JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Intégration de l'équation différentielle qui peut donner une deuxième approximation, dans le calcul rationnel de la poussée exercée contre un mur par des terres dépourvues de cohésion

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 15 (1870), p. 267-270.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1870_2_15__267_0>

Intégration de l'équation différentielle qui peut donner une deuxième approximation, dans le calcul rationnel de la poussée exercée contre un mur par des terres dépourvues de cohésion;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, séance du 4 avril 1870.)

Dans une Note des 7 et 14 février, mise à la suite du Rapport approbatif du remarquable Mémoire de M. Levy sur une *Théorie rationnelle de l'équilibre des terres*, M. de Saint-Venant a proposé d'employer comme approximation, pour le cas où l'inclinaison ε_1 du mur de soutènement est quelconque, des formules que la nouvelle théorie donne comme exactes dans le cas où cette inclinaison sur la verticale a une valeur particulière appelée ε; il y exprime aussi le vœu que quelqu'un entreprenne de s'élever de là à une approximation plus grande, en ajoutant, par exemple, aux valeurs approchées des inconnues N_1, N_2, T du problème, trois inconnues auxiliaires très-petites, qui auront leurs carrés et leurs produits négligeables quand ε_1 différera peu de ε, et que les équations (1) et (2) de M. Levy, rapportées à la Note citée, obligent de prendre respectivement de la forme

$$\Pi\frac{d^2\psi'}{dy'},\quad \Pi\frac{d^2\psi'}{dx^2},\quad -\Pi\frac{d^2\psi'}{dx\,dy}.$$

Je me propose de répondre à cet appel et d'intégrer le système suivant d'équations :

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned}&(1+\sigma^2)\sin^2\varphi\left(\frac{d^2\psi'}{dx^2}+\frac{d^2\psi'}{dy^2}\right)\\ &\quad -(1-\sigma^2\cos 2\omega)\left(\frac{d^2\psi'}{dx^2}-\frac{d^2\psi'}{dy^2}\right)-2\sigma^2\sin 2\omega\,\frac{d^2\psi'}{dx\,dy}=0;\end{aligned}\right.$$

$$(b)\qquad \begin{cases} (\text{pour}\quad x > 0 \quad \text{et} \quad -y = x \tang \omega), \\ \dfrac{d^2\psi'}{dx^2} = 0, \quad \dfrac{d^2\psi'}{dx\,dy} = 0, \quad \text{d'où aussi} \quad \dfrac{d^2\psi'}{dy^2} = 0, \end{cases}$$

$$(c)\qquad \begin{cases} (\text{pour}\quad y > 0 \quad \text{et} \quad x = \tang \varepsilon_1), \\ \left(\dfrac{d^2\psi'}{dx^2} + \dfrac{d^2\psi'}{dy^2}\right)\sin\varphi - \left(\dfrac{d^2\psi'}{dx^2} - \dfrac{d^2\psi'}{dy^2}\right)\sin(2\varepsilon_1 + \varphi) - 2\dfrac{d^2\psi'}{dx\,dy}\cos(2\varepsilon_1 + \varphi) \\ = \dfrac{2\cos(\omega - \varepsilon_1)}{\cos\omega\cos\varepsilon_1}[\sin\varepsilon_1\cos(\varphi + \varepsilon_1) - \sigma^2\cos(\omega - \varepsilon_1)\sin(\varepsilon_1 + \varphi - \omega)]y; \end{cases}$$

φ est un angle positif, inférieur à 90 degrés ou $\frac{\pi}{2}$; ω un autre angle compris entre $-\varphi$ et φ; σ la racine positive, inférieure à l'unité, de l'équation

$$(d)\qquad \frac{1 - \sigma^2}{1 + \sigma^2} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\omega}}.$$

1. L'intégrale générale de (a) est de la forme

$$(e)\qquad \psi' = f(x - y \tang \varepsilon') + f_1(x - y \tang \varepsilon''),$$

où f et f_1 sont deux fonctions arbitraires, et ε', ε'' les deux racines de l'équation en ε qui résulte de la substitution dans (a), à ψ', de l'expression $f(x - y \tang \varepsilon)$. Si l'on tire de cette équation σ^2, puis le quotient de $1 - \sigma^2$ par $1 + \sigma^2$, et qu'on l'égale au second membre de (d), il vient

$$(f)\qquad \cos(2\varepsilon - \omega)\sqrt{\cos^2\omega - \cos^2\varphi} = \sin^2\varphi + \sin\omega\sin(2\varepsilon - \omega),$$

relation qui donne successivement, en l'élevant d'abord au carré et résolvant par rapport à $\sin(2\varepsilon - \omega)$:

$$(g)\qquad \begin{cases} \sin\varphi\sin(2\varepsilon - \omega) = -\sin\omega\sin\varphi \pm \cos\varphi\sqrt{\cos^2\omega - \cos^2\varphi}, \\ \sin\varphi\cos(2\varepsilon - \omega) = \pm\sin\omega\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{\cos^2\omega - \cos^2\varphi}; \end{cases}$$

$$(h)\qquad \text{d'où}\quad \cos(2\varepsilon - \omega \pm \varphi) = \pm\frac{\sin\omega}{\sin\varphi}, \quad \sin(2\varepsilon - \omega \pm \varphi) = \pm\frac{\sqrt{\cos^2\omega - \cos^2\varphi}}{\sin\varphi}.$$

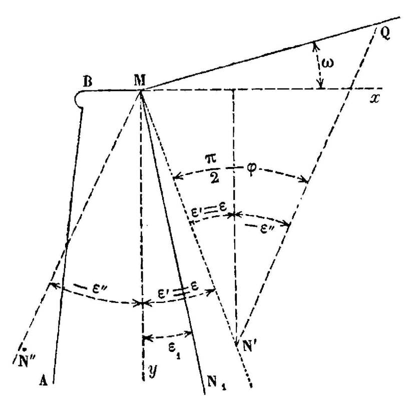
Les angles ε', ε'', qu'on ne cherche qu'en vue de leurs tangentes, peuvent être pris entre -90 et 90 degrés. D'après cela, si nous appelons β l'angle positif et inférieur à π ou 180 degrés qui a pour cosinus le rapport de $\sin\omega$ à $\sin\varphi$, et si nous observons que $\varphi - \omega$ est > 0 et $< 2\varphi$, les équations (h) donneront

$$(h\ bis) \qquad \varepsilon' = \frac{\beta - (\varphi - \omega)}{2}, \quad \varepsilon'' = \varepsilon' - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

En faisant varier ω et exprimant en fonction de ω et φ les dérivées correspondantes de ε', ε'', on trouve aisément que ε', ε'' décroissent quand ω grandit. Concevons menées, à partir de l'origine M, les trois droites MQ, MN', MN'', qui font respectivement, la première avec l'axe des x et les deux autres avec celui des y, les angles ω, ε', ε'', et qui ont pour équations, ainsi que leurs prolongements,

$$y + x \operatorname{tang}\omega = 0, \quad x - y \operatorname{tang}\varepsilon' = 0, \quad x - y \operatorname{tang}\varepsilon'' = 0;$$

pendant que MQ tournera autour de l'origine, en faisant avec l'axe des y un angle $90^\circ + \omega$ croissant de $90^\circ - \varphi$ à $90^\circ + \varphi$, la droite MN', d'abord en coïncidence avec MQ, tournera en sens inverse, précédée de l'autre droite MN'', qui sera constamment inclinée sur elle d'un angle complément de φ, et dont le prolongement finira par se confondre avec MQ pour $\omega = \varphi$.



2. Il suit de là que MQ est constamment dans l'angle formé par MN' et par le prolongement de MN'', et que les deux expressions $x - y \operatorname{tang}\varepsilon'$, $x - y \operatorname{tang}\varepsilon''$ sont positives aux divers points de MQ et y varient de zéro à l'infini. Or, à cause de l'inégalité de $\tang\varepsilon'$ et de $\tang\varepsilon''$, les relations (b) obligent de poser séparément, en tous ces points, $f''=0$, $f''_1=0$. Par suite, *les dérivées secondes de* ψ' *sont nulles dans toute la partie du massif comprise entre* MQ *et* MN'.

3. Il reste à satisfaire à la condition (c). Si d'abord la face MN_1 du mur de soutènement se confond avec MN', ou que ε_1 prenne la valeur particulière ε', appelée ε par M. Levy, cette relation est vérifiée en y faisant $\psi'=0$. Or je me suis proposé d'examiner les cas voisins de celui-là, c'est-à-dire ceux où l'angle ε_1 est égal à ε' diminué d'une petite quantité, ζ, positive ou négative.

Si d'abord ζ est <0, le mur MN_1 sera dans l'angle QMN', et, les dérivées secondes de ψ' étant nulles dans tout le massif, la relation (c) ne pourra pas être vérifiée : *le problème n'admet pas alors de solution.*

Si au contraire ζ est >0, ou si $\varepsilon_1<\varepsilon$, la dérivée f''_1 sera encore nulle dans tout le massif; mais f'' pourra ne pas l'être dans l'angle N_1MN' compris entre MN' et le mur; et, en déterminant sa valeur de manière à vérifier l'équation (c), l'on voit d'abord que cette fonction f'' sera du premier degré par rapport à sa variable, parce que le second membre de (c) est linéaire en y. Si on la désigne en conséquence par $A(x-y\tang\varepsilon')$, et si, après avoir remplacé, dans les crochets du second membre de (c), les produits de sinus ou cosinus par des sommes d'autres sinus, on traite cette équation (c) comme j'ai traité l'équation (a), c'est-à-dire en y mettant cette valeur pour f'' qui entre dans les trois dérivées de ψ', puis tirant σ^2 et en portant son expression dans (d), il viendra exactement

$$(i)\qquad A=\frac{2\sin\varphi\cos^3\varepsilon'\cos(\omega-\varepsilon_1)}{\cos(\varphi+\varepsilon_1-\varepsilon')\left(\cos\omega+\sqrt{\cos^2\omega-\cos^2\varphi}\right)},$$

avec

$$(j)\quad \psi'=f(x-y\tang\varepsilon'),\quad f''=\begin{cases}0, & \text{pour}\quad x-y\tang\varepsilon'>0,\\ A(x-y\tang\varepsilon'), & \text{pour}\quad x-y\tang\varepsilon'<0.\end{cases}$$