JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

COMBES
SERRET
BONNET
PHILLIPS
DE SAINT-VENANT

Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de M. Maurice Levy, présenté le 3 juin 1867, reproduit le 21 juin 1869 et intitulé : Essai sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres fraîchement remuées, et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 15 (1870), p. 237-249.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1870_2_15__237_0>

Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de M. Maurice Levy, *présenté le* 3 *juin* 1867, *reproduit le* 21 *juin* 1869 [*] *et intitulé :* Essai sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres fraîchement remuées, et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement ; par MM. Combes, Serret, Bonnet, Phillips, de Saint-Venant rapporteur.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, séance du 7 février 1870.)

On connaît depuis longtemps la loi qu'observent les pressions dans les fluides pesants en équilibre.

On connaît aussi, depuis les mémorables travaux (1821 à 1829) de Navier, Cauchy, Poisson, Lamé et Clapeyron, les lois que suivent les pressions ou tractions dans les corps solides parfaitement élastiques, comme sont les métaux, etc., quand les déformations de leurs éléments restent fort petites.

Mais on n'a pas la même connaissance pour les forces du même genre qui se trouvent en jeu dans les masses solides inconsistantes, telles que la terre ou le sable. Aussi, pour calculer les poussées exercées par de pareilles masses sur les murs de soutènement qu'elles tendent à renverser, on considère seulement, avec Coulomb [**], ce qui s'y passerait lors d'un commencement de rupture de leur équilibre ; et, comme lui, on a coutume de supposer qu'à cet instant une partie du massif se divise, *suivant des plans,* en zones ou couches qui glissent

[*] *Comptes rendus,* t. LXVIII, p. 1456.

[**] *Essai sur une application des règles* de maximis et minimis *à quelques problèmes de statique relatifs à l'agriculture* (*Savants étrangers,* 1773).

les unes contre les autres et produisent des frottements dont les intensités suivent la loi du rapport constant avec les composantes normales des poids. Et les inclinaisons des plans hypothétiques de séparation sont déterminées par la condition d'avoir un maximum, soit pour la poussée contre le mur, soit (ce qui ne revient pas toujours au même) pour le moment résultant de cette poussée par rapport à la ligne inférieure autour de laquelle le mur tend à se renverser [*]. On tient compte aussi du frottement des terres contre la maçonnerie, force que Prony et les autres premiers successeurs de Coulomb négligeaient, et que Poncelet a rétablie d'une manière simple et élégante [**].

Nous ne parlons pas de l'*adhésion* proportionnelle aux surfaces, que Coulomb faisait entrer aussi dans ses calculs, car les constructeurs regardent aujourd'hui comme prudent de ne pas en ajouter les effets à ceux des frottements; et, entre les plus expérimentés, M. le Maréchal Vaillant a très-bien fait voir [***], par des exemples concluants et nombreux, que les terres dont une certaine proportion d'argile rend les parties adhérentes entre elles exercent, lorsque l'eau vient à les imprégner et à les dilater, un genre de poussée qui compense, et au delà, la propriété qu'elles ont de se soutenir à pic d'elles-mêmes sur une certaine hauteur à l'état sec.

Aussi, nous commençons par dire que, dans le Mémoire de M. Levy dont nous avons à rendre compte, il n'est question que des terres sans cohérence, comme sont celles qui ont été fraîchement remuées.

La théorie citée de Coulomb a été développée dans ses conséquences, de 1804 à 1846, par de savants ingénieurs, bien que l'illustre physicien n'ait proposé qu'avec réserve et sans beaucoup de confiance son hypothèse de la séparation des massifs suivant des surfaces toujours planes.

Depuis, M. le docteur Hermann Scheffler, après avoir constaté le peu de valeur des raisons par lesquelles deux Géomètres ont essayé de

---

[*] Ainsi que l'a fait M. le capitaine du Génie Curie, dans un Mémoire présenté le 21 décembre 1868.

[**] *Mémorial du Génie*, n° 13, 1840.

[***] Rapport déposé le 15 septembre 1862 sur une tentative de théorie nouvelle de la poussée des terres, présentée en 1859.

justifier théoriquement la supposition de ce mode exclusif de rupture, a tenté, le premier, une détermination mieux fondée des forces dont ces massifs sont le siége, lorsque leur équilibre est infiniment peu troublé [*]. Bornant ses calculs au cas le plus simple, qui est celui d'un massif indéfini terminé en haut par une surface horizontale, M. Scheffler montre très-bien qu'à l'intérieur les faces verticales et les faces horizontales seules sont pressées normalement; puis, admettant à peu près *à priori* qu'en tout point, parmi les petites faces obliques, il s'en trouve au moins une sur laquelle la direction de la pression fait avec la normale à cette face un angle égal à celui de frottement de terre contre terre, il pose les équations de l'équilibre d'un élément prismatique à base trapèze; et, en invoquant, comme dans les autres parties de son livre, un certain principe, dit *de moindre résistance*, dont on lui a reproché l'obscurité et le défaut de généralité [**], le savant et ingénieux conseiller des travaux du Duché de Brunswick arrive à une détermination, qui peut être regardée comme juste, du rapport entre les pressions s'exerçant sur les faces verticales et sur les faces horizontales en chaque point; d'où il tire une solution exactement motivée, et du reste conforme, quant au résultat, à celle de Coulomb, du problème de la poussée sur un mur vertical, pour le seul cas où l'on suppose lisse ou sans frottement la face de ce mur.

M. Levy est allé bien plus loin dans cette voie rationnelle; car, tout en n'y marchant qu'appuyé sur des principes clairs et dégagés d'hypothèses non justifiées, il est parvenu à poser en équation, d'une manière générale, le problème des pressions intérieures d'un massif quelconque sur le point de se désagréger dans toutes ses parties, ou à l'état d'équilibre-limite, soutenu par un mur lisse ou rugueux, sur lequel il exerce une poussée d'une obliquité aussi quelconque; et il en a déduit des conséquences nombreuses et intéressantes au point de vue tant scientifique que pratique.

Son analyse se base en grande partie sur les théorèmes découverts par Cauchy, en 1823, et aujourd'hui généralement admis et employés,

---

[*] *Traité de la stabilité des constructions*, 1857; traduit en 1864, par M. V. Fournié.

[**] Article de M. Ch. Leblanc, aux *Annales des Ponts et Chaussées*, janvier et février 1867, p. 139.

qui résultent très-simplement de l'expression des conditions de l'équilibre de translation et de l'équilibre de rotation du tétraèdre et du parallélépipède élémentaire dans toute espèce de matière solide ou liquide, en repos ou en mouvement. Énonçons d'abord, et en langage ordinaire, ces trois importants théorèmes, qui, trop habituellement à notre avis, ne le sont qu'en un langage analytique faisant obstacle à leur diffusion et à leur enseignement, qui devrait être général :

1° La pression sur (ou à travers) une petite face à l'intérieur d'un corps est constamment résultante des pressions supportées par ses trois projections rectangulaires ou obliques sur trois plans quelconques passant par son centre.

2° Lorsque deux petites faces planes de même superficie ont leur centre au même point, la pression sur l'une, projetée sur une normale à l'autre, est égale à la pression sur la seconde, projetée sur une normale à la première.

Si, pour un point quelconque, l'on prend les dérivées, par rapport à ses trois coordonnées rectangles, des pressions supportées par l'unité superficielle de trois petites faces qui leur sont respectivement perpendiculaires, ces pressions étant décomposées suivant une même direction quelconque, la somme des trois dérivées est égale à la composante, dans cette même direction, de la force qui sollicite l'unité de volume de matière au point considéré [*].

---

[*] C'est-à-dire que, si l'on prend, par exemple, x pour la direction de décomposition, et si p_{xx}, p_{yx}, p_{zx} représentent les composantes des pressions sur l'unité superficielle des trois petites faces respectivement perpendiculaires aux x, aux y, aux z se coupant au point (x, y, z), l'on a

$$\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{yx}}{dy} + \frac{dp_{zx}}{dz} = \mathrm{X},$$

X étant la force tant motrice que d'inertie animant l'unité de volume dans la direction x, et qui se réduit ordinairement, s'il y a équilibre, au poids de ce volume de matière, estimé suivant les x. Cette équation jointe à deux autres pareilles, où les sens de décomposition sont y et z, forment ce que Cauchy appelle *les relations entre les pressions et les forces accélératrices*. En les ajoutant, après les avoir multipliées respectivement par les cosinus des angles formés par les x, y, z avec une droite prise arbitrairement, on a l'expression analytique du théorème plus général énoncé, et qui est démontrable directement.

M. Levy exprime ce qui résulte du troisième théorème par deux équations différentielles à deux coordonnées, l'une horizontale, l'autre verticale, en abstrayant la troisième coordonnée, aussi horizontale, ainsi qu'on peut toujours le faire quand on ne s'occupe, avec tous les auteurs, que d'un massif et d'un mur prismatiques à arêtes horizontales, dont il n'est besoin de considérer que l'unité de longueur mesurée dans le sens de ces arêtes.

Les deux équations ainsi posées ne suffisent pas pour déterminer les deux composantes normales et la composante tangentielle de pression sur des faces perpendiculaires aux ordonnées : composantes dont dépendent, d'après le premier théorème, toutes les grandeurs et directions des pressions qui ont lieu sur les diverses autres faces. Pour avoir entre ces trois inconnues une troisième équation, l'auteur observe que, sur aucune face, la pression exercée ne saurait faire avec la normale à cette face un angle qui excède celui φ du frottement de terre contre terre; car évidemment, si cet angle avec la normale devenait plus grand, l'équilibre se romprait par glissement, comme quand un corps posé sur un plan solide se trouve sollicité, parallèlement à celui-ci, par une force qui excède le produit de la pression normale par le *coefficient* $\tang \varphi$ dit *du frottement*. Or, dans le cas de la question de stabilité ou d'équilibre-limite qui est ici à résoudre, on doit supposer *que, pour la face où cet angle de la pression avec la normale est plus grand que pour les autres petites faces se croisant au même point, il atteint justement le maximum énoncé*, ou cette valeur limite φ qu'il prendrait quand le massif commencerait à s'ébouler ou à se désagréger. Il est clair, en effet, que, si le poids d'un mur soutenant ce massif est tant soit peu supérieur à ce qu'il faut pour faire équilibre à des forces ainsi constituées, et si l'on opère un commencement de renversement en ajoutant pour peu de durée une petite force à celles qui le poussent, le renversement ne continuera pas lorsque cette force additionnelle et étrangère aura été soustraite ou aura cessé d'agir; d'où l'on peut parfaitement conclure que, si une pareille force n'est point ajoutée, le renversement ne commencera pas, et la stabilité du système est assurée.

Cette supposition d'une inclinaison constante de la pression sur l'une des faces intérieures qui se croisent en tous sens à chaque point d'un massif peut être regardée comme la traduction vraie de la pensée première et intime de Coulomb; elle n'entraîne nullement l'admission de la partie arbitraire de son hypothèse de 1773, à savoir : cette tendance à rupture ou à glissement *suivant des surfaces constamment planes*, à laquelle il ne croyait pas lui-même avec assurance, et que M. Levy montrera plus loin ne pouvoir exister que sous des conditions particulières.

Elle avait déjà été faite par M. Scheffler; mais M. Levy la motive d'une manière nette, et il lui fait porter toutes ses conséquences; car, en la combinant avec les deux premiers théorèmes de Cauchy, ou avec ce qui résulte de l'équilibre d'éléments prismatiques à base triangulaire ou à base carrée, il établit une équation nouvelle et générale qui équivaut à ce remarquable théorème sur l'état d'équilibre-limite :

« Si l'on considère, dans le massif près de s'ébouler, deux petites faces intérieures quelconques de même superficie, perpendiculaires entre elles et parallèles à ses arêtes, le carré de la demi-somme des composantes normales des pressions qui s'y exercent, multiplié par le carré du sinus de l'angle φ du frottement de terre contre terre, est égal au carré de la demi-différence, plus le carré de la composante tangentielle de ces pressions dans un sens perpendiculaire à l'intersection des deux faces. »

Comme cette composante tangentielle est nulle sur les deux faces rectangulaires dites *de pressions principales* ou normales dont l'existence, en tous les points d'un corps quelconque est, comme on sait, une conséquence des mêmes théorèmes de Cauchy, on voit que, dans l'intérieur du même massif sur le point de se désagréger :

« Le quotient de la différence par la somme des deux pressions principales est constant et égal au sinus de l'angle de frottement; »

Ou que :

« Le rapport de la plus petite à la plus grande des deux pressions principales est égal au carré de la tangente de la moitié du complément de cet angle. »

M. Levy reconnaît aussi que, par cela seul qu'il y a une face où la pression fait avec sa normale l'angle φ du frottement, il y en a aussi partout une autre où elle fait l'angle $-\varphi$, c'est-à-dire un angle de même grandeur compté en un sens opposé. Il y a donc deux systèmes de lignes sur lesquelles les terres glissent au premier instant d'une rupture d'équilibre. Une pareille dualité est de nécessité cinématique; on la recontre également dans la théorie des pièces solides élastiques.

En appelant, avec M. Lamé, *courbes isostatiques* celles qui sont formées par la suite des directions des éléments plans sur lesquels s'exercent les pressions principales [*], et qui ne sont pressées que normalement; et en nommant *courbes de glissement* celles qui sont formées par la suite des directions des éléments plans sur lesquelles la pression a le maximum d'obliquité, on fait avec leurs normales l'angle $\pm\varphi$ du frottement, M. Levy reconnaît encore que :

« Les deux courbes de glissement coupent chacune des deux courbes isostatiques suivant deux angles égaux, comptés de part et d'autre en sens opposés; l'angle fait avec l'une des deux courbes isostatiques est moitié du complément de l'angle du frottement; l'angle fait avec l'autre est complément de cette moitié. »

En sorte que :

« Les deux courbes de glissement se coupent partout suivant un angle qui est le complément de celui du frottement de terre contre terre;

» Et la pression sur une des deux faces de glissement est dirigée dans le plan de l'autre face. »

Il en résulte que, si l'on construit l'ellipse dont les axes, dirigés suivant les deux pressions principales, ou tangents aux deux courbes isostatiques, ont des longueurs proportionnelles aux racines carrées des intensités de ces pressions, les tangentes aux lignes de glissement des deux systèmes sont dirigées suivant les deux diamètres conjugués égaux de cette ellipse, ou suivant les diagonales du rectangle circonscrit ayant les axes pour médianes.

Après avoir ainsi donné des théorèmes conduisant à éclairer, par des images géométriques, cette matière nouvelle, l'auteur déduit, des trois

---

[*] On dirait sans doute plutôt « orthostatiques » si l'on était dans le cas de considérer (*voyez* plus loin) les lignes *d'égale pression*, auxquelles le premier nom conviendrait mieux.

équations trouvées entre les deux composantes normales et la composante tangentielle de pression sur les faces horizontales et verticales, une équation aux dérivées partielles où se trouve uniquement engagée une inconnue auxiliaire. Le problème des poussées de l'état d'équilibre-limite sera résolu d'une manière générale, si l'on intègre cette équation différentielle *indéfinie* ou applicable à tous les points du massif supposé ébouleux dans toutes ses parties, en ayant égard aux conditions *définies* ou à son contour, savoir :

1° Que les pressions soient nulles sur la surface supérieure (car il ne s'agit que des excès des pressions sur celle de l'atmosphère);

2° Que sur la face en contact avec un mur, et vu que celui-ci constitue un système se mouvant tout d'une pièce en cas d'éboulement, la pression forme partout, avec la normale à ce mur, un angle égal à celui du frottement de la terre contre la maçonnerie.

Mais comme cette équation aux dérivées partielles du second ordre est en même temps *du second degré*, on n'en connaît pas d'intégrale rigoureuse. En attendant qu'on apprenne tout au moins à y suppléer par des méthodes d'approximation, M. Levy traite une suite de cas particuliers *où le massif est limité à sa partie supérieure par un plan* d'une inclinaison quelconque, et où il peut résoudre complétement cette équation, ou plutôt directement et sans inconnue auxiliaire, les trois autres équations dont elle est déduite.

Il commence par considérer un massif ainsi terminé en haut et *indéfini dans les autres sens*, mais en supposant abstractivement qu'il y a comme ci-dessus, et en tous ses points, une face où la pression fait l'angle constant φ avec sa normale, quoique cela ne soit possible, dans un pareil massif sollicité seulement par son poids, que quand le plan supérieur fait ce même angle φ avec l'horizon. Cette sorte d'hypothèse provisoire revient à abstraire d'abord la deuxième des *conditions définies* ou au contour, celle qui est relative à la face en contact avec le mur, et à astreindre seulement les pressions inconnues à remplir la *première* de ces conditions, celle de leur nullité sur la surface supérieure.

Il trouve que :

1° Les lignes isostatiques, et par suite les lignes de glissement de chacun des deux systèmes, *sont toutes droites* et parallèles entre elles;

2° Les pressions s'exerçant aux divers points, sur des faces de même direction, sont proportionnelles aux distances de ces points au plan supérieur;

3° La verticale et la coupe du talus supérieur du massif sont deux diamètres conjugués de l'ellipse ci-dessus, dont les axes, ayant pour rapport mutuel la tangente du demi-complément de l'angle du frottement, ont leurs directions parallèles aux lignes isostatiques des deux systèmes.

Il en résulte un moyen géométrique de déterminer ces deux lignes, et, par suite, les lignes de glissement qui, de part et d'autre de l'une d'elles, font un angle égal à ce même demi-complément.

Mais ces lignes de glissement se déterminent plus promptement par un calcul trigonométrique simple; car, en cherchant l'angle dont le cosinus a pour grandeur le quotient du sinus de l'angle ω du talus supérieur avec l'horizon, par le sinus de l'angle φ du frottement, et en en retranchant l'excès $\varphi - \omega$ du second sur le premier, l'on obtient le double de l'angle ε que font, avec la verticale, les lignes de glissement de l'un des deux systèmes, celui qui coupe, sous le plus petit angle, la ligne montante du talus supérieur.

L'expression de cet angle ε serait, ainsi, imaginaire si l'on supposait l'inclinaison du talus supérieur sur l'horizon plus grande que l'angle du frottement de terre contre terre. Cela est d'accord avec ce qu'on admet généralement, à savoir que les terres ne se soutiennent que sous une inclinaison moindre, quand on néglige leur cohésion.

On déduit de là, aussi, des expressions des deux pressions principales, et, par suite, de toutes celles qui s'exercent sur les faces diversement inclinées.

Maintenant, si un côté du massif indéfini, que M. Levy a considéré ainsi abstractivement, est remplacé par un mur soutenant le reste, la répartition des forces intérieures, dans l'état considéré d'équilibre-limite ou de commencement de glissement, se trouve par cela seul changé en général; car la pression qui s'exerce contre le mur a une direction tout à fait déterminée faisant, avec la normale à la face pressée, *un angle égal à celui φ' du frottement de la terre contre la maçonnerie*.

Si la face du mur ainsi intervenu possède tout juste la direction pour laquelle les deux composantes tangentielle et normale de pression, dans le massif indéfini d'abord supposé, ont pour rapport mutuel la tangente de cet angle φ', rien ne sera changé dans les intensités ni dans les directions des diverses forces en jeu; les lignes isostatiques continueront de former deux systèmes de droites parallèles; il en sera de même des lignes de glissement ou de tendance à rupture, et l'hypothèse de Coulomb se trouvera alors justifiée.

Mais il en sera autrement si la direction de la face postérieure du mur est différente de celle qui, pour un talus supérieur donné, remplit la condition que l'on vient d'énoncer. Les forces auront d'autres directions et intensités; les lignes de glissement, comme les lignes isostatiques, *seront courbes*, bien que la surface supérieure du massif soit toujours supposée être un plan horizontal ou incliné. A plus forte raison en sera-t-il ainsi, lorsque cette surface sera, ou courbe, ou polyédrique.

Généralement il convient d'attribuer au frottement des terres contre la maçonnerie le même coefficient qu'au frottement de terre contre terre, car on peut toujours rendre la maçonnerie assez rugueuse pour que le frottement qui s'y exerce atteigne cette grandeur, qu'on ne doit jamais supposer être dépassée, puisqu'une couche de terre resterait adhérente au mur; et c'est contre cette couche que s'exercerait le frottement du reste du massif.

Or, lorsqu'on fait égaux ces deux coefficients de frottement tang φ et tang φ' de terre contre terre et de terre contre le mur, il est clair que celui-ci, pour remplir la condition énoncée de ne rien changer aux forces en jeu dans le massif en cas d'éboulement, *doit avoir sa face postérieure dans la direction des lignes de glissement* d'un des deux systèmes, savoir : celui dont nous venons d'apprendre à calculer l'inclinaison ε sur la verticale.

On trouve immédiatement ainsi, si l'on adopte 45 degrés pour l'angle du frottement, ou l'unité pour son coefficient : que la face du mur doit faire avec la verticale un quart d'angle droit ($\varepsilon = 22^\circ \frac{1}{2}$) quand le terre-plein supérieur est horizontal; que quand celui-ci fait avec l'horizon 30 degrés, le mur en doit faire 15 avec la verticale; enfin la face du mur doit être verticale ($\varepsilon = 0$) quand le terre-plein est en talus de terre coulante ($\omega = 45^\circ$).

Alors (et quel que soit l'angle du frottement) M. Levy trouve par l'analyse, et vérifie par un raisonnement simple et ingénieux, que la poussée sur l'unité superficielle d'un élément quelconque de la face du mur *est égale au poids d'un prisme de terre de même base et d'une hauteur égale à la profondeur de ce point, mesurée sur la même face, multiplié par le cosinus de la somme de l'angle ε de cette face avec la verticale et de l'angle ω du talus supérieur avec l'horizon.*

On ne saurait désirer une expression plus simple de la poussée oblique exercée en chaque point du mur; expression qu'il suffit de multiplier successivement par le cosinus et par le sinus de l'angle φ de frottement pour en avoir les composantes normale et tangentielle à la face du mur.

L'auteur compare ce résultat avec celui que donne la théorie de Coulomb.

On sait que, lorsque les terres s'élèvent, comme nous le supposons ici, en talus d'une inclinaison donnée quelconque derrière un mur de soutènement dont la face postérieure a une inclinaison aussi quelconque, et lorsqu'on tient compte du frottement sur cette face, le calcul fait par la théorie de Coulomb se présente avec une complication extrême. Un seul auteur, M. Saint-Guilhelm, en a dégagé, par un élégant artifice, l'expression de la poussée [*]. Or M. Levy démontre que cette expression compliquée se réduit à la formule très-simple dont nous venons de parler lorsque les inclinaisons ω et ε du talus supérieur et de la face du mur ont entre elles la relation

$$\cos(2\varepsilon + \varphi - \omega) = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi},$$

que nous avons dit être nécessaire pour que les faces de glissement soient planes.

On pouvait le présumer, car alors, mais seulement alors, l'hypothèse de Coulomb est légitime et ses formules sont exactes. Dans tout autre cas, sa théorie est réellement fautive. M. Levy le prouve d'une manière directe en montrant que, dans un massif qui commence à glisser, les

---

[*] *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, t. IX, 1844. *Voyez*, pour cette expression, la Note *Sur une détermination rationnelle, par approximation, de la poussée, etc.*, à la suite du présent Rapport.

lignes de glissement ne peuvent être droites *sans être en même temps parallèles entre elles* dans chacun de leurs deux systèmes; que cela ne saurait avoir lieu qu'autant que la surface supérieure du terrain est plane, et que, s'il y a un mur, son inclinaison se trouve avoir, avec celle de cette surface, la relation ci-dessus fixée [*].

Les formules de poussée que M. Levy a obtenues jusqu'à présent de sa théorie, et qui s'appliquent à la série des cas indiqués, donnent donc le même résultat que celles de la théorie de Coulomb appliquée aux mêmes cas. Mais il les obtient sous une forme excessivement simple, à laquelle on n'aurait jamais soupçonné que celles-ci pussent se réduire, ce qui déjà est un grand avantage. En outre, la théorie de Coulomb était impuissante à fournir les conditions de son exactitude, ou de la légitimité de la supposition de séparation suivant des surfaces planes, tandis que la théorie de M. Levy, exempte d'hypothèses de ce genre, spécifie nettement les cas où les formules tirées jusqu'ici de ses équations différentielles sont applicables exactement. Ces cas (en nombre infini) sont ceux de la pratique ou en sont généralement assez rapprochés, car on donne ordinairement, aux faces postérieures des murs, des inclinaisons sur la verticale comprises entre zéro et le demi-complément (soit $22°,5$) de l'angle du frottement des terres.

Et, dans des cas où le talus supérieur ne partirait pas du haut de cette face du mur, ainsi que dans ceux où les inclinaisons ω et ε du talus et de la face n'auraient pas entre elles la relation indiquée, il sera le plus souvent possible de faire des comparaisons ou assimilations à des cas où ces conditions sont remplies, de manière à tirer des formules nouvelles des résultats approchés.

Il y a plus : l'étude du travail de M. Levy nous a suggéré la re-

[*] Il prouve encore directement que si, dans un massif soutenu par un mur, on a des plans pour les surfaces sur lesquelles le rapport des composantes tangentielles aux composantes normales de pression est le plus grand possible, ces surfaces, sur lesquelles le glissement s'opérera au premier instant d'une rupture de l'équilibre, sont précisément celles qui détachent du massif les prismes exerçant sur le mur la poussée maximum ou la butée minimum, vu que la dérivée de cette force, par rapport à l'angle d'inclinaison de la face du prisme, doit nécessairement être nulle; en sorte qu'une des deux hypothèses de Coulomb, celle du maximum, est une conséquence mathématique de l'autre.

marque qu'on pourrait avec avantage, comme approximation, employer pour toutes les valeurs des deux angles en question (ω et ε) ses formules de poussée, établies en remplissant seulement les conditions définies relatives à la surface supérieure, formules qui ne sont, disons-nous, tout à fait exactes, ou ne remplissent en même temps la condition relative à la face du mur, que pour une relation déterminée entre ces deux mêmes angles d'inclinaison du terre-plein et du mur. En effet, employer ainsi les formules dont nous parlons revient simplement à supposer que le coefficient du frottement de la terre contre le mur a une valeur variable, mais restant toujours comprise entre zéro et sa valeur réelle. Or on sait, et il est du reste évident, que le frottement contre la maçonnerie diminue la tendance au renversement, en sorte que, si on lui suppose un coefficient plus faible que le coefficient effectif, le résultat du calcul sera une poussée plus grande que la poussée réelle, et, par suite, pour le mur, l'adoption de dimensions augmentant la stabilité. Les formules de la théorie nouvelle, dans ce cas où elles ne sont qu'approximatives, offriront donc, outre la simplicité, un avantage de sécurité que l'on n'est nullement certain d'obtenir par la théorie de Coulomb employée, dans les mêmes cas, aussi comme extension et approximation [*].

La théorie nouvelle, au point où elle a déjà été amenée, offre donc des avantages pratiques réels, outre l'établissement de formules et de théorèmes remarquables sur l'état particulier d'équilibre dont elle s'occupe.

On a vu d'ailleurs que son auteur a posé le problème en équation d'une manière générale; en sorte qu'on peut entrevoir pour l'avenir beaucoup d'autres résultats utiles.

Nous pensons donc qu'à tous égards le Mémoire de M. Levy est digne de la haute approbation de l'Académie, et nous en proposons l'insertion au *Recueil des Savants étrangers*.

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

---

[*] *Voyez* encore la Note à la suite du Rapport.