JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LAGUERRE

Sur un problème de Géométrie relatif aux courbes gauches du quatrième ordre

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 15 (1870), p. 193-216.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1870_2_15__193_0>

Sur un problème de Géométrie relatif aux courbes gauches du quatrième ordre;

PAR M. LAGUERRE.

Étant données dans l'espace une surface du second ordre et deux droites fixes, M. Chasles a démontré que si une droite mobile était assujettie à rencontrer les deux droites fixes en s'appuyant sur la surface, la courbe de contact des droites mobiles était une courbe gauche du quatrième ordre, de l'espèce de celles par lesquelles on peut mener une infinité de surfaces du second ordre.

Inversement, étant donnée une courbe résultant de l'intersection de deux surfaces du second ordre, on peut se demander si elle peut toujours être engendrée par le procédé qui résulte de la proposition de M. Chasles, et, si elle peut l'être, comment l'on pourra déterminer une surface du second ordre et deux droites de façon à obtenir la génération de la courbe.

La Note qui suit a pour objet de résoudre cette question. Je montre que par la courbe donnée on peut toujours faire passer six surfaces qui permettent la génération indiquée par M. Chasles, et que, l'une des surfaces étant choisie, on peut encore choisir d'une infinité de façons les deux droites fixes.

La proposition suivante montrera comment on peut résoudre le problème que je m'étais proposé.

Par la courbe donnée passent quatre cônes dont les sommets forment un tétraèdre. Prenons arbitrairement deux arêtes opposées de ce tétraèdre et menons une droite quelconque qui, s'appuyant sur ces arêtes, rencontre la courbe en un point A : on sait alors qu'elle la rencontre en un autre point B.

Par la droite AB on peut mener quatre plans qui touchent la courbe; les quatre points de contact sont les sommets d'un tétraèdre; deux arêtes opposées de ce tétraèdre rencontrent les deux arêtes opposées du tétraèdre dont j'ai parlé plus haut et dont les sommets sont les sommets des quatres cônes. Soient CC′ et DD′ ces deux arêtes; C, C′, D et D′ étant les quatre points de contact avec la courbe.

Choisissons arbitrairement l'une de ces arêtes, CC′ par exemple; les quatre droites AC, AC′, BC et BC′ sont situées sur une même surface du second ordre S passant par la courbe donnée. Cela posé :

Si une droite mobile rencontre à chaque instant les droites AB et DD′ en s'appuyant sur la surface S, elle la touchera précisément le long de la courbe donnée.

Les propositions sur lesquelles je me suis appuyé pour la solution de ce problème se rattachent étroitement, comme je m'en suis aperçu en rédigeant cette Note, aux théorèmes donnés par M. Hesse dans son beau Mémoire sur les courbes du troisième ordre (*Crelle*, t. XLVIII); théorèmes qui, du reste, si l'on veut remonter plus haut, se trouvent, quant au fond, dans une Note très-courte sur les focales publiée par M. Van Reiss dans le tome V du *Journal de Quetelet*.

Les surfaces réglées du quatrième ordre qui se présentent dans cette Note sont en elles-mêmes très-intéressantes, et je les avais déjà rencontrées en étudiant certains théorèmes de M. W. Roberts relatifs aux surfaces du second ordre que j'ai pu, par leur moyen, étendre aux surfaces du quatrième ordre ayant une conique double.

Du reste, M. de la Gournerie s'était déjà auparavant occupé, d'une façon toute spéciale, de ces surfaces réglées; je n'en parlerai donc ici qu'accidentellement, en me contentant de mentionner la définition très-simple que l'on en peut donner en s'appuyant sur la théorie des fonctions elliptiques, et je renverrai le lecteur curieux de poursuivre cette recherche à l'ouvrage très-complet que M. de la Gournerie a publié à ce sujet.

1. Dans tout ce qui suit, je désignerai sous le nom de *biquadratique gauche*, ou simplement sous le nom de biquadratique, l'intersection de deux surfaces du second ordre.

Bien que toutes les propositions sur lesquelles je m'appuierai puissent s'établir facilement par des considérations de pure Géométrie (elles se déduisent immédiatement des relations très-simples que M. Chasles a données dans sa *Géométrie supérieure*, p. 157, entre trois couples de points en involution et leurs points milieux), j'ai cru, pour abréger, pouvoir me servir de la belle théorie fondée par M. Clebsch.

En ce qui concerne les biquadratiques gauches, la théorie de M. Clebsch peut s'établir d'une façon très-simple et très-facile; mais, quoique la démonstration de ses formules, dans ce cas spécial, puisse donner lieu à quelques remarques dignes d'intérêt, je me contenterai de renvoyer le lecteur aux divers Mémoires qu'il a publiés sur ce sujet [*], en exposant brièvement ceux des résultats qu'il a obtenus sur lesquels je m'appuierai.

2. Soit tracée sur une surface du second ordre S, une biquadratique quelconque K. A cette courbe se rattache une intégrale elliptique [**]; on peut concevoir que la valeur de la variable qui entre dans cette intégrale soit à chaque instant fixée par la position d'un point mobile sur la biquadratique, ou que le déplacement du point mobile de la courbe détermine la variation de la variable.

Étant pris, sur la courbe, un point arbitraire ω, qui corresponde à la valeur de la variable prise pour limite inférieure de l'intégrale; si le point mobile, qui fixe à chaque instant la valeur de cette variable, se meut sur la courbe jusqu'à un point donné A, on obtiendra pour l'intégrale considérée une valeur parfaitement déterminée. Cette valeur, cependant, ne sera pas entièrement déterminée par la seule connaissance du point A; elle dépend, comme on le sait, du chemin que l'on a suivi pour se mouvoir, sur la courbe, du point ω au point A; et

[*] *Voir* notamment le Mémoire *Uber die Anwendung der Abelschen functionen in der Geometrie* (*Crelle*, t. LXIII).

[**] Quand la courbe est tracée sur une sphère, cette intégrale prend une forme géométrique très-simple; en désignant par M un point quelconque de cette courbe, par F, G, H, K ses quatre foyers réels, elle s'exprime de la façon suivante

$$\int \frac{ds}{\sqrt{\mathrm{MF}.\mathrm{MG}.\mathrm{MH}.\mathrm{MK}}}.$$

d'après le chemin qu'on a suivi, la valeur de l'intégrale peut demeurer la même, ou être augmentée d'un multiple quelconque de l'une des deux périodes qui appartiennent à l'intégrale elliptique considérée. Dans tout ce qui suit, je désignerai constamment ces deux périodes par $2p$ et $2q$, en posant, pour abréger, $p+q=r$, $2r$ étant une autre période de l'intégrale dépendant des deux premières.

Lorsqu'on se donne la valeur de l'intégrale, prise à partir du point origine ω, le point A qui correspond à la valeur extrême de la variable est complètement déterminé; mais, lorsqu'on se donne au contraire ce point A, la valeur de l'intégrale n'est déterminée qu'à un multiple près de $2p$ et de $2q$.

Cela posé, la proposition fondamentale donnée par M. Clebsch, sur laquelle je m'appuierai dans tout ce qui suit, peut s'énoncer ainsi :

« Si l'on coupe la biquadratique K par un plan qui la rencontre aux points A, B, C et D, la somme des quatre intégrales dont les limites supérieures sont caractérisées par les points A, B, C et D est une quantité constante, quelle que soit la position du plan, ou, du moins, cette quantité ne peut varier que de multiples des deux périodes $2p$ et $2q$. »

Pour exprimer ce genre de relation, on peut employer avec avantage le signe de la congruence de Gauss, et écrire simplement

$$A+B+C+D \equiv \alpha \quad (\text{mod. } 2p, 2q),$$

α désignant une quantité constante.

Comme jusqu'ici l'origine ω a été prise arbitrairement, rien n'empêche de la choisir de telle sorte que la constante α soit nulle; en sorte que l'on aura simplement

$$A+B+C+D \equiv 0. \tag{1}$$

Dans cette congruence, A ne représente pas le point A, mais l'intégrale qui s'étend depuis l'origine fixe jusqu'à ce point. Il n'y a d'ailleurs lieu de redouter aucune confusion dans ce double emploi d'une même lettre pour représenter un point et une intégrale, la présence du signe de la congruence suffisant pour fixer le sens que l'on doit y attacher.

3. La congruence (1) exprime la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points A, B, C, D de la biquadratique soient dans un même plan.

Soient A et B deux points donnés de cette courbe, il existe une surface du second ordre S, bien déterminée, qui passe par la courbe et qui a la droite AB pour génératrice. Si, par AB, on mène un plan quelconque rencontrant la courbe aux points X et Y, la droite XY est, comme on le sait, l'une quelconque des génératrices du second système de cette surface.

Or, d'après la relation (1), on a

$$X + Y + A + B \equiv 0, \quad \text{d'où} \quad X + Y \equiv -(A + B).$$

Si l'on pose, pour abréger, $A + B \equiv k$, l'on voit que, pour toutes les génératrices du système contraire à AB, l'on a

$$X + Y \equiv -k. \tag{2}$$

De même, si X et Y désignent les deux points où une génératrice de la surface S de même système que AB s'appuie sur k, on voit que l'on a la relation

$$X + Y \equiv k. \tag{3}$$

D'où cette conclusion : Si l'on prend, sur la biquadratique, une série de points X, Y satisfaisant à la relation (3), toutes les droites telles que XY sont les génératrices d'un système d'une même surface du second ordre passant par la biquadratique ; et les droites XY, qui joignent les couples de points satisfaisant à la relation (2) sont les génératrices du second système de cette même surface.

On voit que chacune des surfaces du second ordre que l'on peut mener par K est caractérisée par une constante $\pm k$; je désignerai souvent l'une de ces surfaces par la valeur de la constante qui lui est propre, et l'on comprendra aisément ce que je veux dire par surface ($\pm k$).

4. Parmi les surfaces du second ordre qui passent par K se trou-

vent en particulier quatre cônes. Soient X et Y les points où l'une des génératrices d'un de ces cônes s'appuie sur la courbe, cette génératrice et la génératrice infiniment voisine étant dans un même plan, on doit avoir

$$2(X + Y) \equiv 0;$$

si l'on résout cette congruence, en observant qu'elle exprime que le second membre est non pas nul, mais un multiple quelconque de $2p$ et de $2q$, on en déduit les quatre solutions suivantes :

$$\begin{aligned} X + Y &\equiv 0, \\ X + Y &\equiv p, \\ X + Y &\equiv q, \\ X + Y &\equiv r; \end{aligned}$$

dans la dernière congruence, j'ai posé, pour abréger, $p + q = r$.

Telles sont les relations qui caractérisent les quatre cônes du second ordre qui passent par K; j'appellerai O, P, Q, R les sommets de ces quatre cônes, en sorte que toute droite passant par le sommet O et s'appuyant en deux points de la courbe donnera lieu à la relation

$$X + Y \equiv 0.$$

De même, toute génératrice du cône ayant pour sommet Q donnera lieu à la relation

$$X + Y \equiv q.$$

5. Les points O, P, Q, R sont les sommets d'un tétraèdre conjugué par rapport à toutes les surfaces du second ordre qui passent par K. On peut grouper de trois façons différentes les arêtes de ce tétraèdre de façon que chaque groupe contienne deux arêtes opposées. Soient OP et QR les arêtes opposées correspondant à un mode de groupement, et X un point quelconque de la courbe K.

Menons la droite OX, elle rencontre la courbe en un deuxième point X', et l'on a

$$X + X' \equiv 0;$$

joignons X′ au point P et appelons Y le point où la droite PX′ rencontre de nouveau la courbe. On a

$$X' + Y \equiv p.$$

Les deux points ainsi obtenus X et Y, satisfont à la relation

$$X - Y \equiv p, \quad \text{ou bien} \quad Y - X \equiv p.$$

Je dirai que ces deux points sont deux points conjugués de la biquadratique, relativement au mode de groupement défini par les arêtes OP et QR, ou bien par la demi-période p.

La droite XY qui joint deux points conjugués, rencontre évidemment l'arête OP; on peut voir aussi facilement qu'elle rencontre l'arête opposée RQ. Joignons en effet X au sommet R, et soit X″ le point où cette droite coupe K; menons la droite X″Q, et soit Y″ le point de rencontre de cette droite avec K. L'on a évidemment

$$X + X'' \equiv r, \quad X'' + Y'' \equiv q, \quad \text{d'où} \quad Y'' - X \equiv q - r \equiv p.$$

Le point Y″, ainsi déterminé, se confond avec le point Y; ce qui démontre la proposition énoncée.

Ainsi la droite joignant deux points conjugués quelconques s'appuie sur les deux arêtes opposées du tétraèdre qui définissent le mode de groupement; réciproquement, toute droite s'appuyant sur ces deux arêtes, et rencontrant la courbe, la rencontre en deux points conjugués.

Si nous considérons une surface quelconque du second ordre S passant par K, les deux arêtes OP et QR sont des droites polaires réciproques, relativement à cette surface; l'une de ces droites la coupe donc en deux points réels ϖ et ϖ'. Deux points conjugués quelconques et les points ϖ et ϖ' sont dans un même plan qui coupe la surface suivant une conique divisée harmoniquement par les quatre points considérés.

6. Si l'on détermine tous les couples de points conjugués qui correspondent au mode de groupement caractérisé par les deux arêtes

OP et QR, ou par la demi-période p, les droites joignant ces différents points forment une surface réglée ayant pour droites doubles les arêtes OP et QR; cette surface est évidemment du quatrième ordre; je la désignerai par la notation T_p.

Si l'on appelle Y et X les points où une génératrice quelconque de cette surface s'appuie sur la courbe, l'on a

$$Y - X \equiv p.$$

Il y a lieu de considérer deux autres surfaces de même espèce caractérisées par les demi-périodes q et r; je les désignerai par T_q et T_r.

7. A *et* B *étant deux points quelconques de* K, *par la corde* AB *on peut mener quatre plans tangents à la courbe; les quatre points de contact sont les sommets d'un tétraèdre. Deux arêtes opposées quelconques de ce tétraèdre rencontrent deux arêtes opposées du tétraèdre* OPQR.

Appelons X l'un quelconque des points de contact des plans tangents cherchés, on a la relation

$$A + B + 2X \equiv 0;$$

d'où l'on déduit pour X les quatre valeurs suivantes :

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} X' \equiv -\left(\dfrac{A+B}{2}\right), & X''' \equiv -\left(\dfrac{A+B}{2}\right) + q. \\ X'' \equiv -\left(\dfrac{A+B}{2}\right) + p, & X^{\text{IV}} \equiv -\left(\dfrac{A+B}{2}\right) + r. \end{cases}$$

Considérons deux quelconques des arêtes opposées du tétraèdre $XX'X''X'''$, par exemple les arêtes $X'X''$ et $X'''X^{\text{IV}}$, l'on a

$$X'' - X' \equiv p \quad \text{et} \quad X^{\text{IV}} - X''' \equiv p,$$

puisque $r \equiv p + q$.

La proposition est donc démontrée; les deux arêtes $X'X''$ et $X'''X^{\text{IV}}$ sont deux génératrices de la surface T_p.

8. Supposons maintenant que la corde AB soit elle-même une génératrice de T_p, en sorte que l'on ait

$$(\beta) \qquad A - B \equiv p;$$

désignons toujours par X', X'', X''' et X^{IV} les quatre points de contact des plans que l'on peut mener par cette corde tangentiellement à la courbe. Des quatre arêtes du tétraèdre $X'X''X'''X^{\text{IV}}$, deux sont aussi des génératrices de T_p; ce sont les droites $X'X''$ et $X'''X^{\text{IV}}$.

Choisissons arbitrairement une de ces droites, $X'X''$ par exemple; il est facile de voir que les quatre droites AX', AX'', BX', BX'' sont des génératrices d'une même surface du second ordre passant par K. Les congruences (α), qui déterminent X', X'', X''' et X^{IV}, donnent, en effet, si l'on tient compte de la relation (β),

$$A + X' \equiv B + X'' \equiv \frac{p}{2} \quad \text{et} \quad A + X'' \equiv B + X' \equiv -\frac{p}{2}.$$

Cette surface du second ordre est caractérisée par la constante $\pm \frac{p}{2}$: on voit qu'elle est la même, quelle que soit la génératrice AB de la surface T_p que l'on ait choisie. Je la désignerai dans ce qui suit par la lettre S_p.

Relativement à cette surface S_p, je dirai que les droites AB et $X'X''$ sont deux génératrices associées de la surface T_p.

Puisque les droites AX', AX'', BX' et BX'' sont des génératrices de S_p, l'on voit que deux génératrices associées sont des droites polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à S_p.

Si nous avions fait correspondre la droite $X'''X^{\text{IV}}$ à la corde AB, nous aurions démontré de même que les droites AX''', AX^{IV}, BX''' et BX^{IV} étaient les génératrices d'une même surface du second ordre passant par la courbe K et caractérisées par la constante

$$\pm \left(\frac{p}{2} + q\right).$$

Je désignerai cette deuxième surface par la notation $S_{p'}$.

Les droites telles que AB et $X'''X^{\text{IV}}$ seront dites des génératrices associées de T_p relativement à la surface $S_{p'}$.

La considération des surfaces T_q et T_r conduirait de même à la considération de quatre autres surfaces du second ordre S_q, $S_{q'}$; S_r et $S_{r'}$.

La propriété que j'ai signalée des six surfaces S_p, $S_{p'}$; S_q, $S_{q'}$; S_r, $S_{r'}$, à savoir : qu'à chacune d'elles correspond une surface réglée du quatrième ordre dont chaque génératrice s'appuie en deux points de K et qui est à elle-même sa transformée par polaires réciproques, lorsque l'on prend pour base la surface considérée, est caractéristique de ces surfaces.

Étant donnée une droite s'appuyant en deux points sur K et telle, que sa polaire, par rapport à une surface de second degré passant par cette courbe, s'appuie aussi en deux points sur cette courbe, on démontrera facilement que cette droite est une génératrice de l'une des trois surfaces T_p, T_q et T_r, et que la surface du second degré est une des six surfaces que j'ai mentionnées et qui correspondent deux à deux à T_p, T_q et T_r.

9. Lemme. — *Étant données deux génératrices quelconques* G *et* G' *de la surface* T_p, *associées par rapport à la surface* S_p, *et deux génératrices quelconques* H *et* H' *de* T_p, *associées par rapport à* $S_{p'}$, *ces quatre droites et les arêtes* OP, OQ *sont toujours situées sur un même hyperboloïde.*

En effet, les droites H, H' et G, qui s'appuient toutes les trois sur OP et sur OQ, déterminent un hyperboloïde, dont l'intersection avec la surface T_p est une courbe du huitième ordre.

Les droites H, H', G, OP et OQ faisant partie de l'intersection et ces deux dernières devant, chacune, compter pour deux, puisqu'elles sont des droites doubles de T_p, la courbe d'intersection ne peut être complétée que par une sixième droite. Il s'agit de prouver que cette droite est précisément G'.

A cet effet, désignons respectivement par h, h_1; h', h'_1; g, g_1; x, x_1 les points où s'appuient sur la courbe K les droites H, H', G et la droite cherchée.

Les droites H et H' étant associées par rapport à la surface $S_{p'}$, l'on a

$$h - h_1 \equiv p, \quad h' - h'_1 \equiv p, \quad h' + h \equiv \frac{p}{2} + q;$$

la droite G et la droite cherchée étant des génératrices de T_p, l'on a aussi

$$g - g_1 \equiv p \quad \text{et} \quad x - x_1 \equiv p.$$

Maintenant, remarquons que les huit points h, h_1 ; h', h'_1 ; g, g_1 ; x, x_1 étant les points d'intersection de K avec une surface de second degré, on a, d'après les principes posés par M. Clebsch,

$$h + h_1 + h' + h'_1 + g + g_1 + x + x_1 \equiv 0.$$

On déduit facilement des relations précédentes

$$2x + g + g_1 \equiv 0.$$

D'où l'on voit que la droite cherchée xx_1 ne peut être que l'associée de G relativement à la surface de S_p ou son associée relativement à la surface $S_{p'}$.

La dernière hypothèse ne peut être admise.

Considérons en effet les quatre droites H, H'; G et xx_1, qui sont quatre génératrices d'un même système de l'hyperboloïde.

Les droites de ce groupe ne font que s'échanger entre elles, lorsqu'on prend leurs polaires relativement à $S_{p'}$; l'hyperboloïde qui les contient devrait donc se transformer en lui-même en employant une transformation par polaires réciproques ayant pour base $S_{p'}$.

Ce qui est impossible, puisque l'hyperboloïde ne se confond pas avec $S_{p'}$.

L'hypothèse précédente étant donc écartée, il s'ensuit que la droite cherchée est la génératrice associée à G relativement à la surface S_p.

Ce qui démontre le lemme énoncé ci-dessus.

Corollaire. — Prenons la trace de T_p sur un plan quelconque; soient Π et Π' les points où ce plan rencontre les arêtes OP et QR, ces points sont les deux points doubles de la courbe du quatrième ordre qui forme cette trace.

Soient α et β les points où deux génératrices quelconques, associées par rapport à $S_{p'}$, coupent le plan sécant.

Désignons en général par x et y les deux points de la courbe où le plan sécant coupe deux génératrices mobiles de T_p associées par rapport à S_p; il résulte du lemme précédent que, quel que soit le couple de points x et y que l'on considère, ces deux points variables et les quatre points fixes α, β, Π et Π' sont sur une même conique.

10. Lemme. — *Étant donnés une courbe du quatrième ordre ayant deux points doubles* Π *et* Π', *et deux points fixes* α *et* β *pris sur cette courbe, si l'on mène par ces quatre points une conique quelconque, la droite qui joint les deux autres points* x, y, *où la conique variable rencontre de nouveau la courbe, enveloppe une conique.*

Joignons les points Π et Π' à un point E pris arbitrairement dans l'espace et, par les droites $E\Pi$ et $E\Pi'$, faisons passer une surface du second degré quelconque A. Le cône, ayant pour sommet E et pour base la courbe du quatrième degré, coupera cette surface suivant une biquadratique B. Soient a et b les projections coniques des points α et β sur la courbe B, X et Y les projections coniques des points variables x et y; les points α, β, x, y et Π, Π' étant sur une même conique, il en résulte que les points a, b, X et Y sont dans un même plan. Comme, d'ailleurs, ils sont situés sur la biquadratique, l'on voit que la droite XY engendre dans l'espace une surface du second degré; les droites telles que xy, qui, dans le plan sécant, sont les projections des génératrices de cette surface enveloppent donc une conique.

Corollaire. — De ce lemme et du corollaire précédent, il résulte immédiatement la proposition suivante :

Si l'on coupe la surface T_p par un plan quelconque et si l'on désigne, pour un instant, sous le nom de *points associés de la courbe d'intersection*, les points de cette courbe qui appartiennent à deux génératrices de T_p associées relativement à S_p, les droites qui joignent deux points associés quelconques enveloppent une conique.

11. *Si d'un point de l'espace* A, *on mène les différentes droites qui rencontrent deux génératrices de* T_p *associées entre elles par rapport à la surface* S_p, *ces droites forment un cône du second degré.*

En effet, pour trouver le degré du cône formé par ces droites, menons par A un plan quelconque M et cherchons combien ce cône contient de droites satisfaisant à la condition donnée.

Ces droites doivent évidemment passer par un couple de points associés de la courbe d'intersection de T_p avec le plan M; or les droites qui joignent ces points associés enveloppent une conique à laquelle on ne peut mener que deux tangentes par le point A. Le plan M ne contient donc que deux droites satisfaisant à la condition donnée; le lieu cherché est donc un cône du second degré.

12. Les surfaces réglées T_p et $S_{p'}$ ont quatre génératrices communes. En effet, les génératrices rectilignes de $S_{p'}$ se partagent, comme on sait, en deux systèmes. En désignant par X et Y les points où l'une quelconque de ces droites s'appuie sur K, l'on a, pour les génératrices de l'un des systèmes, la relation

$$X + Y \equiv \frac{p}{2} + q;$$

je dirai que les génératrices qui donnent lieu à cette relation sont du premier système. Les génératrices du second système donnent lieu à la relation

$$X + Y \equiv -\frac{p}{2} - q.$$

Cherchons combien de génératrices de $S_{p'}$ du premier système peuvent appartenir à la surface T_p. Soit XY l'une quelconque d'entre elles; on devra avoir à la fois les deux relations

$$X + Y \equiv \frac{p}{2} + q \quad \text{et} \quad X - Y \equiv p;$$

d'où l'on déduit

$$2X \equiv \frac{3p}{2} + q,$$

relation qui fournit, pour X, les quatre valeurs suivantes :

$$X' \equiv \frac{3p}{4} + \frac{q}{2}, \quad X'' \equiv \frac{3p}{4} + p + \frac{q}{2}, \quad X''' \equiv \frac{3p}{4} + q + \frac{q}{2}, \quad X^{\text{IV}} \equiv \frac{3p}{4} + r + \frac{q}{2};$$

les valeurs correspondantes de Y sont les quatre suivantes :

$$Y' \equiv \frac{3p}{4} - p + \frac{q}{2}, \quad Y'' \equiv \frac{3p}{4} + \frac{p}{2}, \quad Y''' \equiv \frac{3p}{4} + r + \frac{q}{2}, \quad Y^{\text{IV}} \equiv \frac{3p}{4} + q + \frac{q}{2},$$

valeurs qui sont, deux à deux, égales à celles de X, comme on devait le prévoir.

Il résulte de là que T_p et $S_{p'}$ ont en commun deux génératrices du premier système, savoir :

$$X'Y' \quad \text{et} \quad X'''Y'''.$$

On a

$$X' + X''' \equiv \frac{p}{2};$$

donc les deux génératrices $X'Y'$ et $X'''Y'''$ sont associées relativement à la surface S_p.

Ce que j'ai dit des génératrices du premier système s'applique également aux génératrices du second système.

D'où la conclusion suivante :

Les surfaces T_p *et* $S_{p'}$ *ont quatre génératrices communes; deux d'entre elles sont d'un même système et sont associées relativement à la surface* S_p, *les deux autres appartiennent à l'autre système de génératrices et sont également associées relativement à la même surface.*

Il est clair que tout ce qui précède s'applique également à la surface S_p. Les quatre génératrices qu'elle a en commun avec la surface T_p sont deux à deux associées par rapport à $S_{p'}$.

13. Considérons maintenant un point quelconque M de la surface $S_{p'}$; les droites qui, passant par ce point, rencontrent à la fois deux génératrices de T_p associées par rapport à S_p, forment, comme je l'ai montré, un cône du second degré.

Ce cône passe par les génératrices (M′) et (M″) de la surface $S_{p'}$ qui se croisent au point M. En effet, il y a sur cette surface deux génératrices de même système que (M′), qui sont en même temps deux génératrices de T_p associées par rapport à S_p; ces deux droites sont rencontrées par (M′), qui se trouve ainsi sur le cône dont je viens de parler. On démontrerait de même que (M″) est située sur ce cône.

Remarquons, maintenant, que ce cône, ayant en commun avec $S_{p'}$ deux génératrices, le coupe, indépendamment de ces deux droites, suivant une section plane. D'où la conclusion suivante :

Si, par un point quelconque de la surface $S_{p'}$, on mène les différentes droites qui rencontrent à la fois deux génératrices de T_p associées par rapport à S_p, ces droites forment un cône qui coupe $S_{p'}$ suivant une conique.

14. Cette proposition peut encore être énoncée de la façon suivante :

Étant donnée la surface $S_{p'}$, passant par la biquadratique K, appelons, pour un instant, *points conjugués* de cette courbe les deux points où une génératrice quelconque de T_p rencontre la surface; cela posé, si l'on prend un point M quelconque de $S_{p'}$ et si, par ce point et chacun des couples de points conjugués de K, on fait passer une conique située sur $S_{p'}$, le lieu du point de la conique conjuguée harmoniquement de M, par rapport au couple de points conjugués qu'elle contient, est une conique [*].

15. Supposons que le point M soit situé sur la courbe K, la conique dont je viens de parler passera également par ce point.

En effet, désignons par M′ un point infiniment voisin de M et situé sur la courbe K, par M″ le point conjugué de M′. Si par les trois points M, M′, M″, on fait passer une conique située sur la surface $S_{p'}$, le point de cette conique harmoniquement conjugué de M, relativement au couple de points M′, M″, est infiniment voisin du point M.

La conique passe donc par ce point, et l'on pourrait même déduire de la démonstration précédente que son plan touche la courbe K ;

---

[*] Cette propriété est caractéristique de la surface $S_{p'}$. Lorsque cette surface est une sphère, la courbe K jouit alors de propriétés particulières qui présentent quelque intérêt.

Voir *Bulletin de la Société Philomathique* (Mars 1868) ma Note sur les Cassiniennes planes et spériques.

mais il est facile de déterminer d'une façon plus précise la position de ce plan.

Examinons de plus près quel est le lieu des droites passant par M et rencontrant à la fois deux génératrices de T_p associées par rapport à S_p.

Par le point M passe une génératrice de T_p; soient g cette génératrice et g' son associée. Toute droite passant par M et s'appuyant sur g' rencontre les deux génératrices associées g et g'; le plan qui contient le point M et g' fait donc partie du lieu cherché. On peut remarquer d'ailleurs que, les génératrices g et g' étant polaires réciproques relativement à la surface S_p, ce plan est précisément le plan tangent à cette dernière surface.

Ce plan faisant partie du lieu qui est en général un cône du second degré, le lieu doit se composer en outre, dans ce cas, d'un second plan.

Il est facile de voir que ce second plan est le plan tangent mené par M tangentiellement à la surface $S_{p'}$. Considérons en effet une des génératrices de cette surface qui passe par M, par exemple celle du premier système (M_1); comme je l'ai montré plus haut, la surface $S_{p'}$ contient deux génératrices du second système qui sont en même temps des génératrices de T_p associées par rapport à S_p; ces deux droites sont rencontrées par (M_1); le même raisonnement s'applique évidemment à la deuxième génératrice de $S_{p'}$ qui passe par le point M. Cela posé, le plan cherché ne peut être que le plan de ces deux génératrices, ou, en d'autres termes, le plan tangent en M à la surface $S_{p'}$.

D'où la conclusion suivante :

Si par un point quelconque M *de la courbe* K, *on mène les différentes droites qui rencontrent à la fois deux génératrices de* T_p *associées par rapport à la surface* S_p, *ces droites sont situées dans le plan mené par le point* M *tangentiellement à la surface* $S_{p'}$.

De même :

Si par un point quelconque M *de la courbe* K, *on mène les différentes droites qui rencontrent à la fois deux génératrices de* T_p *asso-*

ciées par rapport à la surface $S_{p'}$, *ces droites sont situées dans le plan mené par le point* M *tangentiellement à la surface* S_p.

Propriété que l'on peut encore énoncer comme il suit :

Étant mené, par un point quelconque M de la courbe K, le plan tangent à la surface S_p, toute droite de ce plan qui, passant par ce point, rencontre une génératrice de T_p, rencontre aussi la génératrice de cette surface qui lui est associée relativement à $S_{p'}$.

16. Considérons maintenant la surface S_p et deux génératrices quelconques, h et h', de T_p associées par rapport à la surface $S_{p'}$, en sorte que h et h' soient des droites polaires réciproques relativement à cette dernière surface.

Je dis que si une droite mobile D est assujettie à rencontrer constamment les deux droites h et h' et à toucher la surface S_p, le lieu de son point de contact est la courbe K.

En effet, étant pris un point quelconque η sur la droite h, il résulte, de la définition même du mouvement de D, que par ce point passent deux droites satisfaisant aux conditions données; à ces deux droites correspondent d'ailleurs deux points de contact η' et η''.

Imaginons le cône circonscrit à S_p et ayant pour sommet le point η; la courbe de contact de ce cône, dont le sommet est sur la droite h, passe d'abord par deux points fixes qui sont les points où S_p est coupée par la polaire de h relativement à cette surface. Ces deux points fixes sont sur la courbe K; car cette polaire est la génératrice de T_p associée de h par rapport à S_p, et l'on sait que cette génératrice s'appuie sur deux points de K.

Abstraction faite de ces deux points fixes, la conique de contact rencontre K en deux points variables; en l'un de ces points α menons le plan tangent; ce plan coupe la droite h au point η; d'ailleurs la droite $\alpha\eta$, étant située dans le plan mené par α tangentiellement à la surface S_p et rencontrant h, doit rencontrer h'; le point α se confond donc avec l'un des deux points η' et η''.

Le lieu de ces derniers points est donc la courbe K.

D'où la proposition suivante :

Étant données la surface S_p *et deux génératrices quelconques de* T_p

associées relativement à la surface $S_{p'}$, *si une droite mobile est assujettie à rencontrer constamment les deux génératrices et à toucher* S_p, *le lieu des points de contact est la courbe* K.

17. Il résulte de ce qui précède qu'étant donnée une biquadratique quelconque K, on peut l'engendrer de la façon indiquée par le théorème de M. Chasles, au moyen d'une quelconque des six surfaces

$$S_p,\ S_{p'};\quad S_q,\ S_{q'};\quad S_r,\ S_{r'}$$

que j'ai précédemment définies.

Ayant pris une de ces surfaces, l'on peut encore choisir d'une infinité de façons le couple de droites fixes qui, avec la surface, déterminent le mode de génération de la courbe.

18. Les surfaces réglées du quatrième ordre, que j'ai rencontrées dans cette recherche, T_p, T_q et T_r, ne sont autre chose, comme il est facile de le voir, que les surfaces étudiées précédemment par M. de la Gournerie, sous le nom de *quadricuspidales limites* [*].

Une telle surface contient deux droites doubles; T_p, par exemple, a pour droites doubles les deux arêtes OP et QR du tétraèdre conjugué formé par les sommets des quatre cônes qui passent par la courbe K.

Par chacun des points de l'une de ces arêtes passent deux génératrices de la surface; si l'on désigne respectivement par x et y les points où une quelconque de ces deux génératrices s'appuie sur OP et sur QR, on voit qu'à chaque position du point x correspondent deux positions du point y, et réciproquement. Les points x et y tracent donc, sur les droites doubles OP et OQ, ce qu'on peut appeler des *divisions homographiques du second ordre;* mais ici ces divisions sont d'une espèce particulière et jouissent d'une propriété remarquable entièrement caractéristique.

L'on a en effet cette proposition :

Étant donné un point x' situé sur la droite OP, si y' et y'' désignent les deux points qui lui correspondent sur la droite OQ, les points y' et

---

[*] Voir *Recherches sur les surfaces tétraédrales symétriques*, p. 85.

y'' ont pour correspondants le point x' et un autre et même point x''; de telle sorte que le point x'' a aussi pour correspondants les points y' et y''.

M. Chasles, qui, le premier, a signalé ce mode de correspondance remarquable, a montré que, si elle avait lieu pour une position particulière du point x', elle avait lieu nécessairement pour toute autre position de ce point.

Appelons α et β les points où la droite OP coupe une quelconque des surfaces du second ordre V que l'on peut mener par K, et γ et δ les points où QR rencontre cette même surface. Les droites OP et QR étant polaires réciproques par rapport à cette surface, γ et δ sont précisément les points de contact des plans menés par OP tangentiellement à V.

Les droites $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$ et $\beta\delta$ sont des génératrices de cette surface, et chacune d'elles, rencontrant par suite en deux points la courbe K, en même temps qu'elle s'appuie sur les deux droites OP et QR, est une génératrice de la surface réglée T_p; il est clair maintenant qu'à chacun des points α et β de la droite OP correspondent les deux points γ et δ de la droite OQ.

La correspondance qui existe entre les points de division sur ces deux droites est donc de l'espèce particulière dont j'ai parlé plus haut.

La réciproque est évidente, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

« Si, sur deux droites fixes, on a deux divisions qui se correspondent de telle façon qu'à un point quelconque d'une des droites correspondent deux points de la seconde; si, en outre, le mode de correspondance est tel, qu'un même couple de points de l'une des droites corresponde à deux mêmes points de l'autre, les droites joignant les couples de points correspondants forment une surface réglée du quatrième ordre, de l'espèce de celles que M. de la Gournerie a désignées sous le nom de *quadricuspidales limites*.

19. Ces dernières surfaces sont une variété de surfaces réglées du huitième ordre, que le même géomètre a étudiées sous le nom de *quadricuspidales*.

Elles peuvent se définir très-simplement de la manière suivante :

Considérons une biquadratique K et une surface réglée quelconque dont chacune des génératrices s'appuie en deux points sur la courbe. Soient X et Y les points où l'une de ces génératrices rencontre K, et X', Y' les points analogues pour la génératrice infiniment voisine : on peut se demander comment la surface doit être particularisée, afin que les droites XY' et X'Y soient des génératrices infiniment voisines d'une même surface du second ordre passant par K.

Faisons pour un instant

$$X' \equiv X + dX,$$
$$Y' \equiv Y + dY;$$

pour que XY' et X'Y soient les génératrices d'une même surface du second ordre, on doit avoir

$$X + Y' \equiv Y + X',$$

ou bien

$$X + Y + dY \equiv Y + X + dX,$$

ou enfin

$$dY \equiv dX,$$

et, en intégrant,

$$Y - X \equiv a,$$

a désignant une quantité constante.

La surface engendrée par une droite XY, s'appuyant sur la courbe K en deux points X et Y satisfaisant à la relation précédente, est la quadricuspidale ; je dirai, pour abréger, que K est la base de la quadricuspidale.

Une propriété très-simple et entièrement caractéristique de cette surface résulte immédiatement de la relation précédente.

Soient XY et X'Y' deux génératrices quelconques d'une quadricuspidale, on a

$$Y - X \equiv a \quad \text{et} \quad Y' - X' \equiv a,$$

relation d'où l'on déduit

$$Y + X' \equiv Y' + X;$$

d'où la proposition suivante :

Étant données deux génératrices quelconques XY *et* X'Y' *d'une quadricuspidale ayant pour base une biquadratique* K, *les deux droites* XY' *et* YX' *sont deux génératrices d'un même système d'une surface du second ordre.*

20. Soient deux génératrices infiniment voisines XY et X'Y' d'une quadricuspidale G ayant pour base K; d'après ce qui précède, XY' et Y'X sont les génératrices d'une même surface de second ordre passant par K.

Par XY menons un plan quelconque L et cherchons le point où ce plan est tangent à la surface G. A cet effet, projetons les deux génératrices sur un plan perpendiculaire au plan L; soient respectivement ξ, η, ξ' et η' les projections sur ce plan des points X, Y, X' et Y'; τ le point d'intersection des deux droites $\xi\eta$ et $\xi'\eta'$, ω celui où se coupent les droites $\xi\eta'$ et $\eta\xi'$. Les points τ et ω ont évidemment pour limites les points de contact du point L avec la surface quadricuspidale et avec la surface du second ordre passant par K et par la droite XY; d'ailleurs on voit immédiatement, en considérant la figure formée sur la projection, que ces points limites divisent harmoniquement le segment $\xi\eta$.

On en conclut la proposition suivante d'un fréquent usage dans les applications :

Étant données une quadricuspidale ayant pour base une courbe K *et une génératrice* XY *de cette surface, si l'on considère en même temps la surface du second ordre qui passe par* K *et par* XY, *tout plan mené par cette dernière droite touche la quadricuspidale et la surface du second ordre en deux points qui partagent harmoniquement le segment* XY.

Soient L le plan mené par XY et Y, Z les deux points où ce plan coupe la courbe K; YZ est la deuxième génératrice de la surface du second ordre située dans le plan; le plan de rencontre T des droites YZ et XY est le point où se touchent ce plan et cette surface; son conjugué harmonique, relativement au segment XY, est donc, d'après ce qui précède, le point où le plan L touche la quadricuspidale.

21. Une quadricuspidale a quatre lignes doubles. En effet, soit XY une génératrice de cette surface; prenons un quelconque des sommets des cônes qui passent par la base K, le point O par exemple. Joignons X et Y au point O, et soient X', Y' les points où les droites ainsi obtenues rencontrent K; on a les trois congruences suivantes :

$$Y - X \equiv a, \quad X + X' \equiv 0, \quad Y + Y' \equiv 0,$$

d'où l'on déduit

$$Y' - X' \equiv a.$$

La droite Y'X' est donc une deuxième génératrice de la surface; appelons Ω le point d'intersection des droites YX et Y'X'. On voit que Ω est un point double de la surface; ce point, d'après la façon même dont on l'a construit, est d'ailleurs évidemment dans le plan des trois sommets PQR. Lors donc que la génératrice XY se déplacera, il engendrera une ligne double de la surface située dans ce plan.

En considérant de même les autres sommets du tétraèdre OPQR, on verrait que la surface possède en tout quatre lignes doubles situées dans chacune des faces de ce tétraèdre.

La surface ne peut d'ailleurs avoir d'autre ligne double (sauf la base K); car, comme il est facile de le voir par un calcul très-simple, X'Y' et les trois droites analogues correspondant aux sommets P, Q et R sont les seules génératrices de la surface qui rencontrent une génératrice donnée XY, en outre de celles qui passent par les points X et Y eux-mêmes.

Revenons maintenant à la nature de ces lignes doubles.

Soit (Ω) la courbe décrite par le point Ω dans le plan PQR. Appelons ω le point de rencontre des droites XY' et YX'; joignons $O\omega$, et désignons par γ et γ' les points où cette droite rencontre XY et X'Y'.

D'après ce que j'ai dit dans le paragraphe précédent, le plan OXY touche la quadricuspidale aux points γ et γ'; ce point est donc doublement tangent à la surface, l'arête de contact étant la droite $O\omega$. Le cône, enveloppé par ces plans tangents doubles, qui passent tous par O, est un cône du second degré; on le démontre facilement en faisant voir que, par toute droite telle que OX, on ne peut mener que deux plans tangents à ce cône.

Le point ω est la trace sur le plan PQR de l'arête $O\omega$ de ce cône; ce point se déplace donc donc sur une conique (ω).

Remarquons maintenant que la droite $\omega\Omega$ est la tangente à cette conique; en considérant la figure [*], on voit immédiatement que le segment $\omega\Omega$ est partagé harmoniquement par le cône qui a pour sommet O et pour base K.

D'où l'on conclut la proposition suivante :

Soient (ω) *la trace sur le plan* PQR *du cône doublement circonscrit à la surface ayant pour sommet le point* O, *et* (O) *la trace sur le même plan du cône qui, ayant le même sommet, passe par la courbe* K : *la ligne double de la quadricuspidale, située dans le plan* PQR, *peut s'obtenir en prenant, sur chacune des tangentes menées à la courbe* (ω), *le point conjugué harmonique du point de contact par rapport au segment intercepté sur la tangente par la courbe* (O).

22. Les surfaces quadricuspidales se présentent dans un grand nombre de questions relatives aux biquadratiques gauches ou aux courbes du troisième ordre.

Elles fournissent par exemple, une solution très-simple de ce problème que l'on rencontre dans l'application des fonctions elliptiques aux courbes du troisième ordre :

Étant donnée une courbe du troisième ordre C, *trouver des courbes telles, que la tangente menée en un quelconque de leurs points soit partagée harmoniquement par le point de contact et par les trois points où elle coupe* C.

Ces courbes sont algébriques; on peut facilement les décrire dans le plan lui-même, mais la construction suivante se prête peut-être mieux à l'étude de leurs propriétés.

---

[*] Le lecteur est prié de suppléer à la figure.

Prenons deux points quelconques de C et joignons-les à un point O de l'espace; par les deux droites ainsi obtenues, faisons passer une surface du second ordre A.

Le cône, ayant pour sommet O et passant par C, coupe A suivant une biquadratique K.

Imaginons une quelconque des surfaces quadricuspidales qui ont pour base K, le cône circonscrit à cette surface et ayant pour sommet O coupera le plan de C suivant une courbe jouissant de la propriété indiquée.

En considérant les diverses quadricuspidales qui ont pour base K, on obtiendrait la solution complète du problème.

23. Toutes les autres propriétés de la quadricuspidale se déduiraient également avec facilité de la définition très-simple que j'en ai donnée plus haut.

Je ne m'étendrai pas davantage à ce sujet, me contentant de renvoyer le lecteur à l'ouvrage déjà mentionné de M. de la Gournerie.