera nulle, ainsi que la somme des moments de ces forces autour d'une parallèle aux y, menée par le point où se rencontrent les axes des deux tiges. La réaction $-\mathbf{M}\frac{d^2w}{dt^2}$ de la masse $\mathbf{M}$, ainsi que l'action $-\mathfrak{F}'$ ou $\frac{d}{dx}\left(\varepsilon \mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}\right)$ exercée, suivant les z, sur la première base de ce tronçon, et l'action $-\frac{d}{dx}\left(\varepsilon_1 \mathrm{I}_1\frac{d^2w_1}{dx^2}\right)$, exercée, suivant les z, sur la seconde base, auront des moments nuls; car leur direction rencontre la droite par rapport à laquelle se prennent les moments; mais la somme de ces forces sera nulle, et l'on devra poser

$$\frac{d}{dx}\left(\varepsilon \mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}\right) = \mathbf{M}\frac{d^2w}{dt^2} + \frac{d}{dx}\left(\varepsilon_1 \mathrm{I}_1\frac{d^2w_1}{dx^2}\right).$$

L'équation des moments ne contiendra que le couple $-\mathfrak{M}'$ ou $\varepsilon \mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}$ appliqué à la première base du tronçon, et le couple $-\varepsilon_1 \mathrm{I}_1\frac{d^2w_1}{dx^2}$ appliqué à la seconde base. Chacun de ces deux moments sera même nul si les deux tiges ont leurs axes assujettis à se toucher, mais sans être soudées l'une à l'autre; car la réaction exercée sur chacune d'elles par l'autre se réduit alors à une simple force. Lorsque, au contraire, les deux tiges sont soudées, on a seulement $\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2} - \mathcal{E}_1\mathrm{I}_1\frac{d^2w_1}{dx^2} = 0$; mais il est clair que leurs deux axes font alors un angle sensiblement constant, égal à π si les deux tiges, antérieurement aux déformations étudiées, se trouvaient exactement en ligne droite, et à $\pi - i$, i étant une petite quantité donnée, dans le cas contraire. Si l'on admet, pour plus de simplicité, que l'angle $\pi - i$ soit dans le plan des zx, on aura ainsi $\frac{dw_1}{dx} = \frac{dw}{dx} + i$.

Les vibrations transversales sont donc régies par autant d'équations indéfinies pareilles à (88 *bis*) qu'il y a de tiges placées bout à bout, et de plus par les conditions spéciales suivantes :

$$(88\ ter)\left\{\begin{array}{l}
\mathfrak{M}' = -\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2};\ \mathfrak{F}' = -\frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}\right) \text{ à une extrémité où le couple } \mathfrak{M}' \\
\qquad \text{et la force } \mathfrak{F}' \text{ sont donnés,} \\
\frac{d^2w}{dx^2} = 0,\ \frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}\right) = 0 \text{ à une extrémité libre,} \\
\frac{d^2w}{dx^2} = 0,\ w = 0 \text{ à une extrémité simplement appuyée,} \\
\frac{dw}{dx} = 0,\ w = 0 \text{ à une extrémité encastrée,} \\
\frac{d^2w}{dx^2} = 0,\ \frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}\right) = \pm\mathbf{M}\frac{d^2w}{dt^2} \text{ à une extrémité où une masse } \mathbf{M} \\
\qquad \text{est entraînée,} \\
w = w_1,\ \frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2}\right) = \mathbf{M}\frac{d^2w}{dt^2} + \frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}_1\mathrm{I}_1\frac{d^2w_1}{dx^2}\right) \text{ à l'extrémité,} \\
\qquad \text{commune à deux tiges, qui supporte une masse } \mathbf{M}\text{, et de plus,} \\
\frac{d^2w}{dx^2} = 0,\ \frac{d^2w_1}{dx^2} = 0 \text{ si les deux tiges sont simplement appuyées l'une} \\
\qquad \text{sur l'autre,} \\
\frac{dw_1}{dx} = \frac{dw}{dx} + i,\ \mathcal{E}\mathrm{I}\frac{d^2w}{dx^2} = \mathcal{E}_1\mathrm{I}_1\frac{d^2w_1}{dx^2} \text{ si elles sont soudées (*).}
\end{array}\right.$$

(*) Ces deux dernières relations et deux précédentes, également spéciales au point de raccordement de deux tiges soudées bout à bout ou de deux portions d'une même tige, peuvent être aisément étendues au cas où la masse $\mathbf{M}$, située en ce point, est

3° Cherchons enfin les équations des vibrations tournantes, en adoptant pour axe des x le lieu des centres de gravité des sections, précédemment désignés par (y_0, z_0). Ces vibrations consistent en une série de torsions et de détorsions rapides, dans lesquelles chaque section tourne, à fort peu près dans son plan et autour de l'axe de la tige, d'un angle ω variable avec le temps t et avec l'abscisse x de la section. En supposant cet angle très-petit, les déplacements u, v, w de la molécule dont les coordonnées primitives sont (x, y, z), vaudront sensiblement 0, $-z\omega$, $y\omega$. Les forces X, Y, Z, réduites à celles d'inertie, vaudront donc respectivement 0, $z\frac{d^2\omega}{dt^2}$, $-y\frac{d^2\omega}{dt^2}$, et l'équation (86 *bis*), dans laquelle il faudra faire ζ égal à $-\frac{d^2\omega}{dt^2}$, et K, angle de torsion par unité de longueur, égal à $\frac{d\omega}{dx}$, deviendra

$$(89)\quad \tau\sigma^2\frac{d\omega}{dx} = \mathrm{M}' - \int_x^{x_1} \mathrm{J}\frac{d^2\omega}{dt^2}dx, \quad \text{ou} \quad -\int_x^{x_1}\mathrm{J}\frac{d^2\omega}{dt^2}dx = -\mathrm{M}' + \tau\sigma^2\frac{d\omega}{dx}.$$

---

soumise, dans le sens des z, à une force $-\mathbf{M}g$, telle que son poids, et mue longitudinalement de manière que son abscisse x_1 soit une fonction donnée de t, et que son déplacement transversal soit constamment égal à celui des points de la tige qui ont la même abscisse. Il suffira d'ajouter, dans l'une de ces relations, la nouvelle force $-\mathbf{M}g$ à celle d'inertie $-\mathbf{M}\frac{d^2w}{dt^2}$ de la masse $\mathbf{M}$, et aussi de remplacer $\frac{d^2w}{dt^2}$ par la vraie expression de l'accélération transversale de cette masse, c'est-à-dire par $\frac{d^2w}{dt^2} + 2\frac{d^2w}{dx\,dt}\frac{dx_1}{dt} + \frac{d^2w}{dx^2}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \frac{dw}{dx}\frac{d^2x_1}{dt^2}$, comme on le trouve en différentiant deux fois w par rapport à t, après y avoir substitué x_1 à x. Quant à l'angle i, négligeable lorsque le poids $\mathbf{M}g$ n'est pas très-grand, on pourra le supposer une fonction donnée de x_1, et par suite de t.

Si la vitesse longitudinale de la masse $\mathbf{M}$ est seulement de l'ordre de grandeur de sa vitesse transversale, les dérivées successives, par rapport à t, de w et $\frac{dw}{dx}$, après qu'on a remplacé dans ces fonctions x par x_1, se réduisent sensiblement à $\frac{dw}{dt}$, $\frac{d^2w}{dt^2}$, $\frac{d^2w}{dx\,dt}$, ..., comme si x_1 était constant : par suite, les équations du problème ont la même forme que pour $x_1 =$ const., et les considérations ci-après, qui prouvent que ces équations déterminent complétement w, s'étendent au cas d'un poids voyageur le long d'une série de tiges placées bout à bout.

Différentiée en x, cette relation donne l'équation indéfinie des vibrations tournantes

$$(89\,bis)\qquad \mathrm{J}\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{d}{dx}\left(\tau\sigma^2\frac{d\omega}{dx}\right).$$

De plus, si l'on y fait $x = x_1$, il vient

$$\mathrm{M}' = \tau\sigma^2\frac{d\omega}{dx};$$

le moment, par rapport à l'axe des x, des forces exercées à travers une section par la matière située, relativement à cette section, du côté des x positifs, est donc égal à $\tau\sigma^2\frac{d\omega}{dx}$; il est clair que le moment pareil des forces exercées par la matière située de l'autre côté de la section serait égal et contraire. Ce moment est nul à une extrémité libre; il acquiert des valeurs telles, qu'on ait $\omega = 0$ à une extrémité fixe; lorsqu'une masse rigide $\mathbf{M}$, attachée à une extrémité libre, participe à son mouvement de rotation autour des x, le moment $\pm\tau\sigma^2\frac{d\omega}{dx}$ est égal à celui des forces d'inertie de cette masse, moment qui a pour expression le produit de l'accélération angulaire changée de signe, $-\frac{d^2\omega}{dt^2}$, par le moment $\mathfrak{J}$ d'inertie de cette masse autour de l'axe des x, que nous supposerons être un de ses axes naturels de rotation. On adoptera le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que la masse sera à la seconde extrémité de la tige ou à la première. Enfin, lorsque la tige est reliée, par l'intermédiaire de la masse $\mathbf{M}$, à une autre tige pour laquelle les quantités analogues à τ, σ, J, ω seront désignées par τ_1, σ_1, J_1, ω_1, il est évident qu'on a d'abord, à l'extrémité commune, $\omega = \omega_1$, et, en outre, que le moment $\tau\sigma^2\frac{d\omega}{dx}$ des forces exercées sur la section $x = x_1$ de la première tige se compose du moment $-\mathfrak{J}\frac{d^2\omega}{dt^2}$ des forces d'inertie de la masse $\mathbf{M}$, plus le moment $\tau_1\sigma_1^2\frac{d\omega_1}{dx}$ des actions exercées par la seconde tige sur la première.

Ainsi on aura, pour chaque tige, une équation indéfinie pareille à

(89 *bis*), et, en outre, les conditions spéciales suivantes :

$$(89\ ter)\quad\left\{\begin{array}{l}\tau\sigma^2\dfrac{d\omega}{dx}=\mathrm{M}'\ \text{à une extrémité où le moment } \mathrm{M}' \text{ est donné,}\\[2mm] \dfrac{d\omega}{dx}=0\ \text{à une extrémité libre,}\\[2mm] \omega=0\ \text{à une extrémité fixe,}\\[2mm] \tau\sigma^2\dfrac{d\omega}{dx}\pm\mathfrak{I}\dfrac{d^2\omega}{dt^2}=0\ \text{à une extrémité où une masse } \mathbf{M} \text{ est entraînée,}\\[2mm] \omega=\omega_1\ \text{et}\ \tau\sigma^2\dfrac{d\omega}{dx}+\mathfrak{I}\dfrac{d^2\omega}{dt^2}=\tau_1\sigma_1^2\dfrac{d\omega_1}{dx}\ \text{à une extrémité où}\\ \qquad\text{deux tiges, placées bout à bout, sont reliées par l'intermédiaire}\\ \qquad\text{d'une masse } \mathbf{M}.\end{array}\right.$$

On peut remarquer que la forme des équations (89), (89 *bis*), (89 *ter*) est la même que celle de (87 *a*), (87 *b*), (87 *c*), c'est-à-dire que les vibrations tournantes ont la plus grande analogie avec les vibrations longitudinales et donnent lieu aux mêmes problèmes de calcul intégral.

Les équations (87 *b*), (87 *c*) et (88 *bis*), (88 *ter*) déterminent complétement u, w, pourvu que les déplacements initiaux u_0, w_0 et les vitesses initiales $\left(\frac{du}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dw}{dt}\right)_0$, pour $t=0$, soient donnés sur toute la longueur des tiges. En effet, u, w désignant une solution qui réponde à toutes ces conditions, soient $u+u'$, $w+w'$ toute autre solution. En remplaçant u, w par $u+u'$, $w+w'$, ces conditions deviennent

$$(90)\quad\left\{\begin{array}{l}\rho'\sigma\dfrac{d^2u'}{dt^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\sigma\dfrac{du'}{dx}\right),\\[2mm] u'=0,\ \dfrac{du'}{dt}=0\ \text{pour } t=0,\\[2mm] \dfrac{du'}{dx}=0\ \text{à une extrémité où } \mathfrak{N}' \text{ est donné et à une extrémité libre,}\\[2mm] u'=0\ \text{à une extrémité fixe ou assujettie à des mouvements donnés,}\\[2mm] \mathcal{E}\sigma\dfrac{du'}{dx}\pm\mathbf{M}\dfrac{d^2u'}{dt^2}=0\ \text{à une extrémité où une masse } \mathbf{M} \text{ est entraînée,}\\[2mm] u'=u'_1\ \text{et}\ \mathcal{E}\sigma\dfrac{du'}{dx}+\mathbf{M}\dfrac{d^2u'}{dt^2}=\mathcal{E}_1\sigma_1\dfrac{du'_1}{dx}\ \text{à une extrémité où}\\ \qquad\text{deux tiges se relient et supportent une masse } \mathbf{M};\end{array}\right.$$

$$(90\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l}
\rho'\sigma\,\dfrac{d^2w'}{dt^2}+\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\,\dfrac{d^2w'}{dx^2}\right)=0,\\[2mm]
w'=0,\quad \dfrac{dw'}{dt}=0 \text{ pour } t=0,\\[2mm]
\dfrac{d^2w'}{dx^2}=0,\quad \dfrac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\,\dfrac{d^2w'}{dx^2}\right)=0 \text{ à une extrémité où } \mathfrak{M}' \text{ et } \mathfrak{F}' \text{ sont}\\
\qquad\qquad \text{donnés, et à une extrémité libre,}\\[2mm]
\dfrac{d^2w'}{dx^2}=0,\quad w'=0 \text{ à une extrémité appuyée,}\\[2mm]
\dfrac{dw'}{dx}=0,\quad w'=0 \text{ à une extrémité encastrée,}\\[2mm]
\dfrac{d^2w'}{dx^2}=0,\quad \dfrac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\,\dfrac{d^2w'}{dx^2}\right)=\pm\mathbf{M}\,\dfrac{d^2w'}{dt^2} \text{ à une extrémité où une}\\
\qquad\qquad \text{masse } \mathbf{M} \text{ est entraînée,}\\[2mm]
w'=w'_1,\quad \dfrac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\,\dfrac{d^2w'}{dx^2}\right)=\mathbf{M}\,\dfrac{d^2w'}{dt^2}+\dfrac{d}{dx}\left(\mathcal{E}_1\mathrm{I}_1\,\dfrac{d^2w'_1}{dx^2}\right) \text{ à l'extré-}\\
\qquad\qquad \text{mité, commune à deux tiges, qui supporte une masse } \mathbf{M}, \text{ et}\\
\qquad\qquad \text{en outre,}\\[2mm]
\dfrac{d^2w'}{dx^2}=0,\quad \dfrac{d^2w'_1}{dx^2}=0 \text{ si les deux tiges sont simplement appuyées}\\
\qquad\qquad \text{l'une sur l'autre,}\\[2mm]
\mathcal{E}\mathrm{I}\,\dfrac{d^2w'}{dx^2}=\mathcal{E}_1\mathrm{I}_1\,\dfrac{d^2w'_1}{dx^2},\quad \dfrac{dw'}{dx}=\dfrac{dw'_1}{dx} \text{ si elles sont soudées.}
\end{array}\right.$$

Multiplions les deux équations indéfinies, respectivement par $\frac{du'}{dt}dx$, $\frac{dw'}{dt}dx$, et intégrons entre les valeurs x_0, x_1 de x qui correspondent aux extrémités de chaque tige, en transformant les seconds termes, au moyen de l'intégration par parties appliquée une fois sur l'équation en u' et deux fois sur l'équation en w'; il viendra

$$-\left[\mathcal{E}\sigma\,\frac{du'}{dx}\,\frac{du'}{dt}\right]_{x_0}^{x_1}+\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1}\left[\rho'\left(\frac{du'}{dt}\right)^2+\mathcal{E}\left(\frac{du'}{dx}\right)^2\right]\sigma\,dx=0,$$

$$\left[\frac{dw'}{dt}\,\frac{d}{dx}\left(\mathcal{E}\mathrm{I}\,\frac{d^2w'}{dx^2}\right)-\frac{d^2w'}{dx\,dt}\,\mathcal{E}\mathrm{I}\,\frac{d^2w'}{dx^2}\right]_{x_0}^{x_1}$$
$$+\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1}\left[\rho'\sigma\left(\frac{dw'}{dt}\right)^2+\mathcal{E}\mathrm{I}\left(\frac{d^2w'}{dx^2}\right)^2\right]dx=0.$$

Ajoutons respectivement tous les résultats pareils relatifs aux diverses tiges, en tenant compte de toutes les conditions (90) et (90 *bis*) spéciales aux extrémités, conditions qui sont vérifiées à toute époque, et qui, pouvant être, par suite, différentiées par rapport à t, donnent, par exemple: à une extrémité fixe, $\frac{du'}{dt} = 0$, $\frac{dw'}{dt} = 0$; à une extrémité encastrée, $\frac{dw'}{dt} = 0$, $\frac{d^2 w'}{dx\,dt} = 0$; à une extrémité commune à deux tiges, $\frac{du'}{dt} = \frac{du'_1}{dt}$, $\frac{dw'}{dt} = \frac{dw'_1}{dt}$, et, si elles sont soudées, $\frac{d^2 w'}{dx\,dt} = \frac{d^2 w'_1}{dx\,dt}$. Les termes relatifs aux extrémités se réduiront à ceux qui sont affectés des masses $\mathbf{M}$ des corps entraînés par les tiges : ces termes auront respectivement les formes

$$\mathbf{M}\frac{d^2 u'}{dt^2}\frac{du'}{dt},\quad \mathbf{M}\frac{d^2 w'}{dt^2}\frac{dw'}{dt},\quad \text{ou bien}\quad \frac{1}{2}\mathbf{M}\frac{d}{dt}\left(\frac{du'}{dt}\right)^2,\quad \frac{1}{2}\mathbf{M}\frac{d}{dt}\left(\frac{dw'}{dt}\right)^2.$$

Par suite, en désignant par Σ des signes de sommation s'étendant, soit à toutes les masses $\mathbf{M}$, soit à tous les éléments dx de longueur des tiges, il viendra

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\sum \mathbf{M}\left(\frac{du'}{dt}\right)^2 + \sum\left(\rho'\frac{du'^2}{dt^2} + \varepsilon\frac{du'^2}{dx^2}\right)\sigma\,dx\right] = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\sum \mathbf{M}\left(\frac{dw'}{dt}\right)^2 + \sum\left[\rho'\sigma\frac{dw'^2}{dt^2} + \varepsilon \mathrm{I}\left(\frac{d^2 w'}{dx^2}\right)^2\right]dx\right\} = 0.$$

Donc les expressions entre parenthèses sont indépendantes de t, et, comme elles sont nulles pour $t = 0$ $\left(\text{à cause de } u' = 0,\ \frac{du'}{dt} = 0,\ w' = 0,\ \frac{dw'}{dt} = 0 \text{ pour } t = 0\right)$, elles le seront toujours; ce qui n'est évidemment possible que si l'on a partout séparément

$$\frac{du'}{dt} = 0,\quad \frac{du'}{dx} = 0,\quad \frac{dw'}{dt} = 0,\quad \frac{d^2 w'}{dx^2} = 0,$$

et, par suite,

$$u' = 0,\quad w' = 0.$$

Par conséquent, les déplacements u, w sont complétement déterminés, et il en est de même de ω, à cause de l'analogie des équations (89 *bis*), (89 *ter*) avec (87 *b*), (87 *c*).

Il n'entre pas dans le plan de cette étude d'intégrer les équations différentielles de ce paragraphe; on peut voir de beaux exemples de ces intégrations : 1° dans le Mémoire *sur les Ponts suspendus*, de Navier, qui étudie le choc longitudinal d'une barre verticale par un corps solide supposé lui rester fixé après le choc; 2° dans l'*Introduction à la Mécanique industrielle* (nos 322 et 325, notes), de Poncelet, qui complète la solution précédente en tenant compte de ce que la barre, à l'instant du choc, n'a pas encore reçu l'allongement statique produit par le poids du corps heurtant; 3° dans le Mémoire de M. Phillips *sur les vibrations longitudinales des tiges dont les extrémités sont soumises à des mouvements donnés ou à l'action continue de forces variant suivant une loi donnée* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, février 1864); 4° dans l'Étude de M. de Saint-Venant *sur le choc longitudinal de deux barres cylindriques ou coniques tronquées* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1867, et *Comptes rendus*, 11 mai 1868); 5° dans le Mémoire de Poisson *sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, t. VIII, 1829, aux numéros de 47 à 57), et dans sa *Mécanique rationnelle* (deuxième édition, nos 518 et suivants), où Poisson obtient les lois des vibrations transversales d'une tige homogène isotrope et prismatique, dont une des extrémités est libre et l'autre libre ou encastrée; 6° enfin, dans le Mémoire de M. de Saint-Venant *sur les vibrations transversales d'une barre fixée à ses extrémités et unie en son milieu à une masse étrangère qui l'a heurtée* (*Société philomathique*, 5 novembre 1853 et 21 janvier 1854, au journal *l'Institut*, n° 105, et *Comptes rendus*, 9 janvier 1865, 3 juillet 1865 et 15 janvier 1866).

§ XII. — *Étude d'une tige rectiligne soumise à une traction antérieure aux déplacements. — Vibrations des cordes en tenant compte de la rigidité.*

Nous nous sommes bornés jusqu'ici à des tiges dont tous les éléments plans n'étaient soumis par unité de surface, antérieurement aux déplacements étudiés, qu'à une pression normale et constante, telle que la pression atmosphérique. Occupons-nous actuellement des déplacements subis par les divers points d'une corde élastique sans pesanteur, tendue entre deux appuis, et qui est écartée de cette position primitive d'équilibre par diverses forces appliquées à son intérieur ou près de ses extrémités. Si nous divisons la corde en un certain nombre de tronçons d'une longueur assez petite, et que, dans chaque tronçon, nous choisissions pour axe des x l'axe de la corde dans son état primitif d'équilibre, celle-ci pourra être assimilée a une tige où les forces élastiques N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 seraient sensiblement nulles antérieurement aux déplacements u, v, w, mais dans laquelle la traction N_1, exercée par unité de surface sur les éléments plans perpendiculaires aux x, aurait, avant les déplacements, une certaine valeur N_1^0, généralement très-grande par rapport à celles que développent de petites déformations postérieures ∂, g. L'équilibre de la corde, dans son état choisi comme primitif, exige que cette valeur N_1^0 se trouve à fort peu près indépendante de x, et même que la tension totale $\int_\sigma N_1^0 d\sigma$, que nous appellerons $\mathfrak{N}_0$, soit rigoureusement constante sur toute la longueur; mais, d'un point à l'autre d'une section σ, N_1^0 peut être variable, soit d'une manière continue, soit même brusquement sur les lignes précédemment appelées s_1.

Au § I de mon Étude sur la théorie des ondes liquides périodiques (*Savants Étrangers*, t. XX, 1871), j'ai étudié des milieux élastiques du genre d'une corde très-tendue, c'est-à-dire dans lesquels les N, T ont, antérieurement aux déplacements étudiés, des valeurs considérables. J'y ai établi les équations du mouvement [§ I, formules (3) et (3 *bis*)] qui conviennent alors. Ces équations, spécifiées pour le cas de l'équilibre, et en admettant que les dérivées premières de u, v, w en x, y, z soient très-petites et que la force N_1 ait seule une partie primitive N_1^0, supposée même indépendante de x, diffèrent peu des équations (2) du Mémoire actuel : les deux dernières restent les mêmes, mais la première est remplacée par

$$(91)\qquad \frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}-\frac{dN_1^0}{dy}\frac{dv}{dx}-\frac{dN_1^0}{dz}\frac{dw}{dx}+\rho X=0.$$

J'ai démontré aussi (note placée à la fin de la troisième Note complémentaire de ce Mémoire), que, si l'on prend des plans coordonnés parallèles, dans l'état primitif du milieu, aux trois éléments plans matériels rectangulaires qui se croisent en un point M et sur lesquels les actions N_1^0, N_2^0, N_3^0, exercées par unité de surface, dans l'état primitif du milieu, sont normales, et si, en outre, on appelle N'_1, N'_2, N'_3, T'_1, T'_2, T'_3 les composantes, suivant les axes, des petites forces élastiques qui viennent se joindre à ces composantes normales N_1^0, N_2^0, N_3^0 pour donner, après les déplacements u, v, w, les vrais forces élastiques exercées sur l'unité de surface primitive de ces mêmes éléments plans, les composantes N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 des forces exercées sur l'unité actuelle de surface des éléments plans perpendiculaires, après les déplacements, aux axes fixes des x, y, z, auront pour expressions

$$(92)\qquad \left\{\begin{aligned}
N_1 &= N_1^0\left(1 - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right) + N'_1,\\
N_2 &= N_2^0\left(1 - \frac{dw}{dz} - \frac{du}{dx}\right) + N'_2,\\
N_3 &= N_3^0\left(1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy}\right) + N'_3;\\
T_1 &= N_2^0\frac{dw}{dy} + N_3^0\frac{dv}{dz} + T'_1,\\
T_2 &= N_3^0\frac{du}{dz} + N_1^0\frac{dw}{dx} + T'_2,\\
T_3 &= N_1^0\frac{dv}{dx} + N_2^0\frac{du}{dy} + T'_3.
\end{aligned}\right.$$

Ces valeurs, dans lesquelles il faut faire $N_2^0 = N_3^0 = 0$, changent la relation (91) et les deux dernières (2), en celles-ci

$$(91\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{dN'_1}{dx} + \frac{dT'_3}{dy} + \frac{dT'_2}{dz} + \rho X = 0,\\
&N_1^0\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dT'_3}{dx} + \rho Y + \frac{dN'_2}{dy} + \frac{dT'_1}{dz} = 0,\\
&N_1^0\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{dT'_2}{dx} + \rho Z + \frac{dT'_1}{dy} + \frac{dN'_3}{dz} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Voyons actuellement ce que deviennent les conditions spéciales (3), appliquées au contour s et aux lignes s_1 d'une section. Les cosinus m, n, p sont ceux des angles que fait avec les axes, après les déplacements, la normale à un élément d'une de ces lignes et à la fibre longitudinale de la tige qui passe par son pied. Or, cette fibre, primitivement parallèle aux x, fait avec les axes des angles ayant pour cosinus 1, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dw}{dx}$: la condition correspondante de perpendicularité est donc

$$(93)\qquad m + n\frac{dv}{dx} + p\frac{dw}{dx} = 0,\quad \text{d'où}\quad m = -n\frac{dv}{dx} - p\frac{dw}{dx}.$$

Par suite, les composantes p_x, p_y, p_z de la force exercée sur l'unité de surface d'un des éléments plans qui séparent la tige de l'espace environnant, ou deux parties de la tige de constitution différente, seront

$$\begin{gathered}
n\left(T_3 - N_1\frac{dv}{dx}\right) + p\left(T_2 - N_1\frac{dw}{dx}\right),\\
n\left(N_2 - T_3\frac{dv}{dx}\right) + p\left(T_1 - T_3\frac{dw}{dx}\right),\\
n\left(T_1 - T_2\frac{dv}{dx}\right) + p\left(N_3 - T_2\frac{dw}{dx}\right),
\end{gathered}$$

ou bien, d'après (92), et en observant que n, p, facteurs des petites quantités T'_3, T'_2, N'_2, T'_1, N'_3, peuvent être remplacés par leurs valeurs primitives $\frac{dz}{ds}$, $-\frac{dy}{ds}$,

$$T'_3\frac{dz}{ds} - T'_2\frac{dy}{ds},\quad N'_2\frac{dz}{ds} - T'_1\frac{dy}{ds},\quad T'_1\frac{dz}{ds} - N'_3\frac{dy}{ds}.$$

Donc les conditions spéciales aux lignes s et s_1 sont les mêmes que celles du § III, dans lesquelles on remplacerait N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 par N'_2, N'_3, T'_1, T'_2, T'_3. Les considérations qui suivent la formule (15) serviraient de même à établir que ces quantités sont très-petites par rapport à leurs dérivées premières en y, z; toutes les fonctions que l'on peut avoir à étudier doivent être au moins de l'ordre de grandeur de leurs dérivées en x, excepté peut-être aux extrémités de la tige. De plus, les deux dernières équations (91 *bis*) se réduiront, comme les deux dernières (2), à la forme

$$(94)\qquad \frac{dN'_2}{dy} + \frac{dT'_1}{dz} = 0,\quad \frac{dT'_1}{dy} + \frac{dN'_3}{dz} = 0:$$

car, ou bien la corde étudiée est douée d'une rigidité appréciable, et alors, les termes ρY, ρZ, $N_1^0 \frac{d^2 v}{dx^2}$, $N_1^0 \frac{d^2 w}{dx^2}$ n'étant pas extrêmement supérieurs à $\frac{dT'_3}{dx}$, $\frac{dT'_2}{dx}$, on peut raisonner sur ces deux équations (91 *bis*) comme on l'a fait sur les deux dernières (2); ou bien elle est sans rigidité sensible, c'est-à-dire qu'on peut faire

$$T'_3 = T'_2 = 0, \quad N'_3 = N'_2 = T'_1 = 0,$$

et alors rien n'empêche de poser les formules (94).

Les trois équations indéfinies exprimant l'équilibre auront ainsi précisément les mêmes formes qu'au § III, mais elles contiendront, au lieu de N, T, les forces N', T', que les déformations ∂, g auront développées, en sus des composantes normales et primitives N_1^0, 0, 0, sur l'unité de surface primitive des éléments plans qui étaient d'abord perpendiculaires aux axes des x, y, z. Ces forces N', T' sont des fonctions linéaires, sans termes constants, des ∂, g, et les ∂, g des fonctions pareilles des N', T', que les raisonnements du § II permettraient de mettre, dans le cas où le milieu offrirait, soit un plan de symétrie de contexture, soit un axe d'élasticité, sous les formes (9), (10), (10 *bis*). De plus, l'expression (12), en y remplaçant les N, T par les N', T', serait celle du travail exécuté par ces forces dans la déformation d'un élément de volume primitivement rectangulaire et égal à $dx\,dy\,dz$, au moins dans l'hypothèse où les u, v, w, et par suite, les ∂, g conserveraient entre eux les mêmes rapports pendant toute la durée de cette déformation. Cette expression doit être positive, car il est naturel d'admettre que les forces intérieures développées pendant qu'on écarte un corps de sa position d'équilibre stable choisie pour état primitif, s'opposent à cet écart.

Toutes les formules des §§ I, II, III et celles des autres paragraphes qui en résultent, s'appliquent donc au problème actuel, à cela près que les N, T devront y être remplacés par les N', T', et que les coefficients d'élasticité, E et ε par exemple, seront relatifs à l'état où se trouve la tige sous l'action de la tension $\mathfrak{N}_0$, et non à l'état naturel dans lequel cette tension n'existait pas. Mais les formules (32), (32 *bis*) et (33), qui n'ont pas été déduites de celles des §§ I, II, III, ont besoin d'un examen spécial.

Pour cela, supposons d'abord qu'on ait marqué, sur les diverses sections normales et antérieurement aux déplacements u, v, w, les centres des forces parallèles $N_1^0\,d\sigma$ appliquées à tous les éléments $d\sigma$ de chacune, et appelons y_0, z_0 leurs coordonnées transversales, sensiblement indépendantes de x, par rapport aux axes des y et des z précédemment choisis, c'est-à-dire tels que $\int_\sigma \mathrm{E}y\,d\sigma = \int_\sigma \mathrm{E}z\,d\sigma = 0$, $\int_\sigma \mathrm{E}yz\,d\sigma = 0$. On aura ainsi

$$y_0 \int_\sigma N_1^0\,d\sigma \quad \text{ou} \quad y_0\,\mathfrak{N}_0 = \int_\sigma N_1^0\,y\,d\sigma, \quad z_0\,\mathfrak{N}_0 = \int_\sigma N_1^0\,z\,d\sigma.$$

L'ensemble des points matériels dont les coordonnées primitives transversales sont y_0, z_0 est une fibre longitudinale à laquelle on peut supposer appliquées les tensions $\mathfrak{N}_0$. L'équilibre de la tige dans son état primitif exige évidemment que cette fibre soit rigoureusement droite, tandis que, si la tige n'a pas toutes ses sections normales exactement pareilles, son axe, lieu des centres de gravité des sections, peut n'être pas absolument rectiligne. C'est pour cela que nous n'avons adopté cet axe, dans sa position primitive, pour celui des x, que sur une certaine longueur assez petite de la tige.

Concevons actuellement que l'on mène, après les déplacements u, v, w et par un point matériel O' de l'axe de la tige, dont les coordonnées primitives sont x, o, o, une section perpendiculaire aux x, et cherchons la résultante et le centre des forces normales $N_1^0\left(1 - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right)$, appliquées, par unité de surface, à ses divers éléments plans. Cette résultante est égale à $\mathfrak{N}_0$ comme avant les déplacements. En effet, chacun des éléments plans de la section considérée est l'intersection d'un faisceau infiniment petit de fibres longitudinales par un plan presque normal à ces fibres, et peut être confondu, sauf erreur relative du second ordre de petitesse, avec l'intersection du même faisceau de fibres par la section, primitivement normale à l'axe de la tige et actuellement très-peu inclinée sur ce faisceau, qui est menée par le même point matériel; or cette dernière intersection est égale au produit de sa valeur primitive $d\sigma$ par l'unité augmentée de la dilatation superficielle $\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$ des éléments plans primitivement normaux aux x. La résultante cherchée a donc pour expression

$$\int_\sigma \mathrm{N}_1^0 \left(1 - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right)\left(1 + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) d\sigma = \int_\sigma \mathrm{N}_1^0\, d\sigma = \mathfrak{N}_0.$$

Chechons maintenant le point d'application de cette résultante, ou plutôt ses deux moments par rapport à deux axes parallèles aux y et aux z, menés par le point O'. Ces deux moments sont égaux, pour chaque partie $\mathrm{N}_1^0\, d\sigma$ de la force $\mathfrak{N}_0$, aux produits de $\mathrm{N}_1^0\, d\sigma$ et de $-\mathrm{N}_1^0\, d\sigma$ par l'excès des coordonnées respectives, suivant les z et suivant les y, du point d'application de cette partie de $\mathfrak{N}_0$ sur les coordonnées pareilles de O'. Comme les portions de fibres longitudinales comprises entre la section considérée et la section primitivement normale menée par O' sont très-petites et presque parallèles aux x, les coordonnées suivant les y et suivant les z de ces points d'application peuvent être remplacées, sauf erreur du second ordre de petitesse, par $z + w$, $y + v$, qui sont celles des points correspondants de la section normale menée par O'. Les coordonnées pareilles du point O', situé sur l'axe de la tige, se réduisent d'ailleurs à ses déplacements transversaux, que nous représenterons par v_a, w_a. Les moments cherchés de $\mathrm{N}_1^0\, d\sigma$ seront donc $\mathrm{N}_1^0\, d\sigma(z + w - w_a)$, $-\mathrm{N}_1^0\, d\sigma(y + v - v_a)$, et ceux de la force totale $\mathfrak{N}_0$ vaudront par suite

$$(95)\quad \mathfrak{N}_0 z_0 + \int_\sigma \mathrm{N}_1^0 (w - w_a)\, d\sigma \quad \text{et} \quad -\mathfrak{N}_0 y_0 - \int_\sigma \mathrm{N}_1^0 (v - v_a)\, d\sigma.$$

Cela posé, menons comme au § V [*], par le point de l'axe dont les coordonnées primitives sont x, o, o, non-seulement les deux axes, parallèles à ceux des y et des z, dont il vient d'être parlé, mais encore un premier axe parallèle aux x, et supposons qu'on donne les composantes totales $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}$ et les moments totaux M, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, par rapport à ces axes, de toutes les actions extérieures exercées sur la partie de la tige située au delà du plan des deux derniers : nous pourrons les égaler aux composantes et aux moments pareils des forces exercées sur la masse d'un tronçon compris entre ce plan et une autre section parallèle assez voisine, dont la distance à la première sera désignée par $x' - x$, et de celles qui le sont sur cette seconde section. Les for-

[*] Voir après les formules (31).

mules (32) et (32 *bis*) devront être modifiées; car, N_1 ayant sa première partie $N_1^0\left(1-\frac{dv}{dy}-\frac{dw}{dz}\right)$ considérable, les coordonnées actuelles des points de cette seconde section par rapport aux axes menés par O′, et les éléments plans actuels de cette section ne pourront plus, dans les termes affectés de cette partie de N_1, être remplacés par leurs valeurs primitives $x'-x$, y, z, $d\sigma$. Mais, d'après les considérations précédentes, cette partie de N_1 équivaut à une force $\mathfrak{N}_0$, parallèle aux x, et dont il sera facile d'obtenir les moments par rapport aux axes transversaux menés par O′. Concevons, en effet, que la seconde section, d'abord confondue avec la première, reprenne ensuite sa vraie place en s'en écartant à la distance $x'-x$: les moments cherchés, d'abord égaux, d'après (95), à

$$\left[\mathfrak{N}_0 z_0+\int_\sigma N_1^0(w-w_a)\,d\sigma\right]_x,\quad -\left[\mathfrak{N}_0 y_0+\int_\sigma N_1^0(v-v_a)\,d\sigma\right]_x,$$

varieront, parce que le point d'application de chaque partie constante $N_1^0\,d\sigma$ de la force totale $\mathfrak{N}_0$ s'écartera de la première section en suivant une fibre longitudinale primitivement parallèle aux x. Dans ce mouvement, les coordonnées transversales de ce point croissent sensiblement de $\int_x^{x'}\frac{dv}{dx}dx$ et de $\int_x^{x'}\frac{dw}{dx}dx$, et l'augmentation des deux moments de $N_1^0\,d\sigma$ sera

$$N_1^0\,d\sigma\int_x^{x'}\frac{dw}{dx}dx,\quad -N_1^0\,d\sigma\int_x^{x'}\frac{dv}{dx}dx,$$

ou bien, en faisant passer sous le signe $\int$ le facteur constant $N_1^0\,d\sigma$,

$$\int_x^{x'}\left(N_1^0\frac{dw}{dx}d\sigma\right)dx,\quad -\int_x^{x'}\left(N_1^0\frac{dv}{dx}d\sigma\right)dx.$$

Si l'on fait la somme des quantités pareilles pour tous les éléments $d\sigma$, et qu'on ajoute les valeurs qu'ont, pour $x'=x$, les moments cherchés, on trouve, pour ces moments,

$$\left[\mathfrak{N}_0 z_0+\int_\sigma N_1^0(w-w_a)\,d\sigma\right]_x+\int_x^{x'}dx\int_\sigma N_1^0\frac{dw}{dx}d\sigma,$$

$$-\left[\mathfrak{N}_0 y_0+\int_\sigma N_1^0(v-v_a)\,d\sigma\right]_x-\int_x^{x'}dx\int_\sigma N_1^0\frac{dv}{dx}d\sigma.$$

Les formules (32) et (32 *bis*), en y tenant compte en outre de la seconde partie N'_1 de N_1, en y remplaçant T_3, T_2 par $N_1^0 \frac{dv}{dx} + T'_3$, $N_1^0 \frac{dw}{dx} + T'_2$, et faisant passer dans les premiers membres les termes affectés de $\mathcal{N}_0$, N_1^0, deviendront

$$(96)\left\{\begin{aligned}
&\mathcal{N} - \mathcal{N}_0 = \int_\sigma N'_1\, d\sigma + \int_x^{x'} dx \int_\sigma \rho X\, d\sigma,\\
&\mathcal{F}_1 - \int_\sigma N_1^0 \frac{dv}{dx}\, d\sigma = \int_\sigma T'_3\, d\sigma + \int_x^{x'} dx \int_\sigma \rho Y\, d\sigma,\\
&\mathcal{F} - \int_\sigma N_1^0 \frac{dw}{dx}\, d\sigma = \int_\sigma T'_2\, d\sigma + \int_x^{x'} dx \int_\sigma \rho Z\, d\sigma.\\
&M - \int_\sigma N_1^0 \left(y\frac{dw}{dx} - z\frac{dv}{dx}\right) d\sigma\\
&\quad = \int_\sigma (yT'_2 - zT'_3)\, d\sigma + \int_x^{x'} dx \int_\sigma \rho\,(yZ - zY)\, d\sigma,\\
&\mathfrak{M} - \left[\mathcal{N}_0 z_0 + \int_\sigma N_1^0 (w - w_a)\, d\sigma\right]_x\\
&\quad - \int_x^{x'} dx \int_\sigma N_1^0 \frac{dw}{dx}\, d\sigma + (x' - x) \int_\sigma N_1^0 \frac{dw}{dx}\, d\sigma\\
&\quad = \int_\sigma [zN'_1 - (x' - x)T'_2]\, d\sigma + \int_x^{x'} dx' \int_\sigma \rho\,[zX - (x' - x)Z]\, d\sigma,\\
&-\mathfrak{M}_1 - \left[\mathcal{N}_0 y_0 + \int_\sigma N_1^0 (v - v_a)\, d\sigma\right]_x\\
&\quad - \int_x^{x'} dx' \int_\sigma N_1^0 \frac{dv}{dx}\, d\sigma + (x' - x) \int_\sigma N_1^0 \frac{dv}{dx}\, d\sigma\\
&\quad = \int_\sigma [yN'_1 - (x' - x)T'_3]\, d\sigma + \int_x^{x'} dx' \int_\sigma \rho\,[yX - (x' - x)Y]\, d\sigma.
\end{aligned}\right.$$

Ces relations diffèrent de (32), (32 *bis*), en ce que les N, T sont remplacés par les N', T', et $\mathcal{N}$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}$, M, $\mathfrak{M}$, $-\mathfrak{M}_1$, par les premiers membres de (96). Si, dans la première et dans les deux dernières, on remplace N'_1 par sa valeur $E\partial_x$, et qu'on opère comme on l'a fait pour obtenir les formules (33), ces trois relations et la quatrième (96) donneront, au lieu des quatre (33),

$$
(97)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\mathfrak{N} - \mathfrak{N}_0 = (\mathcal{A}\mathcal{E}\sigma)_{x'} + \int_x^{x'} dx \int_\sigma \rho \mathrm{X} d\sigma,\\
&\mathfrak{M} - \left[\mathfrak{N}_0 z_0 + \int_\sigma \mathrm{N}_1^0 (w - w_a) d\sigma\right]_x\\
&\quad = (\mathcal{B}\mathcal{E}\mathrm{I})_{x'} + \int_x^{x'} \Big[-\mathfrak{F} + \int_\sigma \mathrm{N}_1^0 \frac{dw}{dx} d\sigma\\
&\qquad\qquad + \int_\sigma \rho z \mathrm{X} d\sigma + \int_x^{x'} dx \int_\sigma \rho \mathrm{Z} d\sigma \Big] dx,\\
&-\mathfrak{M}_1 - \left[\mathfrak{N}_0 y_0 + \int_\sigma \mathrm{N}_1^0 (v - v_a) d\sigma\right]_x\\
&\quad = (\mathcal{B}_1 \mathcal{E}\mathrm{I}')_{x'} + \int_x^{x'} \Big[-\mathfrak{F}_1 + \int_\sigma \mathrm{N}_1^0 \frac{dv}{dx} d\sigma\\
&\qquad\qquad + \int_\sigma \rho y \mathrm{X} d\sigma + \int_x^{x'} dx \int_\sigma \rho \mathrm{Y} d\sigma \Big] dx,\\
&\mathrm{M} = \left[\int_\sigma \mathrm{N}_1^0 \left(y \frac{dw}{dx} - z \frac{dv}{dx} \right) d\sigma + \int_\sigma (y \mathrm{T}'_2 - z \mathrm{T}'_3) d\sigma \right]_{x'}\\
&\qquad + \int_x^{x'} dx \int_\sigma \rho (y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y}) d\sigma;
\end{aligned}
\right.
$$

[dans ces formules, la notation $(\quad)_{x'}$ indique que l'expression entre parenthèses est prise pour l'abscisse x'].

Telles sont les quatre équations qui serviront à déterminer $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$, K, et par suite les N′, T′ et les déformations ∂, g. Quant à la seconde et à la troisième (96), on verra, absolument comme au § V, qu'elles résultent de la seconde et de la troisième (97), combinées avec la première (91 *bis*) et avec les deux conditions correspondantes spéciales aux lignes s, s_1.

Nous ne continuerons pas cette étude, qui nous ramènerait, avec certaines modifications, les problèmes étudiés aux paragraphes précédents. Nous chercherons seulement ce que deviennent les équations (85 *bis*) et (88), qui régissent l'équilibre et le mouvement transversal d'une tige rectiligne, soumise à des forces parallèles à un des axes principaux d'inertie de ses sections normales.

Nous prendrons des axes des x, y, z qui soient les mêmes sur toute l'étendue de la tige, et néanmoins parallèles à ceux que nous avons adoptés précédemment pour les divers tronçons en lesquels on peut la concevoir divisée : ce sera possible si la tige n'est pas torse, c'est-à-dire si les axes d'inertie principaux de toutes ses sections normales ont à peu près les mêmes directions. L'axe des x choisi sera la position primitive de la fibre à laquelle sont appliquées les tensions $\mathfrak{N}_0$; d'où il suit que les origines des axes fixes précédemment adoptés pour les divers tronçons auront leurs coordonnées transversales par rapport aux nouveaux axes égales à $-y_0$, $-z_0$. Les déformations ∂, g, les déplacements u, v, w et leurs dérivées en x, y, z, auront les mêmes valeurs dans le nouveau système d'axes que dans les précédents, puisque tous ces systèmes sont supposés fixes et sensiblement parallèles.

Dans l'identité $\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{d\partial_x}{dz} + \frac{dg_{zx}}{dx}$, on pourra négliger encore le dernier terme, à côté du second qui est égal à $-\mathfrak{B}$. En effet ce dernier terme est au plus comparable à g_{zx}, ou à $\frac{1}{\mathcal{E}}T_2$, ou enfin à la valeur moyenne de $\frac{1}{\mathcal{E}}T_2$, laquelle, d'après la troisième relation (96) et en faisant, dans cette relation, $x' = x$, est $\frac{1}{\mathcal{E}\sigma}\left(\mathcal{F} - \int_\sigma N_1^0 \frac{dw}{dx} d\sigma\right)$; or la seconde formule (97) montre que $\mathcal{F} - \int_\sigma N_1^0 \frac{dw}{dx} d\sigma$ est de l'ordre de $\frac{d(\mathfrak{B}\mathcal{E}I)}{dx}$, et, par suite, que $\mathfrak{B}\mathcal{E}I$ est au moins du même ordre; donc $\mathfrak{B}$ est comparable à $\frac{1}{\mathcal{E}I}\left(\mathcal{F} - \int_\sigma N_1^0 \frac{dw}{dx} d\sigma\right)$, ou à $\frac{\sigma}{I} g_{zx}$, et très-grand en comparaison de g_{zx}, car le rapport $\frac{I}{\sigma}$ est de l'ordre du carré des dimensions transversales, dans le sens des z, de la section σ. Par conséquent, en supposant toujours $x' = x$, on pourra écrire, d'après la seconde (97),

$$(98) \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = -\mathfrak{B} = \frac{1}{\mathcal{E}I}\left[-\mathfrak{M} + \mathfrak{N}_0 z_0 + \int_\sigma N_1^0 (w - w_a) d\sigma\right].$$

$\mathfrak{M}$ désigne le moment total des forces extérieures appliquées à toute la partie de la tige située au delà de l'abscisse x, par rapport à un axe mené, parallèlement à celui des y, par le point O′ de l'axe de la tige, dont les coordonnées transversales primitives, dans le nouveau système d'axes, sont $-y_0$, $-z_0$, et dont les déplacements pareils sont les quantités précédemment appelées v_a, w_a. Ce moment comprend un terme de plus que dans le cas d'une tige non tendue; car, si l'on considère une section $x = x_1$, perpendiculaire aux x et très-voisine de la seconde extrémité de la tige, les forces appliquées à cette section n'équivaudront plus à un simple couple $\mathfrak{M}'$, situé dans le plan des zx, et à une simple force $\mathfrak{F}'$, parallèle aux z et appliquée au point où l'axe de la tige coupe cette section; mais elles auront en outre une composante parallèle aux x, appliquée au même point. La valeur de cette composante, $\int_\sigma N_1^0\, d\sigma + \int_\sigma N'_1\, d\sigma$, n'est autre que $\mathfrak{N}_0$; car, les déplacements de l'axe de la tige n'étant supposés que transversaux, on a partout $\mathfrak{A} = 0$, et par suite $\int_\sigma N'_1\, d\sigma = 0$. La coordonnée actuelle suivant les z du point quelconque O′ de l'axe est $-z_0 + w_a$, et celle du point de cet axe, très-voisin de la seconde extrémité, où est supposée appliquée la force $\mathfrak{N}_0$, $(-z_0 + w_a)_{x_1}$, en exprimant par $(\quad)_{x_1}$, que la quantité entre parenthèses est prise pour $x = x_1$. Par suite, le moment de $\mathfrak{N}_0$ par rapport à un axe parallèle aux y et mené par O′ vaut $\mathfrak{N}_0[(-z_0 + w_a)_{x_1} + z_0 - w_a]$: c'est le terme qui devra être joint aux expressions de $\mathfrak{M}$ obtenues pour le cas d'une tige non tendue. Le second membre de (98) montre que le numérateur de l'expression de $\frac{d^2w}{dx^2}$ comprendra de plus que dans ce cas, outre le terme précédent changé de signe, les deux termes $\mathfrak{N}_0 z_0$ et $+\int_\sigma N_1^0(w - w_a)\, d\sigma$. Les formules (85 *bis*) et (88) devront donc être remplacées par celles-ci :

$$(99)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_x^{x_1} \rho' Z_0 \sigma(x' - x)\, dx' = \mathfrak{M}' - \mathfrak{N}_0(z_0 - w_a)_{x_1} - \mathfrak{F}'(x_1 - x) \\ &\qquad\qquad - \mathfrak{N}_0 w_a - \int_\sigma N_1^0(w - w_a)\, d\sigma + \varepsilon I \frac{d^2w}{dx^2}, \\ &-\int_x^{x_1} \rho' \frac{d^2w}{dt^2} \sigma(x' - x)\, dx' = \text{le même second membre.} \end{aligned} \right.$$

Rappelons que la tension $\mathfrak{N}_0$ n'est pas supposée tellement grande que son effet masque entièrement celui de la rigidité; donc le dernier terme, qui représente l'action de la rigidité, n'est pas négligeable. Mais l'avant-dernier l'est en comparaison du précédent $-\mathfrak{N}_0 w_a$, car la différence $w - w_a$, sur toute l'étendue d'une section, est évidemment insensible par rapport à w_a, tandis que, d'autre part, $\int_\sigma N_1^0 d\sigma = \mathfrak{N}_0$. On pourra de même remplacer w_a par w, et, si l'on pose enfin $\mathfrak{M}' - \mathfrak{N}_0(z_0)_{x_1} = \mathfrak{M}''$, les relations (99) auront la forme suivante, presque aussi simple que (85 *bis*) et (88) :

$$(99\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_x^{x_1} \rho' Z_0 \sigma(x'-x)dx' \\ &\qquad = \mathfrak{M}'' - \mathfrak{F}'(x_1 - x) - \mathfrak{N}_0(w - w_{x_1}) + \mathcal{E} I \frac{d^2 w}{dx^2}, \\ &-\int_x^{x_1} \rho' \frac{d^2 w}{dt^2} \sigma(x'-x)dx' = \text{le même second membre.} \end{aligned}\right.$$

On les aurait trouvées directement sous cette forme simple, si la tension longitudinale $\mathfrak{N}_0$, qui a écarté le corps de son état naturel, n'avait produit, antérieurement aux déplacements transversaux actuellement étudiés, que des dilatations ∂_x de l'ordre de celles que j'ai considérées au paragraphe précédent : les points d'application des tensions $\mathfrak{N}_0$ se seraient alors trouvés tout le long de l'axe même de la tige, c'est-à-dire qu'on aurait eu partout $y_0 = z_0 = 0$, et il aurait suffi d'employer la première formule (87), en tenant compte, dans l'expression de $\mathfrak{M}$, du moment $\mathfrak{N}_0[(w_a)_{x_1} - w_a]$ de la force $\mathfrak{N}_0$, exercée, dans le sens des x, sur la seconde extrémité de l'axe de la tige.

On pourrait appliquer la seconde équation (99 *bis*) à l'étude du mouvement transversal, en faisant sur les extrémités les mêmes hypothèses qu'au paragraphe précédent. Mais je me bornerai au simple cas d'une corde constituée pareillement sur toute sa longueur, fixée à ses deux bouts, et vibrant dans sa totalité sans qu'il se produise aucun nœud intermédiaire. La formule (99 *bis*), différentiée deux fois en x, donne alors pour équation indéfinie

$$(100)\qquad \frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{1}{\rho'\sigma}\left(\mathfrak{N}_0 \frac{d^2 w}{dx^2} - \mathcal{E} I \frac{d^4 w}{dx^4}\right).$$

Une corde n'ayant qu'une petite rigidité, le dernier terme de cette équation est bien moins grand que le précédent, et peut se calculer en supposant à w la même expression que si la corde était parfaitement flexible. Or, si l désigne la longueur de la corde, i un nombre entier positif quelconque, L, L' des coefficients arbitraires, Ω la quantité $\sqrt{\frac{\mathcal{T}_0}{\rho'\sigma}}$, on sait que cette expression approchée est

$$w = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sin\frac{i\pi(x-x_0)}{l}\left[\mathrm{L}\cos\frac{i\pi\Omega t}{l} + \mathrm{L}'\sin\frac{i\pi\Omega t}{l}\right].$$

Différentions-la quatre fois par rapport à x, et observons qu'elle se réduit presque aux deux termes correspondant à $i=1$, comme dans toute corde qui vibre dans sa totalité et dont le son fondamental a seul une intensité notable; nous trouverons $\frac{d^4 w}{dx^4} = -\frac{\pi^2}{l^2}\frac{d^2 w}{dx^2}$, et l'équation (100) deviendra

$$\text{(100 } bis\text{)} \qquad \frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{1}{\rho'\sigma}\left(\mathcal{T}_0 + \mathcal{E}\mathrm{I}\frac{\pi^2}{l^2}\right)\frac{d^2 w}{dx^2};$$

c'est celle du mouvement transversal de la même corde supposée parfaitement flexible, mais dont la tension, au lieu d'être $\mathcal{T}_0$, serait $\mathcal{T}_0 + \mathcal{E}\mathrm{I}\frac{\pi^2}{l^2}$.

Donc, *lorsqu'une corde, douée de rigidité, vibre transversalement dans un plan perpendiculaire à un axe principal d'inertie de ses sections normales, ces vibrations se font à fort peu près comme si la corde était parfaitement flexible, et que sa tension fût supérieure à la tension vraie d'une quantité égale au produit du carré du nombre π par le carré de l'inverse de la longueur et par le moment d'inertie d'une section autour de cet axe, moment obtenu en supposant à chaque élément des sections normales une densité superficielle égale au coefficient d'élasticité de la fibre longitudinale qui y passe.*

Si la tension ne varie pas dans des limites assez larges pour changer beaucoup la constitution et par suite le coefficient d'élasticité des fibres, cette quantité est constante, et *la rigidité équivaut, pour une* *même corde, à un accroissement constant de tension,* ainsi que l'ont établi des expériences de Savart. Cette loi pourra même être vraie, à condition toutefois que la variation de l'étendue des sections reste fort petite, pour des tensions allant presque jusqu'à celles qui produisent la rupture; car des expériences nombreuses et faites dans des conditions très-variées, dues à Coulomb, Leslie, Gerstner, etc., ont permis d'établir un principe, connu sous le nom de *loi de Gerstner,* et consistant en ce que le coefficient d'élasticité d'un fil ou d'une barre change peu, quand sa contexture est altérée par des tensions très-grandes, pourvu que sa densité ne diminue pas sensiblement.