JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE SAINT-VENANT

Recherche d'une deuxième approximation dans le calcul rationnel de la poussée exercée, contre un mur dont la face postérieure a une inclinaison quelconque, par des terres non cohérentes dont la surface supérieure s'élève en un talus plan quelconque à partir du haut de cette face du mur

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 15 (1870), p. 271-280.

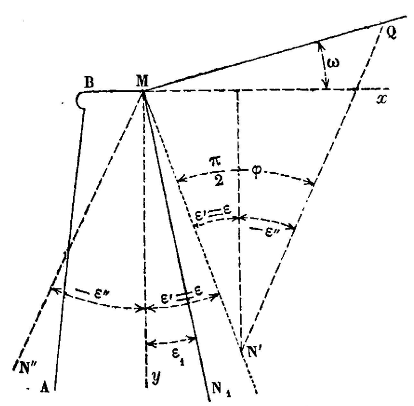
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1870_2_15__271_0>

Recherche d'une deuxième approximation dans le calcul rationnel de la poussée exercée, contre un mur dont la face postérieure a une inclinaison quelconque, par des terres non cohérentes dont la surface supérieure s'élève en un talus plan quelconque à partir du haut de cette face du mur;

PAR M. DE SAINT-VENANT.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* tome LXX, séance du 4 avril 1870.)

On trouve, au *Compte rendu* de ce jour [*], un article de M. Boussinesq contenant le résultat d'une intégration d'équation linéaire aux différences partielles du second ordre, faite pour certaines conditions définies d'un genre nouveau, afin de répondre à un appel que j'ai cru utile d'adresser aux lecteurs du même Recueil dans une Note du



7-14 février [**]. Mon but était, en provoquant ainsi leurs recherches, d'étendre beaucoup l'application de la théorie rationnelle de l'équi-

[*] *Voir* la Note précédente.

[**] T. LXX, p. 229 et surtout 285.

libre-limite ainsi que de la poussée des masses de terre, due à l'heu reuse initiative de M. l'ingénieur Levy, qui, dans un Mémoire approuvé par l'Académie [*], a donné pour le problème général de cet équilibre une équation aux différences partielles du second ordre non linéaire, intégrable exactement dans les seuls cas d'un massif N_1MQ terminé en haut par un plan MQ dont l'inclinaison ω sur l'horizontale Mx ait une relation déterminée avec celle ε_1, sur la verticale My, de la face MN_1 du mur $ABMN_1$ destiné à soutenir ce massif d'une terre dont φ, plus grand que ω, est l'angle de talus naturel ou de terre coulante.

Je conseillais, pour les cas où cette relation [(b') ci-dessous] n'a pas lieu, d'employer toujours, comme approximation, des formules fournies par la théorie nouvelle; mais de rechercher une approximation plus grande au moyen de l'addition d'inconnues auxiliaires dont on négligerait les termes du second degré; ce qui revient à substituer dans l'équation de condition d'équilibre-limite de M. Levy [(3) du 7 février]

$$4T^2 + (N_2 - N_1)^2 - (N_2 + N_1)^2 \sin^2\varphi = 0,$$

aux composantes normales N_1, N_2 et à la composante tangentielle T de pression sur l'unité superficielle de faces intérieures perpendiculaires aux x et aux y, les expressions

$$(a')\quad \left\{\begin{aligned} &N_1 = \Pi\left(p\sigma^2\cos\omega + \frac{d^2\psi'}{dy^2}\right),\quad N_2 = \Pi\left(p\,\frac{1+\sigma^2\sin^2\omega}{\cos\omega} + \frac{d^2\psi'}{dx^2}\right),\\ &T = -\,\Pi\left(p\sigma^2\sin\omega + \frac{d^2\psi'}{dx\,dy}\right),\\ &\text{où}\quad p = x\sin\omega + y\cos\omega,\quad \sigma = \frac{\cos\omega}{\cos\varphi} - \sqrt{\frac{\cos^2\omega}{\cos^2\varphi} - 1},\end{aligned}\right.$$

et à effacer les carrés et produits des trois dérivées secondes de l'inconnue ψ', ce qui fournit l'équation du second ordre linéaire (a) de la Note de M. Boussinesq; équation dont il vient de donner la solution de manière à remplir les conditions imposées, qui sont que ces

[*] T. LXX, p. 217, 7 février 1870.

trois dérivées s'annulent aux points de MQ et que, sur ceux de MN_1, on ait $-\operatorname{tang}\varphi$ pour le rapport de la composante tangentielle $\mathfrak{T}$ à la composante normale $\mathfrak{N}$ de la pression sur cette face du mur.

Voici ce qui résulte de l'analyse du savant professeur, ainsi que de la discussion aussi rigoureuse que délicate à laquelle il s'est livré et qui permet de s'en tenir à l'intégrale sous forme finie sans recourir aux formules transcendantes de fonctions discontinues :

1° L'on a $\psi' = 0$ quand l'angle $\varepsilon_1 = y\text{MN}_1$ de la face MN_1 du mur est justement égal à $\varepsilon = y\text{MN}'$ supposé satisfaire à

$$(b') \quad \cos(2\varepsilon + \varphi - \omega) = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}, \quad \text{d'où} \quad \sin(2\varepsilon + \varphi - \omega) = \frac{\sqrt{\cos^2\omega - \cos^2\varphi}}{\sin\varphi};$$

ce qu'on savait déjà, car les expressions (a') sans les termes en ψ' donnent, alors, d'après le Mémoire de M. Levy et la Note du 7-14 février, la solution rigoureuse du problème. Ce sont elles, aussi, qui fournissent ce que la même Note présente comme une *première approximation* de la solution quand la condition $\varepsilon_1 = \varepsilon$ n'est point remplie.

2° Lorsque $\varepsilon_1 > \varepsilon$, c'est-à-dire lorsque la face postérieure MN_1 du mur tombe à droite de MN′ ou est comprise dans l'angle QMN′, le problème de la détermination de ψ', dont dépend la *seconde approximation* cherchée, *n'a pas de solution,* en sorte que, quelque petit que soit l'excès de ε_1 sur ε, les composantes de pression N_1, N_2, T ne sont pas susceptibles d'être représentées par des expressions telles que (a') : ce qui prouverait qu'alors le massif, quand l'équilibre serait dans le cas de se rompre par un commencement de renversement du mur, ne se désagrégerait pas à la fois dans toutes ses parties, ou que quelque portion vers le haut se mouvrait d'abord en bloc. Alors on est obligé de s'en tenir aux expressions (a') sans les termes en ψ', c'est-à-dire à la première approximation (*voir* la Note du 14 février).

3° Lorsque $\varepsilon_1 < \varepsilon$, c'est-à-dire que, comme sur la figure, la face MN_1 du mur fait avec la verticale My un angle moindre que celui $\varepsilon = y\text{NM}'$ que détermine la relation (b') entre ε et ω, l'intégration donne

$$(c') \qquad \psi' = f(x - y\operatorname{tang}\varepsilon) + f_1\left[x - y\operatorname{tang}\left(\varphi + \varepsilon - \frac{\pi}{2}\right)\right],$$

f et f_1 étant deux fonctions dont la seconde, f_1, a sa dérivée seconde f''_1

nulle pour tous les points du massif, en sorte que, quelque valeur que du reste on lui attribue, elle ne donne rien dans les trois dérivées secondes de ψ' figurant aux expressions (a') des inconnues; et dont la première, f, est telle, qu'on ait pour sa dérivée du second ordre

$$(d')\quad f''=\begin{cases} 0 \text{ pour } x-y\,\text{tang}\,\varepsilon>0, & \text{c'est-à-dire pour les points situés dans l'angle N'MQ;}\\ \text{A}(x-y\,\text{tang}\,\varepsilon) \text{ pour } x-y\,\text{tang}\,\varepsilon<0, & \text{c'est-à-dire pour les points situés dans le petit angle N'MN}_1; \end{cases}$$

où A est déterminé par l'expression

$$(e')\quad \text{A}=\frac{2\sin\varphi\cos^3\varepsilon\cos(\omega-\varepsilon_1)}{\cos(\varphi-\varepsilon+\varepsilon_1)\left(\cos\omega+\sqrt{\cos^2\omega-\cos^2\varphi}\right)}=2\sigma\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\frac{\cos^3\varepsilon\cos(\omega-\varepsilon_1)}{\cos(\varphi-\varepsilon+\varepsilon_1)}\;[*].$$

---

[*] M. Boussinesq est arrivé aux expressions (b'), ou (h) de sa Note, en tirant σ^2 de l'équation

$$\cos 2\varepsilon-\sin^2\varphi=\sigma^2[\cos 2(\varepsilon-\omega)+\sin^2\varphi]$$

qui vient de la substitution de $f(x-y\,\text{tang}\,\varepsilon)$ à ψ' dans l'équation différentielle indéfinie (a), et en en déduisant le rapport $\frac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2}$ qu'il faut égaler à $\frac{1}{\cos\omega}\sqrt{\cos^2\omega-\cos^2\varphi}$; ce qui donne d'abord $\cos(2\varepsilon-\omega)$, d'où $\sin(2\varepsilon-\omega)$, et, par suite, $\cos(2\varepsilon+\varphi-\omega)$.

C'est par un artifice semblable qu'on évite d'interminables calculs, lorsqu'on traite l'équation de condition définie (c) de sa Note, relative aux points du mur. En substituant, aux trois dérivées secondes de ψ', respectivement f'', $\text{tang}^2\varepsilon\, f''$, $-\text{tang}\,\varepsilon\, f''$, avec

$$f''=\text{A}(x-y\,\text{tang}\,\varepsilon)=-\text{A}\frac{\sin(\varepsilon-\varepsilon_1)}{\cos\varepsilon\cos\varepsilon_1}y,$$

on a d'abord

$$-\text{A}\frac{\cos(\varphi-\varepsilon+\varepsilon_1)\cos\omega\sin^2(\varepsilon-\varepsilon_1)}{\cos^3\varepsilon\cos(\omega-\varepsilon_1)}=\sin\varepsilon\cos(\varphi+\varepsilon_1)-\sigma^2\cos(\omega-\varepsilon_1)\sin(\varphi-\omega+\varepsilon_1),$$

d'où l'on tire, pour $\frac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2}=\frac{1}{\cos\omega}\sqrt{\cos^2\omega-\cos^2\varphi}$, une expression qui se simplifie en remplaçant le cosinus et le sinus de $2\varepsilon_1+\varphi-\omega$ par ceux de la différence de $2\varepsilon+\varphi-\omega$ et $\varepsilon-\varepsilon_1$; car ceux de $2\varepsilon+\varphi-\omega$ sont connus par (b'). D'où l'on dé-

Et, aux points du massif de terre qui occupe cette petite partie $N'MN_1$, l'on a

$$(f')\quad \begin{cases} N_1 = \Pi\left[p\sigma^2\cos\omega - A(y\,\mathrm{tang}\,\varepsilon - x)\,\mathrm{tang}^2\varepsilon\right], \\ N_2 = \Pi\left[p\,\dfrac{1+\sigma^2\sin^2\omega}{\cos\omega} - A(y\,\mathrm{tang}\,\varepsilon - x)\right], \\ T\ = -\Pi\left[p\sigma^2\sin\omega + A(y\,\mathrm{tang}\,\varepsilon - x)\,\mathrm{tang}\,\varepsilon\right]; \end{cases}$$

c'est-à-dire les mêmes expressions de N_1, N_2, T dont nous venons de parler, pour même distance normale p à la ligne de talus supérieur, moins trois quantités proportionnelles aux distances horizontales $y\,\mathrm{tang}\,\varepsilon - x$ de ces mêmes points à la ligne MN', dont l'angle avec la verticale est ε déterminé par (b').

On a les composantes N_1, N_2, T relatives anx points de la face MN_1 du mur, en y faisant $x = y\,\mathrm{tang}\,\varepsilon_1$, d'où, en appelant

$$(g')\qquad L = \frac{\cos\varepsilon_1}{\varphi}$$

la profondeur MN_1, mesurée sur le mur, à laquelle est placé un point N_1 de sa face, ce qui donne

$$(h')\quad \begin{cases} y\,\mathrm{tang}\,\varepsilon - x = \dfrac{L\sin(\varepsilon-\varepsilon_1)}{\cos\varepsilon}, \\ p = x\sin\omega + y\cos\omega = L\cos(\omega - \varepsilon_1), \end{cases}$$

---

duit, sans avoir besoin de négliger aucun terme de l'ordre de $\varepsilon - \varepsilon_1$ ou de son carré, l'expression (c') de la constante A.

C'est encore en dégageant le rapport de $1-\sigma^2$ à $1+\sigma^2$ et en faisant des réductions, à un seul terme, de sommes et de différences de sinus, que l'on démontre simplement les mêmes relations (b') envisagées comme condition que le rapport de $-\mathfrak{T}$ à $\mathfrak{N}$ soit $\mathrm{tang}\,\varphi$, ou que MN' soit une *face de glissement;* et, aussi, qu'on arrive facilement à prouver que la pression résultante $\mathfrak{R}$ sur cette face est exprimée par $\Pi p\sigma$; et puis que $\sigma = \dfrac{\cos(\varphi+\varepsilon)}{\cos(\omega-\varepsilon)}$, ce qui fournit l'expression (14) $\mathfrak{R} = \Pi L\cos(\varphi+\varepsilon)$ de la Note du 7 février, obtenue d'abord par M. Levy, à la suite d'une longue analyse.

Les calculs seraient encore plus simples, en prenant, comme on fait d'abord à la Note du 7 février, des coordonnées x', y' respectivement parallèles et perpendiculaires au talus supérieur MQ.

l'on obtient

$$(i')\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{N_2+N_1}{2} &= \frac{\Pi L}{2}\left[\frac{1+\sigma^2}{\cos\omega}\cos(\omega-\varepsilon_1)-\frac{A\sin(\varepsilon-\varepsilon_1)}{\cos^3\varepsilon}\right],\\
\frac{N_2-N_1}{2} &= \frac{\Pi L}{2}\left[\frac{1-\sigma^2\cos 2\omega}{\cos\omega}\cos(\omega-\varepsilon_1)-\frac{A\sin(\varepsilon-\varepsilon_1)}{\cos^3\varepsilon}\cos 2\varepsilon\right],\\
T &= -\frac{\Pi L}{2}\left[\frac{\sigma^2\sin 2\omega}{\cos\omega}\cos(\omega-\varepsilon_1)+\frac{A\sin(\varepsilon-\varepsilon_1)}{\cos^3\varepsilon}\sin 2\varepsilon\right].
\end{aligned}\right.$$

Substituant dans les formules de changement de plan de pression [(4) du 7 février]

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N} &= \frac{N_2+N_1}{2}-\frac{N_2-N_1}{2}\cos 2\varepsilon_1 - T\sin 2\varepsilon_1,\\
\mathfrak{T} &= -\frac{N_2-N_1}{2}\sin 2\varepsilon_1 + T\cos 2\varepsilon_1,
\end{aligned}$$

on a, pour la composante normale et pour la composante tangentielle, que nous appellerons respectivement $\mathfrak{N}''$ et $\mathfrak{T}''$, de la poussée exercée au point N_1 sur l'unité superficielle de la face MN_1 du mur, en mettant pour A sa valeur (e') :

$$(j')\quad\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{N}'' = \frac{\Pi L}{2}\Bigg\{&\frac{\cos(\omega-\varepsilon_1)}{\cos\omega}\left[2\sin^2\varepsilon_1+2\sigma^2\cos^2(\omega-\varepsilon_1)\right]\\
&-4\sigma\frac{\sin\varphi\cos(\omega-\varepsilon_1)}{\cos\varphi\cos(\varphi-\varepsilon+\varepsilon_1)}\sin^3(\varepsilon-\varepsilon_1)\Bigg\},\\
\mathfrak{T}'' = -\frac{\Pi L}{2}\Bigg\{&\frac{\cos(\omega-\varepsilon_1)}{\cos\omega}\left[\sin 2\varepsilon_1+\sigma^2\sin 2(\omega-\varepsilon_1)\right]\\
&+4\sigma\frac{\sin\varphi\cos(\omega-\varepsilon_1)\cos(\varepsilon-\varepsilon_1)}{\cos\varphi\cos(\varphi-\varepsilon+\varepsilon_1)}\sin^2(\varepsilon-\varepsilon_1)\Bigg\}
\end{aligned}\right.$$ [*].

[*] Par un calcul encore fondé sur

$$\frac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2}=\frac{1}{\cos\omega}\sqrt{\cos^2\omega-\cos^2\varphi}=\operatorname{tang}\omega\operatorname{tang}(2\varepsilon+\varphi-\omega)$$

et sur

$$\sigma=\cos\varphi\frac{1+\sigma^2}{2\cos\omega},$$

on peut vérifier que le rapport de ces deux expressions (j') de $\mathfrak{T}''$ et $\mathfrak{N}''$ se réduit à $-\operatorname{tang}\varphi$.

Si l'on ne conserve que les premières parties de (j') entre accolades, on a les expressions (11) de la Note du 7-14 février, avec ε_1 non égal à ε, c'est-à-dire *les formules de première approximation*, dont les valeurs se calculent plus facilement et par logarithmes au moyen de celles (15) que M. Levy a ultérieurement établies, et qui ont fourni les chiffres du tableau que cette même Note contient.

Les secondes parties entre accolades donnent respectivement ce qu'il faut retrancher de la composante normale et ajouter à la valeur absolue de la composante tangentielle pour avoir la *deuxième approximation*.

On voit que cette diminution à $\mathfrak{N}$ et cette augmentation à $-\mathfrak{C}$ sont respectivement de l'ordre du cube et de l'ordre du carré du sinus de l'angle $\varepsilon - \varepsilon_1 = \mathrm{N'MN_1}$.

Ce sont des corrections négligeables si cet angle est très-petit, et même (comme je m'en suis assuré), s'il va jusqu'à 7 degrés pour $\mathfrak{C}$, et jusqu'à 12 degrés pour $\mathfrak{N}$ dans l'hypothèse $\varphi = 45$ degrés. Les deux surfaces courbes considérées au n° **9** de la même Note, dont les ordonnées respectives sont les poussées réelles et les poussées de première approximation, doivent, ainsi, se toucher et non se couper suivant la courbe dont la projection sur le plan des abscisses ω et ε_1 est la courbe plane *adb* de la figure qu'on y a tracée.

Comme les suppressions de carrés et de produits des dérivées de ψ', qui ont rendu linéaire l'équation différentielle indéfinie

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} &(1+\sigma^2)\sin^2\varphi\left(\frac{d^2\psi'}{dx^2}+\frac{d^2\psi'}{dy^2}\right)\\ &\qquad -(1-\sigma^2\cos 2\omega)\left(\frac{d^2\psi'}{dx^2}-\frac{d^2\psi'}{dy^2}\right)-2\sigma^2\sin 2\omega\,\frac{d^2\psi'}{dx\,dy}=0\end{aligned}\right.$$

de la Note de M. Boussinesq, sont fondées sur la supposition que ε_1 diffère fort peu de ε tiré de (13) ou de

$$(b').\qquad \cos(2\varepsilon+\varphi-\omega)=\frac{\sin\varphi}{\sin\omega},$$

il est entendu que les formules (j') ne sont point applicables lorsque la différence entre ces deux angles est grande, lorsque, par exemple, elle s'élève à 10 degrés pour la première et à 15 degrés pour la seconde, surtout quand ω est peu considérable : rien ne dit alors qu'elles donnent des valeurs plus approchées des composantes $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{E}$ de la poussée que celles de première approximation, ou qu'elles soient plus exactes avec les seconds termes entre accolades qu'en se tenant aux premiers seuls.

Par exemple, dans le cas le plus examiné par Coulomb et par Prony, où le terre-plein est horizontal, c'est-à-dire où

$$(k')\quad\left\{\begin{aligned}&\omega = 0,\quad \text{d'où}\quad \sigma = \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right),\\ &\varepsilon = \frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2},\quad \cos^2\varepsilon = \frac{1+\sin\varphi}{2},\quad \sin^2\varepsilon = \frac{1-\sin\varphi}{2},\\ &\sigma^2 = \frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi},\quad \frac{\sin\varepsilon}{\cos(\varphi-\varepsilon)} = \frac{1}{1+2\sin\varphi},\end{aligned}\right.$$

et où, en même temps, la face du mur est verticale, en sorte que

$$(l')\qquad \varepsilon_1 = 0,\quad L = p = y,\quad \varepsilon - \varepsilon_1 = \frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2};$$

les formules de première approximation du 7 février ou celles (f'), (j'), réduites aux premiers termes entre crochets ou accolades, donnent

$$(m')\quad\left\{\begin{aligned}&\mathfrak{N} = N_1 = \Pi y\,\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi} = \Pi y \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right),\\ &N_2 = \Pi y,\quad T = \mathfrak{E} = 0;\end{aligned}\right.$$

et les formules complètes (f'), (j') donneraient

$$(n')\quad\left\{\begin{aligned}&\mathfrak{N} = N_1 = \Pi y \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\left(1-\frac{\sin\varphi}{1+2\sin\varphi}\right) = \Pi y\,\frac{1-\sin\varphi}{1+2\sin\varphi},\\ &N_2 = \Pi y\left(1-\frac{\sin\varphi}{1+2\sin\varphi}\right) = \Pi y\,\frac{1+\sin\varphi}{1+2\sin\varphi},\\ &\mathfrak{E} = T = -\Pi y\,\frac{\sin\varphi}{1+2\sin\varphi}\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right) = -\Pi y\,\frac{1-\sin\varphi}{1+2\sin\varphi}\operatorname{tang}\varphi.\end{aligned}\right.$$

Le rapport de $-\mathfrak{T}$ à $\mathfrak{N}$ est tangφ, comme cela doit être d'après la condition à remplir sur la face du mur.

Malgré la différence assez grande

$$\varepsilon - \varepsilon_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} = 22^\circ \frac{1}{2}$$

si φ est 45 degrés, et $=$ 27 degrés si φ est 36 degrés, il est possible que les formules (n') donnent encore des valeurs plus approchées des vraies poussées $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$ que les formules (m'). Mais elles procurent *moins de sûreté,* puisque d'après ce qu'on a dit à la Note du 14 février, l'on donne au mur des dimensions plus fortes quand on compte sur une poussée normale $\mathfrak{N}$ plus considérable, et sur un frottement $\mathfrak{T}$ plus faible. Même, ce n'est pas la moindre utilité des considérations et des calculs ci-dessus, de prouver analytiquement ce que la Note du 7-14 février [*] montrait par un raisonnement ne portant guère que sur $\mathfrak{T}$, à savoir que les expressions des composantes $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$ de première approximation ne font erreur (quand elles ne sont pas tout à fait exactes) que dans un sens favorable à la stabilité de la construction à élever.

---

[*] Je reçois aujourd'hui l'envoi d'un Mémoire *On the Stability of loose Earth,* lu par M. Macquorn Rankine à la Société royale en juin 1856 (imprimé aux *Philosophical Transactions*), et dont je n'avais aucune connaissance non plus que M. Levy. L'illustre professeur de Glascow était arrivé en grande partie aux mêmes résultats que l'ingénieur français, ainsi qu'à quelques autres, d'une forme remarquable; et il proposait d'autres vues analytiques, d'un ordre transcendant, pour des recherches ultérieures plus avancées. Quant aux applications à l'évaluation de la poussée contre un mur, il donne, lorsque sa face est verticale, une solution revenant à ce que les formule de la Note du 7 février fournissent en supposant que l'angle du frottement de la terre contre la maçonnerie est égal à l'angle ω du talus supérieur du massif; et il conseille, quand la face du mur est inclinée, de joindre fictivement au mur, comme s'il y était invariablement uni, un prisme ou coin de terre terminé postérieurement par une face verticale. Cela peut suffire ordinairement pour la pratique; mais je crois que la solution générale que nous avons appelée de *première approximation,* appliquée à ε_1 quelconque et tel qu'il est (et qui coïncide avec celle de M. Rankine si $\varepsilon_1 = 0$), doit donner un résultat plus près de l'exactitude, qu'elle atteint, avons-nous dit, toutes les fois que ε_1 a la valeur appelée ε, correspondante à celle ω de l'angle du talus. M. Rankine a reproduit sa théorie dans son savant et utile *A Manual of applied Mechanics,* publié à Londres en 1861.

Je pense donc, soit qu'on ait peu ou beaucoup pour la différence $\varepsilon - \varepsilon_1$ ou pour l'excès, sur l'inclinaison du mur, de celle qu'il devrait avoir pour rendre exactes les formules de première approximation, que ce qu'il y aura généralement de mieux à faire sera de s'en tenir à celles-ci, qui, au reste, comme on a dit, seraient toujours et tout à fait exactes si l'angle du frottement des terres contre le mur avait, au lieu de la valeur φ, les valeurs φ_1 moindres; valeurs qu'on a spécifiées pour quelques cas (dans la supposition $\varphi = 45$ degrés) au tableau de chiffres du 14 février déjà cité.