JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

YVON VILLARCEAU

Étude sur le mouvement des meules horizontales de moulins à blé, et méthodes pour les équilibrer

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 15 (1870), p. 315-372.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1870_2_15__315_0>

Étude sur le mouvement des meules horizontales de moulins à blé, et méthodes pour les équilibrer;

Par M. YVON VILLARCEAU.

1. Les questions soulevées par le siége de Paris ont ramené mon attention sur une théorie à peine effleurée dans nos meilleurs traités de Mécanique appliquée, celle du mouvement des meules horizontales de moulins à blé, et sur les méthodes qu'on en peut déduire pour les équilibrer.

On sait qu'une meule, ayant été préalablement équilibrée *au repos*, c'est-à-dire de manière qu'en cet état sa face inférieure, qui est plane, soit horizontale; cette face prend ordinairement une inclinaison plus ou moins prononcée, dès qu'on fait tourner la meule autour de la verticale qui passe par le point de suspension. Ce résultat, nuisible à la bonne fabrication de la farine, est dû, tant aux irrégularités de figure de la meule, qu'au défaut d'homogénéité des matériaux dont elle est formée. Mais on peut obvier à ces inconvénients, en déplaçant convenablement certaines masses mobiles dans le sens perpendiculaire au plan de la face inférieure, que l'on nomme masses *réglantes*. La condition à remplir, et d'ailleurs bien connue, consiste à faire que la droite passant par le centre de gravité et le point de suspension soit un axe principal d'inertie pour ce dernier point. On ne peut songer à y satisfaire en ayant recours aux formules qui concernent les moments d'inertie : les mêmes causes qui produisent l'inclinaison de la meule pendant son mouvement s'opposent à l'emploi de ces formules, et l'on est conduit à rechercher, dans les mouvements observés, la mesure des causes d'irrégularité qu'il s'agit de faire disparaître.

Il m'a semblé qu'une étude analytique du mouvement des meules horizontales devait conduire à la solution la plus complète du problème et indiquer le genre et le mode des observations à effectuer, ainsi que les changements à faire subir aux positions des masses réglantes. D'ailleurs, une pareille étude s'ajoute aux applications encore peu nombreuses de la théorie du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, applications qui se réduisent à la toupie, au gyroscope et aux projectiles : trop longtemps on s'est borné à celles que nous offre la Mécanique céleste.

Le problème de la rotation d'un corps solide consiste à déterminer la série des positions d'un système d'axes rectangulaires, se coupant au point fixe, et lié solidairement avec le corps solide. Dans nos traités de Mécanique, le choix de ce système d'axes n'est généralement pas laissé arbitraire; les auteurs l'assujettissent à coïncider avec les axes principaux d'inertie relatifs au point fixe : l'application des formules qui se rapportent à ces axes ne convient pas au problème actuel, attendu que les sommes des produits des masses par les rectangles des coordonnées, qu'il s'agit précisément de déterminer, ne figurent pas dans ces formules : le choix des axes principaux a pour résultat de les faire disparaître. Celles dont il convient de faire usage, et dont les formules d'Euler sont un cas particulier, ont été données par Lagrange. Elles sont peu connues des ingénieurs; ce qui expliquerait comment la théorie de l'équilibre des meules horizontales n'a été jusqu'ici l'objet que de travaux incomplets.

Les formules de Lagrange permettent d'écrire les équations différentielles du mouvement avec la plus grande facilité : dans notre problème, le choix des axes mobiles se trouve, pour ainsi dire, indiqué d'avance. Deux d'entre eux sont dans un plan parallèle à la face inférieure de la meule, le troisième passe par son centre de gravité. Mais l'intégration ne peut s'effectuer sans introduire quelques restrictions : eu égard à ce que les petites oscillations de l'un des axes, par rapport à la verticale, offrent seules de l'intérêt, il suffit de les déterminer aux quantités près du deuxième ordre de petitesse. Alors on peut, conformément à la réalité des choses, traiter la différence des moments d'inertie autour des deux premiers axes, ainsi que les sommes de produits des masses par les rectangles des coordonnées, comme quantités du premier ordre. On considère encore, comme étant du même ordre, l'erreur commise en calculant les divers moments, sans tenir compte des défauts d'exacte configuration ou d'homogénéité.

Les équations différentielles, réduites aux termes du premier ordre, sont au nombre de trois : l'une s'intègre immédiatement, et les deux autres forment un système d'équations linéaires du deuxième ordre, à coefficients constants; ces dernières s'intègrent au moyen des *seules* fonctions trigonométriques et les intégrales ne tombent pas en défaut, dans le cas des racines égales de l'équation caractéristique, comme cela arrive lorsque l'on a affaire à une seule équation différentielle. C'est en choisissant pour variables, à l'exemple de Lagrange, deux des cosinus des angles compris entre les directions des axes mobiles et celles d'axes fixes, que l'on parvient à la forme très-simple de nos équations.

Les résultats du calcul se traduisent géométriquement comme il suit. La meule ayant été préalablement équilibrée *au repos*, imaginons un style vertical, dont l'axe passe par le point de suspension de la meule, et un plan parallèle à la face inférieure, qui soit entraîné dans son mouvement et destiné à recevoir les impressions du style; ce plan sera, par exemple, celui de la face supérieure de la meule. Par le point de rencontre du style avec ledit plan, dans la situation horizontale de la face inférieure de la meule, menons un système d'axes rectangulaires et parallèles aux axes mobiles. Voici ce qui se passera pendant le mouvement de la meule. Le rayon vecteur mené de l'origine à l'un des points du diagramme tracé par le style, mesurera l'inclinaison de l'axe de la meule par rapport à la verticale, et la ligne des nœuds du plan mobile sur l'horizon, sera perpendiculaire au plan vertical passant par le style et le point considéré du diagramme. Quant à la nature de la trajectoire tracée par le style, cette trajectoire peut être considérée comme une ellipse mobile autour d'un centre fixe, dont les axes conservent une grandeur constante et dépendante uniquement des constantes du mouvement oscillatoire initial. Suivant les relations de grandeur de ces constantes, l'ellipse dégénère en un cercle, en une ligne droite, ou se réduit à un point unique. Quoi qu'il en soit, la trajectoire se trouve comprise entre deux circonférences de cercle qui lui servent d'enveloppes et dont les rayons sont égaux au demi-grand axe et au demi-petit axe de l'ellipse mobile. Suivant les cas, ces cercles-enveloppes se réduisent à un cercle unique ou à un point.

Le mouvement des axes de l'ellipse mobile est uniforme; il est d'ailleurs assez faible relativement au mouvement de rotation de la meule et de sens contraire à ce dernier.

Enfin, le mouvement sur l'ellipse mobile est tel que le rayon vecteur mené de son centre décrit, par rapport aux axes mobiles, des aires proportionnelles au temps, et dans un sens qui dépend des relations de grandeur des constantes du mouvement oscillatoire. La durée d'une révolution du rayon vecteur diffère peu de celle d'un tour de la meule.

Le diagramme ainsi obtenu fournit les éléments d'une *première* méthode pour équilibrer les meules horizontales : il suffit en effet d'y mesurer les deux coordonnées du centre commun des ellipses mobiles ou de leurs cercles-enveloppes et de déplacer les masses réglantes, au nombre de deux, de quantités proportionnelles respectivement à l'une et à l'autre de ces coordonnées. Le coefficient de proportionnalité s'obtient au moyen de calculs assez simples; il peut d'ailleurs se déduire de la comparaison des résultats obtenus dans deux états différents du système des masses réglantes. La théorie indique la position la plus favorable à leur donner : il convient que les centres de gravité de ces masses soient situés dans deux plans méridiens rectangulaires, et orientés à 45 degrés par rapport à l'axe transversal de l'anille.

Le mouvement vertical du style étant une quantité du second ordre, un défaut d'exacte verticalité est tout à fait négligeable : il n'en est pas ainsi d'un défaut de centrage; mais on s'en affranchit aisément.

Cette première méthode d'équilibrer les meules horizontales pourra, malgré sa simplicité, n'être pas accueillie par les praticiens : l'installation du style et l'exiguïté des dimensions de la courbe obtenue motiveront sans doute leurs répugnances. Au contraire, la *seconde* méthode, dont il nous reste à parler, rentre tout à fait dans les habitudes des ingénieurs.

La théorie montre que, les deux masses réglantes ayant reçu la disposition indiquée ci-dessus, *la position de chacune d'elles peut être déterminée séparément.* Dans le plan méridien qui contient le centre de gravité de l'une des deux masses et sur le pourtour de la meule, fixons un léger style, par exemple une pointe de fer ou d'acier, vissée sur l'un des cercles de fer qui servent d'armature, et disposons une surface verticale fixe, pour recevoir les impressions du style : on notera *très-distinctement* la trace du style correspondante à l'état d'*équilibre statique* de la meule; puis, celle-ci étant mise en mouvement, le style produira des traces dont les ordonnées seront rapportées à celle qui répond à l'équilibre statique. Il ne reste plus qu'à déduire de ce genre d'observations l'*ordonnée moyenne :* on peut prendre, pour celle-ci, la simple moyenne des ordonnées maxima et minima. A l'aide de certaines précautions, il est facile d'obtenir ainsi un résultat indépendant des effets du frottement au point de suspension. Connaissant l'ordonnée moyenne, on détermine, par un calcul facile, le déplacement qu'il faut faire subir à la masse considérée. Si l'on veut réduire le calcul à celui d'une simple partie proportionnelle, il suffit de deux expériences faites en donnant à la masse réglante ses deux positions limites : de la comparaison des résultats obtenus, on déduit en effet la position correspondante à la valeur nulle de l'ordonnée moyenne; ce qui est la solution du problème. Pour la seconde masse réglante, on exécute une opération toute pareille; mais on voit que les deux opérations peuvent être effectuées simultanément : à cet effet, les deux styles doivent être établis à des niveaux assez différents, pour que les traces de l'un ne puissent être confondues avec celles de l'autre.

Les praticiens étant dans l'usage d'employer *quatre* masses réglantes au lieu de *deux*, il faut, si l'on veut se conformer à cet usage, déplacer simultanément, de quantités égales et de sens contraires, les deux masses situées dans un même plan méridien; de cette manière, la question n'offre qu'une seule inconnue, que l'on détermine par les mêmes méthodes que s'il s'agissait seulement de *deux* masses réglantes.

2. *Équations générales du mouvement de rotation d'un corps solide.* — Les formules de Lagrange peuvent être établies par des moyens plus simples et plus élémentaires que ceux employés par l'illustre géomètre; mais leur démonstration ne pouvant trouver place ici, je me bornerai à les extraire de la *Mécanique analytique* (édition de

M. J. Bertrand, t. II, p. 234), en y rétablissant sous une forme plus générale les moments des forces extérieures. Voici ces formules :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &A\frac{dp}{dt} - H\frac{dq}{dt} - G\frac{dr}{dt} + (C-B)qr + Hpr + F(r^2-q^2) - Gpq = P,\\ &B\frac{dq}{dt} - F\frac{dr}{dt} - H\frac{dp}{dt} + (A-C)rp + Fqp + G(p^2-r^2) - Hqr = Q,\\ &C\frac{dr}{dt} - G\frac{dp}{dt} - F\frac{dq}{dt} + (B-A)pq + Grq + H(q^2-p^2) - Frp = R. \end{aligned}\right.$$

La signification des lettres employées est la suivante.

Désignant, suivant l'usage, par x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un élément de masse m par rapport à trois axes rectangulaires qui se croisent au point fixe et sont liés au corps solide; par Σ la caractéristique de sommation étendue à tous les éléments m du corps solide; on a

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &A = \Sigma m(y_1^2 + z_1^2), \quad F = \Sigma m y_1 z_1,\\ &B = \Sigma m(z_1^2 + x_1^2), \quad G = \Sigma m z_1 x_1,\\ &C = \Sigma m(x_1^2 + y_1^2), \quad H = \Sigma m x_1 y_1. \end{aligned}\right.$$

P, Q, R sont respectivement les sommes des moments des forces extérieures autour des axes mobiles des x_1, y_1, z_1 : elles sont positives, lorsque le sens des rotations qu'elles tendent à produire est celui de y_1 vers z_1, pour le premier; z_1 vers x_1, pour le second; et x_1 vers y_1, pour le troisième. Les lettres p, q, r désignent les composantes de la vitesse de rotation par rapport aux mêmes axes, et le sens positif de ces composantes est le même que celui des moments P, Q, R; dt est l'élément du temps.

Soient X_1, Y_1, Z_1 les composantes parallèlement aux axes mobiles, des forces extérieures appliquées au point (x_1, y_1, z_1); les valeurs de P, Q, R sont

$$(3)\ [*]\quad \left\{\begin{aligned} &P = \Sigma(Z_1 y_1 - Y_1 z_1),\\ &Q = \Sigma(X_1 z_1 - Z_1 x_1),\\ &R = \Sigma(Y_1 x_1 - X_1 y_1). \end{aligned}\right.$$

[*] Les formules (1) sont également celles du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point qui lui-même se déplace. Seulement les valeurs (3) de

Désignant par x, y, z des axes rectangulaires fixes et posant

$$(4)\quad \begin{cases} a = \cos(x_1, x), & b = \cos(y_1, x), & c = \cos(z_1, x), \\ a' = \cos(x_1, y), & b' = \cos(y_1, y), & c' = \cos(z_1, y), \\ a'' = \cos(x_1, z), & b'' = \cos(y_1, z), & c'' = \cos(z_1, z), \end{cases}$$

on a, entre ces cosinus, des relations bien connues et que le lecteur dispensera de reproduire ici.

Les expressions des composantes p, q, r en fonction de ces cosinus et de leurs dérivées donnent

$$(5)\quad \begin{cases} pdt = c\,db + c'\,db' + c''\,db'' = -(b\,dc + b'\,dc' + b''\,dc''), \\ qdt = a\,dc + a'\,dc' + a''\,dc'' = -(c\,da + c'\,da' + c''\,da''), \\ rdt = b\,da + b'\,da' + b''\,da'' = -(a\,db + a'\,db' + a''\,db''), \end{cases}$$

et l'on a inversement

$$(6)\quad \begin{cases} da = (b\,r - c\,q)dt, & db = (c\,p - a\,r)dt, & dc = (a\,q - b\,p), \\ da' = (b'r - c'q)dt, & db' = (c'p - a'r)dt, & dc' = (a'q - b'p), \\ da'' = (b''r - c''q)dt, & db'' = (c''p - a''r)dt, & dc'' = (a''q - b''p). \end{cases}$$

Il est à remarquer que les valeurs de p, q, r sont indépendantes du choix des axes fixes des x, y, z; cela résulte de l'interprétation géomé-

---

P, Q, R doivent, pour ce cas, être respectivement complétées par l'addition des termes suivants :

$$\frac{dv_1}{dt}\Sigma m z_1 - \frac{dw_1}{dt}\Sigma m y_1,$$

$$\frac{dw_1}{dt}\Sigma m x_1 - \frac{du_1}{dt}\Sigma m z_1,$$

$$\frac{du_1}{dt}\Sigma m y_1 - \frac{dv_1}{dt}\Sigma m x_1,$$

où l'on désigne par u_1, v_1, w_1 les composantes de la vitesse de l'origine des axes mobiles, parallèlement aux directions actuelles des x_1, y_1 et z_1 considérées comme fixes. On doit remarquer que ces termes complémentaires se réduisent à zéro dans deux circonstances : 1° lorsque la direction et la grandeur de la vitesse sont constantes; 2° quand l'origine des axes mobiles est au centre de gravité du corps solide : en sorte que les valeurs (3) des moments P, Q, R conviennent encore dans l'une et l'autre de ces circonstances.

trique de ces quantités. On peut d'ailleurs le vérifier par une transformation de coordonnées dans laquelle on introduit de nouveaux axes fixes des x, y, z; calculant les valeurs de p, q, r au moyen de ces nouveaux axes, on les trouve égales aux valeurs que fournissent les relations (5).

Les cosinus (4) s'expriment en fonctions des trois angles nécessaires et suffisants pour définir complétement la situation des axes mobiles par rapport aux axes fixes.

Considérons l'intersection du plan des x, y avec celui des x_1, y_1, et désignons par *nœud* la partie de cette intersection que rencontrerait l'axe x_1 en tournant dans le sens x_1 à y_1, et passant du côté des z positifs à celui des z négatifs. Des deux angles formés par les deux plans des x, y et x_1, y_1, nous désignerons par θ celui que forment les côtés positifs des axes des z et z_1, perpendiculaires respectivement à ces mêmes plans. Conformément à l'usage adopté, nous désignerons par ψ l'angle du *nœud* avec l'axe fixe des x, angle qui sera pris positif de x vers les y *négatifs*, et par φ l'angle de x_1 avec le *nœud*, mesuré positivement de celui-ci dans le sens de x_1 vers y_1. Nous éviterons ainsi l'emploi du mot *ascendant* par lequel on qualifie ordinairement le nœud, non sans quelques inconvénients, quand il s'agit d'autres problèmes que ceux de la Mécanique céleste. On voit que, moyennant ces conventions, la situation des axes mobiles est déterminée, sans ambiguité, par les valeurs des trois angles θ, ψ et φ.

Les valeurs de nos cosinus (4), en fonctions de ces trois angles, sont les suivantes :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}
a &= \cos\theta\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi,\\
b &= \cos\theta\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi,\\
c &= \sin\theta\sin\psi;\\
a' &= \cos\theta\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi,\\
b' &= \cos\theta\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi,\\
c' &= \sin\theta\cos\psi;\\
a'' &= -\sin\theta\sin\varphi,\\
b'' &= -\sin\theta\cos\varphi,\\
c'' &= +\cos\theta.
\end{aligned}\right.$$

Les valeurs de p, q, r qui s'en déduisent par la différentiation, et au moyen des formules (5), sont

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= \sin\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{dt} - \cos\varphi\frac{d\varphi}{dt},\\ q &= \cos\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{dt} + \sin\varphi\frac{d\varphi}{dt},\\ r &= \quad -\cos\theta\frac{d\psi}{dt} + \qquad\frac{d\varphi}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Supposons les valeurs des composantes X_1, Y_1, Z_1, qui entrent dans P, Q, R, exprimées soit au moyen des cosinus a, a', a'', etc., soit au moyen des angles θ, ψ et φ, puis les expressions (5) ou (8) de p, q, r transportées dans les équations (1); on aura un système de trois équations différentielles du deuxième ordre entre lesdits cosinus ou les angles θ, ψ, φ et le temps t. Leur intégration, en ayant égard, s'il s'agit des cosinus a, b, c, etc., aux relations qui existent entre eux, fera connaître complétement la situation du corps solide en fonction du temps.

Bien que la considération directe des angles θ, ψ et φ ait pour résultat d'éliminer six inconnues et qu'il semble en résulter plus de facilité pour les calculs, il arrive pourtant, comme Lagrange l'a fait voir par quelques exemples, que l'emploi des neuf cosinus conduit parfois plus simplement au résultat; c'est ce qui arrivera précisément dans le cas du problème qui nous occupe. Ayant alors obtenu les valeurs des neuf cosinus, on en déduira aisément celles des trois angles : par exemple, connaissant a'' et b'', les formules (7) feront connaître φ et θ en laissant le signe de $\sin\theta$ arbitraire; la valeur de c'' donnera celle de $\cos\theta$ avec son signe; mais l'ambiguité de l'angle θ n'aura pas pour résultat de conduire à deux situations distinctes du système des axes mobiles, attendu que l'angle φ prendra en même temps des valeurs qui différeront de 180 degrés dans les deux systèmes : il en sera de même de l'angle ψ qu'on déduira des valeurs de c et c' (7). Il est seulement à remarquer qu'avec une valeur négative de $\sin\theta$, la position du *nœud* serait opposée à celle que nous avons définie. Pour avoir des résultats toujours conformes à cette définition, il faudra prendre $\sin\theta$ positif.

3. *Application des formules générales au mouvement d'une meule horizontale de moulin à blé.* — Nous prendrons pour axes mobiles des x_1, y_1, deux droites rectangulaires menées par le point fixe parallèlement à la face inférieure de la meule, et pour axe des z_1 le côté de la perpendiculaire à cette face qui est dirigé vers le zénith quand elle est horizontale.

On admettra que l'équilibre *statique* de la meule ait été préalablement obtenu moyennant une répartition des masses facile à réaliser. Dans cet état d'équilibre, le centre de gravité se trouvera sur l'axe des z_1. Nous en désignerons la distance au point fixe de suspension par L, et nous supposerons L positif lorsque, comme dans la pratique, le centre de gravité est au-dessous du point de suspension. Il en résulte que, si nous désignons par M la masse totale de la meule, nous aurons

$$(9) \qquad \Sigma m x_1 = 0, \quad \Sigma m y_1 = 0, \quad \Sigma m z_1 = -\mathrm{ML}.$$

Nous prendrons, pour axes fixes des xy, deux droites rectangulaires situées dans le plan horizontal qui passe par le point de suspension et se croisant en ce point, et pour axe des z la direction du zénith.

En négligeant le frottement autour du centre de suspension et la résistance de l'air, on voit que les forces extérieures qui sollicitent le système se réduisent aux poids mg des masses élémentaires; leur direction étant opposée à celle de l'axe des z, les composantes X_1, Y_1, Z_1 de la force mg seront respectivement

$$-mg\cos(z, x_1), \quad -mg\cos(z, y_1), \quad -mg\cos(z, z_1),$$

ou, en vertu des relations (4),

$$-mga'', \quad -mgb'', \quad -mgc''.$$

Au moyen de ces valeurs, les moments P, Q, R (3) deviendront

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= -gc''\Sigma m y_1 + gb''\Sigma m z_1, \\ \mathrm{Q} &= -ga''\Sigma m z_1 + gc''\Sigma m x_1, \\ \mathrm{R} &= -gb''\Sigma m x_1 + ga''\Sigma m y_1 : \end{aligned}$$

en vertu des relations (9), ils se réduisent à

$$(10)\qquad P = -b''gML, \quad Q = +a''gML, \quad R = 0.$$

Si l'on fait abstraction de l'armature intérieure, nommée anille, par laquelle la meule pose sur le point fixe, armature dont la masse est très-faible par rapport à la masse M, la meule se compose de divers solides compris entre des surfaces à peu près cylindriques et concentriques avec l'axe des z_1 (pierre meulière, couche de plâtre, armatures extérieures en fer); le défaut d'homogénéité de ces solides est d'ailleurs peu notable. On peut donc considérer les quantités F, G, H, définies par les relations (2), comme étant de petites quantités. Nous les traiterons comme du premier ordre de petitesse.

D'un autre côté, nous ne nous proposons d'étudier que les cas où les oscillations de l'axe z_1 autour de la verticale resteront très-petites: ces oscillations sont mesurées par l'angle θ; nous les considérerons comme étant du même ordre que F, G et H. Il résulte des relations (7) que a'' et b'' seront des quantités du premier ordre, et les mêmes relations (7) montrent que c et c' seront du même ordre. Les dérivées de ces quantités par rapport au temps seront également du premier ordre. Il suit de là, en vertu de la première valeur de pdt et de la deuxième de qdt (5), que les quantités p et q seront du premier ordre de petitesse. Il en sera de même de leurs dérivées. En conséquence de ces remarques et convenant de négliger les quantités du deuxième ordre et des ordres supérieurs, la troisième équation (1) se réduit, en vertu de la troisième équation (10), à

$$C\frac{dr}{dt} = 0;$$

on en déduit

$$(11)\qquad r = n,$$

n désignant une constante, positive lorsque la composante r a le sens de x_1 vers y_1 et négative dans le cas contraire.

Au moyen de ces relations et des équations (10), et, en transposant, les deux premières équations (1) deviennent

$$(12)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)nq + Fn^2 + b''gML = 0, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)np - Gn^2 - a''gML = 0. \end{cases}$$

Aux variables p et q, nous substituerons leurs expressions en fonction de a'', b'' et de leurs dérivées, que l'on tire des équations (6). Remarquons d'abord qu'en vertu de la relation

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1,$$

la quantité c'' ne diffère de l'unité que de quantités du deuxième ordre. Faisant donc $c'' = 1$ et remplaçant r par n, on tire des expressions (6) de db'' et da''

$$(13)\qquad p = a''n + \frac{db''}{dt}, \quad q = b''n - \frac{da''}{dt};$$

il s'ensuit

$$(14)\qquad \frac{dp}{dt} = n\frac{da''}{dt} + \frac{d^2b''}{dt^2}, \quad \frac{dq}{dt} = n\frac{db''}{dt} - \frac{d^2a''}{dt^2}.$$

Mettant ces valeurs dans les équations (12) et posant pour abréger

$$(15)\qquad K = gML,$$

on aura

$$(16)\qquad \begin{cases} A\dfrac{d^2b''}{dt^2} + (A + B - C)n\dfrac{da''}{dt} + [K + (C - B)n^2]b'' + Fn^2 = 0, \\ -B\dfrac{d^2a''}{dt^2} + (A + B - C)n\dfrac{db''}{dt} - [K + (C - A)n^2]a'' - Gn^2 = 0, \end{cases}$$

équations linéaires du deuxième ordre, à coefficients constants et faciles à intégrer.

Pour simplifier, nous poserons

$$(17)\qquad \begin{cases} E = (A + B - C)n, \\ U = K + (C - A)n^2, \\ V = K + (C - B)n^2. \end{cases}$$

En outre, et dans le but de faire disparaître les termes constants, nous ferons

$$(18)\qquad \begin{cases} Ua'' + Gn^2 = U\dfrac{x''}{\lambda}, \\ Vb'' + Fn^2 = V\dfrac{y''}{\lambda}, \end{cases}$$

x'' et y'' étant de nouvelles variables, et λ une constante dont on trouvera plus loin la signification géométrique. Par l'introduction de ces variables, les équations (16) deviendront

$$(19)\qquad \begin{cases} A\dfrac{d^2y''}{dt^2} + E\dfrac{dx''}{dt} + Vy'' = 0, \\ B\dfrac{d^2x''}{dt^2} - E\dfrac{dy''}{dt} + Ux'' = 0. \end{cases}$$

On aperçoit immédiatement que ces équations peuvent être satisfaites par des solutions de la forme

$$(20)\qquad x'' = \alpha\cos(mt + \eta), \quad y'' = \beta\sin(mt + \eta),$$

où α, η et m désignent des constantes. En effet, par la substitution de ces valeurs dans les proposées, il vient, suppression faite des facteurs communs,

$$\begin{aligned} &- A\beta m^2 - E\alpha m + V\beta = 0, \\ &- B\alpha m^2 - E\beta m + U\alpha = 0; \end{aligned}$$

d'où, en posant

$$(21)\qquad i = \frac{\beta}{\alpha},$$

l'on déduit cette double expression de i

$$(22)\qquad i = \frac{\mathrm{E}m}{\mathrm{V} - \mathrm{A}m^2} = \frac{\mathrm{U} - \mathrm{B}m^2}{\mathrm{E}m},$$

et l'équation caractéristique propre à la détermination de m

$$(23)\qquad \mathrm{AB}m^4 - (\mathrm{AU} + \mathrm{BV} + \mathrm{E}^2)m^2 + \mathrm{UV} = 0.$$

En résolvant cette équation, il vient

$$(24)\qquad m^2 = \frac{\mathrm{AU} + \mathrm{BV} + \mathrm{E}^2 \pm \sqrt{(\mathrm{AU} + \mathrm{BV} + \mathrm{E}^2)^2 - 4\mathrm{AUBV}}}{2\mathrm{AB}};$$

mais la forme trigonométrique ne conviendra à la solution qu'autant que les deux valeurs de m^2 seront positives. Par une simple transformation de la quantité sous le radical, on exprime la condition de réalité des valeurs de m^2 comme il suit :

$$(25)\qquad (\mathrm{AU} - \mathrm{BV})^2 + 2(\mathrm{AU} + \mathrm{BV})\mathrm{E}^2 + \mathrm{E}^4 \geqq 0.$$

Or on reconnaît aisément que, dans les meules horizontales, on a

$$(26)\qquad \mathrm{C} - \mathrm{A} > 0, \quad \mathrm{C} - \mathrm{B} > 0:$$

la quantité K (15) étant d'ailleurs positive, U et V sont positifs; ce qui suffit pour satisfaire à la condition précédente. Enfin, les quatre quantités A, U, B, V étant positives et la condition (25) satisfaite, l'équation (23) n'admet pour m^2 que des valeurs positives.

Lorsqu'au lieu d'employer immédiatement la forme trigonométrique, on fait usage d'exponentielles pour intégrer les équations linéaires, on doit considérer successivement les racines positives et négatives de l'équation caractéristique; mais cela est inutile avec les fonctions trigonométriques, car leurs expressions en exponentielles imaginaires comprennent les deux signes positif et négatif des exposants. Nous nous bornerons ainsi à considérer les deux valeurs positives de m. Distinguant ces valeurs par les indices 1 et 2 et affectant des mêmes indices les valeurs correspondantes des constantes arbitraires, nous aurons pour intégrales complètes

$$(27)\qquad \begin{cases} x'' = \alpha_1 \cos(m_1 t + \varepsilon_1) + \alpha_2 \cos(m_2 t + \varepsilon_2), \\ y'' = i_1 \alpha_1 \sin(m_1 t + \varepsilon_1) + i_2 \alpha_2 \sin(m_2 t + \varepsilon_2); \end{cases}$$

les valeurs de i_1 et i_2 étant celles que donne l'une ou l'autre des expressions (22) de i, en y mettant successivement pour valeur de m celles de m_1 et m_2.

Ces intégrales contiennent les quatre constantes arbitraires α_1, ε_1, α_2, ε_2, qui seront déterminées par les circonstances du mouvement initial [*].

Les équations (18) donnent actuellement, pour valeurs de a'' et b'',

$$(28)\qquad \begin{cases} a'' = -\dfrac{Gn^2}{U} + \dfrac{x''}{\lambda}, \\ b'' = -\dfrac{Fn^2}{V} + \dfrac{y''}{\lambda}. \end{cases}$$

Or ces valeurs devant être des quantités du premier ordre de petitesse, il faut non-seulement que les termes $\frac{Gn^2}{U}$ et $\frac{Fn^2}{V}$ soient de cet ordre, mais qu'il en soit ainsi également des constantes α_1 et α_2. La première de ces conditions sera toujours remplie. En effet, K, C — A et C — B étant des quantités positives, les valeurs absolues de $\frac{Gn^2}{U}$ et $\frac{Fn^2}{V}$, quel que soit n, diminuent quand K augmente et s'annulent lorsque K devient infini; d'un autre côté, elle se réduisent respecti-

[*] Il y a lieu de considérer le cas où les deux valeurs de m^2 seraient égales et de montrer que, dans ce même cas, la solution fournie par les équations (27) ne tombe pas en défaut, qu'en conséquence il n'est pas nécessaire d'introduire des termes contenant le temps t en dehors des signes trigonométriques.

Lorsque les deux valeurs de m sont égales, il semble au premier abord que l'une ou l'autre expression de i (22) ne doive fournir qu'une seule valeur de cette quantité : les deux valeurs distinctes existent néanmoins, comme on va le voir.

Considérons d'abord le cas où l'on a $A = B$; il résulte des équations (17) que l'on a en même temps $U = V$. Or, si l'on multiplie l'une par l'autre les deux expresvement à $\frac{G}{C-A}$ et $\frac{F}{C-B}$ lorsque K est égal à zéro. Ces valeurs restent ainsi comprises entre zéro et l'un ou l'autre des deux rapports que nous venons d'écrire; ces rapports sont d'ailleurs de petites quantités, en vertu de la petitesse de F et G relativement à $C-A$ ou $C-B$. (Nous n'avons pas à examiner le cas singulier où K et n seraient simultanément nuls, ce cas étant étranger au problème actuel.)

---

sions (22) de i, il vient immédiatement $i^2 = 1$, d'où $i = \pm 1$; mais cela n'éclaircit pas la question. Formant la valeur de m^2, on a

$$m^2 = \frac{2AU + E^2 \pm E\sqrt{4AU + E^2}}{2A^2},$$

et le numérateur de la deuxième expression de i devient

$$U - Am^2 = -\frac{E}{2A}\left(E \pm \sqrt{4AU + E^2}\right).$$

Si l'on joint à la relation $A = B$, la suivante $E = 0$, les deux valeurs de m^2 sont

$$m^2 = \frac{U}{A},$$

d'où

$$m = \sqrt{\frac{U}{A}};$$

et celle de i, qui prendrait la forme $\frac{0}{0}$ si l'on n'y supprimait pas le facteur E commun à ses deux termes, se réduit à

$$i = \pm\frac{\sqrt{\frac{A}{U}}}{m},$$

valeur qui, en vertu de celle de m, donne la double solution

$$i = \mp 1.$$

A la faveur d'une indétermination apparente, la valeur de i, qui ne semblait susceptible que d'une solution, en acquiert deux distinctes.

On peut s'assurer que les intégrales (27) que l'on forme avec la valeur simple de m et les deux valeurs de i conservent le degré de généralité nécessaire à la détermination des quatre constantes α_1, ε_1, α_2, ε_2, en fonction des valeurs initiales de x'', y'' et de leurs dérivées par rapport au temps.

Le cas de $E = 0$ répond à $A = B = \frac{1}{2}C$.

Les valeurs de a'' et b'' étant obtenues, on déduira les valeurs de φ et θ par les formules (7)

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned}\sin\theta\sin\varphi &= -a'',\\ \sin\theta\cos\varphi &= -b''.\end{aligned}\right.$$

Il reste à déterminer l'angle ψ. A cet effet, la troisième équation (8), en y faisant $\cos\theta$ égal à l'unité et remplaçant r par n (11), donne

$$d\psi = d\varphi - ndt;$$

d'où, en intégrant,

$$(30)\qquad \psi = \varphi - (nt + \varkappa),$$

$\varkappa$ désignant la constante.

Par là, on voit que le mouvement du nœud est rétrograde tant que $\frac{d\varphi}{dt} - n$ est une quantité positive; il serait direct dans le cas où cette différence serait une quantité négative.

Enfin il peut être utile de connaître les valeurs des neuf cosinus (4), dont trois a'', b'', c'' viennent d'être déterminés. Or, si l'on fait, dans les équations (7), $\cos\theta = 1$, et que l'on y mette pour $\varphi - \psi$ sa valeur $nt + \varkappa$ que fournit la relation (30), on aura, en vertu des trois dernières équations (7), pour les six autres,

$$(30\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned}a &= +\cos(nt + \varkappa),\\ b &= -\sin(nt + \varkappa),\\ c &= -a''\cos(nt + \varkappa) + b''\sin(nt + \varkappa);\\ a' &= +\sin(nt + \varkappa),\\ b' &= +\cos(nt + \varkappa),\\ c' &= -a''\sin(nt + \varkappa) - b''\cos(nt + \varkappa).\end{aligned}\right.$$

La détermination des valeurs des trois angles φ, θ, ψ, que nous venons d'effectuer, suppose connues les six quantités A, B, C, F, G, H, la masse totale M, la distance L de son centre de gravité au point de suspension et les constantes initiales du mouvement de rotation; elle constitue une théorie générale de ce mouvement. Il reste à fair voir comment un système convenable d'observations peut permettre d'obtenir les valeurs de F et G, qui intéressent particulièrement le problème de l'équilibrage des meules horizontales. Pour y parvenir, nous aurons à examiner de plus près tout ce qui se rapporte à la constitution mécanique de la meule et à présenter la signification géométrique des auxiliaires x'' et y''.

4. *Moments d'inertie et autres constantes.* — Les quantités très-petites F et G sont divisées dans les expressions (28) de a'' et b'' par V et U. Or, comme les valeurs de a'' et b'' sont du premier ordre et que nous ne poussons pas l'approximation au delà, on voit que les termes du premier ordre peuvent être négligés dans le calcul de V et U. De là résulte que le calcul des moments d'inertie d'où dépendent les fonctions U et V, suivant les relations (17), peut lui-même être effectué en faisant abstraction des faibles irrégularités de la figure de la meule et d'un léger défaut d'homogénéité. Par la même raison, on peut négliger la masse métallique sur laquelle porte le point de suspension ou l'anille et les cavités dans lesquelles se meuvent les masses mobiles servant à réaliser l'équilibrage.

Au reste, pour ne pas laisser subsister aucun doute sur l'influence des quantités négligées, en ce qui concerne les propriétés du mouvement de la meule, nous introduirons ultérieurement deux termes correctifs destinés à tenir compte en grande partie de ces quantités.

Dans le calcul suivant, nous considérerons la meule comme un solide homogène compris d'une part entre deux plans parallèles et d'autre part entre deux surfaces cylindriques concentriques. Soient : H la distance des deux plans ou l'épaisseur de la meule, r_0 et r_1 les rayons des cercles directeurs de la surface cylindrique intérieure et de la surface cylindrique extérieure; les expressions des moments d'inertie (2) seront

$$(31)\qquad \begin{cases} A = B = M[L^2 + \frac{1}{12}H^2 + \frac{1}{4}(r_1^2 + r_0^2)], \\ C = M\,\frac{1}{2}(r_1^2 + r_0^2). \end{cases}$$

Posons

$$(32)\qquad \mathfrak{R}^2 = \tfrac{1}{2}(r_1^2 + r_0^2),$$

en sorte que $\mathfrak{R}$ désigne le rayon de gyration autour de l'axe des z_1, puis

$$(33)\qquad \beta' = \frac{2L^2 + \frac{1}{6}H^2}{\mathfrak{R}^2};$$

les expressions précédentes deviendront

$$(34)\qquad \begin{cases} C = M\mathfrak{R}^2, \\ A = B = \frac{1}{2}C(1 + \beta'). \end{cases}$$

De cette dernière, on tire

$$(35)\qquad C - A = C - B = \tfrac{1}{2}C(1 - \beta'),$$

puis

$$A + B - C = C\beta',$$

et l'on a, suivant la première équation (17),

$$(36)\qquad E = Cn\beta'.$$

Des expressions (35) on déduit, suivant les autres équations (17),

$$(37)\qquad U = V = K + \tfrac{1}{2}C(1 - \beta')n^2.$$

Soit

$$(38)\qquad \alpha' = \frac{2K}{Cn^2},$$

ou, en vertu de la relation (15),

$$(39)\qquad \alpha' = 2g\frac{ML}{Cn^2};$$

les valeurs de U et V pourront s'écrire

$$(40)\qquad U = V = \tfrac{1}{2}Cn^2(1 - \beta' + \alpha').$$

Au lieu de calculer m^2 à l'aide de son expression générale (24), il sera plus simple d'introduire immédiatement dans la double expression (22) de i la conséquence $U = V$ de l'hypothèse $A = B$. On a ainsi

$$i = \frac{Em}{U - Am^2} = \frac{U - Am^2}{Em};$$

d'où, en faisant le produit de ces deux expressions,

$$(41) \qquad i^2 = 1,$$

puis

$$Am^2 + iEm = U.$$

On tire de cette dernière, en ayant égard à la précédente,

$$m = \frac{-iE \pm \sqrt{E^2 + 4AU}}{2A}.$$

Ainsi qu'on l'a vu plus haut, nous n'avons à considérer que les valeurs positives de m. Or, A et U étant des quantités positives, le radical sera toujours $> -iE$; nous devons donc n'employer que le signe positif devant ce radical.

Des relations (34) et (40) on déduit

$$4AU = C^2 n^2 [1 - \beta'^2 + (1 + \beta')\alpha'];$$

d'où, en vertu de la valeur (36),

$$E^2 + 4AU = C^2 n^2 [1 + (1 + \beta')\alpha'].$$

En ayant égard à la même relation et à la deuxième équation (34), on obtient la valeur suivante de m :

$$(42) \qquad m = \frac{-in\beta' + \sqrt{n^2}\sqrt{1 + (1 + \beta')\alpha'}}{1 + \beta'}.$$

Nous écrivons ici $\sqrt{n^2}$ et non simplement n, parce que la constante n eut être positive ou négative.)

Actuellement distinguons par les indices 1 et 2 les deux valeurs de i et les valeurs correspondantes de m; nous aurons, en vertu de (41),

$$(43)\qquad \left\{\begin{aligned} i_1 &= -1, \quad m_1 = \frac{+n\beta' + \sqrt{n^2}\sqrt{1+(1+\beta')\alpha'}}{1+\beta'},\\ i_2 &= +1, \quad m_2 = \frac{-n\beta' + \sqrt{n^2}\sqrt{1+(1+\beta')\alpha'}}{1+\beta'}.\end{aligned}\right.$$

Avec les quantités m_1 et m_2, nous formerons les combinaisons suivantes, dont il sera fait usage plus loin,

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned} \mu &= \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2),\\ \nu &= \tfrac{1}{2}(m_1 - m_2),\end{aligned}\right.$$

ou

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} \mu &= \frac{\sqrt{n^2}}{1+\beta'}\sqrt{1+(1+\beta')\alpha'},\\ \nu &= \frac{n\beta'}{1+\beta'}.\end{aligned}\right.$$

La valeur de μ peut, en vertu de la valeur (39) de α', s'écrire encore

$$\mu = \frac{\sqrt{n^2 + \frac{2g\mathrm{ML}}{\mathrm{C}}(1+\beta')}}{1+\beta'};$$

puis, eu égard à l'expression (34) de C,

$$(46)\,[*]\qquad \mu = \frac{\sqrt{n^2 + \frac{2g\mathrm{L}}{\mathfrak{R}^2}(1+\beta')}}{1+\beta'}.$$

[*] Si l'on met la valeur de μ sous la forme

$$\mu = \sqrt{n^2\left[1 + \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{H}'}(1+\beta')\right]},$$

en posant

$$\mathrm{H}' = \frac{n^2\mathfrak{R}^2}{2g},$$

la quantité H′ exprimera la hauteur due à la vitesse d'un point situé à l'extrémité du rayon de giration $\mathfrak{R}$; et l'on aura

$$\alpha' = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{H}'}.$$

Les enfants ont un jouet dont la théorie rentre dans celle de la meule de moulin : ce jouet consiste en un disque cylindrique très-aplati et traversé par une aiguille

Au moyen des valeurs (43) de i_1 et i_2, les formules (27) deviennent

$$(47)\qquad \begin{cases} x'' = +\,\alpha_1 \cos(m_1 t + \varepsilon_1) + \alpha_2 \cos(m_2 t + \varepsilon_2), \\ y'' = -\,\alpha_1 \sin(m_1 t + \varepsilon_1) + \alpha_2 \sin(m_2 t + \varepsilon_2). \end{cases}$$

On peut remarquer que, dans le cas de l'égalité des racines m_1 et m_2 de l'équation caractéristique, ces formules ne tombent pas en défaut, comme celaaurait lieu si l'on n'avait à intégrer qu'une seule équation linéaire.

Formons enfin les valeurs de $\frac{n^2}{\mathrm{U}}$ et $\frac{n^2}{\mathrm{V}}$ qui entrent dans les expressions (28) de a'' et b'' : nous aurons

$$(48)\qquad \frac{n^2}{\mathrm{U}} = \frac{n^2}{\mathrm{V}} = \frac{2n^2}{2\mathrm{K} + \mathrm{C}(1-\beta')n^2} = \frac{2n^2}{2g\mathrm{ML} + \mathrm{C}(1-\beta')n^2} = \frac{2}{\mathrm{C}(1-\beta'+\alpha')}.$$

5. *Influence d'une petite différence entre les moments d'inertie* A *et* B. — Dans ce qui précède, nous avons supposé les moments d'inertie A et B égaux entre eux; d'autres causes que l'irrégularité de la figure de la meule et son défaut d'homogénéité doivent amener une différence entre les valeurs de A et B : ainsi la barre métallique servant de support à la meule ou l'anille, et les cavités plus ou moins remplies qui contiennent les masses mobiles destinées à réaliser l'équilibre dynamique, sont généralement une cause de différence entre les moments d'inertie A et B. On doit toutefois remarquer que si les axes des x_1 et y_1, dont la direction dans le plan qui les contient est arbitraire, sont situés dans des plans méridiens faisant avec l'axe transversal de l'anille un angle de 45 degrés, la différence dont il s'agit disparaîtra, en ce qui concerne l'anille. Il en sera de même pour les

---

dont on peut négliger la masse par rapport à celle du disque; il se distingue d'ailleurs de la meule de moulin, en ce que le centre de gravité est *au-dessus* du centre de rotation. L étant une quantité négative dans cet appareil, la condition pour que μ soit réel, ou pour que l'appareil ne puisse effectuer que de petites oscillations par rapport à la verticale, est donnée par l'inégalité

$$\mathrm{H}' > -\mathrm{L}(1+\beta').$$

La limite inférieure de la vitesse de rotation n est ainsi déterminée.

cavités supposées égales et également distantes de l'axe de figure de la meule, si leurs axes sont dans les mêmes plans méridiens que les axes des x_1 et y_1. C'est ce que l'on reconnaît sans recourir au calcul.

Nous allons rechercher les corrections que doivent subir les valeurs de i et de m trouvées dans le numéro précédent, pour avoir égard à l'existence d'une petite différence entre B et A, différence que nous désignerons par δB, en posant

$$\delta B = B - A.$$

Les équations (22) d'où se tirent i et m peuvent s'écrire

$$(49)\qquad \begin{cases} i(V - Am^2) = Em, \\ iEm = U - Bm^2. \end{cases}$$

En vertu des équations (17), on a

$$\delta E = n\delta B, \quad \delta U = 0, \quad \delta V = -n^2\delta B.$$

Différentiant les précédentes équations et y substituant les valeurs de δE, δU et δV, on trouve

$$\begin{aligned} (V - Am^2)\,\delta i - (2Aim + E)\,\delta m &= +(in^2 + mn)\,\delta B, \\ Em\,\delta i + (2Bm + Ei)\,\delta m &= -(m^2 + imn)\,\delta B. \end{aligned}$$

Multipliant la première par i, remplaçant B par A et ayant égard à la relation (41) et à la première (49), il vient

$$\begin{aligned} Em\delta i - (2Am + Ei)\delta m &= +(n^2 + imn)\delta B, \\ Em\delta i + (2Am + Ei)\delta m &= -(m^2 + imn)\delta B. \end{aligned}$$

On tire de celles-ci

$$\begin{aligned} 2Em\delta i &= -(m^2 - n^2)\,\delta B, \\ 2(2Am + Ei)\,\delta m &= -(m^2 + 2imn + n^2)\,\delta B, \end{aligned}$$

ou, en vertu des relations (34) et (36),

$$\begin{aligned} 2Cmn\beta'\delta i &= -(m^2 - n^2)\delta B, \\ 2C[m(1 + \beta') + n\beta' i]\,\delta m &= -(m^2 + 2imn + n^2)\delta B. \end{aligned}$$

Pour simplifier, nous supposerons que la quantité α' (39) est négligeable par rapport à l'unité; cette quantité est petite, parce que L est une petite quantité et n un nombre assez grand dans la question qui nous occupe. Dès lors la valeur (42) se réduit à

$$m = \frac{-in\beta' + \sqrt{n^2}}{1+\beta'},$$

et l'on a

$$\mathrm{C}m\,\delta i = -\frac{n + i\sqrt{n^2}}{(1+\beta')^2}\,\delta\mathrm{B},$$

$$\mathrm{C}\sqrt{n^2}\,\delta m = -\frac{1}{2}\,\frac{(in+\sqrt{n^2})^2}{(1+\beta')^2}\,\delta\mathrm{B} = -\,n\,\frac{n+i\sqrt{n^2}}{(1+\beta')^2}\,\delta\mathrm{B}.$$

Mettant la valeur précédente de m et ayant égard à la relation (34), il vient

$$\delta i = -\frac{1}{2}\,\frac{i + \dfrac{n}{\sqrt{n^2}}}{1 - \dfrac{in}{\sqrt{n^2}}\,\beta'}\,\frac{\delta\mathrm{B}}{\mathrm{A}},$$

$$\delta m = -\frac{1}{2}\,n\,\frac{i+\dfrac{n}{\sqrt{n^2}}}{1+\beta'}\,\frac{\delta\mathrm{B}}{\mathrm{A}}.$$

Dans l'application de ces formules, on devra donc distinguer les deux cas de n positif et n négatif. En conséquence des relations (43) on aura

$$n \text{ positif} \left\{ \begin{array}{lll} \delta i_1 = 0, & \delta i_2 = -\dfrac{1}{1-\beta'}\,\dfrac{\delta\mathrm{B}}{\mathrm{A}}, & \delta\mu = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{n}{1+\beta'}\,\dfrac{\delta\mathrm{B}}{\mathrm{A}}, \\ \delta m_1 = 0, & \delta m_2 = -\dfrac{n}{1+\beta'}\,\dfrac{\delta\mathrm{B}}{\mathrm{A}}, & \delta\nu = +\dfrac{1}{2}\,\dfrac{n}{1+\beta'}\,\dfrac{\delta\mathrm{B}}{\mathrm{A}}; \end{array} \right.$$

$$n \text{ négatif} \left\{ \begin{array}{lll} \delta i_1 = +\dfrac{1}{1-\beta'}\,\dfrac{\delta\mathrm{B}}{\mathrm{A}}, & \delta i_2 = 0, & \delta\mu = +\dfrac{1}{2}\,\dfrac{n}{1+\beta'}\,\dfrac{\delta\mathrm{B}}{\mathrm{A}}, \\ \delta m_1 = +\dfrac{n}{1+\beta'}\,\dfrac{\delta\mathrm{B}}{\mathrm{A}}, & \delta m_2 = 0, & \delta\nu = +\dfrac{1}{2}\,\dfrac{n}{1+\beta'}\,\dfrac{\delta\mathrm{B}}{\mathrm{A}}. \end{array} \right.$$

Nous ferons remarquer que les corrections δi_1 et δi_2 de i_1 et i_2 devant multiplier respectivement α_1 et α_2 dans l'expression (27) de y'', et ces dernières constantes étant assujetties à la condition d'être très-petites du premier ordre, nous devrons négliger les produits $\alpha_1\,\delta i_1$ et

$\alpha_2 \delta i_2$, puisque nous négligeons les quantités du deuxième ordre; au contraire, il est nécessaire de tenir compte des δm_1 et δm_2, parce que ces quantités entreront en facteurs du temps t. Il suffira ainsi d'appliquer aux valeurs de m_1 et m_2 leurs corrections, dans les expressions (47) de x'' et y''.

Posons

$$(50) \qquad \gamma' = \frac{B - A}{2A};$$

les valeurs corrigées de m_1 et m_2 pourront s'écrire, suivant que n sera positif ou négatif,

$$(51) \begin{cases} m_1 = +n\dfrac{\sqrt{1+\alpha'(1+\beta')}+\beta'}{1+\beta'}, \qquad m_2 = +n\dfrac{\sqrt{1+\alpha'(1+\beta')}-(\beta'+2\gamma')}{1+\beta'}, \\ \text{ou} \\ m_1 = -n\dfrac{\sqrt{1+\alpha'(1+\beta')}-(\beta'+2\gamma')}{1+\beta'}, \quad m_2 = -n\dfrac{\sqrt{1+\alpha'(1+\beta')}+\beta'}{1+\beta'}. \end{cases}$$

Les valeurs corrigées de μ et ν seront d'ailleurs

$$(52) \begin{cases} n \text{ positif}: \quad \mu = +n\dfrac{\sqrt{1+\alpha'(1+\beta')}-\gamma'}{1+\beta'}, \quad \nu = n\dfrac{\beta'+\gamma'}{1+\beta'}, \\ n \text{ négatif}: \quad \mu = -n\dfrac{\sqrt{1+\alpha'(1+\beta')}-\gamma'}{1+\beta'}, \quad \nu = n\dfrac{\beta'+\gamma'}{1+\beta'}. \end{cases}$$

En réalité, dans ces deux cas, les valeurs de μ sont égales et de mêmes signes, tandis que celles de ν sont égales et de signes contraires. Il résulte de là et de la petitesse supposée de γ', que μ doit être considéré comme essentiellement positif.

Les relations (4) donnent

$$(53) \qquad m_1 = \mu + \nu, \quad m_2 = \mu - \nu;$$

mettant ces valeurs dans les équations (47), il vient

$$(54) \begin{cases} x'' = +\alpha_1 \cos(\mu t + \nu t + \varepsilon_1) + \alpha_2 \cos(\mu t - \nu t + \varepsilon_2), \\ y'' = -\alpha_1 \sin(\mu t + \nu t + \varepsilon_1) + \alpha_2 \sin(\mu t - \nu t + \varepsilon_2). \end{cases}$$

Par les motifs énoncés plus haut, nous nous dispenserons d'appliquer aux valeurs (48), des corrections relatives à la différence B — A.

6. *Calcul plus exact des moments d'inertie.* — C'est uniquement pour moins fatiguer le lecteur que nous n'avons pas immédiatement présenté un calcul des moments d'inertie plus conforme aux circonstances de la pratique. La masse de la meule ne se compose pas d'un simple disque de pierre meulière : pour économiser cette précieuse matière, on donne à la meulière une épaisseur qui ne dépasse guère $0^m,22$, et on lui superpose une couche de plâtre d'environ $0^m,14$; ce qui produit en apparence, une épaisseur totale de $0^m,36$.

Soient : S le centre de rotation de la meule, G son centre de gravité, et, comme plus haut, M sa masse, H son épaisseur, L la distance de G au-dessous de S. Relativement au disque supérieur (plâtre), désignons par m' la masse, h' l'épaisseur, s' la distance de son centre de gravité au point S; nous désignerons par les mêmes lettres avec deux accents les quantités de même espèce qui se rapportent au disque inférieur (meulière). Enfin, soit s la distance du point S, au-dessous de la surface de séparation des deux disques; nous aurons

$$(55)\qquad \left\{\begin{aligned} s' &= \tfrac{1}{2}h' + s,\\ s'' &= \tfrac{1}{2}h'' - s.\end{aligned}\right.$$

Pour la symétrie des calculs, nous introduirons la différence $m'' - m'$ des masses composantes, que nous désignerons par m, de telle sorte qu'on ait

$$(56)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{M} &= m'' + m',\\ m &= m'' - m';\end{aligned}\right.$$

d'où

$$(57)\qquad \left\{\begin{aligned} m'' &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{M} + m),\\ m' &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{M} - m).\end{aligned}\right.$$

Si nous prenons les moments des masses par rapport au plan de séparation des deux disques, nous aurons

$$(58)\qquad \mathrm{M}(\mathrm{L} + s) = \tfrac{1}{2}(m''h'' - m'h').$$

En appliquant la première formule (31) au calcul des moments A et B, on aura

$$(59)\quad A = B = m'[s'^2 + \tfrac{1}{12}h'^2 + \tfrac{1}{4}(r_1^2 + r_0^2)] + m''[s''^2 + \tfrac{1}{12}h''^2 + \tfrac{1}{4}(r_1^2 + r_0^2)].$$

Nous introduirons encore la différence h des épaisseurs des deux disques en posant

$$(60)\qquad \begin{cases} H = h'' + h', \\ h = h'' - h'; \end{cases}$$

d'où

$$(61)\qquad \begin{cases} h'' = \tfrac{1}{2}(H + h), \\ h' = \tfrac{1}{2}(H - h). \end{cases}$$

Au moyen de ces valeurs, la relation (58) devient

$$2M(L + s) = \tfrac{1}{4}(M + m)(H + h) - \tfrac{1}{4}(M - m)(H - h) = \tfrac{1}{2}Mh + \tfrac{1}{2}mH;$$

d'où

$$(62)\qquad s = \frac{1}{4}\left(h + \frac{m}{M}H\right) - L.$$

Mettant cette valeur et celles de h'' et h' dans les expressions (55), il viendra

$$s' = \frac{1}{4}H\left(1 + \frac{m}{M}\right) - L,$$
$$s'' = \frac{1}{4}H\left(1 - \frac{m}{M}\right) + L.$$

Ces valeurs, ainsi que celles (57) et (61), étant substituées dans (59), on trouve d'abord

$$A = B = M\left[\frac{1}{16}H^2\left(1 + \frac{m^2}{M^2}\right) - \frac{1}{2}HL\frac{m}{M} + L^2 + \frac{1}{48}(H^2 + h^2) + \frac{1}{4}(r_1^2 + r_0^2)\right]$$
$$+ m\left(-\frac{1}{8}H^2\frac{m}{M} + \frac{1}{2}HL + \frac{1}{24}Hh\right),$$

puis ensuite

$$A = B = M\left[L^2 + \frac{1}{12}H^2 + \frac{1}{4}(r_1^2 + r_0^2) + \frac{1}{48}h^2 + \frac{1}{8}\frac{m}{M}H^2\left(\frac{1}{3}\frac{h}{H} - \frac{1}{2}\frac{m}{M}\right)\right].$$

En comparant cette expression à (31) et ayant égard à la première (34), on voit que la valeur (31) doit recevoir la correction

$$\delta A = \frac{C}{8\mathfrak{R}^2}\left[\frac{1}{6}h^2 + \frac{m}{M}H^2\left(\frac{1}{3}\frac{h}{H} - \frac{1}{2}\frac{m}{M}\right)\right].$$

Or, si l'on conserve entre A et C la relation (34), il faudra appliquer à la valeur de β' qui lui correspond, la correction

$$\delta\beta' = \frac{1}{4\mathfrak{R}^2}\left[\frac{1}{6}h^2 + \frac{m}{M}H^2\left(\frac{1}{3}\frac{h}{H} - \frac{1}{2}\frac{m}{M}\right)\right]. \tag{63}$$

Il est visible, même en l'absence de données exactes sur les densités des matières formant les deux disques, que cette correction est très-petite.

Dans le calcul qui précède, il n'a point été tenu compte de l'irrégularité de figure et du défaut d'homogénéité des deux disques composants; on a négligé également, pour ne pas compliquer les calculs, d'avoir égard à l'existence des armatures métalliques qui servent à consolider la meule. Or, si l'on remarque que les valeurs de m, et par suite celles de μ et ν, dépendent seulement des rapports des moments A et B et de la quantité K au moment C, on reconnaît qu'on tiendra compte de toutes les quantités négligées, en appliquant à α' et β' de petites corrections indéterminées $\delta\alpha'$ et $\delta^2\beta'$. Soient donc

$$\left\{\begin{aligned} \alpha'\text{corrigé} &= \alpha' + \delta\alpha', \\ \beta'\text{corrigé} &= \beta' + \delta\beta' + \delta^2\beta', \end{aligned}\right. \tag{64}$$

$\delta\beta'$ étant la quantité calculée par l'équation (63) et α' et β' les valeurs fournies par les formules (38) et (33); les valeurs de m ou de μ et ν pourront être considérées comme exactes.

Nos développements légitiment la forme attribuée à ces constantes dans une première approximation, et ils permettent d'en calculer *à priori* les valeurs numériques avec un degré d'exactitude qu'on se figurera en attribuant aux déterminées $\delta\alpha'$, $\delta^2\beta'$ et γ' des valeurs limites faciles à assigner.

7. *Interprétation géométrique des résultats obtenus.* — Supposons que, la meule étant enlevée, on établisse un style mobile le long d'un axe vertical qui passe par le centre de suspension. D'autre part, imaginons un plan lié au système des axes mobiles et parallèle au plan des x_1, y_1, dont l'ordonnée z_1 soit égale à λ; par exemple, celui de la face supérieure de la meule rendue parallèle à la face inférieure, et recouverte d'une feuille de papier ou de carton mince.

Lorsque la meule sera remise en place et qu'on lui communiquera un mouvement de rotation, le style tracera, sur le papier ou le carton, un diagramme qui va nous fournir une interprétation géométrique très-simple et les éléments très-simples également d'une solution du problème de l'équilibrage.

La face inférieure de la meule étant rendue horizontale, le style marquera la trace de l'axe des z_1 sur le plan considéré. De ce point, que nous désignerons par O', on mènera deux axes rectangulaires, parallèles aux axes mobiles des x_1 et y_1. Ces derniers étant arbitraires, il revient au même de considérer la situation des axes menés par O' comme arbitraire, et celle des x_1, y_1 comme assujettie à leur être parallèle.

Ceci posé, les relations entre les coordonnées x_1, y_1, z_1 rapportées aux axes mobiles, et les coordonnées rapportées aux axes fixes des x, y, z, sont

$$(65)\qquad \begin{cases} x_1 = ax + a'y + a''z, \\ y_1 = bx + b'y + b''z, \\ z_1 = cx + c'y + c''z. \end{cases}$$

Le lieu de l'intersection de l'axe du style avec le plan du diagramme mobile, pendant le mouvement de la meule, s'obtiendra en faisant $z_1 = \lambda$, puis $x = 0$, $z = 0$; or, c'' ne différant de l'unité que de quantités du deuxième ordre, on aura par la troisième équation précédente $\lambda = z_1$, et les deux autres donneront $x_1 = a''\lambda$, $y_1 = b''\lambda$. Pour plus de commodité, nous désignerons les coordonnées de la courbe tracée sur le diagramme par x' et y'; nous aurons ainsi

$$(66)\qquad \begin{cases} x' = a''\lambda, \\ y' = b''\lambda. \end{cases}$$

Posons maintenant

$$(67)\qquad \begin{cases} \xi' = -\lambda \dfrac{Gn^2}{U}, \\ \eta' = -\lambda \dfrac{Fn^2}{V}; \end{cases}$$

les équations (28) nous donneront

$$(68)\qquad \begin{cases} x' = \xi' + x'', \\ y' = \eta' + y''. \end{cases}$$

Il résulte de là que les auxiliaires x'' et y'' sont les coordonnées de la courbe tracée par le style vertical sur le diagramme, rapportées à des axes parallèles aux x_1 et y_1, et ayant leurs points de croisement en un point O'' dont les coordonnées sont ξ' et η'. On doit remarquer que ces coordonnées varieront avec la vitesse; mais, en raison de la nature des quantités U et V qui dépendent aussi de la vitesse (48), ces variations seront insensibles pour les valeurs de n qui sont pratiquées dans les minoteries. Soit ρ' le rayon vecteur qui joint un point de la courbe à l'origine O'; on déduit des relations (29) et (66)

$$(69)\qquad \sin^2\theta = \frac{\rho'^2}{\lambda^2}.$$

Le rayon vecteur ρ' sert ainsi de mesure à l'inclinaison θ de l'axe de la meule par rapport à la verticale. En menant par le point de suspension une droite perpendiculaire au plan vertical qui contient ρ', on a la direction de la ligne des nœuds.

Il nous reste à faire connaître la loi du mouvement suivant lequel est tracée la courbe du diagramme.

8. *Nature de la courbe décrite.* — On déduit des relations (54)

$$(70)\qquad \begin{cases} x''\cos\nu t - y''\sin\nu t = +\,\alpha_1\cos(\mu t + \varepsilon_1) + \alpha_2\cos(\mu t + \varepsilon_2), \\ x''\sin\nu t + y''\cos\nu t = -\,\alpha_1\sin(\mu t + \varepsilon_1) + \alpha_2\sin(\mu t + \varepsilon_2). \end{cases}$$

Les seconds membres de ces équations, étant développés, deviennent respectivement

$$+(\alpha_1 \cos\varepsilon_1 + \alpha_2 \cos\varepsilon_2)\cos\mu t - (\alpha_1 \sin\varepsilon_1 + \alpha_2 \sin\varepsilon_2)\sin\mu t,$$
$$-(\alpha_1 \sin\varepsilon_1 - \alpha_2 \sin\varepsilon_2)\cos\mu t - (\alpha_1 \cos\varepsilon_1 - \alpha_2 \cos\varepsilon_2)\sin\mu t;$$

si donc on pose

$$(71)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{R}\cos\Pi &= \alpha_1 \cos\varepsilon_1 + \alpha_2 \cos\varepsilon_2,\\ \mathrm{R}\sin\Pi &= \alpha_1 \sin\varepsilon_1 + \alpha_2 \sin\varepsilon_2,\\ -\rho\cos\varpi &= \alpha_1 \cos\varepsilon_1 - \alpha_2 \cos\varepsilon_2,\\ -\rho\sin\varpi &= \alpha_1 \sin\varepsilon_1 - \alpha_2 \sin\varepsilon_2,\end{aligned}\right.$$

les équations (70) donneront

$$\frac{1}{\mathrm{R}}(x''\cos\nu t - y''\sin\nu t) = \cos\Pi\cos\mu t - \sin\Pi\sin\mu t,$$
$$\frac{1}{\rho}(x''\sin\nu t + y''\cos\nu t) = \sin\varpi\cos\mu t + \cos\varpi\sin\mu t,$$

et les quatre constantes α_1, ε_1, α_2, ε_2, seront remplacées par les quatre nouvelles constantes R, Π, ρ et ϖ. On déduit aisément de ces équations

$$x''\left(\frac{1}{\rho}\cos\Pi\sin\nu t - \frac{1}{\mathrm{R}}\sin\varpi\cos\nu t\right) + y''\left(\frac{1}{\rho}\cos\Pi\cos\nu t + \frac{1}{\mathrm{R}}\sin\varpi\sin\nu t\right)$$
$$= \cos(\Pi - \varpi)\sin\mu t,$$
$$y''\left(\frac{1}{\rho}\sin\Pi\sin\nu t + \frac{1}{\mathrm{R}}\cos\varpi\cos\nu t\right) + y''\left(\frac{1}{\rho}\sin\Pi\cos\nu t - \frac{1}{\mathrm{R}}\cos\varpi\sin\nu t\right)$$
$$= \cos(\Pi - \varpi)\cos\mu t.$$

En élevant les deux membres au carré et ajoutant, on éliminera μt; après quelques réductions, il viendra

$$x''^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right) + \frac{1}{\rho\mathrm{R}}\sin(\Pi - \varpi)\sin 2\nu t - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)\cos 2\nu t\right]$$
$$+ y''^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right) - \frac{1}{\rho\mathrm{R}}\sin(\Pi - \varpi)\sin 2\nu t + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)\cos 2\nu t\right]$$
$$+ 2x''y''\left[\frac{1}{\rho\mathrm{R}}\sin(\Pi - \varpi)\cos 2\nu t + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)\sin 2\nu t\right]$$
$$= \cos^2(\Pi - \varpi).$$

Soient, pour abréger,

$$(72)\quad \begin{cases} u = \dfrac{1}{\rho R}\sin(\Pi - \varpi)\sin 2\nu t - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\rho^2} - \dfrac{1}{R^2}\right)\cos 2\nu t, \\ v = \dfrac{1}{\rho R}\sin(\Pi - \varpi)\cos 2\nu t + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\rho^2} - \dfrac{1}{R^2}\right)\sin 2\nu t, \\ S = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\rho^2} + \dfrac{1}{R^2}\right); \end{cases}$$

l'équation précédente deviendra

$$(73)\quad x''^2(S + u) + y''^2(S - u) + 2x''y''v = \cos^2(\Pi - \varpi).$$

Si l'on fait abstraction un instant des variations de u et v, on pourra considérer le lieu géométrique des points (x'', y'') comme appartenant à une section conique dont le centre est à l'origine de ces mêmes coordonnées, puisque l'équation (73) est privée de termes impairs. En ayant égard aux variations de u et v, on pourra encore regarder la trajectoire comme une section conique ayant son centre à l'origine des coordonnées (x'', y''), mais dont les axes pourront varier soit en grandeur soit en direction. Déterminons actuellement la direction et la grandeur des axes. A cet effet, soient : x et y [*] les coordonnées rapportées à un nouveau système d'axes de même origine que celui des x'', y''; ε l'angle de l'axe des x avec celui des x'', compté vers y''; nous aurons, entre les deux systèmes de coordonnées, les relations

$$(74)\quad \begin{cases} x'' = x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon, \\ y'' = x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon; \end{cases}$$

on en déduit

$$(75)\quad \begin{cases} x''^2 + y''^2 = x^2 + y^2, \\ x''^2 - y''^2 = (x^2 - y^2)\cos 2\varepsilon - 2xy\sin 2\varepsilon, \\ \quad 2x''y'' = (x^2 - y^2)\sin 2\varepsilon + 2xy\cos 2\varepsilon. \end{cases}$$

---

[*] Ne pas confondre ces nouvelles coordonnées avec les x et y qui figurent dans les équations (65) : nous devons faire la même remarque à l'égard d'autres lettres employées dans ce numéro avec des significations différentes de celles présentées au commencement de ce Mémoire.

Substituant ces valeurs dans l'equation (73), il vient

$$(76)\quad \left\{ \begin{array}{l} (x^2+y^2)\mathrm{S}+(x^2-y^2)(u\cos 2\varepsilon+v\sin 2\varepsilon)-2xy(u\sin 2\varepsilon-v\cos 2\varepsilon) \\ \quad = \cos^2(\Pi-\varpi). \end{array} \right.$$

Pour que l'axe des x devienne un des axes de la courbe, il faut que le rectangle xy disparaisse. A cet effet, soit Z le coefficient de x^2-y^2, nous aurons les deux relations

$$(77)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Z} = u\cos 2\varepsilon + v\sin 2\varepsilon, \\ \mathrm{o} = u\sin 2\varepsilon - v\cos 2\varepsilon; \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit, en élevant au carré et ajoutant membre à membre,

$$(78)\qquad \mathrm{Z}^2 = u^2 + v^2.$$

En conséquence, l'équation (76) devient

$$(79)\qquad x^2(\mathrm{S}+\mathrm{Z}) + y^2(\mathrm{S}-\mathrm{Z}) = \cos^2(\Pi-\varpi).$$

D'autre part, l'équation (78) donne, en ayant égard aux deux premières équations (72),

$$(80)\qquad \mathrm{Z}^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2\mathrm{R}^2}\sin^2(\Pi-\varpi),$$

et l'on a, par la troisième équation (72),

$$(81)\qquad \mathrm{S}^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)^2:$$

de celles-ci on tire

$$\mathrm{S}^2 - \mathrm{Z}^2 = \frac{1}{\rho^2\mathrm{R}^2} - \frac{1}{\rho^2\mathrm{R}^2}\sin^2(\Pi-\varpi)$$

ou

$$(82)\qquad (\mathrm{S}-\mathrm{Z})(\mathrm{S}-\mathrm{Z}) = \frac{1}{\rho^2\mathrm{R}^2}\cos^2(\Pi-\varpi).$$

Cette relation montre que les facteurs S + Z et S − Z sont de même signe; comme d'ailleurs le second membre de l'équation (79) est positif, il en résulte que ces facteurs sont également positifs : la trajectoire est par conséquent une ellipse dont les demi-axes parallèles aux x et y sont respectivement

$$(83) \qquad \sqrt{\frac{\cos^2(\Pi - \varpi)}{S + Z}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{\cos^2(\Pi - \varpi)}{S - Z}}.$$

Les valeurs de Z^2 et S^2 (80) et (81) étant des quantités constantes, il s'ensuit que les demi-axes de l'ellipse mobile conservent des grandeurs invariables, dépendant uniquement des constantes du mouvement initial.

9. *Mouvement des axes de l'ellipse mobile.* — Substituons dans les équations (77) les valeurs (72) de u et v, nous aurons

$$(84) \quad \begin{cases} Z = +\dfrac{1}{\rho R}\sin(\Pi - \varpi)\sin 2(\nu t + \varepsilon) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\rho^2} - \dfrac{1}{R^2}\right)\cos 2(\nu t + \varepsilon), \\ 0 = -\dfrac{1}{\rho R}\sin(\Pi - \varpi)\cos 2(\nu t + \varepsilon) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\rho^2} - \dfrac{1}{R^2}\right)\sin 2(\nu t + \varepsilon); \end{cases}$$

de la seconde de ces équations, on tire

$$(85) \qquad \operatorname{tang} 2(\nu t + \varepsilon) = -\frac{2\sin(\Pi - \varpi)}{\left(\dfrac{R}{\rho} - \dfrac{\rho}{R}\right)}.$$

L'ambiguité que présente la valeur de $2(\nu t + \varepsilon)$ a pour conséquence d'attribuer à cet angle deux valeurs qui diffèrent de 180 degrés; ε prend en conséquence deux valeurs qui diffèrent de 90 degrés : mais le résultat de cette ambiguité est simplement la permutation des axes x et y l'un dans l'autre, sans que les positions des divers points de la trajectoire en soient affectées.

Il est à remarquer que la valeur de l'angle $\nu t + \varepsilon$ que l'on tire de l'équation (85) est une constante. Soit ε_0 la valeur de cette constante; on aura

$$(86) \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 - \nu t,$$

et

$$Z = \frac{1}{\rho R}\sin(\Pi - \varpi)\sin 2\varepsilon_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{R^2}\right)\cos 2\varepsilon_0. \tag{87}$$

La relation (86) montre que les axes de l'ellipse tournent d'un mouvement uniforme autour de l'origine O″. En se reportant à la valeur (52) de ν et observant que β' et γ' sont des fractions peu considérables de l'unité, on reconnaîtra que le déplacement des axes mobiles est faible par rapport au mouvement de rotation n; si l'on suppose, comme cela est admissible, la somme $\beta' + \gamma'$ positive, le mouvement des axes sera rétrograde ou direct, suivant que le signe de n sera positif ou négatif.

La valeur de la constante ε_0 et celles des axes peuvent s'exprimer très-simplement au moyen des constantes primitives α_1, ε_2, α_2, ε_2. En effet, on tire des équations (71) les relations suivantes :

$$\begin{aligned} R^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_1),\\ \rho^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2\cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_1); \end{aligned}$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(R^2 + \rho^2) &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2,\\ \tfrac{1}{2}(R^2 - \rho^2) &= 2\alpha_1\alpha_2\cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_1); \end{aligned}\right. \tag{88}$$

puis

$$\begin{aligned} -\rho R\cos\Pi\cos\varpi &= \alpha_1^2\cos^2\varepsilon_1 - \alpha_2^2\cos^2\varepsilon_2,\\ -\rho R\sin\Pi\sin\varpi &= \alpha_1^2\sin^2\varepsilon_1 - \alpha_2^2\sin^2\varepsilon_2,\\ -\rho R\sin\Pi\cos\varpi &= \alpha_1^2\sin\varepsilon_1\cos\varepsilon_1 - \alpha_2^2\sin\varepsilon_2\cos\varepsilon_2 + \alpha_1\alpha_2\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1),\\ -\rho R\cos\Pi\sin\varpi &= \alpha_1^2\sin\varepsilon_1\cos\varepsilon_1 - \alpha_2^2\sin\varepsilon_2\cos\varepsilon_2 - \alpha_1\alpha_2\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1); \end{aligned}$$

de ces relations on déduit

$$\left\{\begin{aligned} -\rho R\cos(\Pi - \varpi) &= \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_2),\\ -\rho R\sin(\Pi - \varpi) &= 2\alpha_1\alpha_2\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1). \end{aligned}\right. \tag{89}$$

Multipliant haut et bas par $\frac{1}{2}\rho R$ le deuxième membre de l'équation (85), on le trouve, en vertu des relations (88) et (89), égal à $\tang(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$; on a donc

(90) $$2\varepsilon_0 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1.$$

La valeur (87) de Z donne, en vertu des mêmes relations,

$$\rho^2 R^2 Z = -2\alpha_1\alpha_2[\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\sin 2\varepsilon_0 + \cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\cos 2\varepsilon_0],$$

ou, en ayant égard à (90),

(91) $$\rho^2 R^2 Z = -2\alpha_1\alpha_2.$$

De la troisième équation (72) et la première équation (88), on tire

$$\rho^2 R^2 S = \alpha_1^2 + \alpha_2^2.$$

Les deux équations que nous venons d'écrire donnent

$$\rho^2 R^2 (S + Z) = (\alpha_1 - \alpha_2)^2,$$
$$\rho^2 R^2 (S - Z) = (\alpha_1 + \alpha_2)^2:$$

on a d'ailleurs (89)

$$\rho^2 R^2 \cos^2(\Pi - \varpi) = (\alpha_1 + \alpha_2)^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2.$$

Au moyen de ces relations, les valeurs des demi-axes respectivement parallèles aux x et y deviennent

(92) $$\sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}.$$

Les formules (90) et (92) remplacent avantageusement celles données sous les nos (85) et (83).

Soit T la durée de la révolution des axes de l'ellipse, on déduit de la formule (86)

(93) $$T = \pm\frac{2\pi}{\nu};$$

or, si l'on désigne par Θ la durée de la révolution de la meule autour de son axe de figure, on aura

$$\Theta = \pm \frac{2\pi}{n} : \tag{94}$$

d'où

$$\frac{T}{\Theta} = \pm \frac{n}{\nu}. \tag{95}$$

10. *Mouvement sur l'ellipse mobile.* — Les coordonnées x et y ont, en fonction des x'' et y'', les expressions suivantes, qui sont les inverses des relations (74) :

$$x = + x'' \cos\varepsilon + y'' \sin\varepsilon,$$
$$y = - x'' \sin\varepsilon + y'' \cos\varepsilon.$$

En y mettant les valeurs (54) de x'' et y''; il vient

$$x = + \alpha_1 \cos(\mu t + \nu t + \varepsilon_1 + \varepsilon) + \alpha_2 \cos(\mu t - \nu t + \varepsilon_2 - \varepsilon),$$
$$y = - \alpha_1 \sin(\mu t + \nu t + \varepsilon_1 + \varepsilon) + \alpha_2 \sin(\mu t - \nu t + \varepsilon_2 - \varepsilon),$$

ou, en vertu de (86),

$$\left\{ \begin{aligned} x &= + \alpha_1 \cos(\mu t + \varepsilon_1 + \varepsilon_0) + \alpha_2 \cos(\mu t + \varepsilon_2 - \varepsilon_0), \\ y &= - \alpha_1 \sin(\mu t + \varepsilon_1 + \varepsilon_0) + \alpha_2 \sin(\mu t + \varepsilon_2 - \varepsilon_0). \end{aligned} \right. \tag{96}$$

Ces formules permettent d'obtenir x et y en fonction de t, et elles résolvent la question proposée; mais elles ne laissent pas apercevoir la loi très-simple du mouvement du rayon vecteur mené du centre de l'ellipse mobile à sa circonférence. Calculons l'aire $d\eta$ décrite par ce rayon vecteur dans le temps infiniment petit dt; son expression est

$$d\eta = \tfrac{1}{2}(x\,dy - y\,dx), \tag{97}$$

accroissement considéré comme positif, lorsque le rayon vecteur tourne dans le sens de x à y. Or nous tirons des équations (96)

$$- \frac{dx}{dt} = + \mu[\alpha_1 \sin(\mu t + \varepsilon_1 + \varepsilon_0) + \alpha_2 \sin(\mu t + \varepsilon_2 - \varepsilon_0)],$$
$$+ \frac{dy}{dt} = - \mu[\alpha_1 \cos(\mu t + \varepsilon_1 + \varepsilon_0) - \alpha_2 \cos(\mu t + \varepsilon_2 - \varepsilon_0)];$$

substituant ces valeurs et celles (96) dans (97), il vient simplement

$$(98) \qquad \frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{2}\mu(\alpha_2^2 - \alpha_1^2).$$

On en conclut que le rayon vecteur décrit, dans l'ellipse mobile, des aires proportionnelles aux temps, lesquelles dépendent seulement de la constante μ et des constantes α_1 et α_2 du mouvement initial : le sens du mouvement dépend du signe de la différence $(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)$; nous avons vu en effet, n° 5, que μ est une quantité essentiellement positive.

Soit Υ l'aire de l'ellipse; on aura, en vertu des valeurs (92) des demi-axes,

$$(99) \qquad \Upsilon = \pi\sqrt{(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)^2},$$

et la constante des aires deviendra

$$\frac{d\eta}{dt} = \pm\frac{1}{2}\frac{\mu}{\pi}\Upsilon,$$

expression dans laquelle on devra prendre le signe de $(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)$. On en conclut, pour la durée τ d'une révolution du rayon vecteur par rapport aux axes mobiles,

$$(100) \qquad \tau = \pm\frac{2\pi}{\mu}:$$

en comparant cette durée à celle (94) d'un tour de la meule, on trouve

$$(101) \qquad \frac{\tau}{\Theta} = \pm\frac{n}{\mu}.$$

Si l'on se reporte aux valeurs (52) de μ, si l'on se rappelle que β', α' et γ' sont de petites fractions de l'unité, on reconnaît que les durées τ et Θ seront peu différentes.

ÉQUILIBRAGE DE LA MEULE.

11. *Première méthode.* — Dans les numéros qui précèdent, il a été établi que la courbe tracée par le style vertical passant par le point de suspension peut être considérée comme un ellipse dont les axes tournent autour de son centre, d'un mouvement lent par rapport au mouvement de rotation de la meule, tout en conservant leurs dimensions. Ces dimensions dépendent uniquement des constantes initiales du mouvement. Quant à la loi du mouvement sur le contour de l'ellipse mobile, il est tel que les aires décrites par les rayons vecteurs menés du centre de l'ellipse et comptées des axes mobiles sont proportionnelles aux temps.

La courbe tracée en réalité sur le diagramme se trouve dès lors comprise entre les deux circonférences de cercle concentriques, dont les rayons sont égaux respectivement au demi-grand axe et au demi-petit axe de l'ellipse. Ces deux circonférences servent, pour ainsi dire, d'enveloppes extérieure et intérieure à la courbe tracée. La courbe se réduirait à un cercle dans le cas particulier où les deux axes de l'ellipse se trouveraient égaux. Cette circonstance répond au cas où l'une des deux constantes α_1 et α_2 serait nulle. Signalons encore deux cas particuliers : si les valeurs de ces constantes sont égales, la courbe dégénérera en une ligne droite qui n'en aura pas moins pour enveloppe une circonférence de rayon égal à la valeur commune des mêmes constantes; enfin, si ces deux constantes sont simultanément nulles, la courbe se réduira à un point qui coïncidera avec le point O''.

Il sera facile, dans tous les cas, de fixer sur le diagramme le centre des deux cercles-enveloppes, ou celui du cercle unique si les deux enveloppes se confondent.

Les coordonnées du centre commun de ces diverses trajectoires ont été désignées par ξ' et η'. Les axes des x_1 et y_1, auxquels elles sont parallèles, ont pour origine la trace du style faite sur le diagramme lorsque la face inférieure de la meule est rendue horizontale.

Nous supposerons que les centres de gravité des masses réglantes ne puissent se mouvoir que dans le sens perpendiculaire à la face inférieure de la meule, ou parallèlement à l'axe des z_1.

Soient m_1, m_2 ces deux masses réglantes; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 les coordonnées de leurs centres de gravité.

Désignons par F_0 et G_0 l'ensemble des termes de F et G, à l'exception de ceux correspondant aux masses m_1 et m_2; nous aurons, suivant les équations (2),

$$F = F_0 + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2,$$
$$G = G_0 + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2,$$

et les variations de ces quantités, dues aux déplacements des deux masses dans le sens parallèle à l'axe des z_1, seront

$$\delta F = m_1 y_1 \delta z_1 + m_2 y_2 \delta z_2,$$
$$\delta G = m_1 x_1 \delta z_1 + m_2 x_2 \delta z_2.$$

On se rappelle que les conditions à remplir pour l'équilibrage sont que les valeurs de F et G, modifiées au besoin, s'annulent. Après le déplacement des masses, ces valeurs deviennent $F + \delta F$, $G + \delta G$; on doit donc satisfaire aux conditions

$$(102) \qquad \begin{cases} F + \delta F = 0, \\ G + \delta G = 0. \end{cases}$$

De ces équations jointes aux précédentes, on tire

$$(103) \qquad \begin{cases} m_1(y_2 x_1 - y_1 x_2)\delta z_1 = + x_2 F - y_2 G, \\ m_2(y_2 x_1 - y_1 x_2)\delta z_2 = - x_1 F + y_1 G; \end{cases}$$

or, en vertu des équations (67),

$$F = -\frac{V}{n^2}\frac{\eta'}{\lambda},$$
$$G = -\frac{U}{n^2}\frac{\xi'}{\lambda}:$$

on a d'ailleurs, suivant les équations (48),

$$\frac{U}{n^2} = \frac{V}{n^2} = \tfrac{1}{2}C(1-\beta') + \frac{gML}{n^2},$$

les valeurs de C et β' étant censées calculées par les formules (31) et (33). Si donc on pose

$$(104) \qquad v = \frac{\tfrac{1}{2}C(1-\beta') + \frac{gML}{n^2}}{\lambda(y_2 x_1 - y_1 x_2)},$$

on aura finalement

$$(105) \qquad \begin{cases} m_1\,\delta z_1 = v(y_2\,\xi' - x_2\,\eta'), \\ m_2\,\delta z_2 = v(x_1\,\eta' - y_1\,\xi'); \end{cases}$$

d'où l'on tirera δz_1 et δz_2.

Nous n'avons pas spécifié le sens dans lequel l'axe des y_1 est dirigé relativement à celui des x_1. Ce sens est effectivement indifférent dans la question actuelle; car si l'on change le sens des y_1, les trois ordonnées y_1, y_2 et η' changeront de signe, et les valeurs de δz_1 et δz_2 n'en seront nullement affectées.

La valeur de v sera d'autant mieux déterminée, que la distance λ du point de suspension au plan du diagramme sera plus considérable : on pourrait, au besoin, établir le plan du diagramme à une distance plus grande que nous ne l'avons supposé, en faisant usage d'un châssis très-léger et très-régulier qui serait fixé à la meule bien concentriquement à son axe; mais il nous semble que cela ne sera pas nécessaire, attendu que la position du centre de l'ellipse mobile pourra être relevée à quelques dixièmes de millimètre près, et que cette erreur, agrandie dans le rapport du rayon extérieur de la meule à la quantité λ, sera encore négligeable dans la pratique.

Au même point de vue, il convient de choisir la position des masses m_1 et m_2, de manière que la quantité $y_2 x_1 - y_1 x_2$ soit la plus grande possible. Or cette quantité est égale au double de la surface d'un triangle dont les sommets sont, l'un à l'origine des coordonnées, et les deux autres aux points où les centres de gravité des masses m_1 et m_2 se projettent sur le plan des $x_1\,y_1$; il faudra donc que les rayons vecteurs de ces points soient aussi grands que possible : en les supposant égaux, la surface du triangle sera un maximum, lorsque les directions de ces rayons vecteurs seront rectangulaires. Les formules (104) et (105) se simplifieraient si les masses réglantes pouvaient être disposées, l'une dans le plan méridien qui contient l'axe des x_1, l'autre dans celui qui passe par l'axe des y_1; mais la détermination de l'origine des coordonnées résultant d'une opération postérieure à celle de la mise en place des masses m_1 et m_2, il serait difficile de satisfaire exactement à cette condition.

On pourra remarquer que, les masses m_1 et m_2 ayant la forme de disques cylindriques, leur déplacement parallèlement à l'axe des z_1 n'affectera pas le moment d'inertie C, mais que les deux autres moments A et B subiront une légère variation à la suite de ce déplacement; il en sera de même de leur différence et du rapport de A à C; mais nous avons fait voir, nos 5 et 6, que ces variations se traduisent par des valeurs particulières et très-petites de γ' et de β', qui portent seulement sur les quantités μ et ν, dont ξ' et η' sont indépendants : il n'y a donc pas lieu de se préoccuper de cette circonstance.

La valeur de v dépend de n, tant que n n'est pas suffisamment grand pour que le second terme du numérateur de v soit négligeable par rapport au premier. Il conviendra donc, si ce second terme est sensible, d'éviter dans l'expérimentation le décroissement de la vitesse; autrement on s'exposerait à un changement de position du centre de l'ellipse mobile durant l'expérience. Toutefois, comme on ne peut maintenir la vitesse qu'en faisant agir des forces qui pourraient troubler les résultats, il sera toujours préférable d'avoir recours à une réduction de la distance L du centre de gravité au centre de suspension, et de produire à l'origine la plus grande vitesse de rotation possible; alors la diminution de la vitesse pourra avoir lieu sans inconvénient, au moins jusqu'à une certaine limite facile à déterminer.

La petitesse de ξ' et η' n'exige pas que le calcul de v soit fait avec une grande exactitude; nous l'avons déjà dit sous une autre forme : nous croyons devoir le répéter en terminant, et rappeler, en conséquence, que les valeurs de M, C et β' pourront être calculées comme si la meule était homogène et de forme régulière. Les formules pour ces deux dernières sont (31), (32) et (33).

12. *Résumé de la première méthode.* — La surface inférieure de la meule est considérée comme plane. Dans son épaisseur ont été pratiquées deux cavités cylindriques dont les axes sont perpendiculaires à la face inférieure. Ces axes doivent être situés le plus près possible de la périphérie de la meule et à des distances égales de l'axe; les plans méridiens qui les contiennent sont à peu près rectangulaires et orientés à 45 degrés par rapport à l'axe transversal de l'anille. Les deux cavités reçoivent les masses réglantes; ces masses, de forme cylindrique, ne peuvent être déplacées que suivant des directions perpendiculaires à la surface plane de la meule.

Un style dont l'axe est vertical est établi au-dessus du fer de meule, de manière que sa pointe puisse arriver à coïncider avec le centre de suspension de la meule. Celle-ci, étant mise en place, est équilibrée statiquement, ou de manière qu'étant au repos, sa face inférieure soit horizontale. Un carton ayant été ensuite fixé à la meule dans une situation parallèle à la face inférieure de celle-ci, on abaisse le style sur le carton, et le point de rencontre est pris pour origine de deux axes de coordonnées rectangulaires. Il convient d'orienter ces axes à peu près dans les mêmes plans méridiens que les centres de gravité des masses réglantes.

La meule étant mise en mouvement avec la plus grande vitesse possible et sous la condition d'éviter des oscillations d'une amplitude trop prononcée, le style trace un diagramme qui figure une courbe comprise entre deux circonférences de cercle concentriques. Cette courbe résulte du mouvement sur une ellipse dont les axes constants, et dépendant seulement des circonstances du mouvement initial, tournent avec une vitesse uniforme autour de son centre, vitesse d'ailleurs très-petite relativement à la vitesse de rotation de la meule. Suivant les circonstances que présenteront les oscillations initiales, il pourra arriver que la courbe se réduise à un cercle unique, ou bien que la circonférence intérieure se réduise à un point, et par conséquent disparaisse, ou encore que la courbe elle-même se réduise à un point unique.

Si le mouvement angulaire des axes de l'ellipse mobile est nul, la courbe du diagramme se réduira à une ellipse qui pourra elle-même se réduire à un cercle, à une ligne droite ou à un point, selon les circonstances du mouvement initial.

Quel que soit le résultat qui se produise, on relèvera avec soin la position du centre commun des cercles qui enveloppent la courbe tracée, ou, suivant les cas, celle du centre de l'ellipse ou du cercle unique, celle du milieu de la droite, ou du point unique.

Nous désignons par ξ' et η' les coordonnées du point obtenu, respectivement parallèles aux x_1 et y_1.

En reproduisant les formules nécessaires au calcul des déplacements des masses réglantes, nous substituerons, pour la facilité des applications, les poids aux masses, et nous formerons, par voie d'élimination, les expressions des inconnues, en fonctions le plus explicites possible des données de la question.

Nous prendrons pour unités de temps, de longueur et de poids, respectivement la seconde de temps moyen, le mètre et le kilogramme.

N désignant le nombre de tours que la meule fait par seconde et π le rapport de la circonférence au diamètre, on calculera

$$[1] \qquad n = 2\pi N.$$

Désignons par ϖ le poids du mètre cube de la matière de la meule supposée homogène, r_0 et r_1 ses rayons intérieur et extérieur, H son épaisseur; le poids de la meule est

$$[2] \qquad P = \varpi\pi(r_1^2 - r_0^2)H.$$

Soient : L la distance du centre de gravité de la meule à son centre de suspension, et prise positivement quand le centre de gravité est au-dessous du centre de suspension; λ la distance du plan du diagramme à ce même centre de suspension, et supposée positive lorsque le diagramme est au-dessus dudit centre; p_1 et p_2 les poids des masses réglantes qu'il sera préférable de déterminer par des pesées plutôt que par un calcul; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 les coordonnées des centres de gravité de ces masses (les ordonnées z_1 et z_2 étant comptées du plan parallèle à la face inférieure de la meule qui passe par le centre de suspension et prises positivement du côté du zénith); δz_1 et δz_2 les variations des coordonnées z_1 et z_2, qui doivent être réalisées pour obtenir l'équilibre dynamique de la meule; g l'accélération de la chute des graves. On calculera

$$[3] \qquad v' = P\,\frac{\frac{1}{2}(r_1^2 + r_0^2) - (2L^2 + \frac{1}{6}H^2) + \dfrac{2gL}{n^2}}{2\lambda(y_2 x_1 - y_1 x_2)},$$

et l'on aura

$$[4] \qquad \left\{\begin{aligned} \delta z_1 &= v'\,\frac{y_2\xi' - x_2\eta'}{p_1}, \\ \delta z_2 &= v'\,\frac{x_1\eta' - y_1\xi'}{p_2}. \end{aligned}\right.$$

Si les valeurs trouvées par ces deux dernières formules excèdent les limites réalisables, il faudra augmenter les masses réglantes en s'astreignant toujours à la condition préalable de l'équilibre statique.

Si, malgré les précautions prises pour éviter, à l'origine, les grandes oscillations par rapport à la verticale, celles-ci persistent, l'emploi des formules précédentes ne sera plus légitime, mais il sera cependant utile, en ce sens qu'on pourra considérer le résultat obtenu comme une approximation. En effectuant les corrections fournies par le calcul, on pourra toujours compter sur la possibilité de réduire l'amplitude des oscillations au degré voulu, et, en recommençant l'opération, on déduira finalement, d'un nouveau calcul, des corrections qui assureront un équilibre suffisamment complet.

Terminons en rappelant qu'il convient, dans les opérations, de laisser la meule libre, après qu'on lui aura communiqué la vitesse de rotation n, et qu'il faudra éviter de prolonger leur durée au delà du moment où, par suite de la diminution de vitesse résultant des résistances, celle-ci serait affaiblie au point où le dernier terme du numérateur de v' cesserait d'être négligeable par rapport à l'ensemble des deux premiers; autrement, la position du point $(\xi'\eta')$ cesserait d'être invariable.

13. *Remarques concernant la pratique.* — La méthode qui vient d'être exposée présentera sans doute quelque difficulté dans les applications, à cause de la valeur de λ, qui sera peu considérable si le plan du diagramme est celui de la surface supérieure de la meule. On ne peut guère songer à lui en substituer un autre; car, le plan du diagramme devant être fixe par rapport à la meule, il faudrait, pour pouvoir employer de grandes valeurs de λ, rattacher le diagramme à la meule par un châssis métallique bien régulièrement construit et centré; ce qui ne se ferait pas sans difficulté. Si l'on applique le diagramme sur la surface supérieure de la meule, les dimensions absolues de la trajectoire seront très-restreintes, et il faudra relever les coordonnées ξ' et η' au moyen d'un microscope micrométrique. Dans l'hypothèse où l'on aurait recours à ce moyen de mesure, voici les précautions qu'il faudrait prendre. Comme on ne pourrait espérer obtenir directement une coïncidence suffisamment exacte entre l'axe du style et le point de suspension de la meule, il faudrait placer la meule en équilibre statique, dans quatre positions rectangulaires par exemple, et chaque fois abaisser le style de manière à marquer, sur le diagramme, quatre points bien distincts, qui ne coïncideront généralement pas, puisque nous supposons le centrage du style imparfaitement réalisé. Il est clair que la position du style bien centré serait à l'intersection des diagonales du carré formé par les quatre points. Sur le diagramme, on tracerait des droites rectangulaires dans les directions, ou à peu près, des plans méridiens correspondants aux masses réglantes. Ces droites, ayant particulièrement pour objet l'orientation des fils ou des traits du micromètre, devraient se croiser très-près du centre du carré; mais on éviterait d'en effectuer le tracé dans la région de la trajectoire. La meule, étant mise en mouvement, tracera une courbe un peu différente de celle qui répond au centrage exact du style. Chacun des points de la nouvelle courbe s'obtiendrait, au moyen des points de l'autre courbe, par un simple transport dans la direction du rayon d'excentricité et égal à ce rayon; or, la direction de ce même rayon changeant à chaque instant et faisant un tour sur le diagramme en sens contraire de la rotation de la meule par tour de celle-ci, la nouvelle courbe ne résultera pas d'un simple transport de l'autre : elle sera bien plus compliquée; mais on reconnaît aisément qu'elle sera généralement comprise entre deux cercles-enveloppes, l'un extérieur, l'autre intérieur, dont les rayons excéderont ceux de la courbe décrite dans le numéro précédent, d'une quantité égale à $\pm$ le rayon d'excentricité, en sorte que la position du centre commun des deux enveloppes n'en sera pas affectée. Si donc on mesure au microscope les coordonnées extrêmes de l'une ou de l'autre enveloppe, et qu'on en prenne les moyennes; si l'on prend également les moyennes respectives des coordonnées des quatre points distincts marqués par le style, quand la meule est en équilibre (ces diverses mesures étant comptées des droites rectangulaires tracées sur le diagramme), les excès des premières mesures sur les secondes fourniront les valeurs des coordonnées ξ' et η' du centre des courbes. On aura sans doute remarqué qu'à la suite de la diminution du rayon du cercle-enveloppe intérieur, celui-ci pourra cesser d'avoir une existence réelle, mais le cercle-enveloppe extérieur ne disparaîtra pas, ce qui suffit. Dans le cas actuel, la verticalité exacte du style ne sera pas nécessaire, attendu que, son déplacement vertical étant une quantité du deuxième ordre, un léger défaut de verticalité ne pourrait produire, dans la mesure des coordonnées, que des erreurs du troisième ordre. Une telle disposition du système de mesures présenterait qnelques simplifications utiles.

Malgré cela, nous allons présenter une autre méthode qui dispense de recourir aux mesures micrométriques.

14. *Deuxième méthode.* — Désignant par x, y, z les coordonnées rapportées à des axes fixes, d'un point lié aux axes mobiles et dont les coordonnées par rapport à ces axes sont x_1, y_1 et z_1; les deux systèmes ayant leur origine commune au point de suspension, on a

$$(106) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= ax_1 + by_1 + cz_1, \\ y &= a'x_1 + b'y_1 + c'z_1, \\ z &= a''x_1 + b''y_1 + c''z_1, \end{aligned} \right.$$

équations qui font connaître les coordonnées x, y, z d'un point donné du système mobile, au moyen des valeurs connues des divers cosinus qui figurent dans leurs seconds membres.

Imaginons un style fixé sur la meule et dirigé dans le sens d'un rayon : ce style très-léger pourra, par exemple, être adapté sur l'un des cercles en fer qui maintiennent extérieurement les matériaux dont elle se compose. Concevons d'ailleurs une surface verticale, plane ou cylindrique, et disposée pour recevoir les impressions du style; puis, sur cette surface, une ligne horizontale arbitraire, à partir de laquelle se mesureront les excursions verticales du même style.

Appliquons au point extrême du style la dernière des relations précédentes; nous aurons, à cause de $c'' = 1$, et en distinguant par un trait ses coordonnées x_1, y_1, z_1 pour éviter toute confusion,

$$z = a''\bar{x}_1 + b''\bar{y}_1 + \bar{z}_1 :$$

cette relation est générale. Considérons le cas particulier de l'équilibre statique, dans lequel a'' et b'' sont nuls, et soit z_e l'ordonnée de l'extrémité du style correspondante à cet état; nous aurons

$$z_e = \bar{z}_1 :$$

or la différence $z - z_e$ est aussi celle des ordonnées des traces du style sur la surface verticale considérée, lorsque la meule est en mouvement et lorsqu'elle est dans son état d'équilibre statique. Posons donc, pour abréger,

$$\zeta = z - z_e; \tag{107}$$

nous pouvons considérer ici z et z_e comme les ordonnées du style comptées de la ligne horizontale arbitraire, dans ces deux états; attendu que leur différence ζ entrera seule dans les calculs qui suivent : nous aurons donc

$$\zeta = a''\bar{x}_1 + b''\bar{y}_1. \tag{108}$$

Dans la méthode actuelle, on pourrait se dispenser d'employer l'arbitraire λ; pour éviter de recommencer certains calculs, nous la conserverons, sauf à en disposer plus tard.

Mettons dans l'équation précédente, à la place de a'' et b'', leurs valeurs tirées de (66), en substituant dans celles-ci les valeurs (68) de x' et y'; nous aurons d'abord

$$\zeta = \frac{\xi' + x''}{\lambda}\bar{x}_1 + \frac{\eta' + y''}{\lambda}\bar{y}_1;$$

puis, au moyen des expressions (54) de x'' et y'', et posant

$$\bar{x}_1 = \bar{r}_1 \cos\varkappa_1, \quad \bar{y}_1 = \bar{r}_1 \sin\varkappa_1,$$

la valeur de ζ prendra cette forme

$$\left\{\begin{aligned} \zeta = \frac{\xi'}{\lambda}\bar{x}_1 + \frac{\eta'}{\lambda}\bar{y}_1 + \alpha_1\frac{\bar{r}_1}{\lambda}\cos(\mu t + \nu t + \varepsilon_1 + \varkappa_1) \\ + \alpha_2\frac{\bar{r}_1}{\lambda}\cos(\mu t - \nu t + \varepsilon_2 - \varkappa_1). \end{aligned}\right. \tag{109}$$

Les maxima et minima de ζ correspondent aux racines t de l'équation $\frac{d\zeta}{dt} = 0$: ces divers maxima et minima ont des limites que l'on obtient en égalant à ± 1 les cosinus qui figurent dans l'équation (109).

Posant à cet effet

$$\alpha = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varkappa_1}{\pi}, \quad \beta = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\pi};$$

on aurait les relations suivantes :

$$2\frac{t}{\pi} = \frac{h - \beta}{\mu} = \frac{k - \alpha}{\nu},$$

où h et k désignent des nombres entiers, simultanément pairs ou impairs, suivant que α_1 et α_2 sont de mêmes signes ou de signes contraires. Ces relations déterminent les valeurs de t correspondantes aux limites que nous considérons, et fournissent en même temps l'équation de condition entre les entiers h et k. Nous ne discuterons pas les conditions d'existence réelle des maxima et minima limites; cela nous entraînerait trop loin. Le lecteur jugera de la convenance qu'il peut y avoir, dans le problème actuel, de substituer, pour plus de simplicité, à la considération des maxima et minima réels, les limites de ces mêmes quantités; toutefois, il trouvera dans le numéro suivant un complément à ce qu'un tel mode de procéder semble présenter d'incorrect.

Soit σ la somme des valeurs absolues de α_1 et α_2; il est clair que les limites des maxima et minima de ζ seront égales à la somme des deux premiers termes du deuxième membre de l'expression (109), augmentée de $\pm \sigma \frac{\bar{r}_1}{\lambda}$; donc, si l'on désigne par ζ'_1 la moyenne entre ces maxima et ces minima, on aura simplement

$$\zeta'_1 = \frac{\xi'}{\lambda}\bar{x}_1 + \frac{\eta'}{\lambda}\bar{y}_1. \tag{110}$$

Actuellement changeons le style de place sur la meule, d'une quantité voisine de 90 degrés par exemple, et distinguons les résultats de la nouvelle opération par les indices 2 mis à la place de l'indice 1; nous aurons

$$\zeta'_2 = \frac{\xi'}{\lambda}\bar{x}_2 + \frac{\eta'}{\lambda}\bar{y}_2.$$

De cette équation, jointe à la précédente, on déduit

$$\frac{\xi'}{\lambda} = \frac{\bar{y}_2\zeta'_1 - \bar{y}_1\zeta'_2}{\bar{y}_2\bar{x}_1 - \bar{y}_1\bar{x}_2}, \quad \frac{\eta'}{\lambda} = \frac{\bar{x}_1\zeta'_2 - \bar{x}_2\zeta'_1}{\bar{y}_2\bar{x}_1 - \bar{y}_1\bar{x}_2}. \tag{111}$$

Le dénominateur commun de ces expressions justifie la situation relative des deux styles que nous venons de recommander.

Si l'on observe que les quantités ξ' et η' doivent être multipliées par υ' dans les expressions [4], n° **12**, et que le produit $\upsilon'\xi'$, par exemple, équivaut à $\lambda\upsilon'\frac{\xi'}{\lambda}$, on voit que l'on peut faire abstraction de λ dans les applications des formules précédentes et dans la valeur de υ'.

Au moyen de ces valeurs de ξ' et η', et faisant $\lambda = 1$, la solution du problème s'achèvera suivant les formules du n° **12**.

Les quantités observées étant, ici, beaucoup plus faciles à obtenir que dans la première méthode, on pourra faire abstraction des petites erreurs que l'on commettrait en essayant de placer les styles exactement dans les plans méridiens des x_1 et y_1 : si effectivement ces erreurs sont négligeables, on aura, dans ce cas, $y_1 = 0$ et $x_2 = 0$; ce qui réduira les valeurs (111) respectivement à

$$(112) \qquad \frac{\overline{\zeta'_1}}{x_1} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{\zeta'_2}}{y_2}.$$

En résumé, la seconde méthode consiste à fixer sur la meule un premier style dont la pointe marque des traits sur une surface verticale fixe : on note distinctement sur cette surface le trait correspondant à l'état d'équilibre statique; les ordonnées comptées de ce trait, quand la meule est en mouvement, sont désignées par ζ, leur sens positif étant la direction du zénith; on désigne par $\overline{\zeta'_1}$ l'ordonnée moyenne entre les ordonnées extrêmes, et par $\overline{x_1}$ et $\overline{y_1}$ les coordonnées de la pointe du style par rapport aux axes mobiles de x_1 et y_1. Déplaçant ensuite le style de 90 degrés environ, on effectue une opération pareille à la précédente : affectant de l'indice 2 les quantités qui se rapportent à la deuxième opération, on a, pour calculer ξ' et η', les formules (111) où l'on fait $\lambda = 1$; le reste s'achève selon les formules du n° **12**.

15. Bien que la seconde méthode satisfasse largement aux exigences de la pratique, nous en indiquerons néanmoins des perfectionnements.

En premier lieu, nous supposerons qu'à la surface verticale, destinée à recevoir les traces du style, on en adjoigne une seconde qui soit opposée à la première, par rapport à la verticale passant par le point de suspension.

Si t est le temps du passage du style par l'un des plans, celui du passage par le plan opposé sera t augmenté de la demi-durée de la rotation de la meule, ou, en vertu de (94), $t \pm \frac{\pi}{n}$ [*]. Les fonctions trigonométriques contenues dans la formule (109) seront de la forme

$$\cos\left(\mu t \pm \nu t + \varepsilon \pm \frac{\mu \pm \nu}{n}\pi\right):$$

et l'on a la relation

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[\cos(\mu t \pm \nu t + \varepsilon) + \cos\left(\mu t \pm \nu t + \varepsilon \pm \frac{\mu\pm\nu}{n}\pi\right)\right]\\ = \cos\left(\mu t \pm \nu t + \varepsilon \pm \frac{\mu\pm\nu}{n}\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\mu\pm\nu}{n}\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Désignons par ζ'' la moyenne des valeurs de ζ fournies par deux simples passages du style sur les deux surfaces verticales opposées; on aura, suivant l'équation (109),

$$\begin{aligned}\zeta'' = \frac{\xi'}{\lambda}\bar{x}_1 + \frac{\eta'}{\lambda}\bar{y}_1 + \alpha_1\frac{\bar{r}_1}{\lambda}\cos\left(\mu t + \nu t + \varepsilon_1 + \varkappa_1 \pm \frac{\mu+\nu}{n}\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\mu+\nu}{n}\frac{\pi}{2}\\ + \alpha_2\frac{\bar{r}_1}{\lambda}\cos\left(\mu t - \nu t + \varepsilon_2 - \varkappa_1 \pm \frac{\mu-\nu}{n}\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\mu-\nu}{n}\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Or, $\frac{\nu}{n}$ étant une fraction peu considérable, et $\frac{\mu}{n}$ peu différent de l'unité; les cosinus de $\frac{\mu\pm\nu}{n}\frac{\pi}{2}$ seront de petites quantités : par la combinaison des deux diagrammes opposés, on réduit donc l'influence des termes périodiques.

Actuellement, ajoutons les valeurs de ζ'' fournies par plusieurs révolutions consécutives, nous aurons $\pm\frac{2\pi}{n}$, pour accroissement du temps écoulé entre ces révolutions, et

$$\pm 2\frac{\mu\pm\nu}{n}\pi,$$

pour celui des angles compris sous les signes trigonométriques.

[*] Le signe + répond au cas de n positif et le signe — au cas de n négatif.

La formule de sommation des cosinus ou sinus est, en désignant par N' le nombre des termes,

$$\sum_{i=0}^{i=N'-1} \frac{\cos}{\sin}(p+i\alpha) = \frac{\cos}{\sin}\left(p+\frac{N'-1}{2}\alpha\right)\frac{\sin\frac{1}{2}N'\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}:$$

nous devons faire, dans cette formule,

$$\tfrac{1}{2}\alpha = \pm\frac{\mu\pm\nu}{n}\pi.$$

En l'appliquant ici, nous trouvons

$$\sum_{i=0}^{i=N'-1}\cos\left(\mu t\pm\nu t+\varepsilon\pm\varkappa_1\pm\frac{\mu\pm\nu}{n}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\cos\left[\mu t_0\pm\nu t_0+\varepsilon\pm\varkappa_1\pm(2N'-1)\frac{\mu\pm\nu}{n}\frac{\pi}{2}\right]\frac{\sin\frac{N'(\mu\pm\nu)}{n}\pi}{\sin\frac{\mu\pm\nu}{n}\pi}:$$

La moyenne des valeurs de ζ'' est donc

$$(113)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{N'}\sum\zeta''=\frac{\xi'}{\lambda}\bar{x}_1+\frac{\eta'}{\lambda}\bar{y}_1\\
&\quad+\frac{\alpha_1}{2N'}\frac{\bar{r}_1}{\lambda}\cos\left[\mu t_0+\nu t_0+\varepsilon_1+\varkappa_1\pm(2N'-1)\frac{\mu+\nu}{n}\frac{\pi}{2}\right]\frac{\sin N'\frac{\mu+\nu}{n}\pi}{\sin\frac{\mu+\nu}{n}\frac{\pi}{2}}\\
&\quad+\frac{\alpha_2}{2N'}\frac{\bar{r}_1}{\lambda}\cos\left[\mu t_0-\nu t_0+\varepsilon_2-\varkappa_1\pm(2N'-1)\frac{\mu-\nu}{n}\frac{\pi}{2}\right]\frac{\sin N'\frac{\mu-\nu}{n}\pi}{\sin\frac{\mu-\nu}{n}\frac{\pi}{2}}\ [*].
\end{aligned}\right.$$

Le dénominateur $\sin\frac{\mu\pm\nu}{n}\frac{\pi}{2}$ diffère peu de l'unité; tandis que les facteurs $\sin N'\frac{\mu\pm\nu}{n}\pi$ diffèrent peu de $\sin N'\pi$ ou zéro : les termes en α_1 et α_2 sont déjà par cela seul très-faibles; mais ils sont encore consi-

---

[*] Le double signe qui précède l'unité dans cette formule, est relatif au signe de n : le signe $+$ convient au cas de n positif et le signe $-$ au cas où n est négatif.

dérablement affaiblis par le diviseur $2N'$. Donc, en prenant pour valeur de la fonction ζ'_1 (110) la moyenne des valeurs de ζ'' correspondante à un certain nombre de tours, tel que 15 ou 20, on ne commettra aucune erreur sensible.

On aura sans doute quelque peine à distinguer les traits du diagramme dans le voisinage des maxima et minima : pour appliquer la formule (113), il faudrait recueillir des traits fournis par le style, sur un disque tournant avec lenteur; en faisant tourner ce disque pendant que la meule est en équilibre statique, le style y tracerait une circonférence, et les excès des rayons vecteurs des traits obtenus pendant le mouvement de la meule, sur le rayon dudit cercle, pris avec le signe convenable, serviraient à former les quantités ζ''.

Enfin, nous devons faire remarquer que le frottement ayant été négligé dans nos formules, les amplitudes ou intervalles compris entre les maxima et minima varieront nécessairement : pour que les positions moyennes en soient le moins possible affectées, il conviendra de répéter les expériences et de prendre des moyennes entre les résultats obtenus.

Lorsqu'on se bornera, comme il a été dit nº **14**, à prendre la position moyenne entre les maxima et minima, on éliminera l'effet du frottement, en combinant un minimum, par exemple, avec la moyenne des deux maxima précédent et suivant, ou inversement. Cela ne devra pas présenter de difficulté, puisque les amplitudes, étant réduites par le frottement, deux maxima ou minima consécutifs, ne répondront pas aux mêmes ordonnées [*].

16. *Solution du problème* par le procédé dit *de fausse position.* — Au lieu d'appliquer le procédé des fausses positions dans toute sa

[*] Le frottement réduit l'amplitude des mouvements verticaux du style, de telle sorte que les ordonnées maxima sont diminuées et les ordonnées minima augmentées. Supposons que l'on connaisse l'ordonnée maximum réduite par le frottement, dans le cas où, malgré l'impossibilité qu'il en soit ainsi, elle serait contemporaine de l'ordonnée minimum; la moyenne de ces deux ordonnées serait affranchie de l'effet du frottement; or, c'est précisément ce à quoi l'on parvient en prenant pour ordonnée maximum la moyenne des deux maxima qui précèdent et suivent le minimum considéré.

généralité, nous en simplifierons l'emploi en ne considérant qu'une seule variable. Rappelons qu'il convient d'établir les masses réglantes dans deux plans méridiens rectangulaires et orientés autant que possible à 45 degrés par rapport à l'axe transversal de l'anille : en admettant, chose facile à réaliser, que les pointes des styles soient dans ces mêmes plans, on voit, par les valeurs (111) de $\frac{\xi'}{\lambda}$ et $\frac{\eta'}{\lambda}$, que ces quantités sont respectivement des fonctions de ζ'_1 et ζ'_2; d'ailleurs les expressions (104) et (105), en y faisant y_1 et x_2 nuls, montrent que ξ' et η' sont respectivement des fonctions de δz_1 et δz_2, ou simplement de z_1 et z_2; on a donc

$$\zeta'_1 = f_1(z_1), \quad \zeta'_2 = f_2(z_2),$$

les lettres f_1 et f_2 étant les caractéristiques de fonctions.

Du reste si, en réalité, les valeurs de y_1, $\overline{y}_1$, x_2, $\overline{x}_2$ ne sont pas exactement nulles, mais seulement très-petites, il n'en résultera que des erreurs du deuxième ordre et par conséquent négligeables. Ainsi, dans ces conditions d'orientation rectangulaire des centres de gravité des masses réglantes, les effets des deux masses sont indépendants.

Considérant la première des fonctions précédentes, on a

$$\delta\zeta'_1 = \frac{d\zeta'_1}{dz_1}\delta z_1;$$

or, une valeur suffisamment exacte du coefficient différentiel s'obtiendra par la simple comparaison de deux valeurs $\Delta\zeta'_1$ et Δz_1 des variations correspondantes de ζ'_1 et z_1 : il s'ensuit

$$\delta\zeta'_1 = \frac{\Delta\zeta'_1}{\Delta z_1}\delta z_1.$$

Maintenant, remarquons que la condition à remplir est que la valeur corrigée de ζ'_1 soit nulle; car, si elle est nulle et s'il en est de même de ζ'_2, les milieux des oscillations répondront à l'horizontalité de la face inférieure de la meule; on a donc l'équation de condition

$$\zeta'_1 + \delta\zeta'_1 = 0,$$

ou

$$\zeta'_1 + \frac{\Delta\zeta'_1}{\Delta z_1}\delta z_1 = 0.$$

On en déduit la valeur suivante de δz_1, à laquelle nous joignons celle de δz_2, qu'on obtiendrait de la même manière :

$$(114) \qquad \delta z_1 = -\frac{\Delta z_1}{\Delta \zeta'_1}\zeta'_1, \quad \delta z_2 = -\frac{\Delta z_2}{\Delta \zeta'_2}\zeta'_2.$$

Telles sont les corrections à appliquer aux valeurs expérimentées de z_1 et z_2.

En appliquant les formules (114), il ne sera pas nécessaire de chercher à mesurer les coordonnnées z_1 et z_2 : comme ces formules ne contiennent que leurs variations, l'origine de ces coordonnées pourra être prise arbitrairement. Quant aux positions à donner aux masses réglantes, dans les deux opérations à faire sur chacune d'elles, on pourra s'en tenir aux positions limites de ces masses; les coefficients de ζ'_1 et ζ'_2 seront alors déterminés le plus exactement possible. Dans le cas où, les masses réglantes étant égales, les rayons aboutissant aux extrémités des deux styles seront égaux, et où il en sera de même pour les centres de gravité des masses réglantes; on aura une vérification de l'exactitude des résultats, si l'on trouve $\frac{\Delta z_1}{\Delta \zeta'_1} = \frac{\Delta z_2}{\Delta \zeta'_2}$: cela résulte de la valeur de v. Si ces facteurs ne présentent qu'une différence imputable aux erreurs des observations, on en pourra prendre la moyenne dans le calcul de δz_1 et δz_2 (on suppose, bien entendu, que les valeurs de n dans ces observations seront peu différentes ou très-grandes).

Il est évident que les opérations relatives aux deux masses réglantes pourront être effectuées simultanément; mais, alors, il faudra que les deux styles soient établis à des niveaux assez différents pour que les traces de l'un ne se confondent pas avec celles de l'autre.

Terminons par une dernière remarque : on emploie dans la pratique, pour former les masses réglantes, un ensemble de disques de bois et un disqne de métal, tandis que notre théorie s'applique à un disque unique dont le centre de gravité a pour ordonnée z_1 ou z_2; il faudrait donc considérer le déplacement du centre de gravité d'un ensemble de disques dont la masse totale reste invariable; ce qui semble exiger de nouveaux calculs. Mais il n'en est pas ainsi, attendu que la valeur de z_1 ou de z_2 est en réalité une fonction de l'ordonnée du centre de gravité du disque de métal; il en est de même des quantités ζ'_1 et ζ'_2. Donc il suffit d'appliquer au déplacement des seuls disques de métal, ce qui a été établi pour le centre de gravité de l'ensemble des disques, sous la seule condition de ne pas faire varier cet ensemble de masses.

Beaucoup d'ingénieurs préféreront sans doute opérer ainsi, que recourir à l'emploi des formules que nous avons exposées dans les numéros précédents, bien que le travail d'expérimentation en soit doublé.

Un procédé aussi pratique est tout à fait dans les habitudes des ingénieurs : il se distingue toutefois de ceux qui ont été recommandés jusqu'ici, en ce qu'il précise le genre et le mode d'observations et que, l'expérimentation ne portant que sur une variable à la fois et non sur quatre, cesse dès lors d'être un tâtonnement proprement dit.

Le même procédé s'appliquerait également à la première méthode.

17. *De l'emploi de quatre masses réglantes.* — Nous avons rappelé, au commencement de ce Mémoire, l'habitude des constructeurs qui adaptent quatre masses réglantes sur les meules horizontales; nous avons également montré que deux de ces masses suffisent, et que, quand elles sont situées dans deux plans méridiens rectangulaires, leur position peut être déterminée séparément. On a prévu, n° **12**, le cas où les déplacements nécessaires de ces masses excéderaient les limites de l'espace disponible, et l'on a vu qu'il conviendrait alors de leur substituer des masses plus considérables. Nous voulons montrer ici comment on peut remplacer l'accroissement des masses par celui de leur nombre, en le portant par exemple de deux à quatre.

Supposons, pour plus de simplicité, que les centres de gravité des quatre masses soient contenus dans deux plans méridiens rectangulaires, de manière à pouvoir déterminer séparément les positions des deux masses contenues dans un même plan méridien : soient m_1 et m_3 ces deux masses, et affectons respectivement des indices 1 et 3 leurs coordonnées. Prenant pour plan des $x_1 z_1$ le plan méridien qui les contient, les termes de la somme G (2) qui leur correspondent seront

$$m_1 x_1 z_1 + m_3 x_3 z_3;$$

cette même somme ne contiendra pas de termes relatifs aux deux autres masses m_2 et m_4, parce que, leurs centres de gravité étant dans le plan des $y_1 z_1$, les abscisses x_2 et x_4 seront nulles. En conséquence, la deuxième équation de condition (102) deviendra

$$G + m_1 x_1 \delta z_1 + m_3 x_3 \delta z_2 = 0.$$

On pourra satisfaire à cette condition de bien des manières : voici celle qui nous paraît la plus simple et de nature à exiger les moindres valeurs de m_1 et m_3. Au lieu de laisser indépendantes les variations δz_1 et δz_3, nous établirons entre elles la relation arbitraire

$$(115) \qquad \delta z_3 = -i\delta z_1,$$

où l'on fait

$$(116) \qquad i = -\frac{m_1 x_1}{m_3 x_3}.$$

Nous pouvons supposer m_3 peu différent de m_1, et pareillement x_3 à peu près égal à $-x_1$, en sorte que i diffère peu de l'unité. Quoi qu'il en soit, l'équation de condition deviendra

$$G + 2m_1 x_1 \delta z_1 = 0.$$

On pourra ainsi satisfaire à cette équation au moyen d'un déplacement δz_1 moitié moindre que si l'on ne faisait usage que de la seule masse m_1.

Il va sans dire que, les déplacements exprimés dans le numéro précédent par la lettre Δ étant soumis à la relation (115) en ce qui concerne m_3, tout ce qui a été exposé dans ce numéro, pour un système de deux masses réglantes, s'appliquera au cas des quatre masses que nous considérons. Les positions limites à donner aux masses m_1 et m_3, dans les deux expériences, seront telles que l'une réponde au maximum et l'autre au minimum de leurs ordonnées respectives.

Nous laissons aux constructeurs le soin de juger s'il convient mieux, à d'autres égards, d'employer quatre masses plutôt que deux ayant même épaisseur et des sections horizontales doubles. Dans le premier cas, ils n'auront pas à se préoccuper de leur influence particulière sur l'équilibre statique. En réduisant à deux le nombre de ces masses, ils doivent combiner les épaisseurs des disques de bois et de métal dont elles se composent, de manière que leur poids soit à peu près égal à celui de la matière enlevée à la meule pour faire place à ces masses : en employant par exemple des disques en fonte de fer, ils devraient donner à ces disques à peu près le tiers de l'épaisseur totale des disques réunis (fonte et bois).

P. S. Je dois réparer une omission concernant la forme donnée aux termes fournis par les masses réglantes dans les expressions de F et G, page 354.

Ces termes ont été calculés en supposant les masses concentrées en leurs centres de gravité : l'erreur qui en résulte apparaît comme tout à fait négligeable; mais il est facile de montrer qu'elle est absolument nulle. En effet, considérons par exemple le terme $m_1 x_1 z_1$: ce terme devrait être remplacé par $\Sigma m(x_1 + \delta x)(z_1 + \delta z)$; m désignant l'une des masses élémentaires dont m_1 se compose et $x_1 + \delta x$, $z_1 + \delta z$ ses coordonnées. Cette somme Σ étant développée, à cause de $m_1 = \Sigma m$, devient

$$m_1 x_1 z_1 + x_1 \Sigma m \delta z + z_1 \Sigma m \delta x + \Sigma m \delta x \delta z.$$

Or, $\Sigma m \delta x$ et $\Sigma m \delta z$ sont nuls, attendu que les δx et δz sont comptés d'axes passant par le centre de gravité de m_1; d'un autre côté, si le dernier terme $\Sigma m \delta x \delta z$ n'est pas absolument nul, il est constant, puisque le déplacement des masses n'est supposé avoir lieu que parallèlement à l'axe des z_1. Dès lors ce terme peut être considéré comme compris dans la constante G_0. Les expressions F et G sont donc exemptes de toute erreur provenant de la concentration des masses réglantes en leurs centres de gravité.