JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Extrait d'une Lettre adressée à M. Besge

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 15 (1870), p. 7-8.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1870_2_15__7_0>

Extrait d'une Lettre adressée à M. Besge;

PAR M. J. LIOUVILLE.

« ... Je veux vous parler cette fois de l'intégrale

$$A = \int_0^\infty f\left(x + \frac{1}{x}\right) \operatorname{arc\,tang} x \frac{dx}{x}$$

que je ramène à celle-ci :

$$B = \int_0^\infty f\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x},$$

ou bien encore à celle-ci :

$$C = \int_0^1 f\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x},$$

que l'on rattache immédiatement à la précédente. La fonction désignée par f est quelconque, sous la condition naturellement sous-entendue que chacune des trois intégrales

$$A, \quad B, \quad C,$$

dont il s'agit, ait une valeur finie et un sens précis.

On prouve en effet tout d'abord, et très-facilement, que

$$B = 2C.$$

Puis, d'un autre côté, on démontre que

$$A = \frac{\pi}{4} B.$$

» En d'autres termes, on a l'équation

$$\int_0^\infty f\left(x+\frac{1}{x}\right)\operatorname{arc\,tang} x\,\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}\int_0^1 f\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x},$$

que je crois nouvelle, et que vous trouverez peut-être digne d'attirer un moment votre attention. »